

Санкт–Петербургский государственный университет

*Литвинов Никита Константинович*

Выпускная квалификационная работа бакалавра  
*Моделирование пространственного движения  
робота-гексапода*

Уровень образования: бакалавриат

Направление 01.03.02 «Прикладная математика, фундаментальная информатика и программирование»

Основная образовательная программа СВ.5005.2016 «Прикладная математика, фундаментальная информатика и программирование»

Профиль «Механика управляемого движения»

Научный руководитель:

доцент, кафедра механики управляемого движения,  
к.ф. - м.н. Шиманчук Дмитрий Викторович

Рецензент:

главный администратор CRIS-системы СПбГУ  
к.ф. - м.н. Лепихин Тимур Андреевич

Санкт-Петербург

2020 г.

# Содержание

Введение . . . . .	3
Обзор литературы . . . . .	4
Постановка задачи . . . . .	5
<b>Глава 1. Рабочая зона движения ноги . . . . .</b>	<b>7</b>
1.1. Решение прямой задачи кинематики . . . . .	7
1.2. Численное решение обратной задачи кинематики . . . . .	9
1.3. Построение рабочей зоны . . . . .	11
<b>Глава 2. Параметризация инсектоидной походки . . . . .</b>	<b>14</b>
2.1. Фаза переноса . . . . .	14
2.2. Фаза опоры . . . . .	15
2.3. Ограничения длины шага . . . . .	16
<b>Глава 3. Программная реализация походки . . . . .</b>	<b>20</b>
Заключение . . . . .	24
Список литературы . . . . .	25

## Введение

Люди всегда ищут способы облегчить своё существование, создают механизмы и изобретают всё новые методы решения своих повседневных задач, например, чтобы проще было передвигаться было придумано колесо. Затем производились различные его модернизации для увеличения проходимости и комфорта перемещения, перешли к гусеницам и шинам соответственно.

Сейчас технологии позволяют создавать более сложные системы, перекладывать расчёт управления на вычислительные машины, в отличие от механических приводов как, например, в автомобиле. Такими системами являются роботы, в том числе роботы-пауки, которые и рассматриваются в этой работе. Они обладают несравненно более высокими качествами проходимости на твёрдой неровной поверхности нежели другие ходовые системы (в условиях вязкой среды, как, например, болото, естественно будут лучшим решением конструкции с большей площадью сцепления с поверхностью). Они могут передвигаться в любых направлениях, и при этом выполнять другие задачи в труднодоступных местах, применение им можно найти и в простых задачах – перевозка грузов через трудные дороги, например, в горах, но более логично использовать в космосе, когда проблема проходимости решающая и не получится забрать и провести техобслуживание, как на Земле.

Сейчас гексапод можно собрать на базе платы Arduino, что является лидером производства микроплат, однако массовое производство для промышленных нужд не осуществляется.

## Обзор литературы

Существует много исследований как напрямую связанных с задачами движения гексапода, так и решения вспомогательных задач. Также использовались учебные и методические пособия по робототехнике для параметризации модели.

В статье [3] по сути решается та же задача по рабочей зоне ноги робота, построено вертикальное сечение этой зоны. Также на основании уравнений связи между ногами построены расчёты для конкретной физической модели.

Полезный старт работе дала книга [1] по общим положениям современной робототехники, где описаны методы и физические принципы робототехники, использующиеся при аналитическом проектировании любой модели.

В книге [6] представлены численные методы решения систем линейных уравнений, в частности метод Эйлера численного дифференцирования, использующийся в работе. В статье [5] приведён метод построения зависимости параметра траектории от времени для избежания ударов о землю. В статьях [2] и [4] также приведены исследования движения робота-гексапода, что дали полезное представление об известных методах решения связанных с ним задач.

## Постановка задачи

Будем рассматривать гексапод с платформой в виде правильного шестиугольника, где ноги крепятся в его вершинах, изображённый на рис. 1.

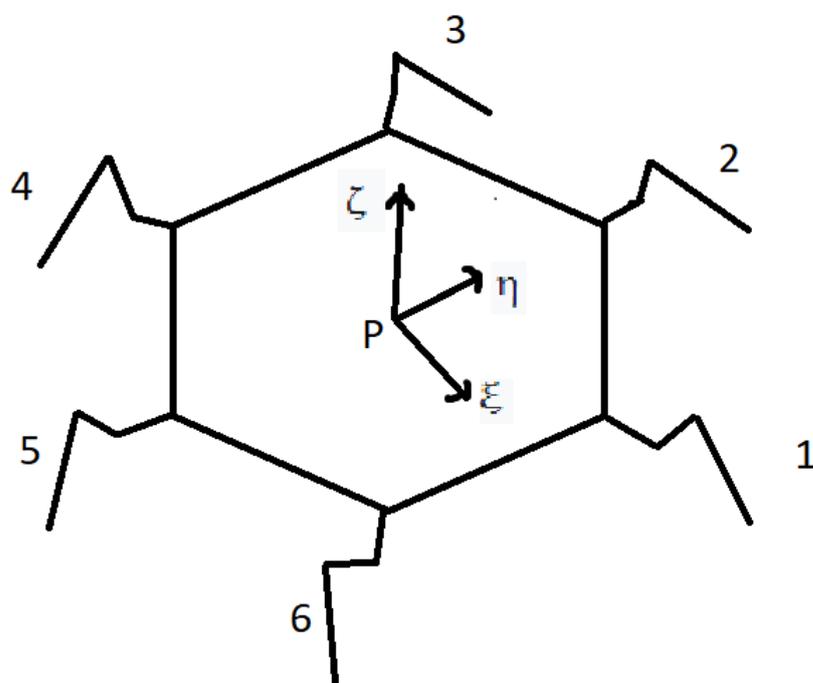


Рис. 1: Схематическое изображение гексапода.

