Санкт–Петербургский государственный университет

ЖИГАЛОВ Валентин Сергеевич

Выпускная квалификационная работа

Анализ перерегулирования линейных управляемых систем

Уровень образования: бакалавриат
Направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
Основная образовательная программа СВ.5005.2015 «Прикладная математика, фундаментальная информатика и программирование»
Профиль «Прикладная математика, информатика и процессы управления»

Научный руководитель:
профессор, кафедра теории управления,
д.ф. - м.н. Жабко Алексей Петрович

Рецензент:
доцент, кафедра моделирования экономических систем, к.ф. - м.н. Екимов Александр Валерьевич

Санкт-Петербург
2020 г.

Содержание

Введение

В данной работе рассматриваются система линейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\dot{x} = Ax, \tag{1}$$

обладающая свойством экспоненциальной устойчивости и уравнение второго порядка с запаздывающим аргументом вида

$$\ddot{x}(t) = -kx(t) + \epsilon x(t-h). \tag{2}$$

Определение. *[1] Перерегулирование системы (1) - это величина*

$$\gamma = \max_{t \geqslant 0, ||x||=1} ||Y(t)x||,$$

где $Y(t)$ — фундаментальная матрица системы (1), такая что $Y(0) = E$.

Для системы (1) решается задача использования для вычисления величины перерегулирования матрицы V, решения матричного уравнения Ляпунова

$$A^T V + VA = -W. \tag{3}$$

Для уравнения (2) решается задача нахождения области асимптотической устойчивости в пространстве (k, ϵ) и нахождения величины перерегулирования в зависимости от k и ϵ, которая в данном случае определяется следующим образом:

$$\gamma : ||x(t, x_0)|| \leqslant \gamma ||x_0|| \exp(-\sigma t), \sigma > 0.$$

Обе задачи являются актуальными при моделировании динамических процессов с учетом ограничений на конфигурационные переменные. В работах [2–4] перерегулирование либо учитывается явно, либо необходимо разрабатывать методы для выполнения ограничений на фазовые переменные.

Глава 1. Уравнения с отклоняющимся аргументом

В данной главе рассматриваются дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом вида (2) и решается задача нахождения области асимптотической устойчивости и величины перерегулирования в пространстве (k, ϵ).

Для решения данной задачи, по [5], можно использовать метод D–разбиений. Для начала выясним, при каких значениях k и ϵ характеристический квазиполином уравнения (2)

$$\lambda^2 + k - \epsilon e^{-\lambda} \tag{4}$$

имеет корни на мнимой оси.

После непосредственной подстановки $\lambda = i\omega$ получаем, что квазиполином (4) имеет корни на мнимой оси при

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \epsilon = 0 \\ k \geqslant 0 \end{cases} \\ k = (-1)^n \epsilon + \pi^2 n^2, n \in Z. \end{array}\right. \tag{5}$$

Основываясь на рассуждениях из [5], получаем, что область устойчивости уравнения (2) заключена между прямыми (5), образуя последовательность треугольников, как показано на рис. 1:

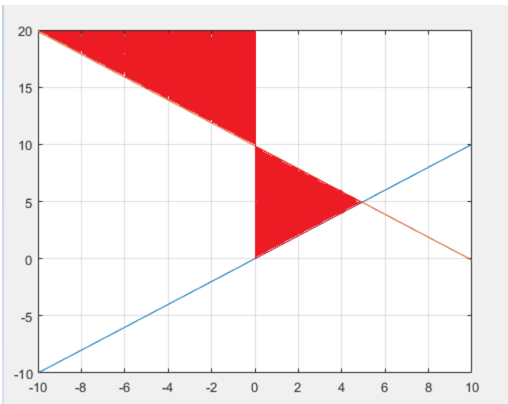

Рис. 1: Область устойчивости уравнения

Для решения задачи определения γ для уравнения (2) было решено обратиться к решению проблемы для систем (1).

Глава 2. Анализ перерегулирования в линейных системах

В данной главе рассматривается система дифференциальных уравнений второго порядка (1). Предположим, что система (1) экспоненциально устойчива. Требуется вычислить величину γ, а также изучить метод нахождения этой величины с использованием матрицы Ляпунова V.

2.1 Предварительные рассуждения

В данном разделе матрица системы (1) приводится к упрощенному виду и накладываются ограничения на получившиеся после приведения параметры.

