Санкт-Петербургский государственный университет
Кафедра математической теории экономических решений

Тагарифуллин Мунир Галинурович

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Исследование многоэтапных стохастических задач принятия решений

Направление 01.03.02
«Прикладная математика и информатика»
ООП «Прикладная математика, фундаментальная информатика и программирование»
Профиль «Системный анализ, исследование операций и управление»

Научный руководитель,
заведующий кафедрой МТЭР,
доктор физ.-мат. наук
Колбин Вячеслав Викторович

Рецензент
кандидат физ.-мат. наук,
доцент
Мышков Станислав Константинович

Санкт-Петербург
2020

Оглавление

Введение

В настоящее время мировой и, в том числе, отечественный рынок очень развит, существует множество различных компаний в разных отраслях промышленности. Однако, ни одна компания не просуществует продолжительное время, если будет неверным образом распоряжаться своими ресурсами. Как известно, задача оптимального распределения ресурсов является центральной для экономики. Одним из таких ресурсов являются денежные. Именно грамотное распоряжение денежными запасами может помочь компании стать крупной и продолжить свой прибыльный рост. Как правило, такая задача требует построения и исследования экстремальных моделей выбора экономических решений. Для эффективного решения проблемы распределения ресурсов созданы модели (модели математического программирования), которые позволяют производить качественный и количественный анализ ситуации.

Одной из важных проблем при решении задач принятия решений является то, что исходная информация для планирования, проектирования и управления в экономике, как правило, недостаточно достоверна. Как итог, задача распределения ресурсов — это задача стохастического программирования, в которой параметры условий являются случайными величинами.

Таким образом, задача исследования многоэтапных стохастических задач принятия решений в разрезе управления ресурсами является актуальной в наше время.

Это исследование и является ключевой целью выпускной квалификационной работы.

В данной работе ставятся следующие задачи:

1) Построение математической модели изучаемого процесса. На этом этапе происходит его описание с помощью того или иного

математического аппарата.

2) Определение цели исследования, то есть постановка задачи. Формализация цели исследования часто достигается с помощью формулировки некоторой оптимизационной задачи. При изучении сложных, многокритериальных моделей, когда выбрать один критерий затруднительно, оказывается удобным использовать более общий подход к постановке задачи с помощью понятия «принцип оптимальности». Принцип оптимальности – это точечно-множественное отображение, которое каждой модели ставит в соответствие подмножество множества выборов. Такое подмножество понимается как множество решений или множество оптимальных решений.
3) Решение математической задачи, возникающей на втором этапе.

В дипломной работе рассматривается многоэтапная стохастическая модель распределения ресурсов со стохастическими горизонтами и с априорными решающими правилами.

Глава 1. Постановка задачи

§1. Постановка многоэтапной задачи стохастического программирования

Большая часть известных экономико-математических описаний процессов планирования и управления представляет собой детерминированные модели математического программирования. Детерминированные модели описывают замкнутые системы, связями которых с внешним миром можно пренебречь. Однако, далеко не во всех реальных ситуациях можно анализировать поведение системы, не учитывая влияния непредвиденных изменений в окружающей среде.

Эффективность экономико-математических методов существенно возрастет при переходе от детерминированных моделей планирования к стохастическим. Стохастические модели больше соответствуют реальным условиям выбора решений, чем детерминированные постановки экстремальных задач. Стохастические модели лучше, чем детерминированные, приспособлены к учету последовательности поступления и использования информации и допустимой очередности выбора и корректирования решений. Таким образом, стохастические модели более адекватны процессам планирования реальной хозяйственной деятельности и управления производством, чем модели, отвечающие выбору решения при полной информации об условиях задачи.

Планирование производства и управления отраслями происходит при неполной информации об условиях реализации плана и управления. Исследование и учет стохастических факторов является непременным условием рационального выбора хозяйственных решений

Многие задачи планирования и управления связаны с многократным выбором решения в повторяющихся ситуациях. Организации рассматривают воздействие среднесрочных и краткосрочных прогнозов спроса на свои краткосрочные производственные планы. Это особенно справедливо для фирм, сталкивающихся с сезонными колебаниями спроса, которые влекут за собой затратные стимулы по сглаживанию производства во времени и производству затрат, связанных с запасами. Если будущий спрос за одно распределение вероятностей, тогда при данных начальных условиях фирма заинтересована в получении информации о том, в каких пределах она должна прогнозировать спрос на будущее, чтобы принять оптимальное решение в первом периоде. Интервал горизонта прогнозирования существенно зависит от следующих факторов: затраты, связанные с прогнозированием спроса в каждом из последующих периодов t; степень неопределенности, связанная с каждым из последующих спросов в период t. При этом ограничения должны выполняться лишь «в среднем» и интерес представляет лишь средний эффект от принятых решений. Использование случайных механизмов может обеспечить гораздо более высокий эффект управления, чем систематическое применение однотипных решений.

Подходы к постановке и анализу стохастических экстремальных задач существенно различаются в зависимости от того, получают ли информацию об условиях задачи в один прием или по частям – в два или много приемов. При построении стохастической модели важно также знать, необходимо ли принять единственное решение, не подлежащее корректировке, или можно по мере накопления информации один или несколько раз подправлять решение. В соответствии с этим в стохастическом программировании исследуют одноэтапные, двухэтапные и многоэтапные задачи.

Данная работа посвящена задачам со стохастическими горизонтами планирования (или многоэтапным задачам). В процессе управления обычно представляется возможность последовательно наблюдать реализации случайных параметров условий задачи и каждый раз, если это окажется целесообразным в соответствии с вновь накопленной информацией корректировать решение. Предварительный план и последовательные корректировки должны, конечно, помимо содержательных ограничений, учитывать априорные характеристики случайных параметров условий на каждом интервале горизонта прогнозирования. Последовательность поступления информации и порядок выбора и корректирования решения определяется информационной структурой задачи – набором исходных данных, накопленных на предшествующих этапах, от которого может зависеть решение на текущем этапе.

Если решение предшествует наблюдению, то оптимальный план стохастической задачи определяется статистическими характеристиками или известной выборкой возможных значений параметров условий задачи. Решения будем вычислять в чистых стратегиях с учетом априорной информации – некоторых характеристик распределения или выборок возможных значений случайных параметров условий.

Таким образом, будем рассматривать многоэтапную задачу стохастического программирования с априорными решающими правилами.

Общая постановка:

$$M_{\omega^n}\Psi_0(\omega^n, y^n) \rightarrow \sup \quad , \tag{1}$$

$$M_{\omega^k}\{\Psi_k(\omega^k, y^k) | \omega^{k-1}\} \geq b_k(\omega^{k-1}) \quad , \tag{2}$$

$$y_k \in G_k^0, k=1,\dots,n \quad . \tag{3}$$

Обозначим $S(b^n(\omega^{n-1})) = \sup_k b_k(\omega^{k-1})$.

Пусть решение на i -м этапе принимается после реализации случайных параметров условий на предыдущем $(i-1)$ -ом этапе, тогда решающие правила имеют вид:

$$y_i = y_i(\omega^{i-1}), i=1,\dots,n \quad . \tag{4}$$

Задача (1) - (4) – многоэтапная задача стохастического программирования с условными вероятностными ограничениями и с априорными решающими правилами.

Для пояснения постановки задачи опишем вспомогательные формальные понятия. Пусть

$\omega_i \in \Omega_i, i=1,\ldots,n$, где Ω_i – некоторые множества-пространства элементарных событий ω_i на i -м этапе; $\Omega_0=\{\omega_o\}$;

$\omega^i \in \Omega^i = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_i$;

$\omega^i = (\omega_1, \ldots, \omega_i)$ – вектор в пространстве размерности i ;

$\omega^n \in \Omega^n = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$; $\omega^n = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ – последовательность случайных событий.

Пространство случайных событий Ω^n обозначим через Ω ($\Omega^n = \Omega$).

Пусть на Ω задана вероятностная мера P .

Определим меру P^k на Ω^k следующим образом:

если $A \subset \Omega^k \Rightarrow P^k(A) = P(A \times \Omega_{k+1} \times \ldots \times \Omega_n)$.

Введем условную вероятностную меру P_k на Ω_k :

$$P_k(A | \omega^{k-1} \in B) = \frac{P^k(A \times B)}{P^k(\Omega_k \times B)}, \forall A \subset \Omega_k, B \subset \Omega^{k-1} ;$$

$\sum$ – σ -алгебра случайных событий на Ω .

Таким образом, определили вероятностное пространство $(\Omega, \sum, P)$.

Рассмотрим последовательность множеств $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$ произвольной структуры, $y_k \in Y_k, k=0,\ldots,n$;

$$Y_0 = \{y_0\} ;$$

$$Y^k = Y_1 \times \ldots \times Y_k, y^k = (y_1, \ldots, y_k) \in Y^k ;$$

$$Y^n \equiv Y .$$

Пусть для каждого $\omega^k \in \Omega^k$ и $y^k \in Y^k, k=1,\ldots,n$ задана вектор-функция $\Psi_k(\omega^k, y^k)$ размерности m_k ;

на множестве Y для каждого $\omega \in \Omega$ задан функционал $\Psi_0(\omega^n, y^n)$;

$G_k^0 = G_k^0(\omega^k), k=1,\ldots,n$ – некоторые случайные множества;

$b^k(\omega^{k-1})$ – m_k -мерные случайные величины – ограниченные измеримые вектор-функции от ω^{k-1} ;

$b^k(\omega^{k-1})$ – $\sum_{i=1}^{n} m_i$ -мерная вектор-функция;

$b^k(\omega^{k-1})\in B_k$, B_k – некоторое банахово пространство;

$M_{\omega_k}\{u(\omega^k)|\omega^{k-1}\}$ – условное математическое ожидание $u(\omega^k)$ в предположении, что известна реализация ω^{k-1} .

Сформулируем задачу i -го этапа.