Нога представляет собой трёхзвенный манипулятор с соединениями в виде шарниров, вращающихся вокруг одной оси, и звеньями твёрдыми стержнями. Первый «сустав», назовём его сочленением, крепит ногу к туловищу и вращается с осью перпендикулярно туловищу, далее небольшое горизонтальное промежуточное звено, и два звена, соответственно бедро и голень по удалению от туловища, соединённые между собой и прикреплённые к промежуточному сочленениями с осью параллельными туловищу. схематическое изображение представлено на рис. 2.

Обозначим углы поворота: всей ноги в горизонтальной плоскости (промежуточное звено относительно туловища) как  $\varphi$  отсчитывая от оси  $Oy$ , между промежуточным и бедром как  $\psi$  от оси  $Ox_1$  стрелки и между бедром и голенью как  $\gamma$  от оси  $Ox_2$ , у всех углов положительное направление против часовой стрелки, то есть на рис. 2 показаны положительный угол  $\psi$  и отрицательный  $\gamma$ .

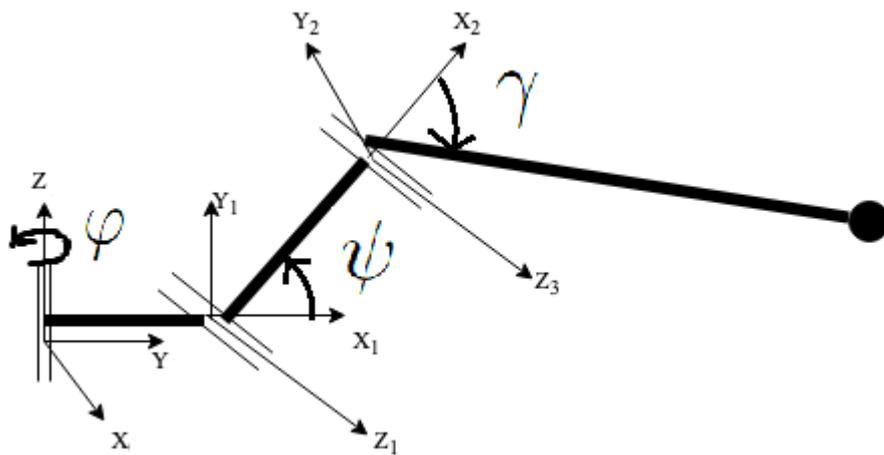


Рис. 2: Схематическое изображение ноги.

В работе ставятся следующие задачи:

- дать оценку рабочей зоны ноги;
- вывести параметризацию шага инсектоидной походки на плоскости в системе координат, жёстко связанной с телом паука через вектор направления  $\vec{p}$ ;
- найти предельные значения длины шага.

Цель работы - программная реализация инсектоидной походки на плоскости.

# Глава 1. Рабочая зона движения ноги

В этой главе строится рабочая зона ноги, для этого требуется найти ограничения для непрерывной разрешимости обратной задачей кинематики, то есть углов через координаты опорной точки, решение которой будем строить через решение прямой, которая состоит из определения координат опорной точки от значений углов.

## 1.1 Решение прямой задачи кинематики

Будем применять метод параметров Денавита-Хартенберга, описанный в [1]. На рис. 2 обозначены системы координат, построенные в соответствии с используемым методом. Параметрам соответствуют значения:

$$d_1 = 0, \quad d_2 = 0,$$

$$a_1 = l_1, \quad a_2 = l_2,$$

$$q_1 = \varphi, \quad q_2 = \psi,$$

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_2 = 0.$$

Построим матрицы перехода в виду

$$T_i = T_{z,q_i} T_{z,d_i} T_{x,a_i} T_{x,\alpha_i}, \quad :$$

$$T_{z,q_i} = \begin{pmatrix} \cos(q_i) & -\sin(q_i) & 0 & 0 \\ \sin(q_i) & \cos(q_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$T_{z,d_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$T_{z,a_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$T_{z,\alpha_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

В (1) - (4) подставляем параметры Денавита-Хартенберга. Заметим что (2) в обоих случаях будут единичными, а во втором случае также и (3), поэтому в итоге:

$$\begin{aligned} T_1 &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & l_1\cos\varphi \\ \sin\varphi & 0 & -\cos\varphi & l_1\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2 &= \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 & l_2\cos\psi \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 & l_2\sin\psi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6) \end{aligned}$$

Из (5) и (6) получаем конечную матрицу перехода из системы индексом 0 в систему с индексом 2 с рис. 2 :

$$T = T_1 \cdot T_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi & -\cos\varphi\sin\psi & \sin\varphi & l_2 \cdot \cos\varphi\cos\psi + l_1 \cdot \cos\varphi \\ \sin\varphi\cos\psi & -\sin\varphi\sin\psi & -\cos\varphi & l_2 \cdot \sin\varphi\cos\psi + l_1 \cdot \sin\varphi \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 & l_2 \cdot \sin\psi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Координаты опорной точки ноги в системе  $O_2x_2y_2z_2$ :

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_3 \cdot \cos\gamma \\ l_3 \cdot \sin\gamma \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Умножая (7) на (8) получим искомое решение прямой задачи, координаты опорной точки через углы в системе координат, неподвижной относительно тела гексапода:

$$x = l_3 \cdot \cos\gamma\cos\varphi\cos\psi - l_3 \cdot \sin\gamma\cos\varphi\sin\psi + l_2 \cdot \cos\varphi\cos\psi + l_1 \cdot \cos\varphi, \quad (9)$$

$$y = l_3 \cdot \cos\gamma\sin\varphi\cos\psi - l_3 \cdot \sin\gamma\sin\varphi\sin\psi + l_2 \cdot \sin\varphi\cos\psi + l_1 \cdot \sin\varphi, \quad (10)$$

$$z = l_3 \cdot \cos\gamma\sin\psi + l_3 \cdot \sin\gamma\cos\psi + l_2 \cdot \sin\psi. \quad (11)$$