Для начала отметим, что данное приведение нужно для уменьшения количества параметров, от которых будет зависеть γ. Представим матрицу системы (1) в виде

$$A = Q + P,$$

где

$$Q = \frac{1}{2}\Big(A + A^T\Big), \quad P = \frac{1}{2}\Big(A - A^T\Big).$$

С помощью преобразования

$$x = Sy,$$

которое сохраняет значение γ, получим

$$\dot{y} = S^T ASy = S^T QSy + S^T PSy, \tag{6}$$

где S — ортогональная матрица, такая что жорданова форма матрицы $J_Q = S^{-1}QS$. Из асимптотической устойчивости системы (1) следует, что сумма собственных чисел матрицы Q меньше нуля, поэтому

$$J_Q = \begin{pmatrix} -\alpha + \widetilde{\nu} & 0 \\ 0 & -\alpha - \widetilde{\nu} \end{pmatrix},$$

где $\alpha > 0$. Соответственно, матрица P ввиду кососимметричности после преобразования (6) примет вид

$$S^T P S = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{\beta} \\ -\widetilde{\beta} & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее выполним преобразование переменной $t = \dfrac{\tau}{\alpha}$, также не меняющее значения γ. В итоге получим систему

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} -1+\nu & \beta \\ -\beta & -1-\nu \end{pmatrix} z. \tag{7}$$

Матрица системы (7) зависит от параметров ν и β. Следовательно, и значение γ будет зависеть от этих двух параметров. Поэтому можно считать целесообразным использование в дальнейшем матрицы системы (7).

2.2 Ограничения на параметры

Первое ограничение связано с экспоненциальной устойчивостью системы. Характеристический полином матрицы системы (5) имеет вид

$$\phi(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 - \nu^2 + \beta^2$$

Из теоремы Стодолы о необходимом, а в случае систем второго порядка, и достаточном условии асимптотической устойчивости линейных однородных систем дифференциальных уравнений следует

$$1 - \nu^2 + \beta^2 > 0.$$

Далее, не умаляя общности, можно считать $\beta > 0$ и $\nu \geqslant 0$. Следующее ограничение связано с производной нормы решения при $\tau \geqslant 0$. При $|\nu| \leqslant 1$ производная нормы решения будет неположительной на всей полуоси, и очевидно, что в этом случае $\gamma = 1$. В итоге получаем следующие ограничения:

$$\begin{cases} 1-\nu^2+\beta^2>0, \\ \nu>1, \\ \beta>0. \end{cases} \tag{8}$$

2.3 Вычисление перерегулирования

В данном разделе выявляются необходимые и достаточные условия экстремума нормы решения и вычисляется величина γ.

Для начала выявим необходимые и достаточные условия максимума и минимума нормы решения системы (7). Возьмем производную нормы в силу системы (7) и приравняем ее к нулю:

$$\frac{1}{2}(||z^*||^2)'\,|_{(4)}= \begin{pmatrix} z_1^* & z_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1-\widetilde{\nu} & \widetilde{\beta} \\ -\widetilde{\beta} & -1+\widetilde{\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^* \\ z_2^* \end{pmatrix} = \\ = (-1-\widetilde{\nu})(z_1^*)^2+(-1+\widetilde{\nu})(z_2^*)^2=0.$$

Таким образом, условие

$$(-1-\widetilde{\nu})(z_1^*)^2+(-1+\widetilde{\nu})(z_2^*)^2=0$$

является необходимым условием экстремума нормы и достигается в точках:

$$\widetilde{z}^* = a\begin{pmatrix} (\widetilde{\nu}+1)^{1/2} \\ (\widetilde{\nu}-1)^{1/2} \end{pmatrix}, \quad \widehat{z}^* = a\begin{pmatrix} (\widetilde{\nu}+1)^{1/2} \\ -(\widetilde{\nu}-1)^{1/2} \end{pmatrix},$$

где a — константа. Теперь проверим, достигается ли в этих точках максимум или минимум. Для этого вычислим вторую производную нормы в силу (7) в точке $\widetilde{z}^*$:

$$v_2(\widetilde{z}^*) = (||\widetilde{z}^*||^2)''\,|_{(4)}= 2\widetilde{\nu}\left(\frac{\widetilde{\nu}+1}{\widetilde{\nu}-1}\right)^{1/2}(\widetilde{z}_2^*)^2(((\widetilde{\nu})^2-1)^{1/2}+\widetilde{\beta}).$$

В силу ограничений (8) величина $v_2(\widetilde{z}^*)>0$, а значит, в данной точке достигается локальный минимум нормы решения.