Рассмотрим множество, отвечающее области определения задачи i -го этапа при фиксированных ω^{i-1} и y^{i-1} :

$$\begin{aligned}
&K_i=\{\, y_i\in G_i^0|\exists[x_{i+1}\in G_{i+1}^0,\dots,x_n\in G_n^0], M_{\omega_i}[\Psi_i(\omega^i,y^i)|\omega^{i-1}]\ge b_i(\omega^{i-1}),\\
&M_{\omega_{i+1}}[\Psi_i(\omega^{i+s},y^i,x_{i+1},\dots,x_{i+s})|\omega^{i+s-1}]\ge b_{i+s}(\omega^{i+s-1}),\\
&\forall\,\omega_{i+s-1},\dots,\omega_{n-1},s=1,\dots,n-1\}.
\end{aligned} \tag{5}$$

$$y_i=y_i(\omega^{i-1}),x_{i+s}=x_{i+s}(\omega^{i+s-1}),s=1,\dots.,n-i.$$

Необходимое и достаточное условие разрешимости задачи (1) – (3):

$K_1\neq 0$.

Очевидно, что если $K_1\neq 0\Rightarrow K_i\neq 0, i=2,\dots,n$.

Целевая функция $Q_i(y_i)$ задачи i -го этапа

$$Q_i(y_i)=M_{\omega^n|\omega^{i-1}}\Psi_0(\omega^n,y^{i-1},y_i(\omega^{i-1}),y_{i+1}^*(\omega^i),\dots,y_n^*(\omega^{n-1}))\ ,$$

где ω^{i-1} – набор случайных параметров, реализованный на этапах, предшествующих этапу i ;

y^{i-1} – набор принятых решений;

$y_i(\omega^{i-1})$ – решение на этапе i ;

$y_{i+1}^*,\dots,y_n^*$ – оптимальное решение на этапах, следующих за i -м;

$$y_k^*=y_k^*(\omega^{k-1}),k=i+1,\dots,n\ .$$

Определение оптимального решающего правила на i -м этапе многоэтапной стохастической задачи сводится, таким образом, к решению задачи математического программирования:

$$\max_{y_i\in K_i} Q_i(y_i)\ . \tag{6}$$

При сепарабельной целевой функции

$$\Psi_o(\omega^n,y^n)=\sum_{j=1}^{n}\Psi_{0j}(\omega^j,y^j) \tag{7}$$

вычисление $Q_i(y_i)$ упрощается.

Пусть

$$Q_i^*(\omega^{i-1}, y^{i-1}) = \max_{y_i \in K_i} M_{\omega^n|\omega^{i-1}} \Psi_0(\omega^n, y^{i-1}, y_i(\omega^{i-1}), y_{i+1}^*(\omega^i), \ldots, y_n^*(\omega^{n-1})) \quad .$$

При сепарабельной целевой функции оптимальное решающее правило задачи (1) – (3) удовлетворят на каждом этапе $i=1,\ldots,n-1$ следующему функциональному уравнению Р. Беллмана:

$$Q_i^*(\omega^{i-1}, y^{i-1}) = \max_{y_i \in K_i} M_{\omega^i|\omega^{i-1}} \{\Psi_0(\omega^i, y^i) + Q_{i+1}^*(\omega^i, y^i)\}, i=1,\ldots,n-1 \quad , \tag{8}$$

при $i=n$

$$Q_i^*(\omega^{i-1}, y^{i-1}) = \max_{y_n \in K_n} M_{\omega^n|\omega^{n-1}} \{\Psi_0(\omega^n, y^n)\} \tag{9}$$

из (7) – (9) следует, что

$$Q_1^*(\omega_0, y_0) = \max M \Psi_0(\omega^n, y^n) = \max M \{\sum_{j=1}^{n} \Psi_{0j}(\omega^j, y^j)\} \quad , \tag{10}$$

при условиях (2) – (3).

Таким образом задача (1) – (3) в предположении (7) эквивалентна задаче (8) – (10).

Целевая функция i -го этапа имеет в этом случае вид:

$$Q_i(y^i) = M_{\omega_i|\omega^{i-1}} \{\Psi_{0j}(\omega^i, y^i) + Q_{i+1}^*(\omega^i, y^i)\} \quad . \tag{11}$$

Переформулируем общую задачу (1) – (3) для нашей конкретной постановки. В силу перехода от стохастической модели к детерминированной, введем в обозначения набор случайных параметров ω :

$$y_i(t,\omega) \rightarrow y_i(t) \quad ,$$

$$S_i(t,\omega) \rightarrow S_i(t) \quad ,$$

$$d_i(t,\omega) \rightarrow d_i(t) \quad .$$

Тогда задачу (1) – (4) можно записать в виде:

$$
\begin{cases}
M(F(y_1(t,\omega),\dots,y_n(t,\omega)))\to extr, \\
P_1(\sum_{i=1}^{I} x_i(t)=F(t)\geq\alpha_1), \\
P_2(y_i^{(1)}(t+1)=y_i^{(1)}(t)+s_i^{(1)}x_i(t)-d_i^{(1)}(t))\geq\alpha_2, \\
P_3(y_i^{(2)}(t+1)=y_i^{(2)}(t)+s_i^{(2)}(t)\,x_i(t)-d_i^{(2)}(t))\geq\alpha_3, \\
x_i^{(1)}(t)\geq 0,\, s_i^{(1)}(t)\geq 0,\, s_i^{(2)}(t)\geq 0, \\
0<y_i^{(1)}(t)\leq\overline{y}_i^{(1)},\, 0<y_i^{(2)}(t)\leq\overline{y}_i^{(2)}, \\
\overline{y}_i^{(1)}=y_i^{(1)}(T),\, \overline{y}_i^{(2)}=y_i^{(2)}(T), \\
i=1,\dots,I,\, t=1,\dots,T, \\
\alpha_i\geq 0,\forall i, \\
\omega\in\Omega=\prod_t \Omega_t,\, 0{,}5<\alpha_i\leq 1,\forall i, \\
y_i=y_i(\omega^{i-1}),\, i=1,\dots,n.
\end{cases}
\qquad (12)
$$

Задача (12) эквивалентна следующей задаче:

$$
\begin{cases}
M(F(y_1(t,\omega),\dots,y_n(t,\omega)))\to extr, \\
\sum_{i=1}^{n} x_i(t)\leq\widetilde{F}_0^{-1}(\alpha_0(\omega^{i-1})), i=1,\dots,n, \\
y_i^{(1)}(t+1)=\widetilde{F}_1^{-1}(\alpha_1(\omega^{i-1})), \\
y_i^{(2)}(t+1)=\widetilde{F}_2^{-1}(\alpha_2(\omega^{i-1})), \\
\omega\in\Omega=\prod_t \Omega_t,\, 0{,}5<\alpha_i\leq 1, \\
x_i(t)\geq 0, i=1,\dots,n, \\
y_i=y_i(\omega^{i-1}), i=1,\dots,n, \\
t\in[1,T].
\end{cases}
\qquad (13)
$$

Решающее правило i -го этапа – решение задачи $\max_{y_i\in K_i} Q_i(y_i)$.

Формулы (8) – (9) применительно к задаче (13) принимают вид:

$$
Q_i(\omega^{i-1},y^{i-1})=\max_{y_i\in K_i} M_{\omega_i|\omega^{i-1}}\{F(y_1(t,\omega),\dots,y_n(t,\omega))+\sum_i\sum_t Q_{i+1}(\omega_t^i,y^i)\} \quad , \qquad (\star)
$$

где $F(y_1(t,\omega),\dots,y_n(t,\omega))+\sum_i\sum_t Q_{i+1}(\omega_t^i,y^i)$ – функция штрафа,

K_i – множество допустимых решающих правил.

При $i=n$ имеем:

$$
Q_n(\omega^{n-1},y^{n-1})=\max_{y_n\in K_n} M_{\omega_n|\omega^{n-1}}\{F(y_1(t,\omega),\dots,y_n(t,\omega))\} \quad .
$$

Таким образом, целевая функция задачи i -го этапа имеет вид:

$$
Q_i(y_i)=M_{\omega_i|\omega^{i-1}}\{F(y_1(t,\omega),\dots,y_n(t,\omega))+\sum_i\sum_t Q_{i+1}(\omega_t^i,y^i)\} \quad .
$$

В результате имеем задачу:

$$\begin{cases} Q_i(y_i)=M_{\omega_i|\omega^{i-1}}\{F(y_1(t,\omega),\dots,y_n(t,\omega))+\sum_i \sum_t Q_{i+1}(\omega_t^i, y^i)\}\rightarrow min, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i(t)\le \widetilde{F}_0^{-1}(\alpha_0(\omega^{i-1})), i=1,\dots,n, \\ y_i^{(1)}(t+1)=\widetilde{F}_1^{-1}(\alpha_1(\omega^{i-1})), \\ y_i^{(2)}(t+1)=\widetilde{F}_2^{-1}(\alpha_2(\omega^{i-1})), \\ 0{,}5<\alpha\le 1, \\ x_i(t)\ge 0, i=1,\dots,n, \\ y_i=y_i(\omega^{i-1}), i=1,\dots,n, \\ t\in[1,T]. \end{cases} \quad (14)$$

§2. Исследование вопросов корректности задачи оптимизации

Теорема 1. *Целевая функция* $Q_i(y_i)$ i *-го этапа многоэтапной задачи стохастического программирования с условными вероятностными ограничениями является выпуклой вверх функцией на множестве* K_i *допустимых решающих правил.*

Доказательство.

Будем доказывать по индукции.

При $i=n$ $Q_n(y_n)=M_{\omega_n|\omega^{n-1}}\{F(x_1(t,\omega),\dots,x_n(t,\omega))\}$ – линейная, а следовательно, выпуклая вверх функция.

Пусть $Q_i(y_i)$ – выпуклая вверх функция на множестве K_i.

Докажем, что $Q_{i-1}(y_{i-1})$ – выпукла вверх на множестве K_{i-1}.

По определению (★):

$$Q_i(\omega^{i-1},y^{i-1})=\max_{y_i\in K_i} M_{\omega_i|\omega^{i-1}}\{F(x_1(t,\omega),\dots,x_n(t,\omega))+\sum_i \sum_t Q_{i+1}(\omega_t^i,y^i)\},$$

$i=1,\dots,n-1$.

Рассмотрим $y_{i-1}^{`}\in K_{i-1}, y_{i-1}^{``}\in K_{i-1}$,

Пусть $(y^{i-1})^{`}=(y^{i-2},y_{i-1}^{`});(y^{i-1})^{``}=(y^{i-2},y_{i-1}^{``})$.

Обозначим через $\tilde{y}_i^{`},\tilde{y}_i^{``}$ значения $y_i$, на которых $Q_i(\omega^{i-1},(y^{i-1})^{`})$ и $Q_i(\omega^{i-1},(y^{i-1})^{``})$ соответственно.