## 1.2 Численное решение обратной задачи кинематики

Продифференцируем уравнения прямой задачи (9, 10 и 11), и составим матрицу Якоби частных производных функций координат по углам,

ТО ЕСТЬ:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{dx}{d\varphi} & \frac{dx}{d\psi} & \frac{dx}{d\gamma} \\ \frac{dy}{d\varphi} & \frac{dy}{d\psi} & \frac{dy}{d\gamma} \\ \frac{dz}{d\varphi} & \frac{dz}{d\psi} & \frac{dz}{d\gamma} \end{pmatrix} = \quad (12)$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin\varphi(l_3\cos(\psi + \gamma) + l_2\cos\psi + l_1) & -\cos\varphi(l_3\sin(\psi + \gamma) + l_2\sin\psi) & -l_3\cos\varphi\sin(\psi + \gamma) \\ \cos\varphi(l_3\cos(\psi + \gamma) + l_2\cos\psi + l_1) & -\sin\varphi(l_3\sin(\psi + \gamma) + l_2\sin\psi) & -l_3\sin\varphi\sin(\psi + \gamma) \\ 0 & l_3\cos(\psi + \gamma) + l_2\cos\psi & l_3\cos(\psi + \gamma) \end{pmatrix}.$$

Тогда система зависимостей скоростей опорной точки по осям координат от угловых скоростей в шарнирах запишется как:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix}.$$

Умножив обе части уравнения на матрицу, обратную матрице Якоби, получаем решение обратной задачи кинематики о скоростях:

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}.$$

Применив метод Эйлера численного интегрирования дифференциальных систем уравнений из [6] получим численное решение обратной задачи о положении:

$$\begin{pmatrix} \varphi(t + \delta t) \\ \psi(t + \delta t) \\ \gamma(t + \delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix} + J^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} \cdot \delta t. \quad (13)$$

Решение (13) существует когда существует обратная к матрице Якоби (12), а такая существует тогда и только тогда, когда она невырожденная, то есть её определитель  $\det(J)$  не равен нулю.

Приведя подобные слагаемые в определителе получим:

$$\det(J) = l_3 l_2 (l_3 \cos(\gamma + \psi) + l_2 \cos\psi + l_1) \sin\gamma. \quad (14)$$

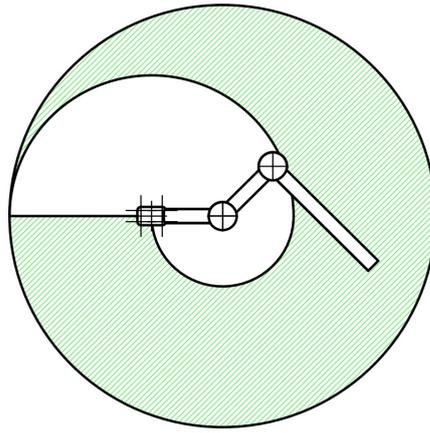
В нашем случае длины звеньев не равняются нулю, а значит для невырожденности должны не равняться нулю третий и четвёртый множители из (14):

$$\begin{cases} \sin\gamma \neq 0, \\ l_3 \cos(\gamma + \psi) + l_2 \cos\psi + l_1 \neq 0. \end{cases} \quad (15)$$

Первое уравнение в совокупности означает что  $\gamma \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$ , а второе есть модуль проекции радиус вектора опорной точки на горизонтальную плоскость в системе  $Oxyz$ , то есть в принятой модели ноги  $\gamma \neq 0, -\pi$  (не складывается и не распрямляется полностью), а опорная точка не заходит на ось  $Oz$ , изображённую на рис. 2.

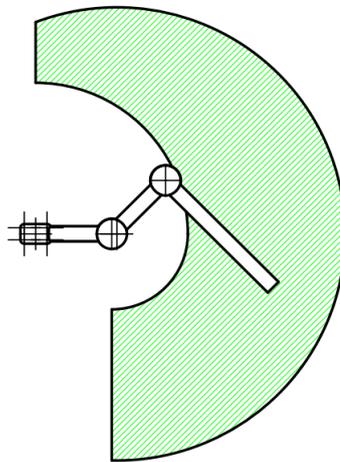
### 1.3 Построение рабочей зоны

Рассматривая рабочую зону ноги чисто геометрически в вертикальном сечении плоскостью ноги, мы получим максимальное ограничение, когда угол  $\gamma$  равен 0 и угол  $\psi$  совершает полный оборот от  $-\pi$  до  $\pi$ , что есть окружность с центром в шарнире между промежуточным звеном и бедром, и радиусом равным сумме длин бедра и голени ( $l_2 + l_3$ ). Минимальное ограничение состоит из двух частей: нижняя часть при  $\gamma = -\pi$  и обороте  $\psi$  от 0 до  $\pi$  в виде дуги окружности с радиусом равным длине голени минус длина бедра ( $l_3 - l_2$ ), а верхняя часть при  $\psi = \pi$  и обороте  $\gamma$  от  $-\pi$  до 0 в виде дуги окружности с радиусом равным длине голени  $l_3$ . Такой набор ограничений определяет область, изображённую на рис. (3).



