

Санкт-Петербургский государственный университет

Кафедра информационных систем

**ЗУБАХИНА Татьяна Сергеевна**

**Выпускная квалификационная работа бакалавра**

**АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДОВ  
РУНГЕ — КУТТЫ — ЧЕБЫШЁВА ДЛЯ  
УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ**

Уровень образования: бакалавриат

Направление 02.03.02

«Фундаментальная информатика и информационные технологии»

Образовательная программа СВ.5003.2016

«Программирование и информационные технологии»

Научный руководитель,  
кандидат физ.-мат. наук,  
доцент

Еремин А. С.

Рецензент,  
кандидат физ.-мат. наук,  
доцент

Кривовичев Г.В.

Санкт-Петербург

2020

# Содержание

|  |    |
|--|----|
| Введение   | 3  |
| Постановка задачи  | 5  |
| Обзор литературы   | 6  |
| Глава 1. Методы Рунге — Кутты — Чебышёва   | 8  |
| 1.1 Формулировка методов . . . . .   | 8  |
| 1.2 Устойчивость . . . . .   | 9  |
| Глава 2. Методы РКС для ДУЗА   | 12 |
| 2.1 Использование ранее найденных значений $K$ . . . . .                                     | 13 |
| 2.2 Линейная интерполяция . . . . .  | 14 |
| Глава 3. Глава 3. Устойчивость методов РКС для ДУЗА  | 15 |
| 3.1 Устойчивость решений тестового уравнения . . . . .                                       | 15 |
| 3.2 Анализ численной устойчивости . . . . .  | 16 |
| 3.3 Методы, использующие ранее найденные $K$ . . . . .                                       | 18 |
| 3.4 Методы с интерполяцией . . . . .   | 20 |
| Глава 4. «Оптимальное» демпфирование   | 24 |
| 4.1 Влияние демпфирования на область устойчивости . . . . .                                  | 24 |
| 4.2 «Оптимальные» коэффициенты демпфирования . . . . .                                       | 27 |
| Глава 5. Проверка областей устойчивости  | 30 |
| 5.1 Реализация программы . . . . .   | 30 |
| 5.2 Проверка области устойчивости метода РКС с интерполяцией                                 | 31 |
| 5.3 Проверка области устойчивости метода РКС, использующего<br>ранее найденные $K$ . . . . . | 35 |
| Выводы   | 38 |
| Заключение   | 39 |
| Список литературы  | 40 |
| Приложение   | 42 |

# Введение

В связи с обширной спецификой применения дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (ДУЗА) исследование численных методов для их решения крайне важно. Многочисленные процессы, которые основаны на передаче энергии, массы и информации, связаны с проблемой запаздывания. Его причиной могут являться различные ситуации: ограничение скорости распространения взаимодействия, наличие инерционности некоторых элементов и многие другие. Таким образом, системы запаздывающего типа неизбежно появляются при построении математических моделей во многих научных областях. Особенно часто они используются биологии, экологии и медицине [1], но также находят широкое применение в математической физике, химии, экономике, физике и инженерии [2, 3], причём в последних нередко встречаются уравнения в частных производных, включающие в себя запаздывание. В частности, нам интересны параболические уравнения такого вида (см. напр. [4–6]).

Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), собственные числа которых сильно вытянуты вдоль действительной отрицательной полуоси и имеют небольшие мнимые части, которые в частности получаются после дискретизации по пространству параболических уравнений, существуют явные стабилизированные методы Рунге — Кутты, которые по аналитической форме их функции устойчивости называются методами Рунге — Кутты — Чебышёва. Основной мотивацией настоящей работы послужило исследование Ё. Комори, А. С. Еремина и К. Бёрриджа [7], в котором рассматривается устойчивость и применимость чебышёвских методов для стохастических уравнений с запаздывающим шумом. Однако в этой работе не рассматривается запаздывание в детерминистической части. Первым шагом к исследованию свойств методов для решения стохастических уравнений с запаздываниями как в шуме, так и в детерминистической части, должен послужить анализ методов на полностью детерминистиче-

ских ДУЗА.

К сожалению, если такой анализ и проводился, его результаты, видимо, не были опубликованы. Настоящая работа восполняет этот пробел.

В работе сначала приводятся методы Рунге — Кутты — Чебышёва для ОДУ, а во второй главе рассматривается два варианта их расширения для интегрирования ДУЗА с постоянным запаздыванием. В третьей главе проводится анализ устойчивости и приводятся области устойчивости изучаемых методов при действительных коэффициентах тестового уравнения.

Поскольку области устойчивости обычных методов Рунге — Кутты — Чебышёва при некоторых значениях коэффициентов тестового ОДУ сужаются до одной точки, что, как будет показано, сохраняется и для ДУЗА, в работе также рассматриваются модифицированные методы, получаемые введением так называемого демпфирования. Области таких методов чуть короче, но избавлены от упомянутого недостатка. Оказывается, что для ДУЗА можно естественным образом определить понятие «оптимального» коэффициента демпфирования, аналогично тому, как это сделано в [7] для стохастических ДУЗА. Этому вопросу посвящена четвёртая глава работы.

Для проверки построенных областей в пятой главе приводится численное тестирование методов.

## Постановка задачи

Целью данной работы является исследование областей устойчивости методов Рунге — Кутты — Чебышёва для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (ДУЗА). ДУЗА — это такой тип дифференциального уравнения, в котором производная неизвестной функции в определенное время задается в терминах значений функции в предыдущие моменты времени. Начальная задача для таких уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t), y(t - \tau_1), \dots, y(t - \tau_k)), & t \geq t_0, \\ y(t) = \phi(t), & t \leq t_0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\phi(t)$  — *функция предыстории*. В настоящей работе мы ограничиваемся случаем постоянных запаздываний  $\tau_i$ .

Для анализа устойчивости необходимо построить математические формулы функций устойчивости, определяющих искомые области. Для методов с использованием демпфирования требуется определить некий рекомендуемый уровень демпфирующего коэффициента. Правильность построения областей устойчивости необходимо проверить с помощью численного решения тестовых уравнений. В работе это выполняется с помощью программы, реализованной на языке программирования MATLAB.

## Обзор литературы

На данный момент существует множество работ, посвященных анализу устойчивости различных численных методов для решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) (см. напр. [8]), в частности анализ устойчивости методов Рунге—Кутты—Чебышёва представлен в [9]. Для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом также вопрос изучен, хоть и не до конца, но достаточно глубоко (напр. [10, 11]). Однако именно для методов Рунге—Кутты—Чебышёва применительно к ДУЗА такой анализ не проводился.

Книга Беллена и Ценнаро «Численные методы для дифференциальных уравнений с запаздыванием» [11] является основополагающим источником по изучению различных численных методов для ДУЗА. В ней не только представлены описания методов для решения уравнений запаздывающего типа, но и предлагаются подходы для их анализа. В 10 главе приведён метод исследования области устойчивости на примере метода Рунге—Кутты. В настоящей работе аналогичный анализ устойчивости, как для частного случая, проводится для одного из вариантов распространения методов Рунге—Кутты—Чебышёва на ДУЗА. Используется обобщение подходов к анализу чебышёвских методов, представленных в [9].

В статье [10] рассматривается анализ устойчивости методов Рунге—Кутты—Нюстрёма и для ОДУ, и для ДУЗА. Приводится описание метода, в котором для нахождения приближения решения в прошлом используется интерполяция.

Чебышёвские методы для ОДУ разрабатывались многими авторами, как отечественными (Саульевым в 1960-х, Лебедевым, Финогеновым, Медовиковым с середины 1970-х и по 1990-е), так и зарубежными (Франклином, Гийу, Лаго в 1960-х, ван дер Хаувенем и Соммейером в 1980-х). Подробное рассмотрение истории вопроса (со ссылками на упомянутых авторов) и самих методов представлено в статье Фервера [12].

В работе [7], рассматриваются методы Рунге—Кутты—Чебышёва для решения стохастических уравнений с запаздываниями, которые являются распространением на случай с запаздыванием чебышёвских методов решения стохастических уравнений [13], базирующихся на методах, предложенных ван дер Хауеном и Соммейером [14]. Настоящая работа рассматривает методы из [7], тем самым здесь используется подход из [14].

Следует отметить, что хотя в [7] сформулирован метод Рунге—Кутты—Чебышёва для уравнения с запаздываниями как в стохастической, так и в детерминистической частях, там рассматриваются примеры с запаздыванием только в шуме, а вариант распространения на уравнения с запаздыванием в детерминистической части даёт однозначную потерю точности и устойчивости решения. Потому для применения метода из [7] к решению ДУЗА вида (1) они были изменены в той части, которая касается запаздывания в детерминистической части.

# Глава 1. Методы Рунге — Кутты — Чебышёва

Для решения жёстких задач с собственными числами, мнимые части которых малы и основным источником которых являются параболические уравнения в частных производных, разработаны специальные явные, так называемые стабилизированные, методы Рунге — Кутты, функция устойчивости которых представляет собой полином Чебышёва и даёт максимальную вытянутость области устойчивости вдоль действительной оси (см. напр. [8]). Не будем вдаваться в детали вывода этих методов, но приведём здесь их формулировку для ОДУ и построим области устойчивости для нескольких примеров.

## 1.1 Формулировка методов

Будем рассматривать  $s$ -этапный метод Рунге — Кутты — Чебышёва (будем использовать обозначение РКС), для решения автономного обыкновенного дифференциального уравнения

$$y'(t) = f(y(t)), \quad y(0) = y_0, \quad (2)$$

в форме, представленной в [14]. Пусть приближения  $y_1, \dots, y_n$  в точках  $t_1, \dots, t_n$  уже получены. Решение на  $(n+1)$ -м шаге находится по формулам

$$\begin{aligned} K_0^{(n)} &= y_n, & K_1^{(n)} &= y_n + \frac{h}{s^2} f\left(K_0^{(n)}\right), \\ K_i^{(n)} &= 2\frac{h}{s^2} f\left(K_{i-1}^{(n)}\right) + 2K_{i-1}^{(n)} - K_{i-2}^{(n)}, & i &= \overline{2, s}, \\ y_{n+1} &= K_s^{(n)}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $h$  — длина шага сетки по времени. Обратим внимание, что устойчивость методов всегда изучается на постоянных по времени сетках, поэтому на протяжении всей работы используются формулы методов с постоянным шагом.

При  $s = 1$  метод вырождается в явный метод Эйлера.

В следующем разделе настоящей главы будут показаны области устойчивости метода (3) при разных  $s$ . Для них характерно образование сужений, когда область устойчивости сжимается в одну точку. Чтобы избежать этого поведения и иметь возможность интегрировать системы не только с действительными собственными числами, метод несколько изменяется посредством введения коэффициента демпфирования  $\eta$  (который оказывает влияние при  $s \geq 2$ ). Демпфированный метод Рунге—Кутты—Чебышёва имеет вид:

$$\begin{aligned} K_0^{(n)} &= y_n, & K_1 &= y_n + h \frac{w_1}{w_0} f \left( K_0^{(n)} \right), \\ K_i^{(n)} &= 2 \frac{T_{i-1}(w_0)}{T_i(w_0)} \left( h w_1 f \left( K_{i-1}^{(n)} \right) + w_0 K_{i-1}^{(n)} \right) - \frac{T_{i-2}(w_0)}{T_i(w_0)} K_{i-2}^{(n)}, & i &= \overline{2, s}, \\ y_{n+1} &= K_s^{(n)}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $w_0$  и  $w_1$  задаются через демпфирующий коэффициент  $\eta$ :

$$w_0 = 1 + \frac{\eta}{s^2}, \quad w_1 = \frac{T_s(w_0)}{T'_s(w_0)}, \quad (5)$$

а  $T_k(x)$  — полином Чебышёва первого рода степени  $k$ , который определяется как:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_k(x) = 2xT_{k-1} - T_{k-2}(x), \quad k = \overline{2, s}, \quad (6)$$

## 1.2 Устойчивость

Устойчивость методов решения ОДУ изучается на примере линейного уравнения вида (2), так называемого тестового уравнения Далквиста [8]:

$$y'(t) = \lambda y(t), \quad y(t_0) = y_0. \quad (7)$$

Собственное число  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Областью устойчивости самого уравнения (7) является левая комплексная полуплоскость, так как именно условие  $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$  обеспечивает асимптотическую сходимость решения к 0. Границей области устойчивости точного решения является мнимая ось.