По предположению $Q_i(y_i)$ – выпукло вверх на K_i.

Покажем, что отсюда следует выпуклость вверх $Q_i(\omega^{i-1},y^{i-1})$ на K_{i-1}.

Действительно, $\tilde{y}_i^{`}\in K_i$ и $\tilde{y}_i^{``}\in K_i$. Это значит, что существуют $x_{i+1}^{`},\dots,x_n^{`}$ и $x_{i+1}^{``},\dots,x_n^{``}$ такие, что система ограничений, определяющая $K_i$, удовлетворяется при $y_i=\tilde{y}_i^{`},y_{i-1}=y_{i-1}^{`}$ и $x_j=x_j^{`},j=i+1,\dots,n$ и также при $y_i=\tilde{y}_i^{``},y_{i-1}=y_{i-1}^{``}$ и $\bar{x}_j=x_j^{``},j=i+1,\dots,n$.

Следовательно, для $\forall\lambda\in[0,1]$ система ограничений, определяющая K_i удовлетворяется при $y_i=\lambda\tilde{y}_i^{`}+(1-\lambda)\tilde{y}_i^{``}$, $y_{i-1}=\lambda\tilde{y}_{i-1}^{`}+(1-\lambda)\tilde{y}_{i-1}^{``}$, $\bar{x}_i=\lambda x_j^{`}+(1-\lambda)x_j^{``}, j=i+1,\dots,n$.

В силу выпуклости вверх $Q_i(y_i)$ на K_i имеем:

$$Q_i(\lambda\tilde{y}_i^{`}+(1-\lambda)\tilde{y}_i^{``})\geq\lambda Q_i(\tilde{y}_i^{`})+(1-\lambda)Q_i(\tilde{y}_i^{``}) \quad . \tag{*}$$

По определению $\tilde{y}_i^{`}$ и $\tilde{y}_i^{``}$

$$Q_i(\tilde{y}_i^{`})=Q_i(\omega^{i-1},(y^{i-1})^{`}),Q_i(\tilde{y}_i^{``})=Q_i(\omega^{i-1},(y^{i-1})^{``}) \quad . \tag{**}$$

Кроме того,

$$Q_i(\omega^{i-1},\lambda(y^{i-1})^{`}+(1-\lambda)(y^{i-1})^{``})=Q_i(\lambda\tilde{y}_i^{`}+(1-\lambda)\tilde{y}_i^{``}) \quad . \tag{***}$$

Из формул (*), (**), (***) следует, что

$$Q_i(\omega^{i-1},\lambda(y^{i-1})^{`}+(1-\lambda)(y^{i-1})^{``})\geq\lambda Q_i(\omega^{i-1},\lambda(y^{i-1})^{`})+(1-\lambda)Q_i(\omega^{i-1},(y^{i-1})^{``}) \quad .$$

Это означает, что $Q_i(\omega^{i-1},y^{i-1})$ выпукла вверх на K_{i-1} .

Но тогда и

$$Q_{i-1}(y_{i-1})=M_{\omega_{i-1}|\omega^{i-2}}\{F(y_1(t,\omega),\dots,y_n(t,\omega))+\sum_i\sum_t Q_{i+1}(\omega_t^{i-1},y^{i-1})\}$$

также выпукла вверх на K_{i-1} .

Теорема 1 доказана.

<u>Теорема 2</u> [10]. *Если векторы* $c_i(t)$ *и* $x_i(t)$ *статистически независимы, от* $c_{i-1}(t)$ *и* $x_{i-1}(t)$ *соответственно* u_i *– фиксированные векторы, то среди оптимальных решающих правил многоэтапной задачи с условными вероятностными ограничениями имеются правила нулевого порядка, т.е. задача (14) имеет решение в детерминированных векторах.*

Доказательство.

Пусть $z^n(t-1,\omega^{n-1})$ – оптимальное решающее правило, а $\bar{z}_i$ – математическое ожидание $z_i(t-1,\omega^{i-1}),i=1,\dots,n$.

Векторы $\bar{z}_i=Mz_i(t-1,\omega^{i-1})$ – детерминированные величины.

Покажем, что в условиях теоремы $\bar{z}_i\in K_i$.

Действительно, $z_i(t-1,\omega^{i-1})$ – решающее правило i -го этапа. Это означает, что существуют $\bar{x}_j(\omega^{j-1}), j=i+1,\dots,n$ такие, что верно ограничение:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i(t) \le \widetilde{F}_{c^{k-1}}^{-1}(\alpha_k), k=1,\dots,n \quad . \qquad (\Delta)$$

По условию теоремы $\widetilde{F}_{c^{k-1}}^{-1}(\alpha_k)=\widetilde{F}_{c^k}^{-1}(\alpha_k)$ – детерминированный вектор (здесь F_{c^k} – вектор-функция распределения составляющих c_k).

Взяв математическое ожидание от обеих частей неравенства (Δ), приходим к выводу, что $\bar{z}_i \in K_i$, т.е. $\bar{z}_i$, является допустимым решающим правилом.

Теорема 2 доказана.

Анализ стохастической модели, отвечающей массовой проблеме, позволяет разделить процесс выбора решения на два этапа. На первом – трудоемком предварительном этапе структура задачи и априорная статистическая информация используются для вычисления решающего правила: формулы, таблицы или инструкции, устанавливающие зависимость решения от реализованных значений параметров условий задачи. На втором нетрудоемком оперативном этапе решающее правило и текущая реализация условий, отвечающих исследуемой индивидуальной задаче, применяются для вычисления оптимального плана.

Для полученной задачи (14) возможно построить двухцелевой детерминированный эквивалент, так как распределение случайного параметра происходит по нормальному закону.

Итак, рассматриваем задачу (14). Сначала выбираем предварительный план $y=(y_1,\dots,y_n)$. Область определения y задается выпуклым многогранным множеством $K=K_1 \cap K_2$, где

$$K_1=\{y | \sum_{i=1}^{n} x_i(t)=C(t), y_i(t)=y_i(t-1)+s_i(t)x_i(t)+d_i(t), y_i(t)=0, i=\overline{1,n}\}$$

– множество, высекаемое фиксированными ограничениями, $K_2=R^2$ – множество, высекаемое индуцированными ограничениями.

Затем производим компенсацию невязок:

$$\begin{cases} B\beta_1 = C(t,\omega) - \sum_{i=1}^{n} x_i(t), \\ B\beta_2 = A(t,\omega) - y_i(t), \\ \beta_1 \geq 0, \beta_2 \geq 0, \end{cases} \qquad (15)$$

где B – матрица компенсации, которая после соответствующей перестановки строк и столбцов может быть представлена в виде $B = (E_i - E)$, E – единичная матрица размера $n \times n$, $\beta_1 = (\beta_1^+, \beta_1^-), \beta_2 = (\beta_2^+, \beta_2^-)$ – n-мерные векторы, компенсирующие невязки, через $A(t,\omega)$ обозначено

$A(t,\omega) = y_i(t-1) + s_i(t,\omega) x_i(t) + d_i(t,\omega)$.

За нарушение условий задачи (14) устанавливаются штрафы $q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, q_1 = (q_1^+, q_2^-), q_2 = (q_2^+, q_2^-)$ – n-мерные векторы, зависящие от составляющих векторов β_1 и β_2. Векторы, компенсирующие невязки, выбираются таким образом, чтобы обеспечить минимальные штрафы за компенсацию невязок условий задачи.

Тогда после разбиения векторов β_1 и β_2 с помощью перестановки строк и столбцов матрицы B на части β_i^+ и $\beta_i^-, (i = 1, 2)$, соответствующие подматрицам E и $-E$ матрицы B, задача (14) принимает вид:

$$\begin{cases} Q_1(x) = f_1 + min\, M\, P_1(y_i, F(t)) \rightarrow min, \\ Q_2(x) = f_2 + min\, M\, P_2(y_i, A(t)) \rightarrow min, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i(t) = C(t), x_i(t) \geq 0, \\ y_i(t) = y_i(t-1) + s_i(t) x_i(t) d_i(t), y_i(t) \geq 0, \\ i = \overline{1,n}, t \in (1,T), \end{cases} \qquad (16)$$

$$\begin{cases} P_1(y_i, F(t)) = \{min(q_1^+ \beta_1^+ + q_1^- \beta_1^-) | \beta_1^+ - \beta_1^-\} = C(t,\omega) - \sum_{i=1}^{n} x_i(t), \\ P_2(y_i, A(t)) = \{min(q_2^+ \beta_2^+ + q_2^- \beta_2^-) | \beta_2^+ - \beta_2^-\} = A(t,\omega) - y_i(t), \\ \beta_i^+ \geq 0, \beta_i^- \geq 0, i = 1{,}2, \end{cases} \qquad (17)$$

где (16) – простейшая постановка двухэтапной задачи со случайным вектором ограничений, (17) – задача второго этапа.

Пусть $K_2 \neq \varnothing$. Для разрешимости задачи (17) необходимо и достаточно, чтобы была разрешима следующая система неравенств:

$$\begin{cases} \{z_1 | z_1 B \leq q_1\} = \{z_1 | z_1 (E_i - E) \leq q_1\} = \{z_1 | -q_1^- \leq z_1 \leq q_1^+\} \neq \varnothing, \\ \{z_2 | z_2 B \leq q_2\} = \{z_2 | z_2 (E_i - E) \leq q_2\} = \{z_2 | -q_2^- \leq z_2 \leq q_2^+\} \neq \varnothing, \end{cases} \tag{18}$$

Таким образом, для разрешимости задачи второго этапа в простейшей постановке двухэтапной задачи необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства:

$$q_1^+ + q_1^- \geq 0, q_2^+ + q_2^- \geq 0 \quad .$$

Задача, двойственная к задаче (17), имеет вид:

$$\begin{cases} Q_1(y_i, C(t)) = \{max\, z_1 (C(t) - \sum_{i=1}^{n} x_i(t)) | -q_1^- \leq z_1 \leq q_1^+\}, \\ Q_2(y_i, A(t)) = \{max\, z_2 (A(t) - y_i(t)) | -q_2^- \leq z_2 \leq q_2^+\}. \end{cases} \tag{19}$$

Решением задачи (19) являются функции:

$$\begin{cases} Q_1(y_i, C(t)) = \sum_{i=1}^{n} Q_{1i}(y_i, C_i(t)), \\ Q_2(y_i, A(t)) = \sum_{i=1}^{n} Q_{2i}(y_i, A_i(t)), \end{cases} \tag{20}$$