**Рис. 3:** Вертикальное сечение рабочей зоны.

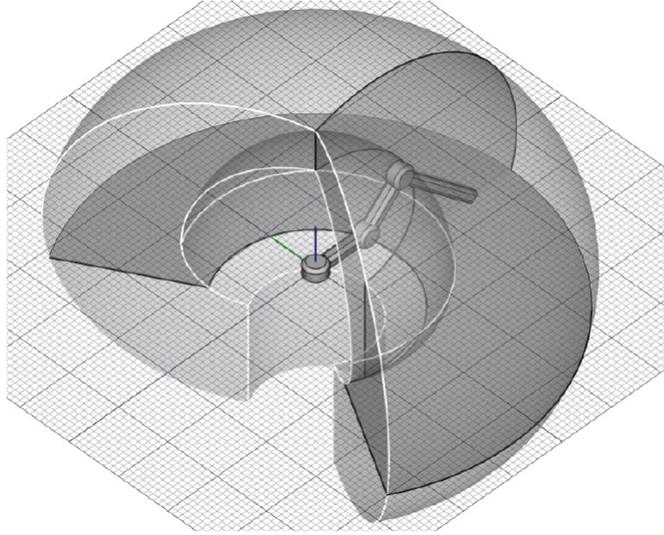
Далее, из соображений устойчивости отсекаем часть, которая заводит опорную точку под промежуточное звено, и часть над телом паука, основываясь на втором ограничении из (15). Получаем область на рис. 4. Все дуги окружностей в получившейся фигуре не включаются в рабочую зону из первого ограничения из (15), то есть из всех границ включается только нижняя вертикальная черта под средним шарниром.



**Рис. 4:** Вертикальное сечение рабочей зоны.

Добавим вращения этой зоны по углу  $\varphi$  и получим рабочую зону в пространстве (рис. 5)

Ограничения на угол поворота относительно корпуса накладываются исходя из размеров корпуса, то есть угла между двумя его краями, в на-



**Рис. 5:** Рабочая зона в трёхмерном пространстве.

шей задаче это  $\frac{4\pi}{3}$ , следовательно  $|\varphi_{max}| = \frac{2\pi}{3}$ . А также дополнительные ограничения могут накладываться связи между ногами, то есть когда соседние ноги заходят в рабочую зону рассматриваемой, когда расстояние между креплениями ног меньше  $2(l_1 + l_2 + l_3)$ . В этом случае  $|\varphi_{max}| = \frac{2\pi}{3} - \arccos\left(\frac{R^2}{2(l_1+l_2+l_3)R}\right)$ , где  $R$  есть расстояние между местами крепления ног.

## Глава 2. Параметризация инсектоидной походки

Походку можно реализовать многими вариантами, например когда движется только одна нога за раз, но мы рассмотрим схему на плоскости по трёшкам: когда три ноги через одну по кругу являются опорными, а три другие находятся в воздухе, соответственно для каждой ноги шаг состоит из двух фаз: переноса и опоры. Конечный путь и период в обоих фазах на плоскости должен быть одинаков чтобы замкнуть цикл между трёшками.

### 2.1 Фаза переноса

Возьмём траекторию фазы переноса в виде полуэллипса с высотой  $h$  и основанием  $l$ , запишем уравнение полуэллипса в системе координат  $O_p y_p x_p$ , где ось  $O_p y_p$  сонаправлена оси  $Oz$ , ось  $O_p x_p$  сонаправлена направляющему вектору  $\vec{p}$ , а  $O_p$  совпадает с начальным положением опорной точки.

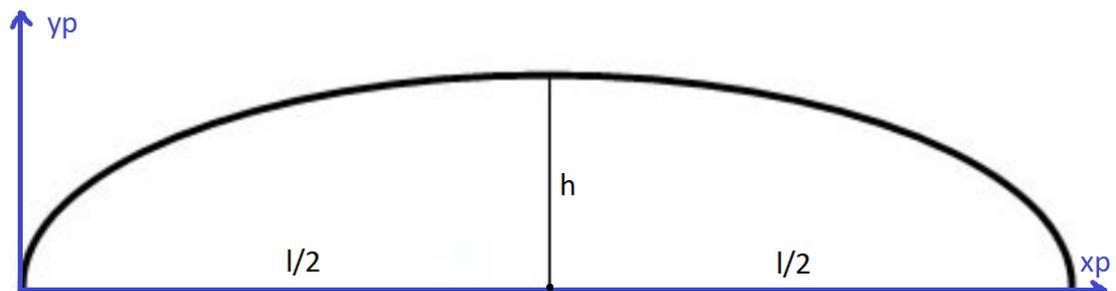


Рис. 6: Траектория фазы переноса.

Параметризуем траекторию в системе координат  $O_p x_p y_p$ :

$$\begin{cases} x_p = \frac{l}{2} + \frac{l}{2} \cos \tau, \\ y_p = -h \sin \tau, \end{cases} \quad (16)$$

где параметр  $\tau \in [-\pi, 0]$ .

Переведём эти уравнения в систему координат, жёстко связанную с

телом паука  $Oxyz$  с ортами  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  (с рис. 2):

$$\begin{cases} x = (\frac{l}{2} + \frac{l}{2}\cos\tau)\cos(\widehat{\vec{p}, \vec{i}}) + x_0, \\ y = (\frac{l}{2} + \frac{l}{2}\cos\tau)\cos(\widehat{\vec{p}, \vec{j}}) + y_0, \\ z = -h\sin\tau + z_0. \end{cases}$$

Здесь  $x_0, y_0, z_0$  есть координаты опорной точки в начальный момент времени.

Для использования метода Эйлера (13) продифференцируем (17):

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{l}{2}\dot{\tau}\sin\tau\cos(\widehat{\vec{p}, \vec{i}}), \\ \dot{y} = -\frac{l}{2}\dot{\tau}\sin\tau\cos(\widehat{\vec{p}, \vec{j}}), \\ \dot{z} = -h\dot{\tau}\cos\tau. \end{cases}$$

Возьмём  $\tau = \frac{-\pi}{2}(1 + \cos\frac{\pi t}{T})$  где  $t \in [0, T]$ ,  $T$  - время одной фазы, совпадает с фазой опоры. Такой выбор сделан на основе [5] для обеспечения нулевой скорости в момент соприкосновения ноги с землёй (отсутствие удара). Скорости по осям  $Ox$  и  $Oy$  обнуляются вне зависимости от вида параметра, за счёт равенства нулю синуса, покажем равенство нулю скорости по оси  $Oz$  в конце шага:

$$\dot{z}(T) = -h\frac{\pi}{2}\frac{\pi}{T}\sin(\frac{\pi T}{T})\cos(\frac{\pi}{2}(1+\cos\frac{\pi T}{T})) = -\frac{h\pi^2}{2T}\sin(\pi)\cos(\frac{\pi}{2}(1+\cos\pi)) = 0.$$

Значит в момент времени  $T$  нога приходит с нулевой скоростью по абсолютному значению, так как равны нулю её проекции на все оси.