Аналогично, численное решение называется устойчивым при заданной длине шага  $h$ , если  $y_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . При изучении устойчивости численных методов их области устойчивости приводятся в относительном масштабе на комплексной плоскости  $\alpha = \lambda h$ . Для их определения строится так называемая *функция устойчивости*  $R(\alpha)$ , для которой неравенство  $|R(\alpha)| < 1$  определяет область устойчивости, а равенство  $|R(\alpha)| = 1$  — её границу.

Здесь и далее функции устойчивости численных методов были получены с помощью пакета Maple. Файлы, в которых были произведены необходимые математические преобразования для их построения, можно найти по следующей ссылке: [https://github.com/tanya525625/Stability\\_analysis\\_of\\_the\\_Runge-Kutta-Chebyshev\\_methods\\_for\\_DDE](https://github.com/tanya525625/Stability_analysis_of_the_Runge-Kutta-Chebyshev_methods_for_DDE). В них предусмотрена возможность нахождения различных областей устойчивости в зависимости от параметров: количества этапов  $s$  и коэффициента демпфирования  $\eta$ .

Функция устойчивости двухэтапного недемпфированного метода РКС ( $s = 2, \eta = 0$ ) имеет вид:

$$R(\alpha) = \frac{1}{8}\alpha^2 + \alpha + 1. \quad (8)$$

Его область устойчивости и область устойчивости демпфированного двухэтапного метода с  $\eta = 0.05$  представлены на рис. 1.

Для пятиэтапного недемпфированного метода ( $s = 5, \eta = 0$ ):

$$R(\alpha) = \frac{16}{9765625}\alpha^5 + \frac{16}{78125}\alpha^4 + \frac{28}{312}\alpha^3 + \frac{4}{25}\alpha^2 + \alpha + 1. \quad (9)$$

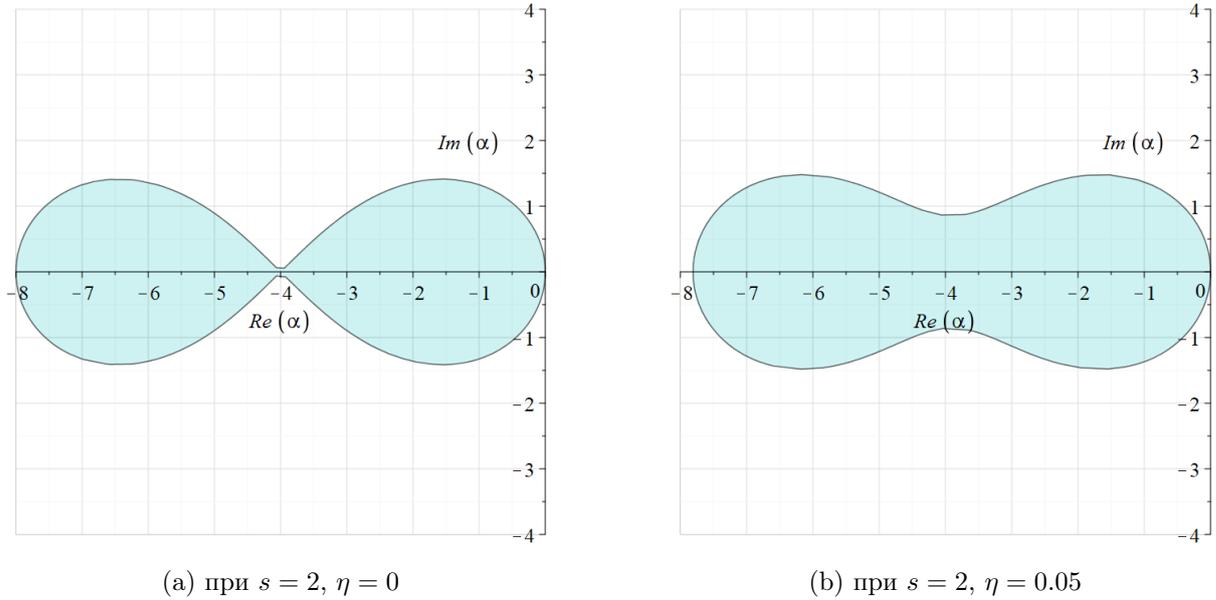
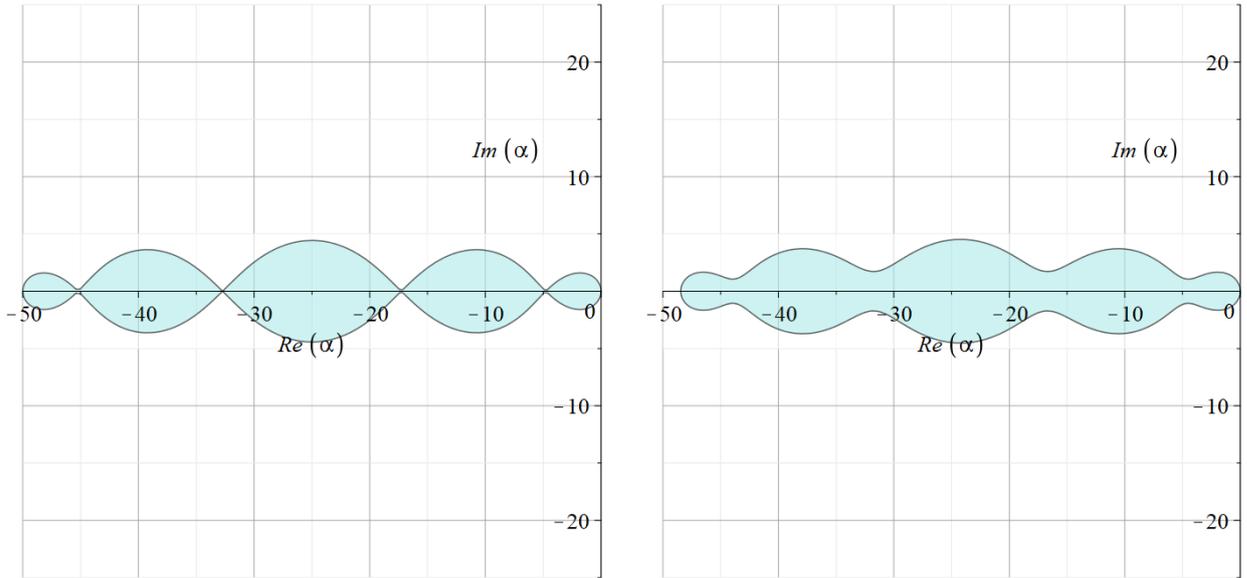


Рис. 1. Области устойчивости двухэтапных РКС

На рис. 2 представлены области устойчивости для функции (9) и для метода с коэффициентом  $\eta = 0.05$ .

Область устойчивости вдоль отрицательной полуоси у недемпфированных методов составляет отрезок  $[-2s^2, 0]$ . Но при этом возникает  $s - 1$  точек, в которых её ширина в мнимом направлении сужается до нуля. Стоит отметить, что при увеличении коэффициента демпфирования область устойчивости становится короче, но при этом расширяется в промежуточных точках. Подобное поведение сохраняется и при увеличении количества этапов метода.

Например, для пятиэтапного метода Рунге — Кутты — Чебышёва область устойчивости вдоль действительной оси была равна  $[-50, 0]$ , а при увеличении коэффициента демпфирования ( $\eta = 0.05$ ) она уменьшилась приблизительно до  $[-48, 0]$ .



(a) при  $s = 5, \eta = 0$

(b) при  $s = 5, \eta = 0.05$

Рис. 2. Области устойчивости пятиэтапных РКС

## Глава 2. Методы РКС для ДУЗА

Основой для анализа устойчивости численных методов решения ДУЗА является обобщение тестового уравнения Далквиста

$$y'(t) = \lambda y(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad (7)$$

получаемое введением слагаемого с постоянным запаздыванием  $\tau$ :

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) + \mu y(t - \tau), & t \geq t_0, \\ y(t) = \phi(t), & t_0 - \tau \leq t \leq t_0. \end{cases} \quad (10)$$

Здесь  $\phi(t)$  — функция *предыстории*,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Настоящее исследование ограничивается этим простым случаем, и более сложные для анализа системы ДУЗА или уравнения с несколькими запаздываниями не рассматриваются. Кроме того, мы рассматриваем только действительные коэффициенты, что, конечно, не является общим случаем, но позволяет представить области устойчивости в графической форме и сравнивать их с известной областью устойчивости самого рассматриваемого уравнения.

Сначала рассмотрим расширение методов Рунге—Кутты—Чебышёва на автономное уравнение с постоянным запаздыванием (обобщение на уравнение (1) с несколькими запаздываниями производится элементарно, поэтому в данной работе приводится исследование только для одного)

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t), y(t - \tau)), & t \geq t_0, \\ y(t) = \phi(t), & t_0 - \tau \leq t \leq t_0. \end{cases} \quad (11)$$

При применении метода (3) или (4) находятся приближения к решению  $K_i^{(n)}$ ,  $i = 0, \dots, s$ , (обозначим абсциссы, которым они соответствуют через  $T_i^{(n)}$ , причём  $T_1^{(n+1)} = T_{s+1}^{(n)}$ ). При применении их к ДУЗА (11) с постоянным шагом  $h$ , который целое число раз укладывается в запаздывание, то есть  $h = \tau/m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , нам также требуется найти решения в прошлом — в моменты  $T_i^{(n)} - \tau = T_i^{(n)} - mh$ . Если эти моменты меньше  $t_0$ , то в качестве значений решения используются значения функции  $\phi$ . Если же значение попадает в один из предыдущих шагов, а именно в  $(n + 1 - m)$ -й шаг, есть два естественных варианта приближения решения.

## 2.1 Использование ранее найденных значений $K$

Метод Рунге—Кутты—Чебышёва применительно к уравнению (11) с использованием тех же обозначений, что и в методе (4), имеет вид:

$$\begin{aligned} K_0^{(n)} &= y_n, & K_1^{(n)} &= y_n + h \frac{w_1}{w_0} f \left( K_0^{(n)}, K_0^{(n-m)} \right), \\ K_i^{(n)} &= 2 \frac{T_{i-1}(w_0)}{T_i(w_0)} \left( h w_1 f \left( K_{i-1}^{(n)}, K_{i-1}^{(n-m)} \right) + w_0 K_{i-1}^{(n)} \right) - \frac{T_{i-2}(w_0)}{T_i(w_0)} K_{i-2}^{(n)}, & (12) \\ y_{n+1} &= K_s^{(n)}, & i &= \overline{2, s}. \end{aligned}$$

Причём, если  $n - m \geq 0$ , то

$$K_i^{(n-m)} = \phi(T_i^{(n)} - \tau),$$

где абсциссы  $T_i^{(n)} = t_n + c_i h$ , где

$$c_0 = 0, \quad c_1 = \frac{w_1}{w_0}, \quad c_i = 2 \frac{T_{i-1}(w_0)}{T_i(w_0)} (w_1 + w_0 c_{i-1}) - \frac{T_{i-2}(w_0)}{T_i(w_0)} c_{i-2}, \quad i = \overline{2, s}.$$

## 2.2 Линейная интерполяция

Альтернативным подходом является приближение решения в произвольной точке по времени с помощью линейной интерполяции по узлам сетки.

$$\begin{aligned} K_0^{(n)} &= y_n, \quad K_1^{(n)} = y_n + h \frac{w_1}{w_0} f \left( K_0^{(n)}, \tilde{y}(T_0^{(n)} - \tau) \right), \\ K_i^{(n)} &= 2 \frac{T_{i-1}(w_0)}{T_i(w_0)} \left( h w_1 f \left( K_{i-1}^{(n)}, \tilde{y}(T_{i-1}^{(n)} - \tau) \right) + w_0 K_{i-1}^{(n)} \right) - \frac{T_{i-2}(w_0)}{T_i(w_0)} K_{i-2}^{(n)}, \\ y_{n+1} &= K_s^{(n)}, \quad i = \overline{2, s}. \end{aligned} \tag{13}$$

Интерполяционная функция  $\tilde{y}(t)$  определяется следующим образом:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} \phi(t), & t \leq t_0, \\ y_r(1 - \theta) + y_{r+1}\theta, \quad \theta = \frac{t - t_r}{h}, & t \in [t_r, t_{r+1}]. \end{cases}$$

Поскольку сами рассматриваемые методы имеют первый порядок точности, применять более точную интерполяцию, чем линейная, не имеет смысла (см. напр. [11]).