где

$$Q_1(y_i, C_i(t)) = \begin{cases} [C_i(t) - \sum_{i=1}^{n} x_i(t)] q_{1i}^+, \text{если}\, C_i(t) - \sum_{i=1}^{n} x_i(t) \geq 0, \\ [C_i(t) - \sum_{i=1}^{n} x_i(t)] q_{1i}^-, \text{если}\, C_i(t) - \sum_{i=1}^{n} x_i(t) \leq 0, \end{cases}$$
$$Q_2(y_i, A_i(t)) = \begin{cases} [A_i(t) - y_i(t)] q_{2i}^+, \text{если}\, A_i(t) - y_i(t) \geq 0, \\ [A_i(t) - y_i(t)] q_{2i}^-, \text{если}\, A_i(t) - y_i(t) \leq 0, \end{cases} \tag{21}$$

Таким образом, для задачи (14) можем построить двухцелевой детерминированный эквивалент:

$$\begin{cases} Mf_1 + M\sum_{i=1}^{n} Q_{1i}(y_i, C_i(t)) \to min, \\ Mf_2 + M\sum_{i=1}^{n} Q_{2i}(y_i, A_i(t)) \to min, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i(t) = C(t), x_i(t) \ge 0, \\ y_i(t) = y_i(t-1) + s_i(t) x_i(t) + d_i(t), y_i(t) \ge 0, \\ i = \overline{1,n}, t \in (1,T). \end{cases} \qquad (22)$$

Эквивалентная детерминированная задача (22) является задачей выпуклого программирования [10].

Введем следующие обозначения:

$C(t)$ – общесистемные затраты на этапе с момента времени t по момент времени $(t+1)$;

$D^{(1)}(t)$ – доход, полученный на этапе с момента времени $(t-1)$ по момент времени t от продажи товарной нефти;

$D^{(2)}(t)$ – объем чистой прибыли, полученный на этапе с момента времени $(t-1)$ по момент времени t ;

$d_i^{(1)}(t)$ – объем потерь в выработке товарной нефти на этапе с момента времени t момент времени $(t+1)$;

$d_i^{(2)}(t)$ – объем потерь в выработке чистой прибыли на этапе с момента времени t по момент времени $(t+1)$;

$F(t)$ – величина денежных средств, имеющихся в наличии на момент времени t , скорректированная на сумму общесистемных затрат и на величину объема задолженности (запаса) денежных средств;

$f_0(t, x(t))$ – векторная функция, компонентами которой являются функционалы, определяющие выбранные в момент времени t политики распределения денежных средств между факторами производства;

$i = \overline{1,I}$ – номер фактора производства;

$G(t)$ – задолженность (запас) денежных средств к моменту времени t ;

$k=\overline{1,2}$ – номер типа ресурсов: 1 — товарная нефть; 2 – чистая прибыль;

$R_0(t)$ – принцип оптимальности при распределении денежных средств между факторами производства в момент времени t;

$s_i^{(1)}(t)$ – удельный прирост отпуска товарной нефти в зависимости от фактора типа i от вложенных в момент времени t денежных средств;

$s_i^{(2)}(t)$ – удельный прирост получаемой чистой прибыли в зависимости от фактора типа i от вложенных в момент времени t денежных средств;

$t=\overline{1,T}$ – номер этапа перспективного планирования;

$x_i(t)$ – затраты на развитие факторов типа i на этапе с момента времени t по момент времени $(t+1)$;

$y_i^{(1)}(t)$ – нарастающий итог полезного отпуска товарной нефти в зависимости от фактора типа i к моменту времени t;

$y_i^{(2)}(t)$ – нарастающий итог получаемого дохода в зависимости от фактора типа i к моменту времени t;

$\bar{y}_i^{(1)}$ – эталонное значение фактора типа i к моменту времени T;

$\bar{y}_i^{(2)}$ – эталонное значение фактора типа i к моменту времени T;

$z(t)$ – доля использования дохода, имеющегося в наличии к моменту времени t.

Математическую модель можно сформулировать следующим образом:

$$\begin{cases} f_0(t,x(t)) \underset{R_0(t)}{\rightarrow} opt, \\ \sum_{i=1}^{I} x_i(t)=F(t), \\ y_i^{(1)}(t+1)=y_i^{(1)}(t)+s_i^{(1)}(t)\cdot x_i(t)-d_i^{(1)}(t), \\ y_i^{(2)}(t+1)=y_i^{(2)}(t)+s_i^{(2)}(t)\cdot x_i(t)-d_i^{(2)}(t), \\ x_i(t)\geq 0, s_i^{(1)}\geq 0, s_i^{(2)}\geq 0, \\ 0<y_i^{(1)}(t)\leq \bar{y}_i^{(1)}, 0<y_i^{(2)}(t)\leq \bar{y}_i^{(2)}, \\ \bar{y}_i^{(1)}=y_i^{(1)}(T), \bar{y}_i^{(2)}=y_i^{(2)}(T), \\ i=\overline{1,I}, t=\overline{1,T}. \end{cases} \tag{23}$$

причем $F(t)=z(t)(D^{(1)}(t)+D^{(2)}(t))-C(t)-G(t)$

и $G(t)=(z(t-1)-1)(D^{(1)}(t-1)+D^{(2)}(t-1))$,

где $f_0(t,x(t))\underset{R_0(t)}{\rightarrow} opt$ – политика распределения средств.

В качестве критерия оптимальности $f_0(t,x(t))$ возьмем распределение, пропорциональное требуемым результатам:

$$f_0=\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{2}\left|x_i(t)-\frac{\dfrac{\bar{y}_i^{(k)}-y_i^{(k)}(t)-s_i^{(k)}(t)\cdot x_i(t)+d_i^{(k)}(t)}{\bar{y}_i^{(k)}}}{\sum\limits_{i=1}^{I}\dfrac{\bar{y}_i^{(k)}-y_i^{(k)}(t)-s_i^{(k)}(t)\cdot x_i(t)+d_i^{(k)}(t)}{\bar{y}_i^{(k)}}}\cdot F(t)\right| \qquad (24)$$

Данная модель используется, когда целью является постепенное сглаживание диспропорций в развитии направлений, и предполагает вложение некоторого количества средств во все объекты. Распределение затрат осуществляется пропорционально требуемым средствам для достижения эталонного состояния каждого направления. Происходит «подтягивание» объектов пропорционально их отставанию. Такое распределение есть пропорциональное. План распределение позволяет одновременно перевести все объекты из начального состояния в требуемое.

Пропорциональное распределение – один из достаточно распространенных принципов математической теории принятия решений при распределении затрат и дележе прибыли. Пропорциональное распределение затрат предполагает выделение средств по каждому направлению пропорционально его отставанию от эталонного состояния. Такой подход дает возможность «подтягивать» до эталонного состояния одновременно все направления. Чем больше отстает текущее состояние i -го направления от эталонного, тем больше средств выделяется на уменьшение этой диспропорции в развитии объектов.

Для решения стохастических задач нестационарной оптимизации используются известные алгоритмы выпуклого программирования. Например, метод стохастических квазиградиентов с проектированием, метод проекции стохастического градиента или метод стохастической линеаризации.

Многошаговые процедуры принятия решений, разработанные на основе алгоритмов нестационарной оптимизации, применимы в случае, когда возможно много (теоретически – бесконечно много) уточняющих наблюдений. С этой точки зрения их можно рассматривать как методы решения многоэтапных стохастических задач с большим числом слабо влияющих один на другой этапов принятия решений. Наиболее подходящей для применения подобных процедур будет следующая ситуация. Первоначальное решение принимается в условиях неопределенности, вызванной отсутствием информации. Для получения такой информации ставятся эксперименты. На основе результатов этих экспериментов необходимо найти наилучшее управление моделируемой системой и, если такая система изменяет свое состояние во времени, проводить соответствующие корректировки этого управления.

Применение прикладных многоэтапных моделей может дать хороший результат там, где при принятии исходного решения приходится учитывать влияние многочисленных случайных факторов и имеется возможность компенсировать влияние этих факторов за счет дополнительных мероприятий, не включаемых в исходный план: организация дополнительных перевозок продукции, маневра ресурсами, введение в действие, дополнительных мощностей и т.д. С этой точки зрения многоэтапные задачи могут найти применение при планировании запасов, при определении выпуска продукции массового спроса, на объем потребления которой влияют труднопрогнозируемые факторы (например, мода), в сельском хозяйстве, а также при долгосрочном планировании развития и размещения производства.

Глава 2. Вопросы устойчивости

§1. Общие понятия

В задачах стохастического программирования вопрос об устойчивости имеет особую важность, поскольку в этих задачах значения параметров случайны.

Рассмотрим некоторые вопросы существования областей устойчивости для многоэтапной задачи стохастического программирования с условными вероятностными ограничениями и с априорными решающими правилами.

Введем следующие понятия:

1. *Область допустимости* [7].

Рассмотрим фиксированную реализацию случайного события $\omega_0 \in \Omega$ и задачу стохастического программирования:

$$M_{\omega_{0i}|\omega_0^{i-1}} \{ F(y_1(t,\omega_0),\dots,y_n(t,\omega_0)) + \sum_i \sum_t Q_{i+1}(\omega_{0t}^i, i^i) \} \to \min_{y_i \in K_i(\omega_0)} \tag{25}$$

Обозначим через $y_q(q=1,2,\dots,q_{\omega_0})$ – экстремальные точки выпуклого множества $K_i(\omega_0)$, каждая из которых образуется пересечением m гиперплоскостей, где q_{ω_0} – общее число экстремальных точек при реализации $\omega_0 \in \Omega$ случайных параметров.

Область $V_{\omega_0}^q \subset \Omega$ называется *областью допустимости точки* y_q, если для $\forall \omega \in V_{\omega_0}^q$ пересечение образующих эту точку гиперплоскостей определяет экстремальную точку соответствующего множества $K_i(\omega)$.

2. *Область оптимальности* [7].

Пусть y_{q_0} – оптимальная экстремальная точка задачи (25), то есть для $\forall q \neq q_0$ имеет место $Q_{\omega_0}^q \geq Q_{\omega_0}^{q_0}$, где $Q_{\omega_0}^q$ – значение целевой функции задачи (25) в экстремальной точке y_q.