Аналогично,

$$v_2(\widetilde{z}^*) = (||z^*||^2)'' \mid_{(4)} = 2\widetilde{\nu}\left(\frac{\widetilde{\nu}+1}{\widetilde{\nu}-1}\right)^{1/2}(\widetilde{z}_2^*)^2(((\widetilde{\nu})^2-1)^{1/2}-\widetilde{\beta}),$$

и в силу ограничений (8) величина $v_2(\widetilde{z}^*) < 0$, а значит, в этой точке будет достигаться локальный максимум нормы решения.

Следовательно, величина γ достигается на решениях (7) с начальными условиями

$$z_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{\nu+1}{2\nu}} \\ \\ \sqrt{\dfrac{\nu-1}{2\nu}} \end{pmatrix} \tag{9}$$

и в момент τ^*, при котором

$$z(\tau^*) = \pm\gamma \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{\nu+1}{2\nu}} \\ \\ -\sqrt{\dfrac{\nu-1}{2\nu}} \end{pmatrix}.$$

Далее вычислим γ для случая $\widetilde{\nu} > \widetilde{\beta}$. В данном случае матрица системы (7) при ограничении (8) имеет два вещественных собственных числа $\lambda_1 = -1 + (\widetilde{\nu}^2 - \widetilde{\beta}^2)^{1/2} < 0$ и $\lambda_2 = -1 - (\widetilde{\nu}^2 - \widetilde{\beta}^2)^{1/2} < 0$, а система (7) имеет общее решение

$$z = C_1 \begin{pmatrix} -\widetilde{\beta} \\ \widetilde{\nu} + (\widetilde{\nu}^2 - \widetilde{\beta}^2)^{1/2} \end{pmatrix} e^{\lambda_1\tau} + C_2 \begin{pmatrix} -\widetilde{\beta} \\ \widetilde{\nu} - (\widetilde{\nu}^2 - \widetilde{\beta}^2)^{1/2} \end{pmatrix} e^{\lambda_2\tau}.$$

В итоге получаем систему из двух уравнений относительно двух неизвестных τ^* и γ_1, где $|\gamma_1| = \gamma$:

$$C_1 \begin{pmatrix} -\widetilde{\beta} \\ \widetilde{\nu} + (\widetilde{\nu}^2 - \widetilde{\beta}^2)^{1/2} \end{pmatrix} e^{(-1-(\widetilde{\nu}^2-\widetilde{\beta}^2)^{1/2})\tau^*} + \\ + C_2 \begin{pmatrix} -\widetilde{\beta} \\ \widetilde{\nu} - (\widetilde{\nu}^2 - \widetilde{\beta}^2)^{1/2} \end{pmatrix} e^{(-1+(\widetilde{\nu}^2-\widetilde{\beta}^2)^{1/2})\tau^*} = \\ = \gamma_1 \begin{pmatrix} \left(\dfrac{\widetilde{\nu}+1}{2\widetilde{\nu}}\right)^{1/2} \\ -\left(\dfrac{\widetilde{\nu}-1}{2\widetilde{\nu}}\right)^{1/2} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где постоянные C_1 и C_2 можно вычислить из начального условия (9). Из системы (10) имеем

$$\gamma = \left(\frac{(\widetilde{\nu}+1)^{1/2}(\widetilde{\nu} + (\widetilde{\nu}^2 - \widetilde{\beta}^2)^{1/2}) + (\widetilde{\nu}-1)^{1/2}\widetilde{\beta}}{(\widetilde{\nu}+1)^{1/2}(\widetilde{\nu} + (\widetilde{\nu}^2 - \widetilde{\beta}^2)^{1/2}) - (\widetilde{\nu}-1)^{1/2}\widetilde{\beta}} \right)^{\dfrac{1 + (\widetilde{\nu}^2 - \widetilde{\beta}^2)^{1/2}}{2(\widetilde{\nu}^2 - \widetilde{\beta}^2)^{1/2}}} \times \\ \times \left(\frac{(\widetilde{\nu}+1)^{1/2}(\widetilde{\nu} - (\widetilde{\nu}^2 - \widetilde{\beta}^2)^{1/2}) - (\widetilde{\nu}-1)^{1/2}\widetilde{\beta}}{(\widetilde{\nu}+1)^{1/2}(\widetilde{\nu} - (\widetilde{\nu}^2 - \widetilde{\beta}^2)^{1/2}) + (\widetilde{\nu}-1)^{1/2}\widetilde{\beta}} \right)^{\dfrac{1 - (\widetilde{\nu}^2 - \widetilde{\beta}^2)^{1/2}}{2(\widetilde{\nu}^2 - \widetilde{\beta}^2)^{1/2}}}.$$