# Глава 3. Устойчивость методов РКС для ДУЗА

В этой и следующей главе мы будем рассматривать области устойчивости в действительной плоскости  $(\alpha, \beta) = (\lambda h, \mu h)$ , где  $\lambda$  и  $\mu$  параметры тестового уравнения с запаздыванием

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) + \mu y(t - \tau), & t \geq t_0, \\ y(t) = \phi(t), & t_0 - \tau \leq t \leq t_0. \end{cases} \quad (10)$$

## 3.1 Устойчивость решений тестового уравнения

Отметим, что решение уравнения (10) называется асимптотически устойчивым, если для любой предыстории  $\phi(t)$  оно асимптотически стремится к нулю.

Известно, что область асимптотической устойчивости уравнения (10) при известном  $\tau$  на действительной плоскости  $(\lambda, \mu)$  — это множество точек, для которых  $\mu < -\lambda$  и  $\sqrt{\mu^2 - \lambda^2} < \frac{1}{\tau} \arccos(-\lambda/\mu)$  (см. [16]).

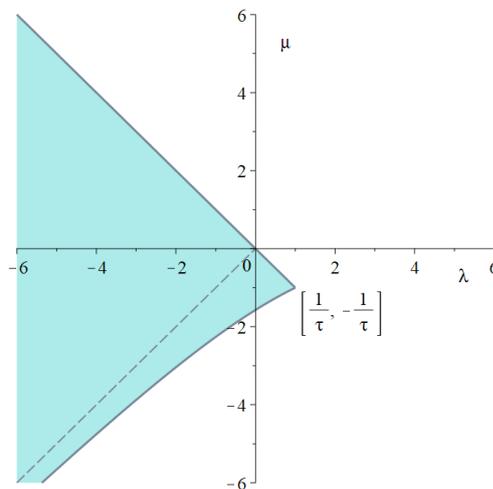


Рис. 3. Область устойчивости точного решения.

Не зависящая от  $\tau$  область устойчивости будет описываться условием  $\lambda \leq \mu < -\lambda$ . Как правило, для численных методов находят области, обеспечивающие устойчивость для любого запаздывания. В настоящей работе мы рассмотрим только такие области.

## 3.2 Анализ численной устойчивости

Существует несколько вариантов обобщения понятия устойчивости на методы решения ДУЗА. В настоящей работе рассматривается  $P$ -устойчивость.

**Определение 1.** Область  $P$ -устойчивости численного метода для решения ДУЗА (10) — это набор  $S_P$  таких пар комплексных чисел  $(\alpha, \beta)$ , где  $\alpha = h\lambda$ ,  $\beta = h\mu$ , что численное решение  $\{y_n\}_{n \geq 0}$  системы (10), полученное на постоянном шаге  $h$

$$h = \frac{\tau}{m}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (14)$$

удовлетворяет равенству

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$$

для всех функций предыстории  $\phi(t)$  и всех постоянных  $\tau$ .

В силу участия в построении шага численными методами (12) и (13) значений решения в точках, принадлежащих предыдущим шагам, их расчётные схемы представляют собой многошаговые разностные уравнения. Анализ  $P$ -устойчивости разностного уравнения сводится к построению характеристического полинома и нахождению условий, при которых все его корни лежат в единичном круге (см. напр. [15]).

Для методов, использующих интерполяцию для нахождения значений решения между точками сетки, удаётся выразить корни характеристического полинома для системы (10) в виде равенства:

$$\xi = R^* \left( \alpha, \frac{\beta}{\xi^m} \right),$$

где рациональная функция устойчивости

$$R^*(\alpha, z) = 1 + (\alpha + z)b^T(I - \alpha A - zB)^{-1}e, \quad (15)$$

является обобщением функции  $R(\alpha)$ , рассмотренной выше для ОДУ [11]. Для методов с линейной интерполяцией в формуле (15)  $I$  — единичная матрица порядка  $s$ ,  $e$  — вектор размерности  $s$ , состоящий из единиц, матрица  $B = cb$ , вектор  $c = Ae$ , а матрица  $A = \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^s$  и вектор-строка  $b = (b_1, \dots, b_s)$  определяются через таблицу Бутчера метода Рунге — Кутты [8]. Таблица 1 — пример для явного метода.

|          |          |          |          |             |       |
|----------|----------|----------|----------|-------------|-------|
| 0        | 0        |          |          |             |       |
| $c_2$    | $a_{21}$ |          |          |             |       |
| $c_3$    | $a_{31}$ | $a_{32}$ |          |             |       |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ |             |       |
| $c_s$    | $a_{s1}$ | $a_{s2}$ | $\dots$  | $a_{s,s-1}$ |       |
|          | $b_1$    | $b_2$    | $\dots$  | $b_{s-1}$   | $b_s$ |

Таблица 1. Таблица Бутчера.

С использованием функции (15) область  $P$ -устойчивости можно записать в виде:

$$P = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 : \alpha \in S_A \text{ и } |\beta| < \sigma_\alpha\}, \quad (16)$$

где

$$S_A = \{\alpha \in \mathbb{C} : |R^*(\alpha, 0)| < 1\},$$

$$\sigma_\alpha = \inf_{z \in \Gamma_\alpha} |z|, \quad \Gamma_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : |R^*(\alpha, z)| = 1\}.$$

Далее мы рассмотрим области устойчивости для методов типа (12) и (13) и покажем, что методы (13) предпочтительнее.

### 3.3 Методы, использующие ранее найденные $K$

Найдём область устойчивости метода (12) для  $s = 2$  без демпфирования ( $\eta = 0$ ). Будем сразу рассматривать случай  $n > m$ , поскольку для любой длины шага  $m$  постоянно, а поведение метода нас интересует при  $n \rightarrow \infty$ . Разностная схема (после упрощений) примет вид:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \left[ f_n + f \left( y_n + \frac{h}{4} f_n, y_{n-m} + \frac{h}{4} f_{n-m} \right) \right],$$

где  $f_n = f(y_n, y_{n-m})$ ,  $f_{n-m} = f(y_{n-m}, y_{n-2m})$ . Применительно к уравнению (10) выражение примет вид (с использованием  $\alpha = \lambda h$ ,  $\beta = \mu h$ )

$$y_{n+1} = \left( 1 + \alpha + \frac{1}{8}\alpha^2 \right) y_n + \frac{\beta(\alpha + 4)}{4} y_{n-m} + \frac{\beta^2}{8} y_{n-2m}.$$

Обратим внимание на то, что при  $\beta = \mu = 0$  мы получаем выражение для функции устойчивости аналогичного метода для ОДУ. Характеристическое уравнение имеет вид

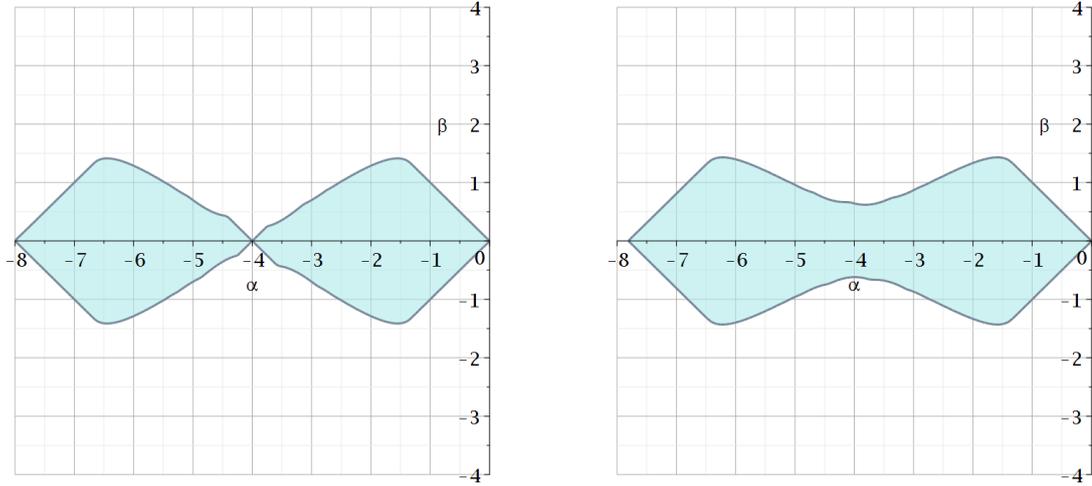
$$\xi^{2m+1} = \left( 1 + \alpha + \frac{1}{8}\alpha^2 \right) \xi^{2m} + \frac{\beta(\alpha + 4)}{4} \xi^m + \frac{\beta^2}{8}. \quad (17)$$

Ясно, что при разных  $m$  получатся разные области устойчивости рассматриваемого уравнения. Нас же интересует поведение метода при  $h \rightarrow 0$ , то есть, при  $m \rightarrow \infty$ . Полный предельный анализ крайне трудоёмок, но наша основная цель — показать предпочтительность методов с интерполяцией (13), поэтому мы рассмотрим случай  $m = 100$  как хорошее приближение к предельному случаю.

Для нахождения корней характеристического уравнения воспользуемся так называемой техникой *локуса корней* (см. напр. [17]). Её основная идея заключается в том, что корни непрерывно зависят от параметров, и если в пространстве параметров в какой-то точке все корни уравнения (17) по модулю меньше 1 и та точка окружена замкнутой кривой, на которой существует корень, равный 1, то с другой стороны от этой кривой будут корни, не лежащие в единичном круге. Такими точками, очевидно, являются точки, лежащие на оси  $\alpha$ , в которых коэффициент при  $\xi^{2m}$  обращается в ноль, т. е. корни функции устойчивости для ОДУ.

На рис. 4а изображена область устойчивости для недемпфированного метода. На рис. 4б — при добавлении демпфирования с коэффициентом  $\eta = 0.05$ . Как видно, с увеличением демпфирования области ведут себя схожим со случаем ОДУ образом: укорачиваются вдоль оси  $\alpha$  и расширяются в узких местах в направлении  $\beta$ .

В начале следующего раздела мы сравним построенные области устойчивости с областями для двухэтапных методов, использующих интерполяцию.



(a) Недемпфированный метод

(b) Метод с  $\eta = 0.05$

Рис. 4. Области  $P$ -устойчивости двухэтапного метода РКС с использованием ранее найденных значений  $K$

### 3.4 Методы с интерполяцией

#### 3.4.1 Двухэтапный метод

Построим область устойчивости (16) для метода (13) с  $s = 2$  и  $\eta = 0$ .

Матрица  $A$  и вектор  $b$  примут вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

а функция устойчивости (15)

$$R^*(\alpha, z) = 1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{z}{2} - \frac{(2\alpha + z)(\frac{\alpha}{2} + \frac{z}{2})}{z - 8} - \frac{8(\frac{\alpha}{2} + \frac{z}{2})}{z - 8}.$$

Область  $P$ -устойчивости приведена на рис. 5а.

Как видно, она практически совпадает с областью, изображённой на рис. 4а справа от точки  $(-4, 0)$ , но при этом слева от неё значительно шире и покрывает большую часть точной области устойчивости (до значения  $\alpha = -8$ ).