## 2.2 Фаза опоры

В фазе опоры траектория движения опорной точки представляет собой отрезок прямой, лежащий в горизонтальной плоскости. Движение по нему задаётся с таким же параметром, что и в фазе переноса (16), то есть пройденный путь равен  $s(\tau) = \frac{l}{2} + \frac{l}{2}\cos\tau$  от начальной точки, но только в направлении, обратном направлению вектора  $\vec{p}$ .

Можем сразу записать в системе координат  $Oxyz$  с рис. 2 как:

$$\begin{cases} x = x_0 + (\frac{l}{2}\cos\tau + \frac{l}{2})\cos(\widehat{\vec{-p}, \vec{i}}), \\ y = y_0 + (\frac{l}{2}\cos\tau + \frac{l}{2})\cos(\widehat{\vec{-p}, \vec{j}}), \\ z = z_0. \end{cases} \quad (17)$$

Для использования метода Эйлера (13) необходимо продифференцировать (17):

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{l}{2}\dot{\tau}\sin\tau\cos(\widehat{\vec{-p}, \vec{i}}), \\ \dot{y} = -\frac{l}{2}\dot{\tau}\sin\tau\cos(\widehat{\vec{-p}, \vec{j}}), \\ \dot{z} = 0. \end{cases}$$

Таким образом готова параметризация полного цикла шага, теперь встаёт вопрос ограничений для размеров шага, то есть высоты  $h$  и длины  $l$  (заметим что высота платформы над землёй  $-z_0 > 0$ ).

### 2.3 Ограничения длины шага

Пусть начальное положение задаётся радиус вектором  $r_0^{\vec{}}$ , тогда конечное положение задаётся суммой векторов:

$$\vec{r} = r_0^{\vec{}} + \frac{l}{|\vec{p}|}\vec{p}, \quad (18)$$

где  $l$  длина шага, а  $\vec{p}$  вектор направления.

Горизонтальное сечение рабочей зоны в зависимости от текущей координаты  $z$  опорной точки задаётся уравнениями (игнорируем всё что находится ближе второго шарнира к центру паука, так как при таком виде

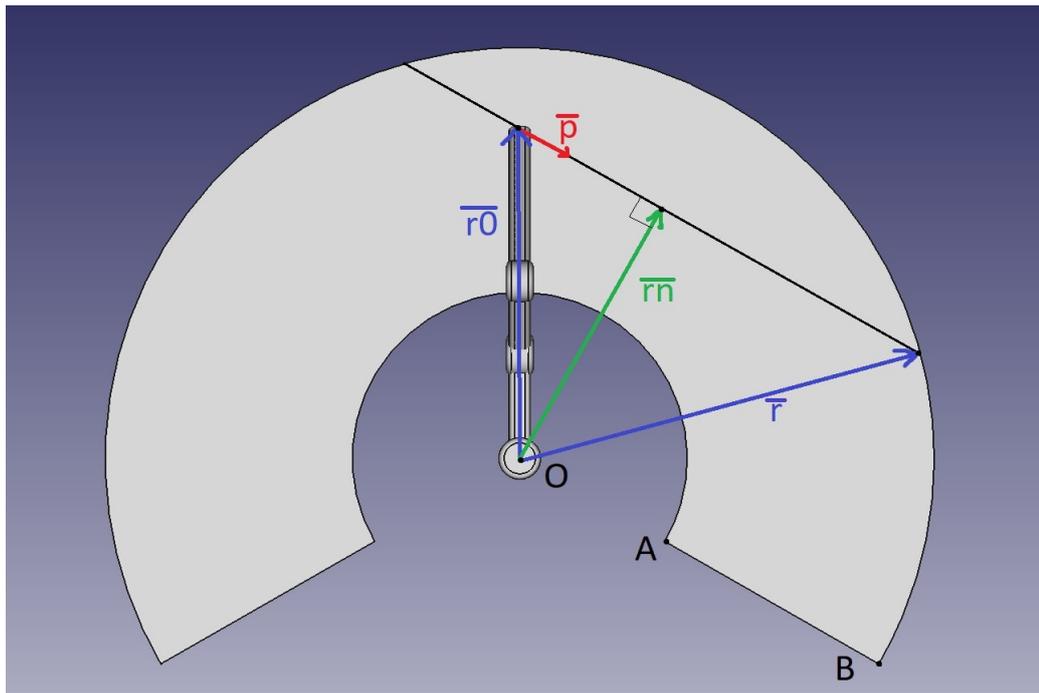
шага эта область затрагиваться не будет):

$$OA(z) = \begin{cases} l_1, & -(l_2 + l_3) \leq z < l_2 - l_3; \\ \sqrt{(l_3 - l_2)^2 - z^2} + l_1, & l_2 - l_3 \leq z < 0; \\ \sqrt{l_3^2 - z^2} + (l_1 - l_2), & 0 \leq z < l_3; \\ l_1, & l_3 \leq z \leq l_2 + l_3; \end{cases} \quad (19)$$

$$OB(z) = \sqrt{(l_3 + l_2)^2 - z^2} + l_1, \quad -(l_2 + l_3) \leq z \leq l_2 + l_3; \quad (20)$$

$$\cos(\widehat{\vec{r}, \vec{j}}) < \cos\varphi_{max}. \quad (21)$$

Уравнения (19), (20) и (21) однозначно задают ограничение рабочей зоны на уровне опорной точки, что изображено на рис. 7.