Используя вышеописанный метод, найдем величину перерегулирования для случая $\nu = \beta$:

$$\gamma = \exp\left(-\frac{\sqrt{\nu^2 - 1}}{\nu}\right)\left(\nu + \sqrt{\nu^2 - 1}\right),$$

и для случая $\nu < \beta$:

$$\gamma = \exp\left(-\frac{\operatorname{arctg}\phi}{\omega}\right)\sqrt{\frac{\beta + \sqrt{\nu^2 - 1}}{\beta - \sqrt{\nu^2 - 1}}},$$

где $\phi = \dfrac{\omega\sqrt{\nu^2 - 1}}{\beta}, \quad \omega = \sqrt{\beta^2 - \nu^2}.$

2.4 Использование матриц Ляпунова

Здесь рассмотрим системы вида (7) и решим задачу нахождения значений (β, ν), для которых $\gamma = \dfrac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$, где $\lambda_{max}, \lambda_{min}$ - собственные числа матрицы V, решения уравнения (2), взятого в виде

$$V = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & b \end{pmatrix}. \tag{11}$$

После подстановки (11) в уравнение (3) получим

$$W = \begin{pmatrix} 2(1 - \nu + a\beta) & 2a + \beta(b-1) \\ 2a + \beta(b-1) & -2(a\beta + (-1-\nu)b) \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Из положительной определенности матрицы (12) вытекают ограничения на величины a, b :

$$-4(\beta^2+1)a^2 + 4\beta\nu(b+1)a + 4b(1-\nu^2) - \beta^2(b-1)^2 > 0. \tag{13}$$

Для каждого допустимого значения (β, ν) возникает вопрос: существуют ли a, b, удовлетворяющие условию (13), для которых

$$\frac{b + 1 + \sqrt{(b-1)^2 + 4a^2}}{b + 1 - \sqrt{(b-1)^2 + 4a^2}} = \gamma. \tag{14}$$

Для простоты вычислений преобразуем (14). В результате получим

$$4(1-g)a^2 + ((1-g)b - 1 - g)^2 = 4g,$$

где

$$g = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right)^2.$$

Пример. *Возьмем допустимые значения* $(\beta, \nu) = (1,7; 1,6)$. *В этом случае* $\gamma = 1,2759$.

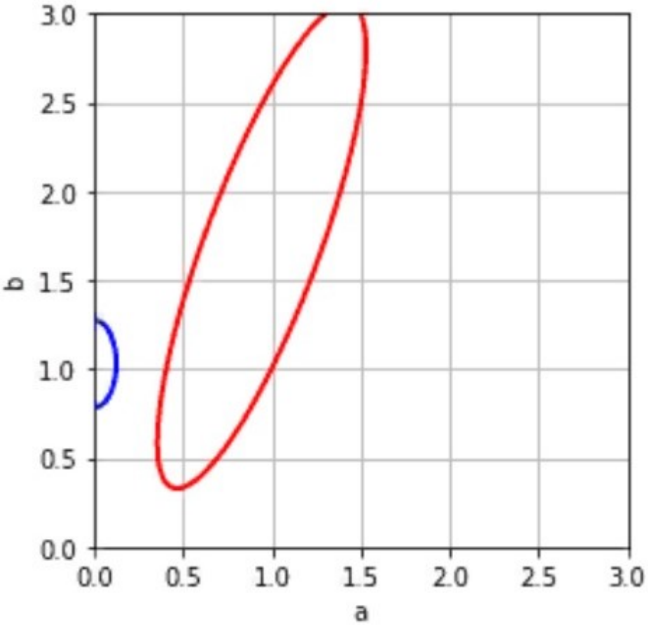

Рис. 2: Кривая (14) и граница (13) на плоскости (a, b)

На рис.2 видно, что на плоскости (a, b) *кривая (14) и область (13) не имеют общих точек. Следовательно, для* $(\beta, \nu) = (1,7; 1,6)$ *не существует* V *с требуемыми свойствами.*

Глава 3. Оценка величины $\widehat{\gamma}$

В данной главе рассматриваются системы вида (3) и решается задача об оценке величины $\widehat{\gamma} = \dfrac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$, где $\lambda_{max} > 0$ и $\lambda_{min} > 0$ - собственные числа матрицы V, решения уравнения (9). Данная задача нужна для аналитического определения кривой на плоскости (β, ν), являющейся границей области значений, для которых выполняется описанная выше гипотеза.