Область $W_{\omega_0}^{q_0} \subset V_{\omega_0}^{q_0}$ называется *областью оптимальности точки* y_{q_0}, если для $\forall \omega \in W_{\omega_0}^{q_0}$ выполняется

$$Q_{\omega}^{q} \geq Q_{\omega}^{q_0}, (q=1,2,\dots,q_{\omega}, q \neq q_0) \quad .$$

<u>Теорема 3</u> <u>[14].</u> *Функция* Q_{ω}^{q} *является непрерывной функцией от* ω *для любой экстремальной точки* y_q .

Доказательство.

Значение целевой функции в экстремальной точке y_q выпуклого множества $K(\omega_0)$ при фиксированной реализации $\omega_0 \in \Omega$ равно:

$$Q_{\omega_0}^{q} = M_{\omega_{0i}|\omega_0^{i-1}} \{ F(y_1^{0q}(t,\omega_0),\dots,y_n^{oq}(t,\omega_0)) + \sum_i \sum_t Q_{i+1}(\omega_{0t}^{i}, y^i) \} \quad ,$$

где y_i^{0q} – координаты экстремальной точки.

Обозначим через $\tilde{y}_i^{0q}$ – отличные от нуля величины y_i^{0q} . Они определяются из соотношения

$$\tilde{x}_i = \frac{\dfrac{|\hat{y}_i - \tilde{y}_i^{0q}|}{S_i}}{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{|\hat{y}_i - \tilde{y}_i^{0q}|}{S_i}} = \tilde{F}_i \quad \text{или} \quad E^{0q} \tilde{X} = \tilde{F}_c \quad ,$$

где E^{0q} – соответствующая базисная матрица.

В силу невырожденности этой матрицы величины y_i^{0q} будут непрерывными функциями от c_i , следовательно, $Q_{\omega_0}^{q_0}$ является непрерывной функцией от $\omega \in \Omega$.

Теорема 3 доказана.

Докажем, что для $\forall \omega_0 \in \Omega$ существует область устойчивости W_{ω_0} , то есть такая область, что для всех $\omega \in W_{\omega_0}$ соответствующая задача (25) имеет один и тот же оптимальный базис.

<u>Теорема 4</u> <u>[14].</u> *Пусть в точке* $\omega_0 \in \Omega$ *выполняется условие*

$$Q_{\omega_0}^{q} > Q_{\omega_0}^{q_0}, (q=1,2,\dots,q_{\omega_0}, q \neq q_0) \quad , \qquad (!)$$

тогда существует такая окрестность $O(\omega_0)$ *точки* ω_0 *, что для всех* $\omega \in O(\omega_0) \subset \Omega$ *имеет место соотношение*

$$Q_{\omega}^{q} > Q_{\omega}^{q_0}, (q=1,2,\dots,q_{\omega}, q \neq q_0) \quad .$$

Доказательство.

По условию (!) теоремы в точке $\omega_0 \in \Omega$ имеем

$$Q_{\omega_0}^{q} - Q_{\omega_0}^{q_0} > 0 \quad . \qquad (!!)$$

В соответствии с утверждением 1 функции $Q_{\omega_0}^{q}$ и $Q_{\omega_0}^{q_0}$ непрерывны по ω_0, следовательно, их разность тоже непрерывная функция.

Из свойств непрерывных функций следует, что существует такая окрестность $0(\omega_0)$, что для $\forall\, \omega \in O(\omega_0)$ сохраняется неравенство (!!), то есть $Q_{\omega}^{q} > Q_{\omega}^{q_0}$.

Теорема 4 доказана.

§2. ε - устойчивость решения по средним

Рассмотрим фиксированную точку в пространстве Ω (точку ω_0), координатами которой являются математические ожидания случайных параметров условий задачи.

Получим условия, при которых оптимальный базис задачи остается оптимальным для всех $\omega\in\Omega$, за исключением подмножества заданной меры $\epsilon>0$.

Определение [7]**.** Решение задачи стохастического линейною программирования по средним называется *стохастически устойчивым по модулю* ϵ *(* ϵ *- устойчивым),* если оптимальная экстремальная точка задачи по средним остается оптимальным для любой реализации ω случайных параметров, за исключением множества меры ϵ .

Рассмотрим частный случай задачи стохастического линейного программирования, когда только вектор $c(\omega)$ случаен, при том его компоненты распределены независимо. Обозначим через $\bar{c}_i$ математическое ожидание случайной величины $c_i(\omega)$, а через σ_i^2 – ее дисперсию.

Определение [14]**.** Гиперплоскости, пересечением которых образуется оптимальная точка задачи по средним, назовем *меченными*.

Пусть все граничные гиперплоскости выпуклого множества $K(\bar{\omega})$ пронумерованы, и пусть $q_1, q_2, \ldots, q_m$ – номера меченных гиперплоскостей.

Экстремальная точка определяется пересечением этих гиперплоскостей, перемещается в зависимости от реализации вектора $c(\omega)$. Множеством m -мерного евклидова пространства, внутри которого эта точка будет находится с вероятностью $P>\left(1-\frac{1}{l^2}\right)^m$, является эллипсоид с центром в точке, соответствующей оптимальному решению по средним.

Здесь l определяется из неравенства: $(1-\frac{1}{l^2})^m > 1-\epsilon$. Оси этого эллипсоида рассеяния находятся следующим образом: в точке $\bar{\omega}\in\Omega$ рассматривается пересечение $m-1$ гиперплоскости из данных m меченных, которое геометрически представляет собой прямую. На этой прямой откладывается в обе стороны от центра эллипсоида величина $\omega\sigma_{q_j}$, где q_j – номер той меченной гиперплоскости, которая не входит в данное пересечение, а σ_{q_i} – среднеквадратическое отклонение случайной величины, стоящей в правой части уравнения этой гиперплоскости.

Из независимости компонент $c_i(t)$ и неравенства Чебышева следует

$$P\{\bigcap_i |c_i(\omega)-\bar{c}_i|<l\,\sigma_i\}=\prod_i p\{|c_i(\omega)-\bar{c}_i|<l\,\sigma_i\}>\prod_i (1-\frac{1}{l^2})=(1-\frac{1}{l^2})^m .$$

Величину l определим из неравенства:

$$(1-\frac{1}{l^2})^m > 1-\epsilon ,$$

где ϵ – достаточно малое число.

Определение [7]**.** Ограничения вида $x_i(t)\le\overline{\tilde{F}_i^{-1}(\alpha_i)}-l\,\sigma_i,(i=1,\dots,m)$ назовем *нижними ограничениями*,

а ограничения вида $x_i(t)\le\overline{\tilde{F}_i^{-1}(\alpha_i)}+l\,\sigma_i,(i=1,\dots,m)$ назовем *верхними ограничениями*.

Предположим, что пересечения нижних ограничений с положительным гипероктантом не пусто. Это означает, что для любой реализации вектора $c(\omega)$ (за исключением множества меры ϵ) существует хотя бы один допустимый план.

Используя введенные понятия, сформулируем без доказательства достаточное условие стохастической ϵ -устойчивости решения по среднему.

<u>**Теорема 5** [7]</u>**.** *Для того чтобы решение по средним было ϵ -устойчивым, достаточно, чтобы эллипсоид рассеяния не пересекался с нижними*

ограничениями, кроме меченых.

Для задачи выпуклого программирования ϵ -устойчивость означает постоянство с вероятностью $1-\epsilon$ базиса меченных нормалей, по которому целевой вектор раскладывается с положительными коэффициентами. Данное определение ϵ -устойчивости далее будем называть *базисным*.

Определение [14]**.** Пусть для всех $\omega \, mod \, \epsilon$ множество оптимальных планов $X(\omega)$ принадлежит ϵ -окрестности множества $X(\bar{\omega})$, то есть для $\forall x^0(\omega)$ найдется f такое, что выполняется

$$|x^0(\omega)-x^0(\bar{\omega})|<\delta \, .$$

В этом случае задачу стохастического программирования назовем *планово-устойчивой с характеристиками* ϵ, δ .

Пусть задача базисно-устойчива $mod \, \epsilon$ и имеет при $\omega=\bar{\omega}$ единственный оптимальный план. Тогда можно найти распределение оптимального плана $x^0(\omega)=(x_1(\omega), x_2(\omega), \ldots, x_q(\omega), 0, \ldots, 0)$ на множестве меры $1-\epsilon$, а также распределение расстояния $|x^0(\omega)-x^0(\bar{\omega})|$. По любому δ можно найти $\epsilon_1=P\{|x^0(\omega)-x^0(\bar{\omega})|>\delta\}$, и задача будет планово устойчива с характеристиками $\epsilon+\epsilon_1, \delta$.

§3. Функциональная устойчивость

В ряде практических задач конечным критерием устойчивости служат величины отклонений оптимального значения целевого функционала.

Поэтому введем понятия стохастической устойчивости задачи выпуклого программирования. в котором проблема устойчивости рассматривается с этой точки зрения.

Определение [7]**.** Пусть при $\forall \omega \, mod \, \epsilon$ выполняется неравенство

$$|F(y_1(t,\omega),\ldots,y_n(t,\omega))-F(y_1(t,\bar{\omega}),\ldots,y_n(t,\bar{\omega}))|<\delta \quad ,$$

тогда задача (25) называется *функционально устойчивой с характеристиками* ϵ, δ .

Если задача планово- ϵ, δ -устойчива, то в силу непрерывности целевого функционала по совокупности аргументов можно подобрать δ такое, что задача будет функционально- ϵ, δ -устойчива.

Сформулируем без доказательства достаточное условие функциональной устойчивости решения по средним.

<u>Теорема 6</u> <u>[7]</u>**.** *Для того, чтобы решение по средним*

$$x^*(\bar{\omega})=(x_1^*(\bar{\omega}),x_2^*(\bar{\omega}),\ldots,x_p^*(\bar{\omega}),0,\ldots,0)$$

было ϵ -устойчивым, достаточно, чтобы выполнялось $\sum_{i=1}^{m}\sigma_i^2\le\epsilon d^2$, где d – минимальное из расстояний от точки $\bar{\omega}$ до граничных гиперплоскостей области устойчивости $W_{\bar{\omega}}$.

Глава 3. Прикладные аспекты модели планирования.

Многие практические задачи хозяйственной деятельности и ряд важных вопросов экономической теории связаны с задачами определения наилучшего, оптимального варианта решения.

Рассмотрим задачу принятия решения на конкретном примере распределения денежных средств крупной компании в области нефти и газа.