**Рис. 7:** Горизонтальное сечение рабочей зоны.

Найдём максимальное  $l$  из (18), для этого найдём сначала вектор перпендикуляра из начала координат до прямой, задаваемой вектором на-

правления:

$$|\vec{r}_n| = \frac{|(-\vec{r}_0) \times \vec{p}|}{|\vec{p}|},$$

$$\vec{r}_n = \vec{r}_0 + m\vec{p},$$

$$|m| = \frac{\sqrt{|\vec{r}_0|^2 - |\vec{r}_n|^2}}{|\vec{p}|},$$

Если он больше  $OA(z_0)$  (19) тогда  $|\vec{r}|$  равно  $OB(z_0)$  (20) и справедливо

$$\vec{r} = \vec{r}_n + k\vec{p},$$

$$|k| = \frac{\sqrt{OB(z_0)^2 + z_0^2 - |\vec{r}_n|^2}}{|\vec{p}|},$$

если  $|\vec{r}_n|$  меньше (19), тогда

$$\vec{r} = \vec{r}_n + q\vec{p},$$

$$|q| = \frac{\sqrt{OA(z_0)^2 + z_0^2 - |\vec{r}_n|^2}}{|\vec{p}|}.$$

Знаки коэффициентов определяются относительным направлением вектора  $\vec{p}$ .

Также следует проверить условие (21), для этого находим радиус вектор по формуле (18) с найденным ранее  $l_{max}$ , и пересчитываем новую длину шага, взяв  $\vec{r}$  как точку пересечения двух прямых:  $\vec{r} = a\vec{p} + \vec{r}_0$  и  $\vec{r} = b\vec{c}$ , где  $\vec{c}$  такой, что  $\cos(\widehat{\vec{j}, \vec{c}}) = \cos(\varphi_{max})$ . Тогда алгоритм для фазы опоры:

if  $\cos(\widehat{-\vec{r}_0, \vec{p}}) \leq 0$   $\square$

$$l_{max} = (|k| - |m|)|\vec{p}| \square;$$

else  $\square$

if  $|\vec{r}_n| > \sqrt{OA(z_0)^2 + z_0^2}$   $\blacksquare$

$$l_{max} = (|k| + |m|)|\vec{p}| \blacksquare;$$

else  $\blacksquare$

$$l_{max} = (|m| - |q|)|\vec{p}| \blacksquare;$$

$\square$ ;

if  $\cos(\widehat{\vec{r}, \vec{j}}) < \cos\varphi_{max}$   $\square$

$$l_{max} = \frac{r_{0x}\cos\varphi_{max} + r_{0y}\cos(\varphi_{max} - \frac{\pi}{2})}{p_{0x}\cos\varphi_{max} + p_{0y}\cos(\varphi_{max} - \frac{\pi}{2})} \cdot |\vec{p}| \square.$$

Для фазы переноса алгоритм должен быть модернизирован, так как необязательно сохранять целостность отрезка и можно перейти над минимальным ограничением (19):

if  $\cos(\widehat{-\vec{r}_0, \vec{p}}) \leq 0$   $\square$

$$l_{max} = (|k| - |m|)|\vec{p}| \square;$$

else  $\square$

$$l_{max} = (|k| + |m|)|\vec{p}| \square;$$

if  $\cos(\widehat{\vec{r}, \vec{j}}) < \cos\varphi_{max}$   $\square$

$$l_{max} = \frac{r_{0x}\cos\varphi_{max} + r_{0y}\cos(\varphi_{max} - \frac{\pi}{2})}{p_{0x}\cos\varphi_{max} + p_{0y}\cos(\varphi_{max} - \frac{\pi}{2})} \cdot |\vec{p}|;$$

if  $|\vec{r}| > OA(z_0) + z_0^2$   $\blacksquare$

$$l_{max} = (|m| - |q|)|\vec{p}| \blacksquare;$$

$\square$ .

При этом в случае  $|\vec{r}_n| \leq \sqrt{OA(z_0)^2 + z_0^2}$  нужно убрать из рассмотрения промежутки в котором результирующий  $|\vec{r}| \leq \sqrt{OA(z_0) + z_0^2}$ , а при  $\cos(\widehat{\vec{r}, \vec{j}}) < \cos(\widehat{\vec{r}_n, \vec{j}})$  ещё и все  $|\vec{r}| \leq OA(0)$

Все максимальные длины кроме случая превышения  $\varphi_{max}$  не включаются, так как на этих границах рабочей зоны неразрешима обратная задача из-за условий (15).

### Глава 3. Программная реализация походки

Рассматриваем модель гексапода с параметрами:

$l_1 = 1, l_2 = 1, l_3 = 2$  длины звеньев ноги,

$\varphi_0 = 0, \psi_0 = \frac{\pi}{4}, \gamma_0 = -\frac{3\pi}{4}$  начальные значения углов (одинаковы для всех ног),

$R = 2$  расстояние между креплениями ног,

$T = 1$  период одной фазы.

Вектор начального положения ноги в системе  $Oxyz$  на рис. 2 и высота платформы над землёй рассчитывается исходя из начальных значений углов и длин звеньев. В нашем случае  $H \approx 1.29$ .