Так же, как и для методов с повторным использованием  $K$ , увеличение демпфирования приводит к уменьшению протяжённости области

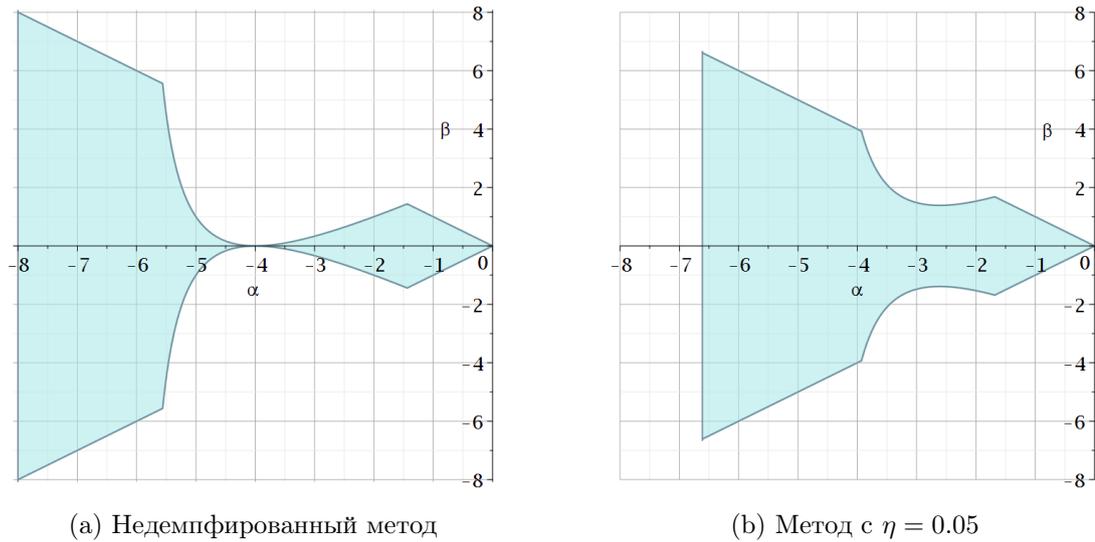


Рис. 5. Области  $P$ -устойчивости двухэтапного метода РКС с интерполяцией

устойчивости вдоль оси  $\alpha$ , но к расширению узкого «горлышка» в районе точки  $(-4, 0)$ . Как будет показано в следующем разделе, при достижении некоторого значения  $\eta$  сужение исчезает полностью и область становится совпадающей с не зависящей от  $\tau$  областью устойчивости точного решения для некоторого промежутка изменения  $\alpha$ , левая граница которого зависит от  $\eta$ .

На данном примере мы видим, что методы с интерполяцией оказываются куда предпочтительнее повторного использования  $K$  с точки зрения устойчивости для ДУЗА. Кроме того, их реализация требует гораздо меньше памяти в силу того, что не надо хранить значения  $K$  от шага к шагу. Имея в виду это наблюдение, мы будем рассматривать впредь только методы с интерполяцией (13).

### 3.4.2 Методы с другим числом этапов

Как было отмечено ранее, при  $s = 1$  метод Рунге—Кутты—Чебышёва является явным методом Эйлера. Его область устойчивости приведена на рис. 6а. Как видим, она выглядит не так, как для двухэтапного и всех остальных методов, например, трёх- (рис. 6б) и пятиэтапного (рис. 6с).

Связано это, скорее всего, с тем, что в методе Эйлера в силу единственного этапа структура чебышёвских методов не успевает сыграть свою роль, а также с тем, что интерполяция как таковая не производится, так как в прошлом требуются только значения  $y_{n-m}$  в точках сетки.

Область устойчивости метода можно увеличить за счёт изменения количества этапов ( $s$ ). При  $s = 2$  области определения и значения функции  $P$  (рис. 5а) равны

$$D(P_{s=2}) = [-8; 0], \quad E(P_{s=2}) = [-8; 8],$$

в то время как при  $s = 3$  (рис. 6b):

$$D(P_{s=3}) = [-18; 0], \quad E(P_{s=3}) = [-18; 18].$$

Тенденция увеличения области сохраняется и для больших  $s$  (рис. 6). Область определения равна:

$$D(P_s) = [-2s^2; 0].$$

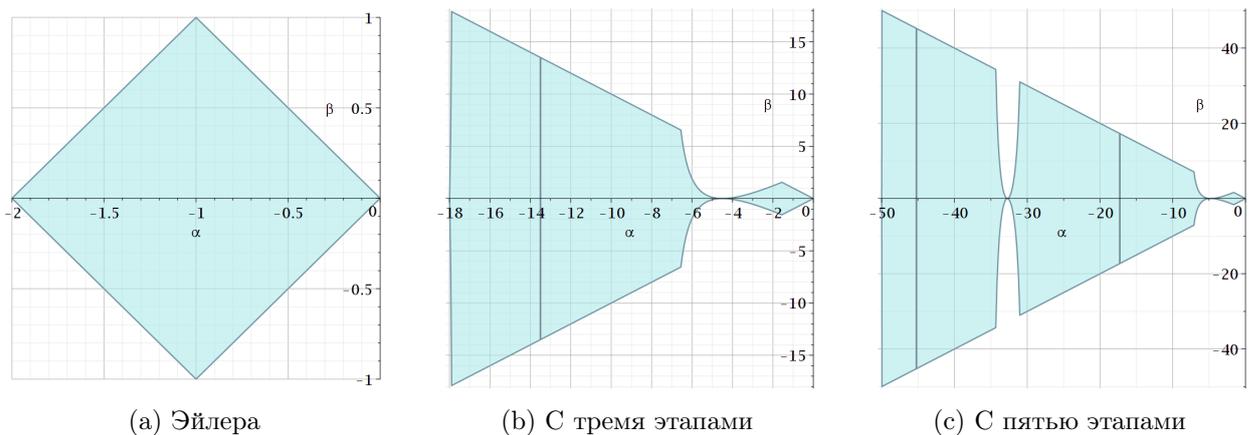


Рис. 6. Области  $P$ -устойчивости недемпфированных методов РКК с линейной интерполяцией

Внутри областей устойчивости трёх- и пятиэтапного метода можно

увидеть вертикальные отрезки, которые соответствуют границе области устойчивости. Отметим, что их абсциссы совпадают с точками, где у аналогичного метода для ОДУ область устойчивости сжимается в одну точку. В других таких точках видно, что оси  $\alpha$  достигают «провалы» в областях устойчивости. Видимо, можно назвать вертикальные внутренние границы «провалами» нулевой ширины.

В настоящий момент мы лишь отметили чередование «провалов» нулевой и ненулевой ширины, но не смогли найти объяснение этому факту.

## Глава 4. «Оптимальное» демпфирование

В этой главе мы рассмотрим области устойчивости демпфированных методов и попробуем приблизительно найти значения коэффициентов  $\eta$ , при которых «провалы», наблюдаемые для недемпфированных методов, исчезают.

### 4.1 Влияние демпфирования на область устойчивости

Для методов Рунге—Кутты—Чебышёва свойственно образование резких уменьшений функции, что делает невозможным при данных значениях  $\lambda$  получить устойчивое решение при  $|\mu| > 0$ . Избежать сужения области устойчивости можно с помощью увеличения коэффициента демпфирования.

Изучим зависимость области устойчивости метода Рунге—Кутты—Чебышёва с использованием линейной интерполяции для решения ДУЗА от коэффициента демпфирования. Построим для двухэтапного метода области устойчивости при разных значениях  $\eta$  (рис. 7, 8). Поскольку области симметричны относительно оси  $\alpha$ , здесь и далее будут приведены графики областей устойчивости при  $\beta \geq 0$  для более удобного восприятия изменений при увеличении коэффициента демпфирования. Чёрной сеткой заштрихованы области устойчивости точного решения уравнения (10).

Как отмечалось ранее, области укорачиваются, но «провалы» уменьшаются. Так, область недемпфированного метода вдоль  $\alpha$  протянута на отрезок  $[-8, 0]$ , а при  $\eta = 1$  приблизительно на  $[-5.9, 0]$ .

Отмеченное свойство сохраняется и при увеличении числа этапов метода (рис. 9, 10).

В работе [7] строились области устойчивости для методов Рунге—Кутты—Чебышёва применительно к стохастическим уравнениям с запаздыванием в шуме. Общий вид таких областей и их поведение при росте демпфирующего коэффициента очень похожи на полученные нами для де-

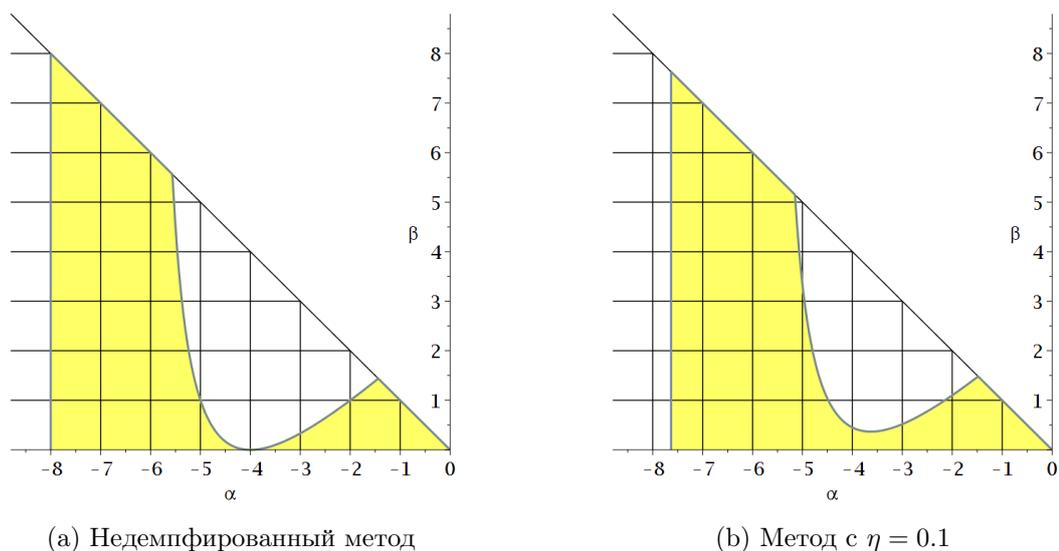


Рис. 7. Области  $P$ -устойчивости двухэтапного метода

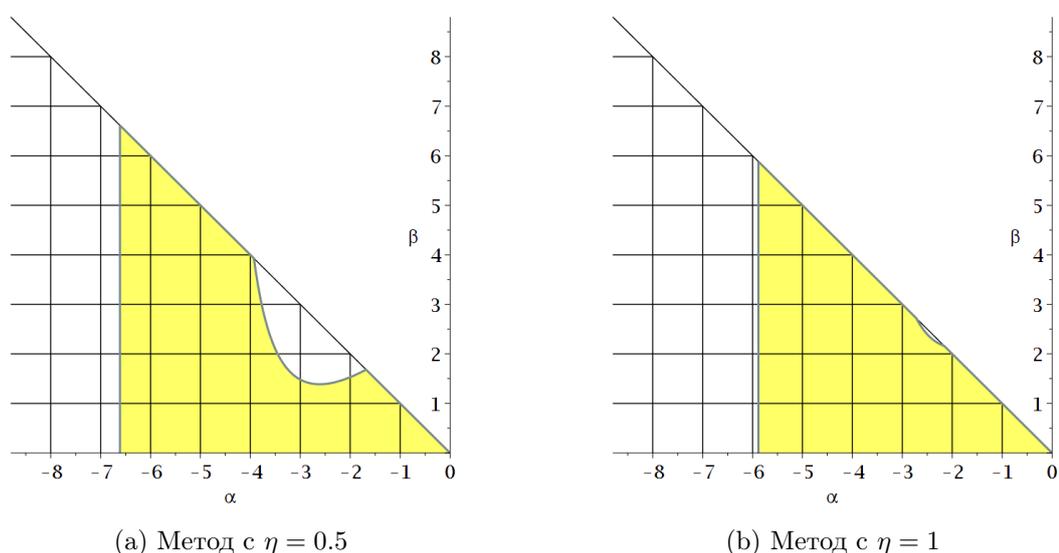


Рис. 8. Области  $P$ -устойчивости демпфированного двухэтапного метода

терминистических ДУЗА. В упомянутой работе авторы определили «оптимальное» значение коэффициента как минимальное из тех, при которых нет «провалов», так как в этом случае область устойчивости методов будет на наиболее широком интервале вдоль оси  $\alpha$  совпадать с областью устойчивости точного решения.

В данной работе определим «оптимальное» значение коэффициента демпфирования аналогичным образом, но применительно к нашим областям устойчивости.