На основании информации, взятой из открытых источников, были получены факторы производства товарной нефти и прибыли, которую можно получить.

Требовалось определить, какое количество денежных средств необходимо вложить в каждый из определенных ранее факторов, для того чтобы организовать оптимальное производство при заданном бюджете.

Рассматривалась модель вида:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\bar{y}_i^{(k)}-y_i^{(k)}(t)}{\bar{y}_i^{(k)}}\right|+\frac{1}{2}\cdot max\left|\frac{\bar{y}_i^{(k)}-y_i^{(k)}(t)}{\bar{y}_i^{(k)}}\right|\rightarrow min, \\ \sum_{i=1}^{n}x_i(t)=F(t), \\ x(t)\geq 0, s_i^{(k)}(t)>0, \\ y_i^{(k)}(t)=y_i^{(k)}(t-1)+x_i(t)\cdot s_i^{(k)}(t), \\ \bar{y}_i^{(k)}=y_i^{(k)}(T), y_i^{(k)}(t)>0, \\ i=\overline{1,n}, k=1,2, t=\overline{1,T}. \end{cases} \tag{26}$$

где

$\bar{y}_i^{(k)}$	Эталонное значение фактора типа i для ресурса типа k
$y_i^{(k)}(t)$	Итог полезного отпуска ресурса типа k в зависимости от фактора типа i на этапе с момента времени $t-1$ по момент времени t
$x_i(t)$	Затраты на развитие факторов типа i на этапе с момента времени t по момент времени $(t+1)$

$F(t)$	Величина денежных средств, имеющихся в наличии на момент времени t
$s_i^{(k)}(t)$	Удельный прирост получаемого ресурса k в зависимости от фактора типа i от вложенных в момент времени t денежных средств
$i=\overline{1,n}$	Номер фактора производства
$k=1{,}2$	Номер типа отпускаемого ресурса
$t=\overline{1,T}$	Номер этапа планирования

Решая многоэтапную задачу стохастического оптимального управления оптимизации с помощью программных средств Microsoft Excel, получили решение, которое позволяет распределить финансовые ресурсы между ключевыми факторами производства согласно модели уменьшения диспропорций.

В приложении приведены таблицы и диаграммы.

Заключение

В данной дипломной работе получены следующие результаты.

1) Сформулирована многоэтапная задача стохастического программирования в применении для распределения ресурсов.
2) Построен детерминированный эквивалент. Показано существование единственности решения задачи распределения средств.
3) Исследованы свойства решения: устойчивость решения, ϵ - устойчивость по средним, определена функциональная устойчивость. Доказаны соответствующие утверждения.
4) Предложен один из методов выпуклого программирования для решения задачи распределения средств, доказана сходимость процедуры решения.

Результаты проведенных исследований могут успешно применяться в сфере распределения ресурсов, принятия инвестиционных, социальных, инновационных решений, в экономическом анализе хозяйственной деятельности того или иного предприятия, отрасли, при стратегическом планировании народного хозяйства как по различным отраслям и направлениям, так и в муниципальном планировании в целом, а также в дальнейших исследованиях и разработках в области принятия решений.

Список литературы

1. Аоки М. Оптимизация стохастических систем. – М.: Наука, 1971.

2. Беркович Е.М. О многоэтапных задачах стохастического оптимального управления. – Изв. АН СССР. Техн. Кибернетика, 1975, №1.

3. Волконский В.А. Принципы оптимального планирования. – М.: Экономика, 1973.

4. Каплинский А.И., Позняк А.С., Пропой А.И. Условия оптимальности для некоторых задач стохастического программирования. – Автоматика и телемеханика, 1971, №8, с. 51-60.

5. Колбин В.В., Танская В.Н. Некоторые задачи стохастического линейного программирования и алгоритмы их решения. – В кн.: «Моделирование экономических процессов», МГУ, 1971, с.391-401.

6. Колбин В.В., Быкова И.Ю., Веронская М.В., Колбин У.В. Проблемы принятия инновационных решений в условиях рыночной экономики. — Гуманитарные науки, №3, СПб, 1997.

7. Колбин В.В. Стохастическое программирование. Курс лекций.

8. Мулен Э. Корпоративное принятие решений: аксиомы и модели. – М.: Мир, 1991.

9. Юдин Д.Б., Цой Э.В. Многоэтапная задача стохастического программирования с априорными решающими правилами. – Экономика и математические методы, 1973, т.9, вып. 5.

10. Юдин Д.Б. Математические методы управления в условиях неполной информации. – М.: Сов. Радио, 1974.

11. Юдин Д.Б. Задачи и методы стохастического программирования. – М.: Сов. Радио, 1979.

12. Юдин Д.Б., Юдин А.Д. Экстремальные модели в экономике. – М.: Экономика, 1979.

13. Зубов В.И., Петросян Л.А. Математические методы в планировании. –

Л.: Изд-во ЛГУ, 1982.

14. Bunke O., `Einige Hilfsmittel zur Losung statistischer Probleme beider linearen und nicht linearen Optimierung', Akad. Wiss. Mon-ber deutsch , Berlin 1966, 699-703.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Факторы	Эталоны (y^)	Удельный прирост (s)	y(T0)	y(T1)	y(T2)	y(T3)	y(T4)	y(T5)	y(T6)	y(T7)	y(T8)	y(T9)	y(T10)
Товарная нефть, тыс.тонн			1500,00	1573,971	2840,866	2881,1	2881,1	3107	3115,2	3442	3442,1	3442,1	3442
Условно-постоянные затраты, млн.руб.	35	0,0005	40,00	40	40	40,001	40,001	40,001	40,001	40,001	40,001	40,001	40,001
- в т.ч. закачка ПНГ в пласт, млн.м3	0,3	0,15	0,10	0,299945	0,659722	0,6597	0,6597	0,6597	0,6597	0,6597	0,6597	0,6597	0,6597
Штрафы за сверхнормативное сжигание ПНГ, млн.руб.	0,11	5076,3	0,10	0,109981	0,109981	0,11	0,11	0,1112	0,1124	0,1124	0,1124	0,1124	0,1124
Доля валютных кап.вложений (Финансирование), %	0,06	0,45	0,05	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06
Добыча ПНГ, млн.м3	0,12	0,18	0,10	0,119997	0,119997	0,12	0,12	0,12	0,12	0,14	0,14	0,14	0,14
Доля получаемого из Товарного Конденсата ШФЛУ, %	0,2	0,14	0,05	0,05	0,050034	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
Ввод скважин ННС (кроме ПРБ), шт.	70	0,00046	50,00	50,00024	50,00024	50,001	50,001	50,002	50,002	50,003	50,003	50,004	50,004
Прочие затраты (АУР, СКП, налоги в с/с,...), млн.руб.	5	1344,8	5,00	5	5,000016	5	5	5	5	5	5	5	5
- в т.ч. целевые программы, млн.руб.	5	477,35	5,00	5	5	5	5	5,0001	5,0002	5,0002	5,0002	5,0002	5,0002
Проценты по кредитам, млн.руб.	0,07	85887	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,0903	0,0903	0,0903	0,0903	0,0903	0,0903
Остаточная стоимость на 01.01.2019, млн.руб.	900	2,4E-05	750,00	750	750	750	750	750	750	750	750	750	750
Затраты на персонал, млн. рублей	65	15,31	57,00	64,80477	67,88583	71,372	71,372	71,372	71,372	88,876	88,876	88,876	88,876

Таблица 1. Основные характеристики, влияющие выпуск товарной нефти

Факторы	Эталоны (y^)	Удельный прирост (s)	y(T0)	y(T1)	y(T2)	y(T3)	y(T4)	y(T5)	y(T6)	y(T7)	y(T8)	y(T9)	y(T10)
Чистая прибыль, млн.руб.			700,00	999,6474	431,3241	700,03	700,03	906,4	912,44	875,22	875,27	875,27	875,27
Условно-постоянные затраты, млн.руб.	35	9,55	40,00	40	40	56,229	56,229	65,778	65,778	65,778	65,778	65,778	65,778
- в т.ч. закачка ПНГ в пласт, млн.м3	0,3	0,05	0,10	0,166648	0,286574	0,2866	0,2866	0,2866	0,2866	0,2866	0,2866	0,2866	0,2866
Штрафы за сверхнормативное сжигание ПНГ, млн.руб.	0,11	8357,4	0,10	0,116432	0,116432	0,1164	0,1164	0,1184	0,1204	0,1204	0,1204	0,1204	0,1204
Доля валютных кап.вложений (Финансирование), %	0,06	0,2093	0,05	0,054651	0,054651	0,0547	0,0547	0,0547	0,0547	0,0547	0,0547	0,0547	0,0547
Добыча ПНГ, млн.м3	0,12	0,09	0,10	0,109998	0,109998	0,11	0,11	0,11	0,11	0,12	0,12	0,12	0,12
Доля получаемого из Товарного Конденсата ШФЛУ, %	0,2	613,9	0,05	0,05	0,198976	0,199	0,199	0,1991	0,1993	0,1993	0,1993	0,1993	0,1993
Ввод скважин ННС (кроме ПРБ), шт.	70	0,0002	50,00	50,0001	50,0001	50	50,001	50,001	50,001	50,001	50,001	50,002	50,002
Прочие затраты (АУР, СКП, налоги в с/с,...), млн.руб.	5	0,0017	5,00	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
- в т.ч. целевые программы, млн.руб.	5	218,1	5,00	5	5	5	5	5,0001	5,0001	5,0001	5,0001	5,0001	5,0001
Проценты по кредитам, млн.руб.	0,07	7956,3	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,0719	0,0719	0,0719	0,0719	0,0719	0,0719
Остаточная стоимость на 01.01.2019, млн.руб.	900	1,4E-05	750,00	750	750	750	750	750	750	750	750	750	750
Затраты на персонал, млн. рублей	65	4,8	57,00	59,44696	60,41293	61,506	61,506	61,506	61,506	66,994	66,994	66,994	66,994