Для вычислений нам также понадобится матрица перехода из системы координат связанной с ногой в общую систему гексапода ( $A\xi\eta\zeta$  на рис. 1), то есть параллельный сдвиг до места крепления на  $R$  и поворот на  $\alpha(n) = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}(n - 1)$ :

$$T(n) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & R\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & R\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

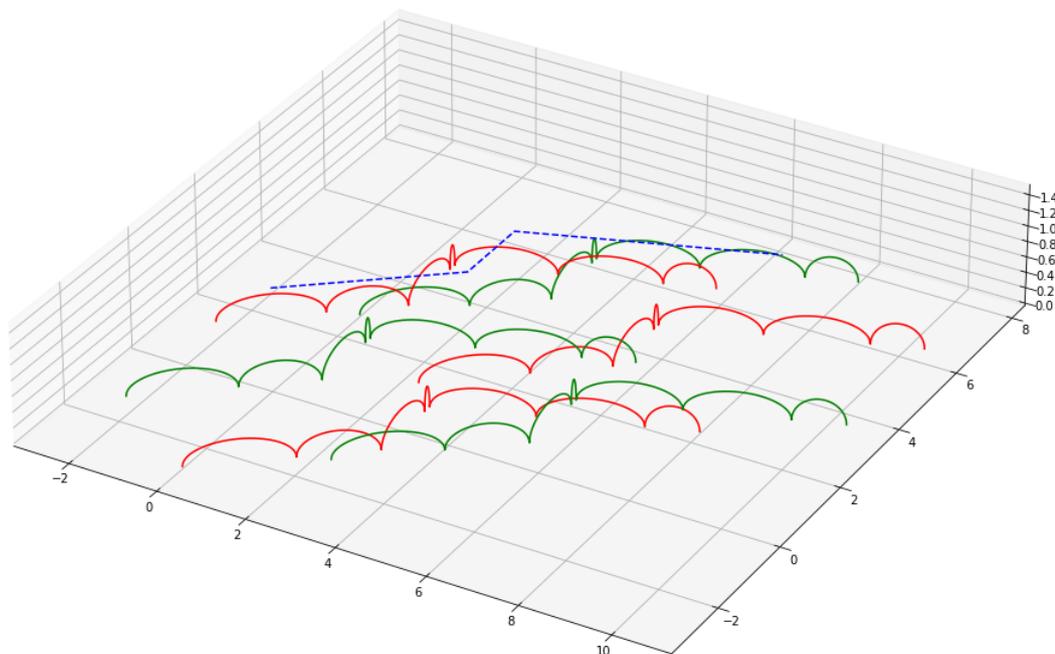
где  $n$  – номер ноги.

Принимаем, что оси координат системы  $A\xi\eta\zeta$ , жёстко связанной с телом гексапода, сонаправлены осям абсолютной системы координат. Для демонстрации работоспособности модели (то есть выведенной параметризации) осуществим последовательный проход по точкам  $[0, 0, H]$ ,  $[3, 2, H]$ ,  $[3, 3.5, H]$ ,  $[8, 5, H]$  в абсолютной системе координат. Имеется в виду, что в начальный момент времени полюс гексапода точка  $A$  находится в первой точке и в процессе движения достигает каждой следующей по порядку.

Для каждой ноги рассчитываем максимальный шаг (берём 0.95 этой величины в случае когда опорная точка оказывается на невключаемой границе) и выбираем как общий для всех минимальный из полученных. В случае когда двойная величина шага (так как перемещение платформы есть длина фазы переноса первой трёшки плюс та же длина второй трёшки)

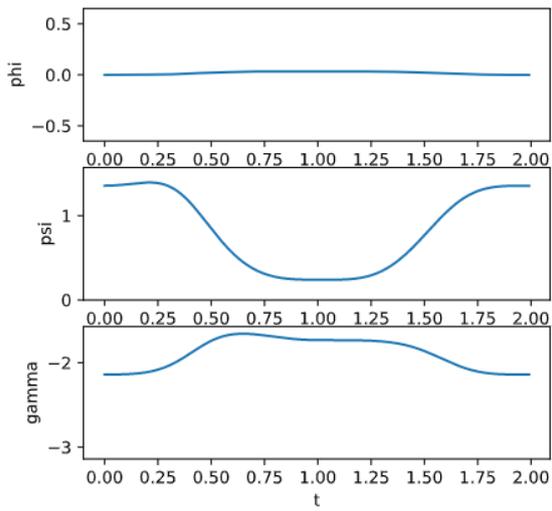
превышает оставшееся расстояние до следующей точки, берём половину этого расстояния. Высоту шага берём  $h = H - (l_3 - l_2) \approx 0.29$  (чтобы выполнялись ограничения 19).

Траектории всех ног и центра гексапода в процессе движения изображены на рис. 8, где зелёным обозначены траектории ног первой трёшки, красным – второй, а пунктирной линией – центра гексапода.

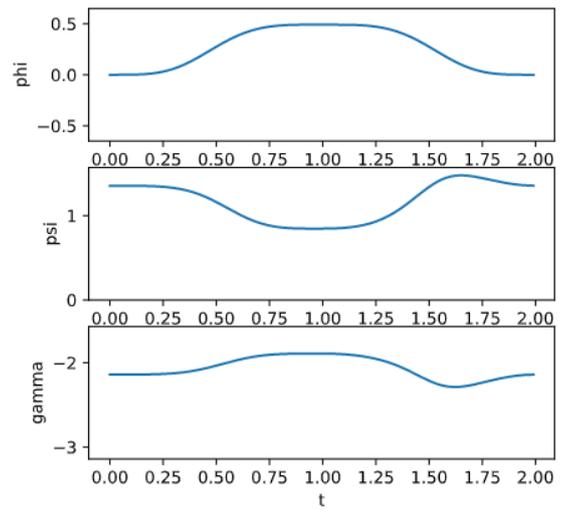


**Рис. 8:** Визуализация походки

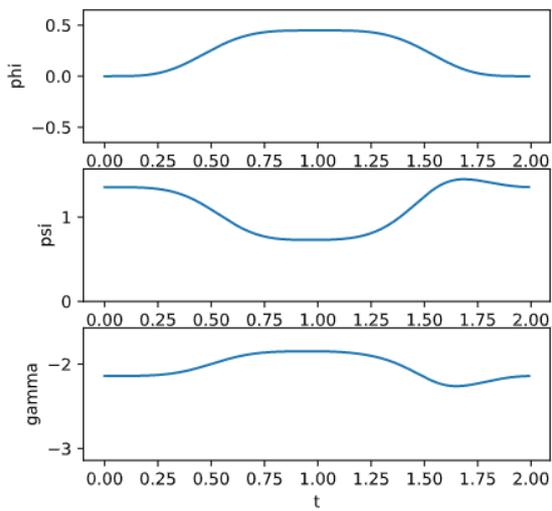
На рис. 9, 12 и 13 изображены графики изменения углов ног из первой трёшки во время первого шага с рис. 8, для них от 0 до 1 идёт фаза переноса, а от 1 до 2 – фаза опоры. На рис. 10, 11 и 14 изображены графики изменения углов второй трёшки, для них фазы меняются местами. Промежутки на оси ординат  $[-\varphi_{max}, \varphi_{max}]$  для  $\varphi$ ,  $[0, \frac{\pi}{2}]$  для  $\psi$ ,  $(-\pi, -\frac{\pi}{2}]$  для  $\gamma$ .