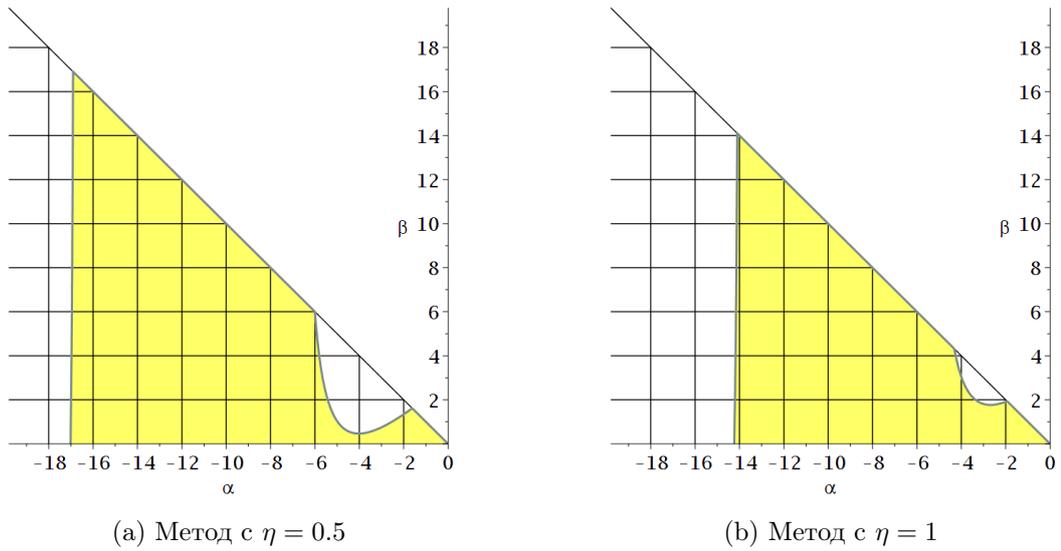


Рис. 9. Области  $P$ -устойчивости демпфированного трёхэтапного метода

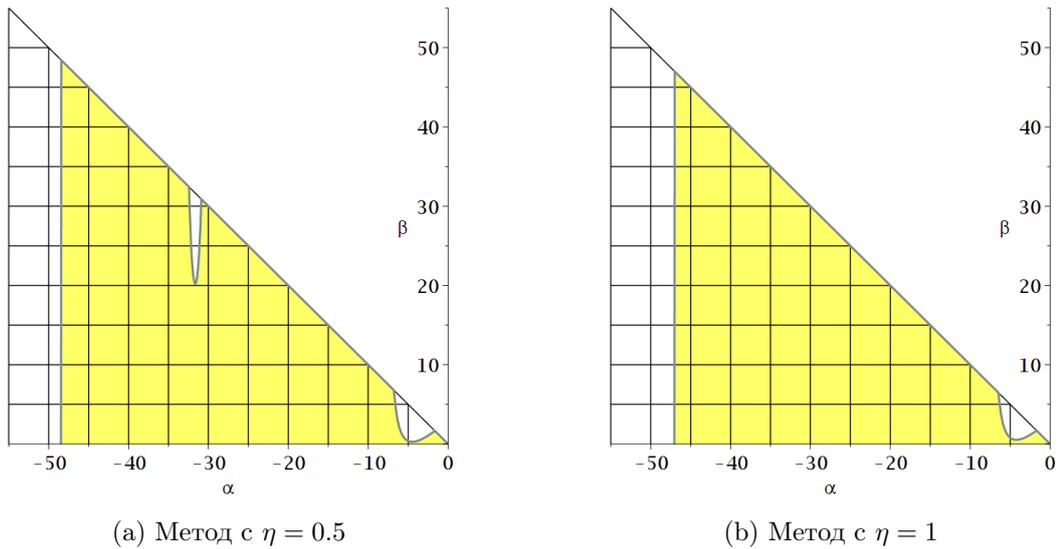


Рис. 10. Области  $P$ -устойчивости демпфированного пятиэтапного метода

В следующем подразделе постараемся приблизить «оптимальные» значения для нескольких значений этапов. Нахождение точного «оптимального» значения в общем случае, видимо, весьма непростая задача, и выходит за рамки исследования, однако для случая  $s = 2$  нам удалось это сделать. Интересно также сравнить наши «оптимальные» значения с «оптимальными» значениями для стохастических ДУЗА.

## 4.2 «Оптимальные» коэффициенты демпфирования

Приведём здесь приближённые «оптимальные» коэффициенты демпфирования для стохастических уравнений с запаздыванием в шуме (табл. 2) [7]. Назовём их «оптимальными стохастическими» коэффициентами.

Таблица 2. «Оптимальные» значения коэффициента демпфирования для стохастического метода Рунге — Кутты — Чебышёва для некоторых  $s$

| $s$    | 2    | 3    | 4    | 5    | 7    | 9    |
|--------|------|------|------|------|------|------|
| $\eta$ | 1.36 | 2.13 | 2.72 | 3.19 | 3.97 | 4.61 |

Рассмотрим двухэтапный метод. Сначала построим область устойчивости при «оптимальном стохастическом»  $\eta$  и проверим, позволит ли данное значение избежать «провалов» в ней.

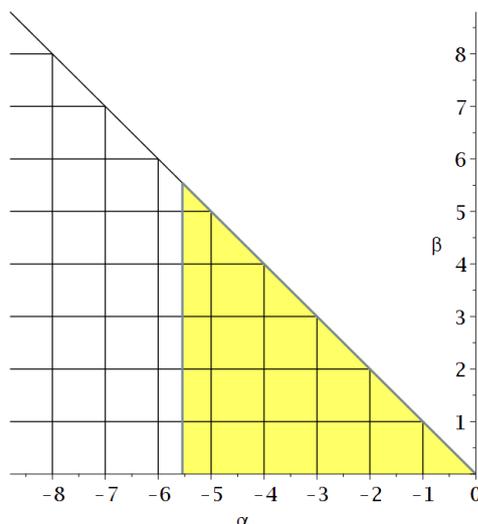


Рис. 11. Область  $P$ -устойчивости двухэтапного метода РКС с  $\eta = 1.36$ .

На рис. 11 изображена область устойчивости, на которой нет сужений функций, что свидетельствует о том, что для исследуемого метода возможно подобрать коэффициенты демпфирования таким образом, чтобы «провалы» в области устойчивости отсутствовали, и что «оптимальный» коэффициент будет не больше, чем «оптимальный стохастический».

Для  $s = 2$  удалось точно найти вид кривой, задающей «провал», как

функции  $\alpha$  и  $\eta$ :

$$\beta = \frac{\alpha^2 \eta^2 + 8 \alpha^2 \eta + 4 \alpha \eta^2 + 8 \alpha^2 + 32 \alpha \eta + 8 \eta^2 + 64 \alpha + 64 \eta + 128}{\alpha \eta^2 + 8 \alpha \eta + 2 \eta^2 + 8 \alpha + 16 \eta + 48}.$$

Значением  $\eta$ , при котором она коснётся границы области устойчивости точного решения  $\beta = -\alpha$ , будет

$$\eta_{\text{opt}} = -4 + \frac{2\sqrt{154 + 112\sqrt{2}}}{7} \approx 1.045.$$

Как видим, оно меньше, чем «оптимальное стохастическое».

Построим области при  $\eta = 1.04$  и  $\eta_{\text{opt}}$  (рис. 12). Едва различимый «провал» около точки  $(-2.5, 2.5)$  на левом графике исчезает на правом.

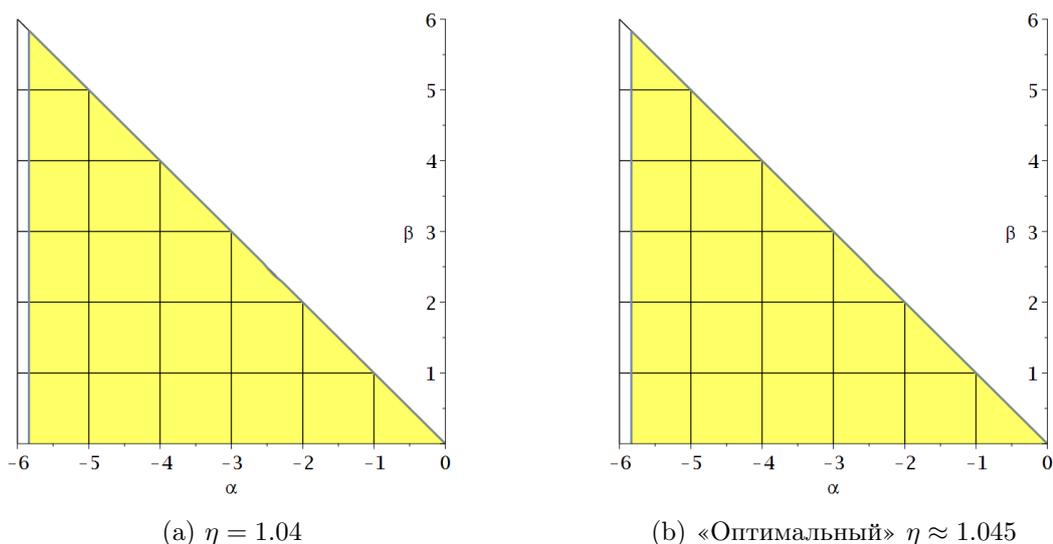


Рис. 12. Области  $P$ -устойчивости демпфированного двухэтапного метода

Для методов с бóльшим числом этапов «оптимальные» значения были найдены лишь приблизительно. В течение исследования для методов с бóльшим количеством этапов было установлено, что для рассматриваемого метода тоже можно добиться отсутствия сужения области устойчивости при меньших значениях  $\eta$ , чем «оптимальные стохастические» из [7] (рис. 13, 14). Полученные «оптимальные» значения коэффициентов приведены в табл. 3.

Таблица 3. «Оптимальные» значения коэффициента демпфирования для метода Рунге — Кутты — Чебышёва с использованием линейной интерполяции

| $s$    | 2    | 3    | 4    | 5    | 7    | 9   |
|--------|------|------|------|------|------|-----|
| $\eta$ | 1.05 | 0.85 | 0.77 | 0.75 | 0.72 | 0.7 |

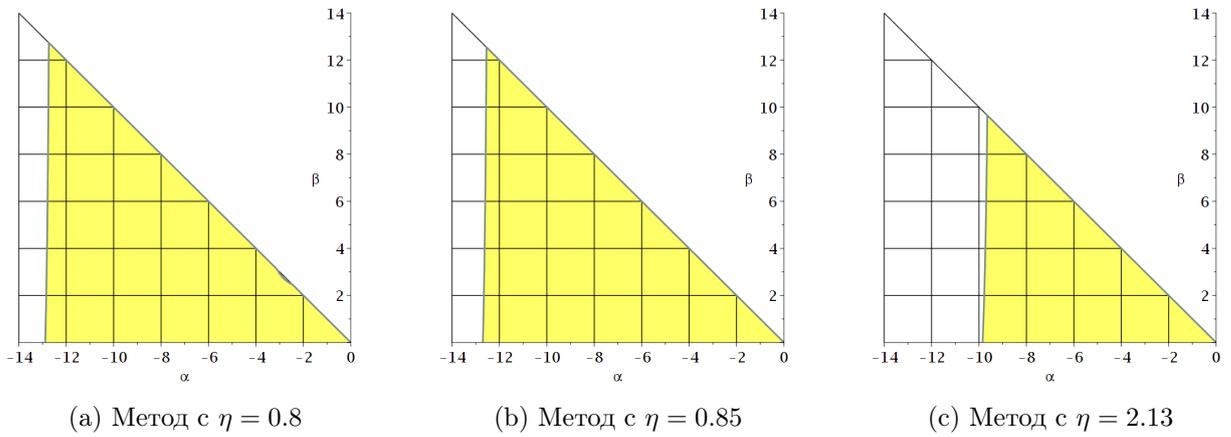


Рис. 13. Области  $P$ -устойчивости трёхэтапного метода Рунге — Кутты — Чебышёва

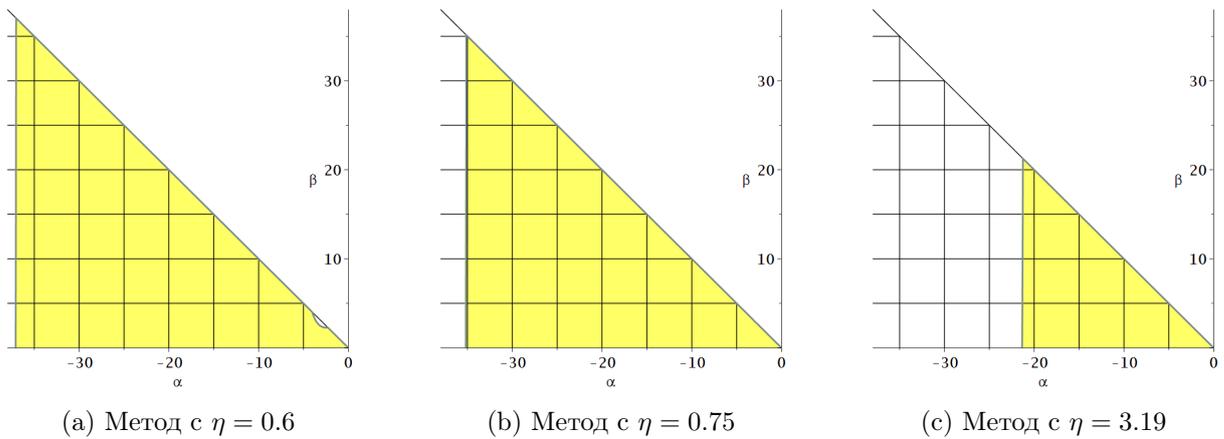


Рис. 14. Области  $P$ -устойчивости пятиэтапного метода Рунге — Кутты — Чебышёва

## Глава 5. Проверка областей устойчивости

Для проверки областей устойчивости при различных параметрах метода Рунге — Кутты — Чебышёва строился график численного решения системы (10), а затем делался вывод об его устойчивости или расхождении. Полученные на практике результаты сравнивались с областями устойчивости, которые были построены с помощью математических преобразований.