3.1 Случай диагональной матрицы W

Здесь получим оценку на $\widetilde{\gamma}$ при условии, что матрица W – диагональная. Возьмем положительно-определенную матрицу (12) которая является диагональной при $a = -\dfrac{\beta}{2}(b-1)$. Тогда матрица (11) должна иметь вид

$$V = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\beta}{2}(b-1) \\ -\dfrac{\beta}{2}(b-1) & b \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Для матриц вида (15)

$$\lambda_{max} = \frac{b + 1 + |b-1|(1+\beta^2)^{1/2}}{2}$$

$$\lambda_{min} = \frac{b + 1 - |b-1|(1+\beta^2)^{1/2}}{2},$$

следовательно

$$\widetilde{\gamma} = \frac{b + 1 + |b-1|(1+\beta^2)^{1/2}}{b + 1 - |b-1|(1+\beta^2)^{1/2}}. \tag{16}$$

При подстановке матрицы V вида (15) в матричное уравнение Ляпунова

(3) получаем

$$W = \begin{pmatrix} 2\left(1-\nu-\dfrac{\beta^2}{2}(b-1)\right) & 0 \\ 0 & 2\left(\dfrac{\beta^2}{2}(b-1)+(1+\nu)b\right) \end{pmatrix}. \qquad (17)$$

Как известно, необходимым и достаточным условием экспоненциальной устойчивости (1) является существование единственного решения матричного уравнения Ляпунова для любой положительно-определенной матрицы W. Матрица (17) является положительно-определенной при

$$\frac{1-\nu+\dfrac{\beta^2}{2}}{\dfrac{\beta^2}{2}} > b > \frac{\dfrac{\beta^2}{2}}{\dfrac{\beta^2}{2}+1+\nu} \qquad (18)$$

В итоге получаем из (16), (18)

$$\frac{1-\nu+\beta^2+(\nu-1)(\beta^2+1)^{1/2}}{1-\nu+\beta^2-(\nu-1)(\beta^2+1)^{1/2}} < \widehat{\gamma} < \frac{1+\nu+\beta^2+(\nu+1)(\beta^2+1)^{1/2}}{1+\nu+\beta^2-(\nu+1)(\beta^2+1)^{1/2}}.$$

Заключение

В ходе работы не было найдено ни одной системы 2-го порядка вида (7) с $\nu > 1$, для которой величина перерегулирования может быть получена при использовании функций Ляпунова в виде квадратичных форм. Зато было получено несколько промежуточных результатов. Вычислена величина перерегулирования для систем вида (7), определена область асимптотической устойчивости для уравнений вида (2), несколько систем было проверено на соответствие условиям рассматриваемой гипотезы.

Данные результаты были продемонстрированы на Международной научной конференции студентов и аспирантов «Процессы управления и устойчивость» в 2019-2020 гг., СПб, СПбГУ. Темы докладов «Проверка одной гипотезы о вычислении величины перерегулирования в линейных системах» и «Анализ перерегулирования в линейных системах».

Доклад на тему «Анализ перерегулирования в линейных системах» с некоторыми результатами был представлен на постерной сессии в рамках Зимней школы «Абсолютное будущее» на базе МФТИ. Данный доклад был признан лучшим по итогам сессии.

По-видимому, используя функции Ляпунова в виде форм более высокого порядка, можно расширить возможности рассматриваемого метода. Данный подход может быть распространен на системы линейных уравнений более высокого порядка и дифференциально-разностные уравнения запаздывающего типа.

Список литературы

[1] Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. СПб.: Профессия, 2004. 749 с.

[2] Александров А. Ю., Воробьева А. А., Колпак Е. П. О диагональной устойчивости некоторых классов сложных систем с запаздыванием // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. № 2. С. 72–88.

[3] Жабко А. П., Тихомиров О. Г., Чижова О. Н. О стабилизации класса систем с пропорциональным запаздыванием // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. № 4. С. 354–364.

[4] Пономарев А. А. Аппроксимация обратной связи в регуляторе «предиктор-корректор» явной функцией // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. № 2. С. 193–208.

[5] Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 124 с.