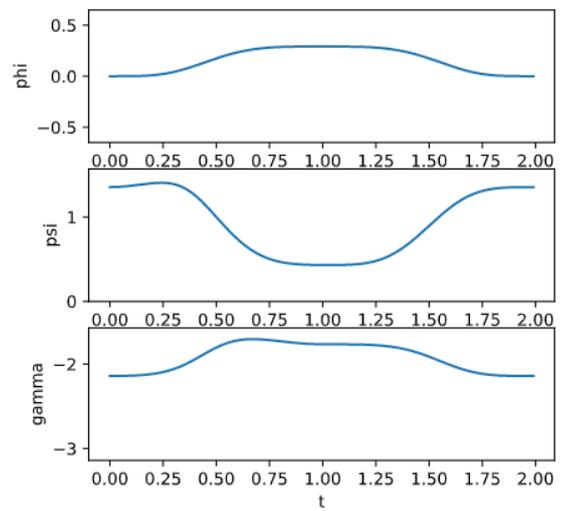
**Рис. 9:** Изменение углов 1й ноги



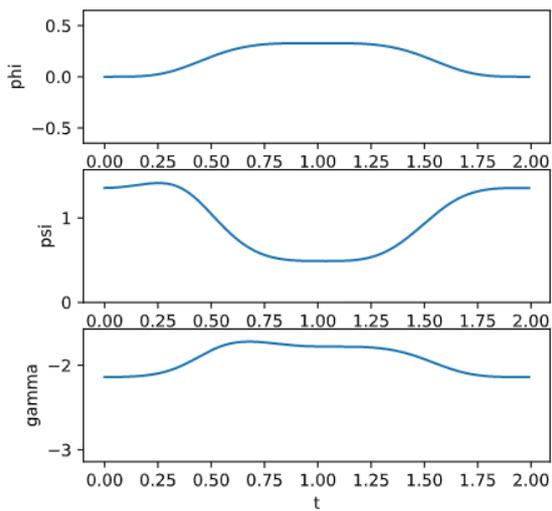
**Рис. 10:** Изменение углов 6й ноги



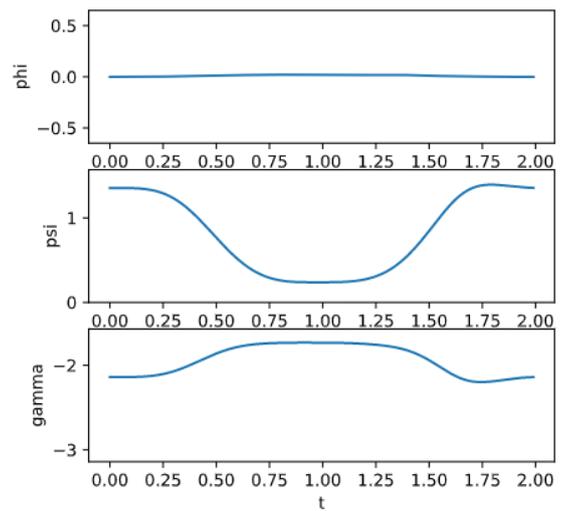
**Рис. 11:** Изменение углов 2й ноги



**Рис. 12:** Изменение углов 5й ноги



**Рис. 13:** Изменение углов 3й ноги



**Рис. 14:** Изменение углов 4й ноги

Используя полученные результаты реализации, можно осуществить движение физической модели гексапода на плоскости. Программа выполнена на языке Python 3.7.

## Заключение

В ходе исследования:

- решена прямая задача кинематики для ноги;
- представлено численное решение обратной задачи кинематики для ноги гексапода;
- построена пространственная рабочая зона для ноги относительно тела гексапода, согласованная с численной разрешимостью обратной задачи;
- представлена параметризация шага инсектоидной походки, обеспечивающая отсутствие удара при соприкосновении с землёй на плоскости;
- получены ограничения на длину шага.

Цель работы выполнена – реализована программа для расчёта углов и траекторий для инсектоидной походки на плоскости.

Полученные результаты являются базой для построения алгоритмов движения робота-гексапода на неровной поверхности.

## Список литературы

- [1] Борисов О.И., Громов В.С., Пыркин А.А., «Методы управления робототехническими приложениями. Учебное пособие». СПб.: Университет ИТМО, 2016, 108 с.
- [2] V. M. Budanov, «Algorithms of motion planning for a six-legged walking machine», // *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, vol. 11 (2005), no. 7, pp. 197–206.
- [3] В. В. Михайлова, Т. Н. Соловьева, В. П. Попов, «Моделирование кинематики шагающего робота»// *Информационно управляющие системы*, №6 (2015), с. 50-56.
- [4] Фокин В.Г., Шаныгин С.В. «Структура системы управления шестиногого шагающего робота Гексабот»// *Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ»* Том 8, №5 (2016)
- [5] Павловский В. Е., Панченко А. В. «Модели и алгоритм управления движением малого шестиногого робота»// *Мехатроника, автоматизация, управление*. — 2012. — № 11. — С. 23–28
- [6] Пименов В.Г., Ложников А.Б. «Численные методы. Часть 2.»Издательство Уральского университета, 2014