Больше результатов тестов можно найти в приложении (табл. 4).

### 5.1 Реализация программы

Для решения дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием в среде MATLAB используется функция `dde23` [18], в основе которой лежит явный метод Рунге — Кутты. Так как в данном языке программирования нет функции, использующей для получения численного решения ДУЗА метод Рунге — Кутты — Чебышёва, в данной работе была реализована собственная версия в соответствии с алгоритмами, описанными во 2-ой главе.

Был разработан класс для решения ДУЗА метом Рунге — Кутты — Чебышёва со следующими свойствами:

1. *span\_start* — точка начала промежутка времени,
2. *span\_end* — точка конца отрезка времени,
3. *points\_count* — количество точек для построения численного решения,
4. *delay* — запаздывание,
5. *approx\_init* — вектор начальных условий,
6. *func* — дифференциальное уравнение,
7. *history\_func* — функция предыстории.

Метод данного класса *RKC for scalar DDE* с параметрами:

1.  $s$  — число этапов метода,
2.  $koef$  — коэффициент демпфирования,
3.  $is\_inter$  — логическая переменная, принимающая значение 0, если необходимо выбрать метод с использованием ранее найденных значений  $K$ , 1 — с интерполяцией.

Программа была спроектирована данным способом, чтобы в дальнейшем её было легко расширять другими методами для решения ДУЗА. Также предусмотрена возможность решения ОДУ методом Рунге—Кутты—Чебышёва.

Стоит отметить, что для нахождения коэффициентов полинома Чебышёва была написана собственная функция с использованием итерационного процесса определения искомым значений, так как встроенная функция *chebyshevT* [19] основана на рекурсивном подходе, что значительно увеличивает время работы программы.

Код реализации данной программы можно найти на сайте Github ([https://github.com/tanya525625/Runge-Kutta-Chebyshev\\_methods\\_for\\_DDE](https://github.com/tanya525625/Runge-Kutta-Chebyshev_methods_for_DDE)).

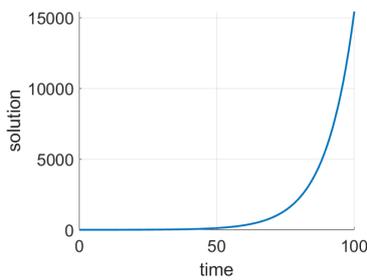
## 5.2 Проверка области устойчивости метода РКС с интерполяцией

Для областей устойчивости, полученных ранее, была проведена проверка на их правильность путём запуска с различными параметрами программы для нахождения численного решения ДУЗА.

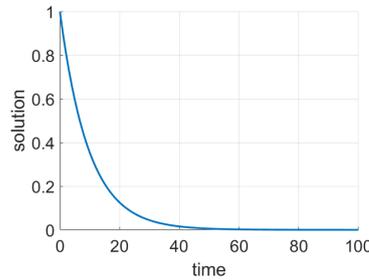
Для всех методов численные решения были найдены для системы (10) с предысторией  $\phi(t) = \exp(-t)$ .

Рассмотрим область устойчивости для двухшагового метода Рунге — Кутты — Чебышёва на постоянном шаге с коэффициентом демпфирования, который равен 0 (рис. 5а).

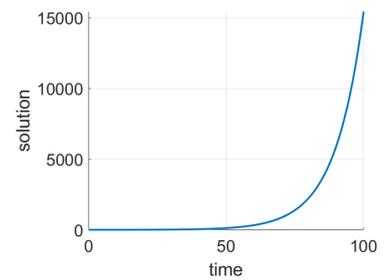
При выходе за пределы границы области определения функции численное решение начинает расходиться (рисунки 15а и 15с), в то время как при значении  $\lambda = -7.9$  сохраняется устойчивость (рис. 15б). Также решение получается верным, если коэффициенты  $\lambda$  и  $\mu$  принадлежат области устойчивости, полученной ранее теоретическим путём (рисунки 15е и 15ф), в области сужения при  $\mu > 0$  решение неустойчиво. (рис. 15д).



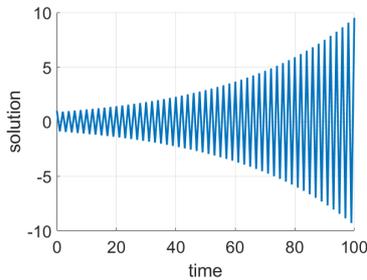
(a) при  $s = 2, \eta = 0, \lambda = -8.1, \mu = 0$



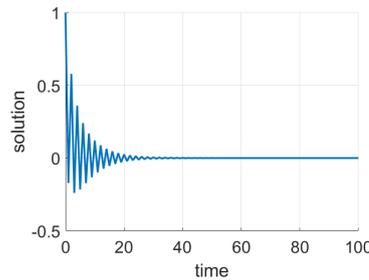
(b) при  $s = 2, \eta = 0, \lambda = -7.9, \mu = 0$



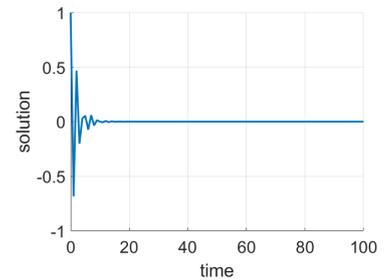
(c) при  $s = 2, \eta = 0, \lambda = 0.1, \mu = 0$



(d) при  $s = 2, \eta = 0, \lambda = -4, \mu = 0.1$



(e) при  $s = 2, \eta = 0, \lambda = -2, \mu = 1$



(f) при  $s = 2, \eta = 0, \lambda = -5, \mu = 1$

Рис. 15. Численные решения системы (10), полученные методом Рунге — Кутты — Чебышёва с использованием линейной интерполяции.

### 5.2.1 Проверка области устойчивости при увеличении количества этапов метода

Посмотрим, как изменилась устойчивость метода при увеличении количества этапов метода до 5, для этого проведём аналогичные тесты.

За границами области устойчивости, изображённой на рис. 6с, реше-

ние расходятся (рисунки 16а и 16с), также можно наблюдать неустойчивое поведение при выходе за пределы области сужения (рис. 16d), для принадлежащих области точки численное решение сходится (рисунки 16b, 16e, 16f).

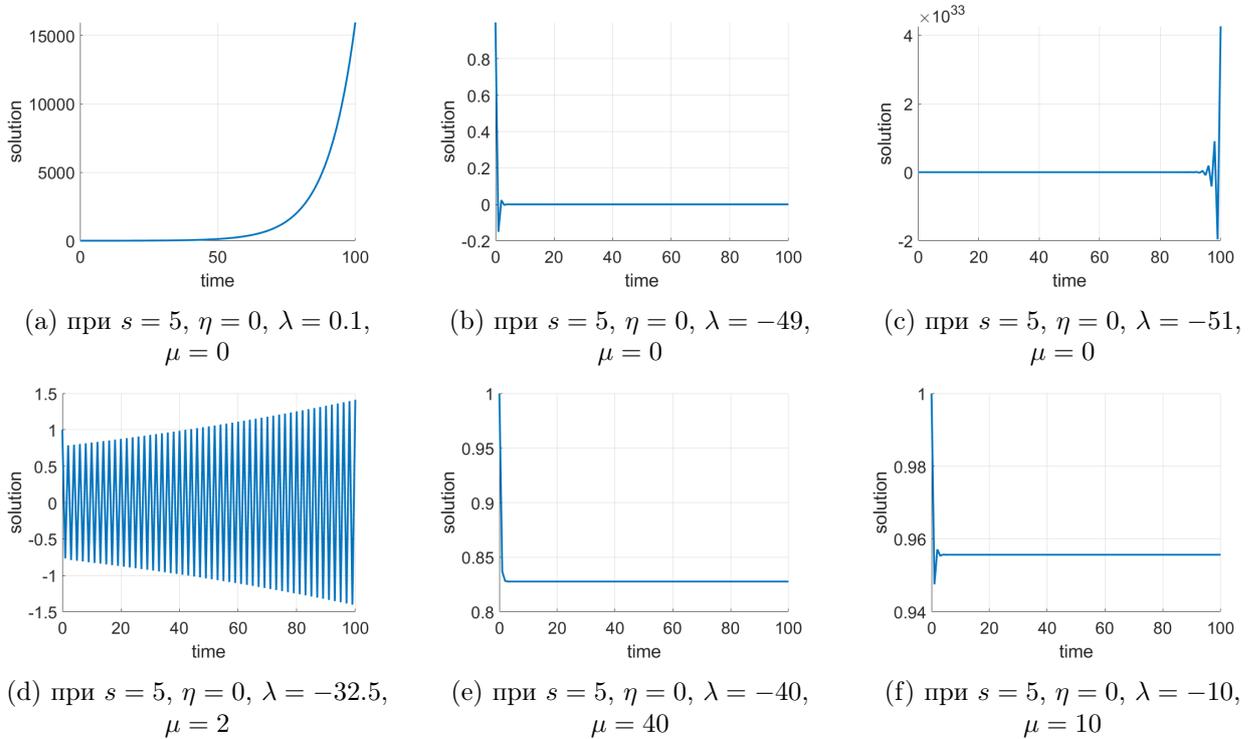


Рис. 16. Численные решения системы (10), полученные методом Рунге — Кутты — Чебышёва с использованием линейной интерполяции.

### 5.2.2 Проверка области устойчивости при увеличении коэффициента демпфирования

Проверим область устойчивости (рис. 12b) для двухшагового метода Рунге — Кутты — Чебышёва при «оптимальном» коэффициенте демпфирования ( $\eta = 1.045$ ).

Для сравнения рассмотрим численные решения для одинаковых коэффициентов  $\lambda$  и  $\mu$ , но при разных значениях  $\eta$ : 0 и 1.045.

Так как для двухшагового метода Рунге — Кутты — Чебышёва при  $\eta = 0$  минимальное значение, которое может принимать  $\lambda$ , равно -8, численное решение в данной точке сходится (рис. 17a), в то время как для

метода при  $\eta = 1.045$  решение неустойчиво из-за того, что значения коэффициентов находятся вне области определения данной функции (рис. 17b). В области сужения области устойчивости метода также изменилось поведе-

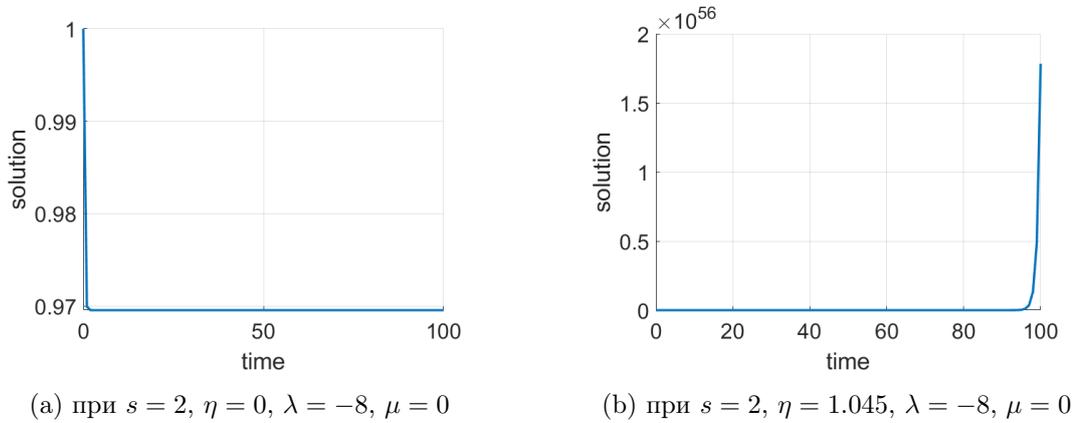


Рис. 17. Численные решения системы (10), полученные методом Рунге – Кутты – Чебышёва с интерполяцией.