Таблица 2. Основные характеристики, влюящие на чистую прибыль

Факторы	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10
Условно-постоянные затраты	0	0	1,699416	0	0,999881	0	0	0	0	0
Закачка ПНГ в пласт	1,332968	2,3985124	0	0	2,37E-07	2E-07	0	0	0	0
Штрафы за сверхнормативное сжигание ПНГ	1,966E-06	0	0	0	2,37E-07	2E-07	0	2E-09	0	0
Доля валютных кап.вложений (Финансирование)	0,022223	1,669E-07	0	0	4,14E-05	0	0	0	0	0
Добыча ПНГ	0,111093	4,538E-08	0	0	2,37E-07	2E-07	0,111	0	0	0
Доля получаемого из Товарного Конденсата ШФЛУ	0	0,0002427	0	0	2,37E-07	2E-07	0	0	0	0
Ввод скважин ННС (кроме ПРБ)	0,523931	0	0,756107	1,299789	1,000075	1,4001	0,9229	1,2443	1,2001	1,2001
Прочие затраты (АУР, СКП, налоги в с/с,...)	0	1,209E-08	0	0	0	2E-09	0	0	0	0
Целевые программы	0	0	0	0	2,37E-07	2E-07	0	0	0	0
Проценты по кредитам	0	0	0	0	2,37E-07	0	0	0	0	0
Остаточная стоимость на 01.01.2019	0	0	0,016747	1,300211	1	1,3999	0,9228	1,2557	1,1999	1,1999
Затраты на персонал	0,509783	0,2012447	0,227729	0	2,37E-07	2E-07	1,1433	0	0	0

Таблица 3. Прогнозируемое вложение денежных ресурсов в производственные факторы

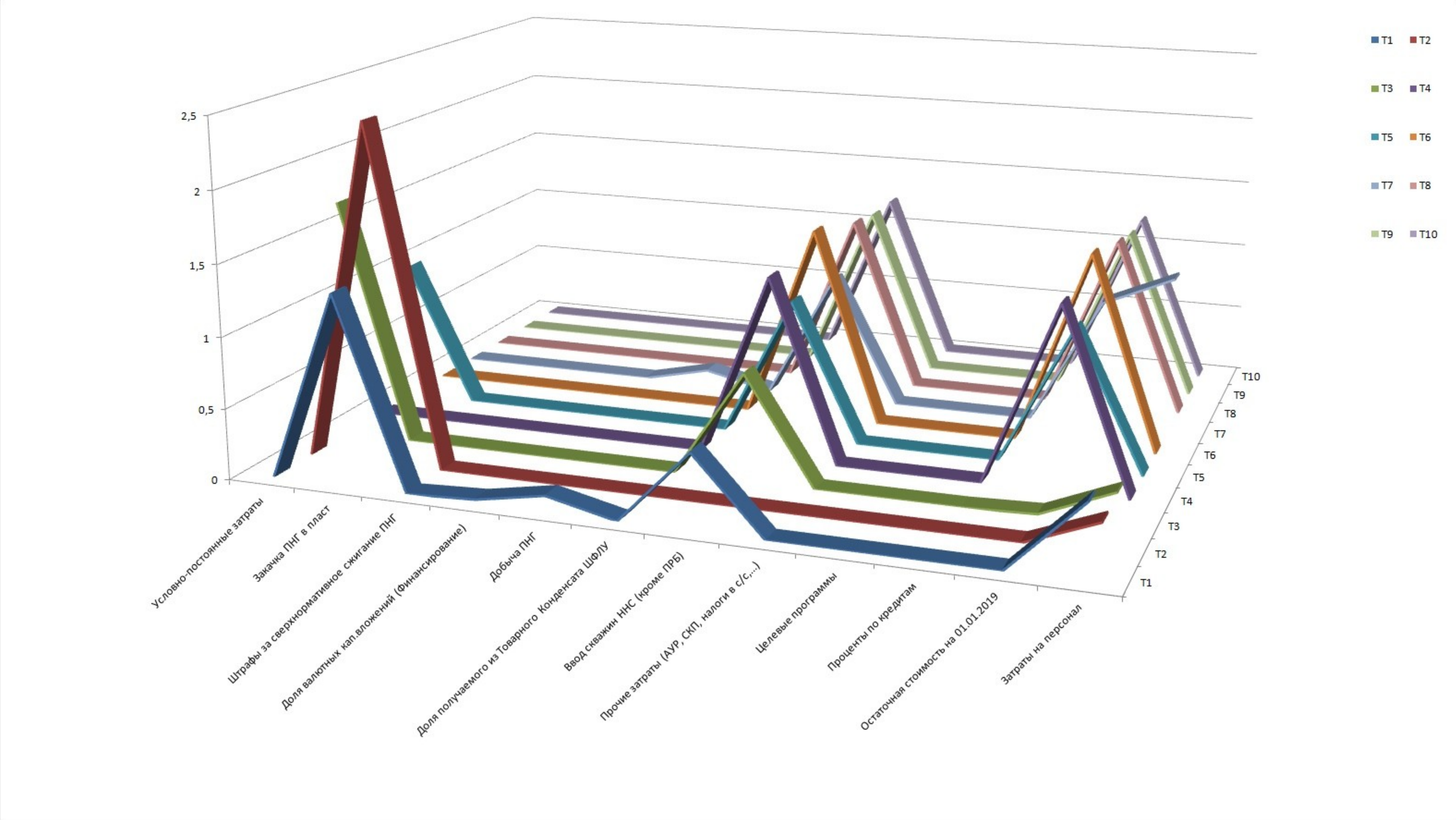

Диаграмма 1. Прогнозируемое вложение денежных ресурсов в производственные факторы (млн.руб.)

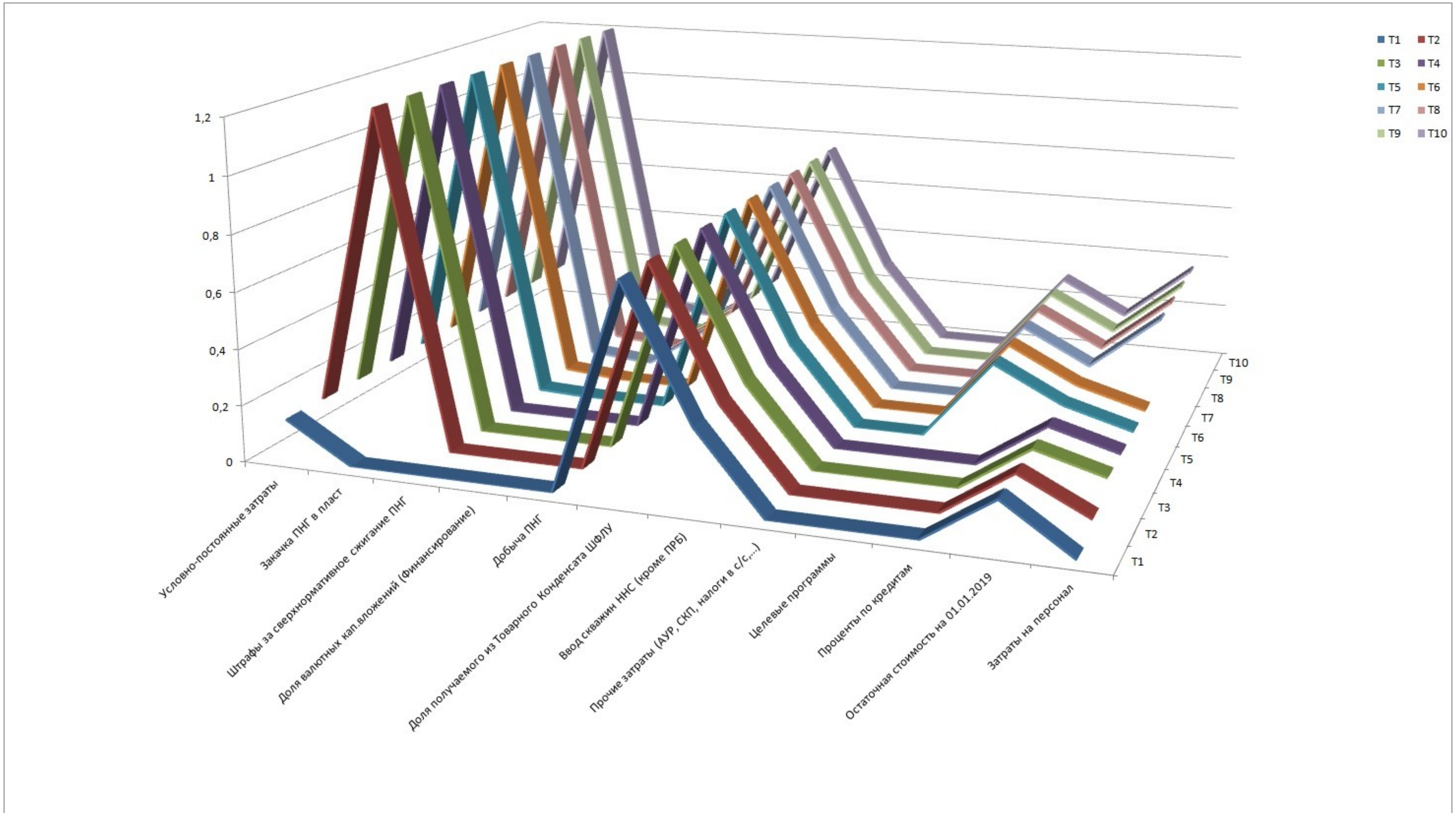

Диаграмма 2. Уровень развития направлений, влияющих на выпуск товарной нефти.