ние функции. При увеличении коэффициента демпфирования допускаются большие значения  $\mu$  для получения устойчивого численного решения. Так, при  $\lambda = -4, \mu = 4, \eta = 1.045$  функция сходится (рис. 18b). При  $\eta = 0$  решение неустойчиво (рис. 18a).

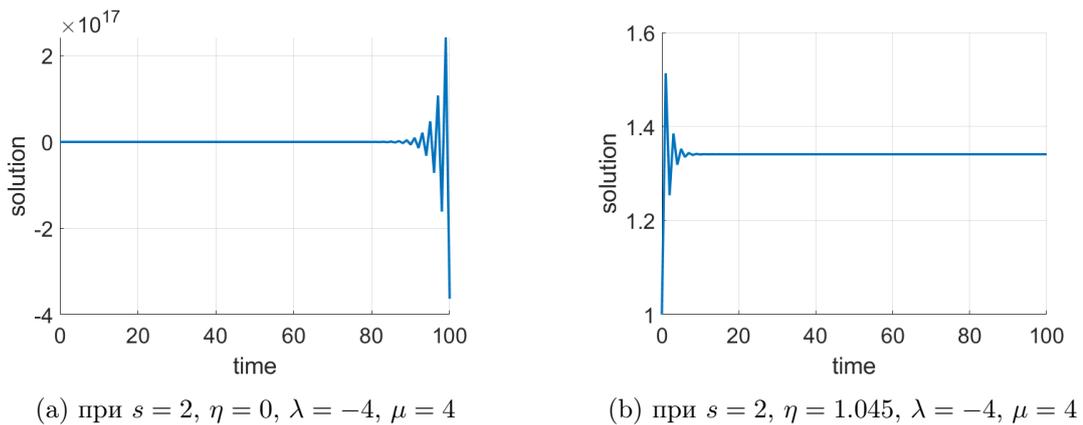


Рис. 18. Численные решения системы (10), полученные методом Рунге – Кутты – Чебышёва с интерполяцией.

### 5.3 Проверка области устойчивости метода РКС, использующего ранее найденные $K$

Проверим на правильность области устойчивости, которые были получены для метода РКС, использующего ранее найденные  $K$ . Для этого запустим программу, описанную в пункте 5.1, но с параметром  $is\_inter = 0$ , что даст возможность нахождения численного решения системы (10) с функцией предыстории  $\phi(t) = \exp(-t)$  с помощью метода РКС, использующего ранее найденные значения  $K$ .

Проведём тесты (рис. 19) для области устойчивости данного метода при  $s = 2, \eta = 0$  (рис. 4а).

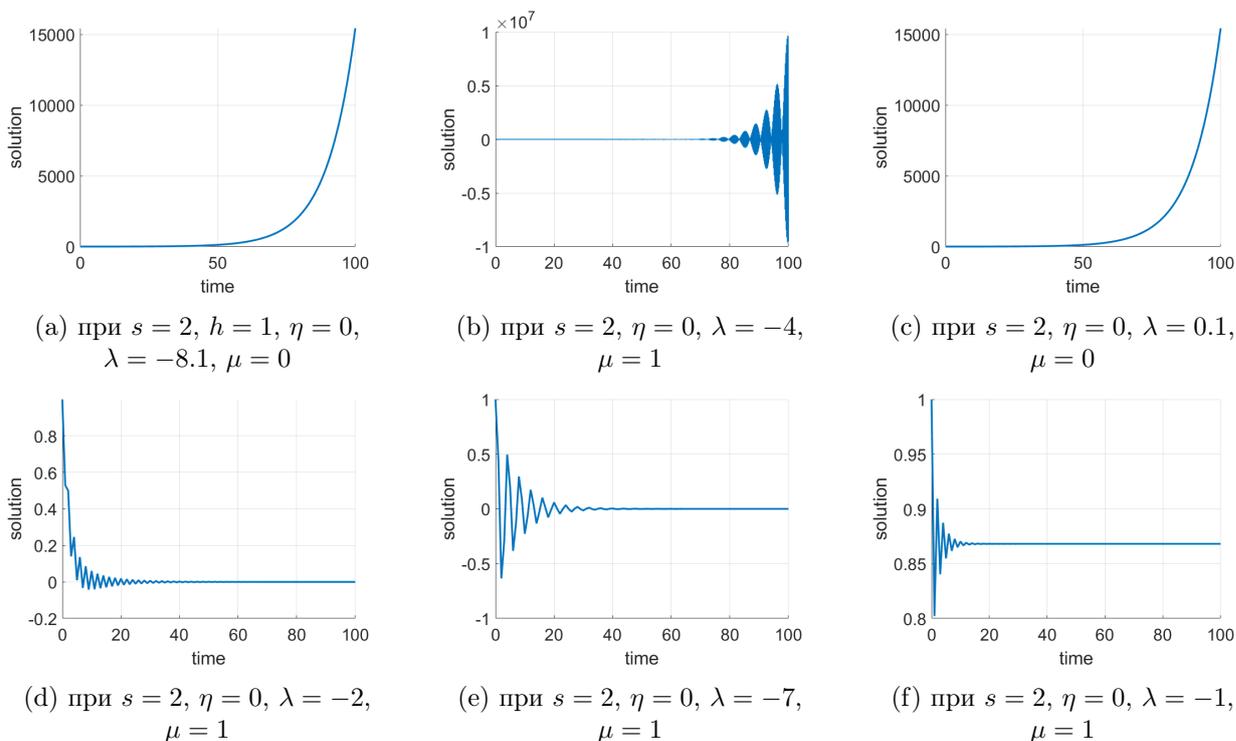


Рис. 19. Численные решения системы (10), полученные методом Рунге — Кутты — Чебышёва, использующего ранее найденные значения  $K$ .

Таким образом, данные тесты подтверждают область устойчивости, которая была получена ранее. При выходе за пределы области определения функции устойчивости решение начинает расходиться (рисунки 19а и 19с). В точке, которая находится выше области сужения, численное

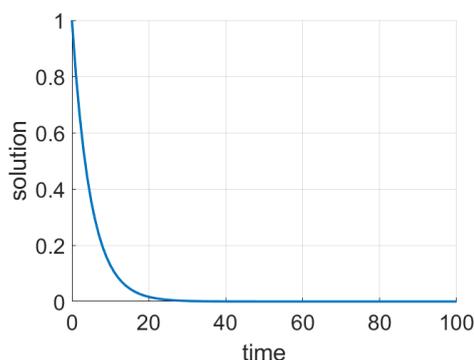
решение также получается неустойчивым (рис. 19b). При использовании коэффициентов  $\lambda$  и  $\mu$ , удовлетворяющих области устойчивости, функция сходится (рисунки 19d, 19e, 19f).

### 5.3.1 Проверка области устойчивости при увеличении коэффициента демпфирования

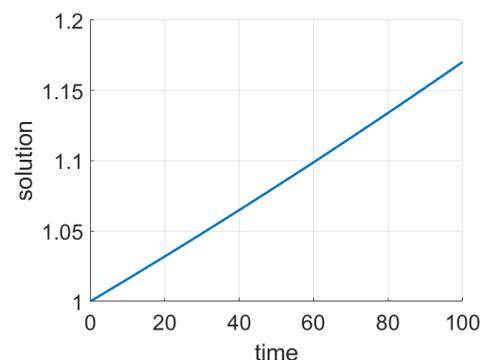
Зависимость области устойчивости метода Рунге—Кутты—Чебышёва, использующего ранее найденные значения  $K$ , от коэффициента демпфирования схожа с рассмотренными в предыдущих пунктах методами: свойственны уменьшения области определения и сужения.

Проведём анализ, аналогичный тому, который был сделан для метода Рунге—Кутты—Чебышёва с интерполяцией: найдём численное решение одного и того же уравнения, но при коэффициентах демпфирования:  $\eta = 0$  и  $\eta > 0$ .

При выходе за границы области устойчивости исследуемого метода при  $\eta = 0.05$  функция начинает расходиться (рис. 20b), при  $\eta = 0$  — решение устойчиво, что свидетельствует об уменьшении области определения (рис. 20a).



(a) при  $s = 2$ ,  $\eta = 0$ ,  $\lambda = -7.81$ ,  $\mu = 0$

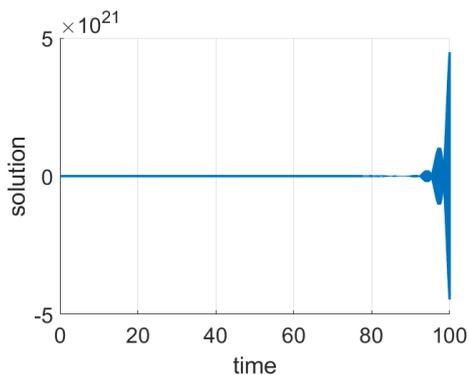


(b) при  $s = 2$ ,  $\eta = 0.05$ ,  $\lambda = -7.81$ ,  $\mu = 0$

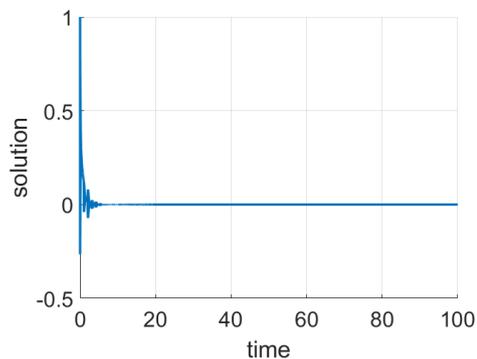
Рис. 20. Численные решения системы (10), полученные методом Рунге—Кутты—Чебышёва, использующего ранее найденные значения  $K$ .

При увеличении коэффициента демпфирования область сужения, действительно, становится меньше: при одинаковых значениях коэффици-

ента  $\lambda$  для получения устойчивого решения допускаются большие значения  $\mu$ . Рис. 21 иллюстрирует данное поведение.



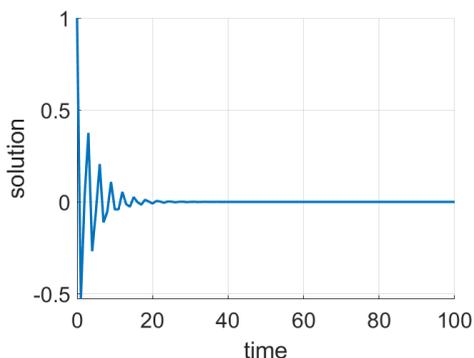
(a) при  $s = 2, \eta = 0, \lambda = -4, \mu = 0.5$



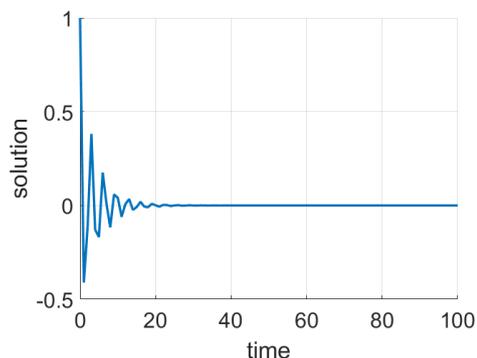
(b) при  $s = 2, \eta = 0.05, \lambda = -4, \mu = 0.5$

Рис. 21. Численные решения системы (10), полученные методом Рунге — Кутты — Чебышёва с использованием ранее найденных значений  $K$ .

Для точек, принадлежащих обеим областям, функция сходится (рис. 22).



(a) при  $s = 2, \eta = 0, \lambda = -6, \mu = 1$



(b) при  $s = 2, \eta = 0.05, \lambda = -6, \mu = 1$

Рис. 22. Численные решения системы (10), полученные методом Рунге — Кутты — Чебышёва с использованием ранее найденных значений  $K$ .

## Выводы

В начале работы был рассмотрен метод Рунге — Кутты — Чебышёва для решения ОДУ, сделан анализ его области устойчивости и рассмотрен вопрос о её зависимости от изменений коэффициента демпфирования и количества этапов метода.

В течение исследования было установлено, что характер поведения метода при изменении параметров, который наблюдался при решении ОДУ, частично сохранился и для ДУЗА. Область устойчивости для всех рассматриваемых методов при  $\eta = 0$  по оси асимптот равна  $[-2s^2; 0]$ , то есть коэффициент  $\lambda$  из системы (10) может принимать значения из данного промежутка. Относительно оси асимптот графики являются симметричными. Однако для метода Рунге — Кутты — Чебышёва с использованием линейной интерполяции свойственно образование меньшего количества сужений области устойчивости.

Для решения ДУЗА есть два варианта реализации метода Рунге — Кутты — Чебышёва: с использованием ранее найденных значений  $K$  и линейной интерполяции. Отличие данных методов заключается в допустимых значениях  $\mu$  для получения устойчивого численного решения. При использовании линейной интерполяции область устойчивости по оси ординат больше.

Стоит отметить, что область устойчивости можно увеличить с помощью изменения коэффициента демпфирования и количества этапов метода. Увеличение коэффициента демпфирования позволяет уменьшить область сужения, а количества этапов метода — расширить область определения. Для рассматриваемых методов были найдены «оптимальные» значения коэффициентов демпфирования.

Также был сделан вывод о том, что для решения ДУЗА методом Рунге — Кутты — Чебышёва для нахождения приближения численного решения лучше использовать интерполяцию.

## Заключение

В данной работе был проведён анализ по исследованию области устойчивости метода Рунге — Кутты — Чебышёва для решения дифференциальных уравнений с запаздываниями при изменении различных параметров (коэффициента демпфирования и количества этапов метода). Анализ был проведён для двух способов нахождения численного решения данным методом: с использованием ранее найденных значений  $K$  и интерполяции.

Сначала были построены области устойчивости, которые были получены теоретическим путём с помощью метода, изложенного в книге [11]. После все области были проверены с помощью программы, реализованной на языке программирования MATLAB. Так было доказано, что все области являются верными.

Поэтому итогом работы являются как рекомендация по использованию метода Рунге — Кутты — Чебышёва для решения ДУЗА (область устойчивости при решении указанным методом с интерполяцией больше), так и программный продукт для решения данного вида уравнений.

## Список литературы

- [1] Smith H. An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences, Springer, 2011. 172 p.
- [2] Erneux T. Applied Delay Differential Equations, Springer, 2009. 204 p.
- [3] Kyrychko Y.N., Hogan S.J. On the use of delay equations in engineering applications // Journal of Vibration and Control, 2017, vol. 16, no. 7–8, pp. 943–960.
- [4] Ashyralyev A., Agirseven D. Stability of delay parabolic difference equations // Filomat, 2014, vol. 28, no. 5, pp. 995–1006.
- [5] Ashyralyev A., Agirseven D. Finite difference method for delay parabolic equations // AIP Conference Proceedings, 2011, vol. 1389, 573–576.
- [6] Kubiacyk I., Saker S.H. Oscillation of delay parabolic differential equations with several coefficients // J. Comput. Appl. Math., 2002, vol. 147, no. 2, pp. 263–275.
- [7] Komori Y., Eremin A., Burrage K. S-ROCK methods for stochastic delay differential equations with one fixed delay // J. Comput. Appl. Math., 2019, vol. 353, pp. 345–354.
- [8] Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. Пер. с англ. — М.: Мир, 1999. 685 с.
- [9] Verwer J.G., Hundsdorfer W.H., Sommeijer B.P. Convergence properties of the Runge-Kutta-Chebyshev method // Numerische Mathematik, 1990, vol. 57. pp. 157–178.
- [10] Al-Mutib A.N. Stability properties of numerical methods for solving delay differential equations // J. Comput. Appl. Math., 1984, vol. 10, pp. 71–79.

- [11] Bellen A., Zennaro M. Numerical Methods for Delay Differential Equations, Oxford University Press, 2013. 413 p.
- [12] Verwer J.G. Explicit Runge-Kutta methods for parabolic partial differential equations // Appl. Numer. Math., 1996, vol. 22, no. 1–3, pp. 359–379.
- [13] Abdulle A. Cirilli S. S-ROCK: Chebyshev methods for stiff stochastic differential equations // SIAM J. Sci. Comput., 2008, vol. 30, no. 2, pp. 997–1014.
- [14] van der Houwen P.J., Sommeijer B.P. On the internal stability of explicit, m-stage Runge–Kutta methods for large m-values // ZAMM Z. Angew. Math. Mech., 1980, vol. 60, pp. 479–485.
- [15] Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем — М.: Наука, 1971. 552 с.
- [16] Hayes N.D. Roots of transcendental equations associated with certain difference-differential equations // J. London Math. Soc, 1950, vol. 25, pp. 226–232.
- [17] Baker C.T.H., Ford N.J. Some applications of the boundary-locus method and the method of D-partitions // IMA J. Numer. Anal., 1991, vol. 11, pp. 143–158.
- [18] <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/dde23.html>
- [19] <https://www.mathworks.com/help/symbolic/chebyshevt.html>

# Приложение

Таблица 4. Устойчивость численных решений, полученных методом Рунге — Кутты — Чебышёва с использованием линейной интерполяции (Лин. интерп.) и ранее найденных значений  $K$  (Значения  $K$ )

| Параметры  | Лин. интерп. | Значения $K$ |
|--|--------------|--------------|
| $s = 1, h = 1, \eta = 0, \lambda = -1, \mu = 0.9$      | устойчиво    | устойчиво    |
| $s = 1, h = 1, \eta = 0, \lambda = -0.5, \mu = 0.5$    | устойчиво    | устойчиво    |
| $s = 1, h = 1, \eta = 0, \lambda = -0.5, \mu = 1$      | неустойчиво  | неустойчиво  |
| $s = 1, h = 1, \eta = 0, \lambda = -0.5, \mu = 1$      | неустойчиво  | неустойчиво  |
| $s = 1, h = 1, \eta = 0, \lambda = -1.5, \mu = -0.5$   | устойчиво    | устойчиво    |
| $s = 1, h = 1, \eta = 0, \lambda = -2.1, \mu = 0$      | неустойчиво  | неустойчиво  |
| $s = 1, h = 1, \eta = 0, \lambda = 0.1, \mu = 0$       | неустойчиво  | неустойчиво  |
| $s = 1, h = 1, \eta = 0, \lambda = -0.1, \mu = 0$      | устойчиво    | устойчиво    |
| $s = 2, h = 1, \eta = 0, \lambda = -0.1, \mu = 0$      | устойчиво    | устойчиво    |
| $s = 2, h = 1, \eta = 0, \lambda = 0.1, \mu = 0$       | неустойчиво  | неустойчиво  |
| $s = 2, h = 1, \eta = 0, \lambda = -8.1, \mu = 0$      | неустойчиво  | неустойчиво  |
| $s = 2, h = 1, \eta = 0, \lambda = -7.9, \mu = 0$      | устойчиво    | устойчиво    |
| $s = 2, h = 1, \eta = 0, \lambda = -2, \mu = 1$        | устойчиво    | устойчиво    |
| $s = 2, h = 1, \eta = 0, \lambda = -5.5, \mu = 2$      | устойчиво    | неустойчиво  |
| $s = 2, h = 1, \eta = 0, \lambda = -7, \mu = -1$       | устойчиво    | устойчиво    |
| $s = 2, h = 1, \eta = 0, \lambda = -7, \mu = 7$        | устойчиво    | неустойчиво  |
| $s = 2, h = 1, \eta = 0.5, \lambda = -4, \mu = 1$      | устойчиво    | устойчиво    |
| $s = 2, h = 1, \eta = 0.5, \lambda = -7, \mu = 0$      | неустойчиво  | неустойчиво  |
| $s = 2, h = 1, \eta = 1.05, \lambda = -5.8, \mu = 0$   | устойчиво    | устойчиво    |
| $s = 2, h = 1, \eta = 1.05, \lambda = -5.9, \mu = 0$   | неустойчиво  | неустойчиво  |
| $s = 2, h = 0.01, \eta = 0, \lambda = -200, \mu = 200$ | неустойчиво  | устойчиво    |
| $s = 2, h = 0.01, \eta = 0, \lambda = -700, \mu = 100$ | устойчиво    | устойчиво    |
| $s = 2, h = 0.01, \eta = 0, \lambda = -550, \mu = 200$ | устойчиво    | неустойчиво  |

Продолжение на следующей странице

Таблица 4 – Продолжение предыдущей страницы

| Параметры  | Лин. интерп. | Значения $K$ |
|--|--------------|--------------|
| $s = 3, h = 1, \eta = 0, \lambda = 0.1, \mu = 0$       | неустойчиво  | неустойчиво  |
| $s = 3, h = 1, \eta = 0, \lambda = -0.1, \mu = 0$      | устойчиво    | устойчиво    |
| $s = 3, h = 1, \eta = 0, \lambda = -18.1, \mu = 0$     | неустойчиво  | неустойчиво  |
| $s = 3, h = 1, \eta = 0, \lambda = -17.9, \mu = 0$     | устойчиво    | устойчиво    |
| $s = 3, h = 1, \eta = 0, \lambda = -13, \mu = 4$       | устойчиво    | неустойчиво  |
| $s = 3, h = 1, \eta = 0, \lambda = -13, \mu = -4$      | устойчиво    | неустойчиво  |
| $s = 3, h = 1, \eta = 0, \lambda = -11, \mu = 2$       | устойчиво    | устойчиво    |
| $s = 3, h = 1, \eta = 0, \lambda = -11, \mu = 3$       | устойчиво    | неустойчиво  |
| $s = 3, h = 1, \eta = 0, \lambda = -5, \mu = 5$        | неустойчиво  | неустойчиво  |
| $s = 3, h = 1, \eta = 0.9, \lambda = -5, \mu = 5$      | устойчиво    | неустойчиво  |
| $s = 3, h = 1, \eta = 0.9, \lambda = -12, \mu = 0$     | устойчиво    | устойчиво    |
| $s = 3, h = 1, \eta = 0.9, \lambda = -13, \mu = 0$     | неустойчиво  | неустойчиво  |
| $s = 3, h = 1, \eta = 0.9, \lambda = -12, \mu = 12$    | устойчиво    | неустойчиво  |
| $s = 5, h = 1, \eta = 0, \lambda = 0.1, \mu = 0$       | неустойчиво  | неустойчиво  |
| $s = 5, h = 1, \eta = 0, \lambda = -0.1, \mu = 0$      | устойчиво    | устойчиво    |
| $s = 5, h = 1, \eta = 0, \lambda = -50.1, \mu = 0$     | неустойчиво  | неустойчиво  |
| $s = 5, h = 1, \eta = 0, \lambda = -49.9, \mu = 0$     | устойчиво    | устойчиво    |
| $s = 5, h = 1, \eta = 0, \lambda = -30, \mu = 10$      | устойчиво    | неустойчиво  |
| $s = 5, h = 1, \eta = 0, \lambda = -25, \mu = 5$       | устойчиво    | устойчиво    |
| $s = 5, h = 1, \eta = 0, \lambda = -25, \mu = -5$      | устойчиво    | устойчиво    |
| $s = 5, h = 1, \eta = 0, \lambda = -4, \mu = 1$        | неустойчиво  | неустойчиво  |
| $s = 5, h = 1, \eta = 0, \lambda = -40, \mu = 40$      | устойчиво    | неустойчиво  |
| $s = 5, h = 1, \eta = 0.71, \lambda = -36, \mu = 0$    | неустойчиво  | неустойчиво  |
| $s = 5, h = 1, \eta = 0.71, \lambda = -35, \mu = 0$    | устойчиво    | устойчиво    |
| $s = 5, h = 1, \eta = 0.71, \lambda = -32.5, \mu = 10$ | устойчиво    | неустойчиво  |