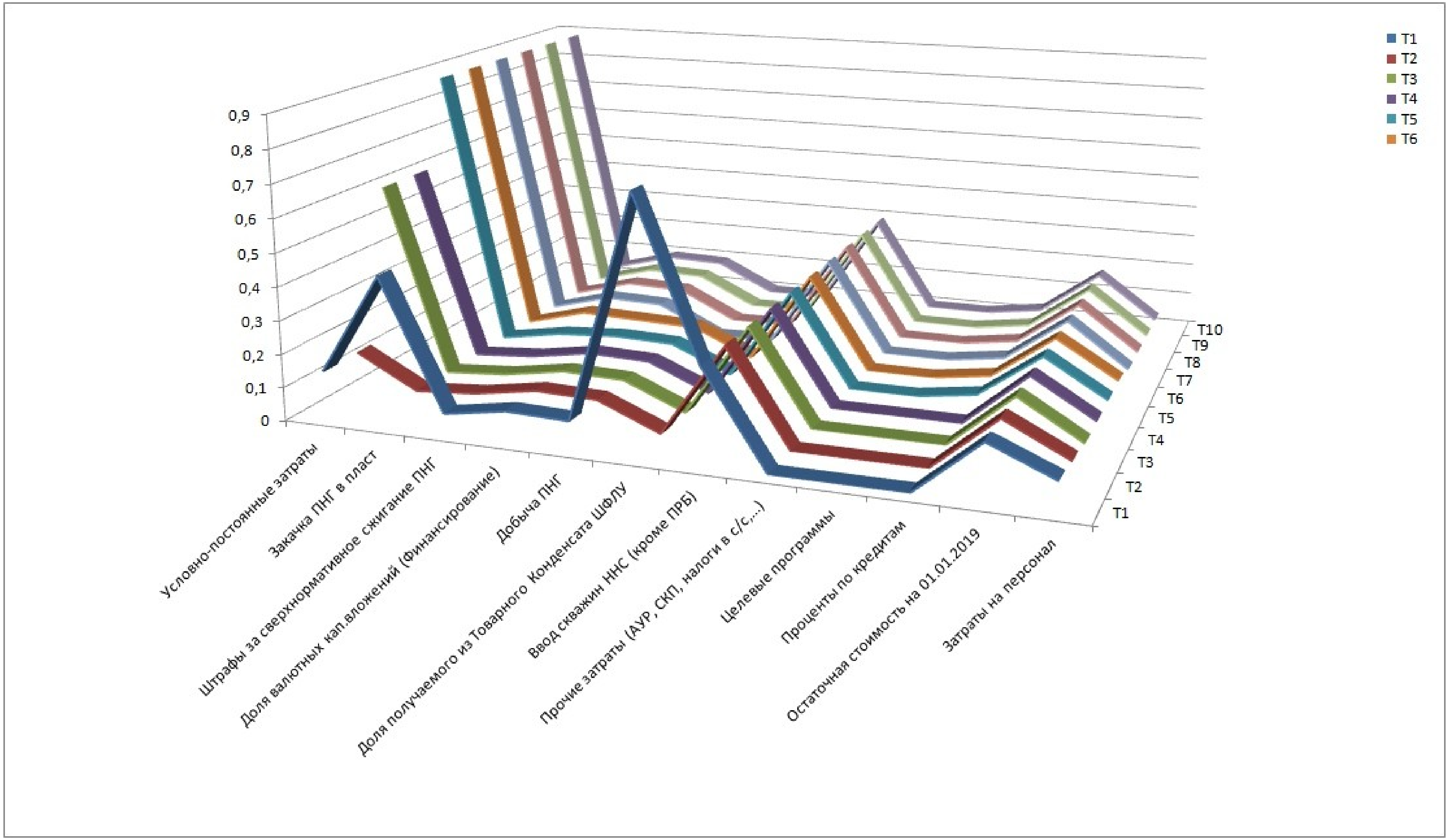

Диаграмма 3. Уровень развития направлений, влияющих на объем чистой прибыли

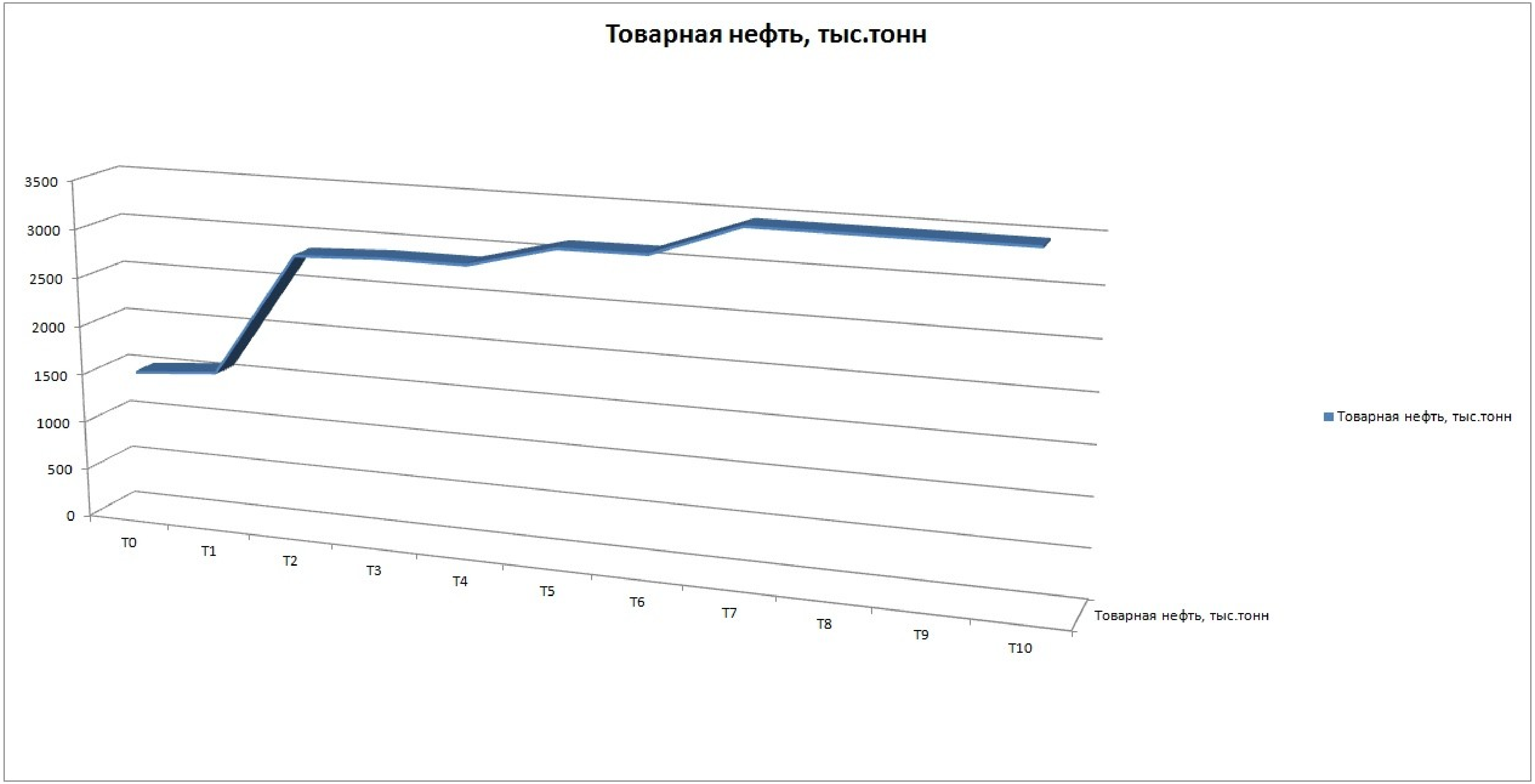

Диаграмма 4. Выпуск товарной нефти

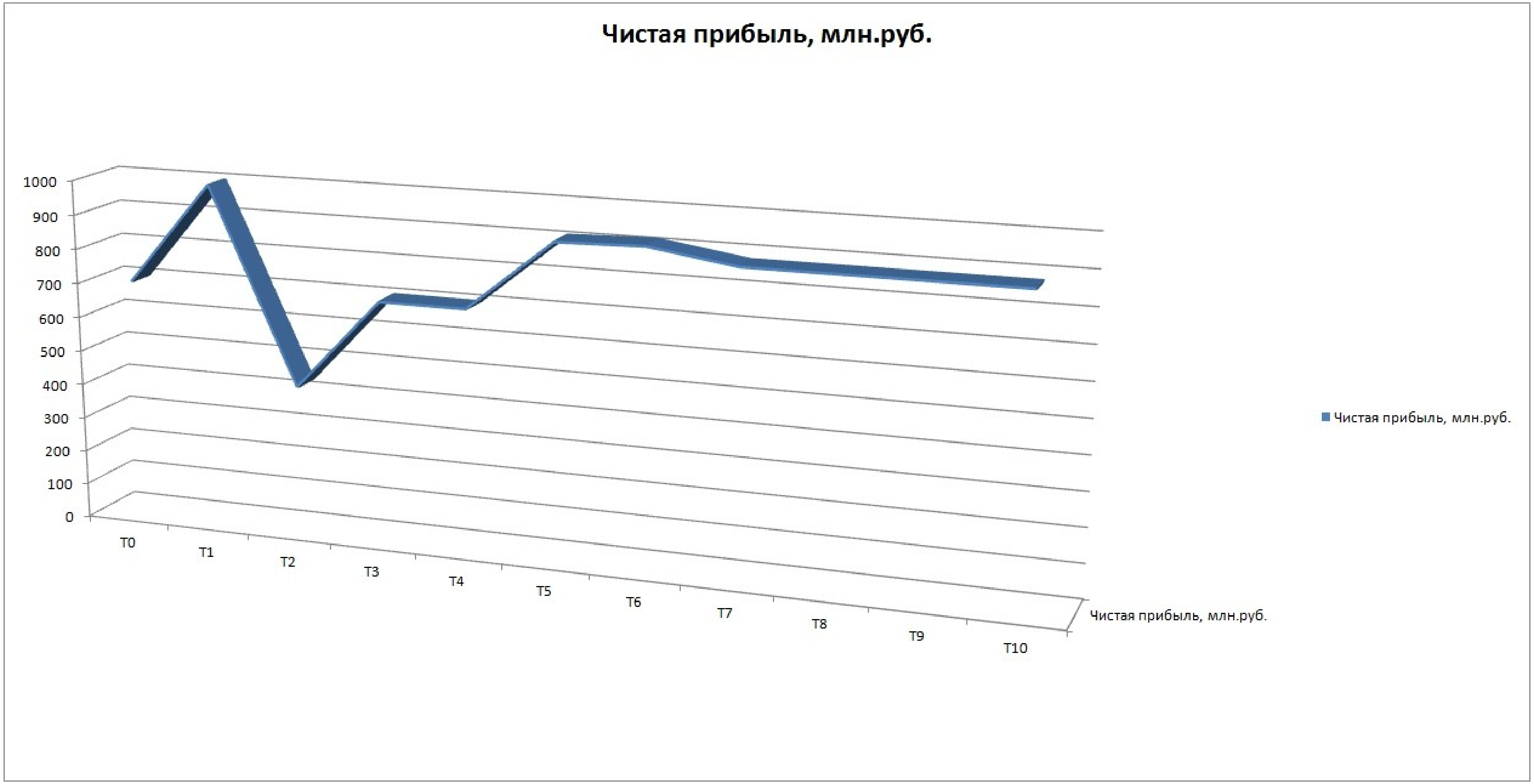

Диаграмма 5. Объем чистой прибыли