

Санкт-Петербургский государственный университет

**ЧУРАКОВА Алёна Сергеевна**

**Выпускная квалификационная работа**

**Анализ алгоритмов обработки изображений на основе метода  
оптического потока**

Уровень образования: бакалавриат

Направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Основная образовательная программа СВ.5005.2016 «Прикладная  
математика, фундаментальная информатика и программирование»

Профиль: «Прикладная математика, информатика и процессы  
управления»

Научный руководитель:

профессор кафедры теории управления,

доктор физ.-мат. наук,

Котина Е.Д.

Рецензент:

профессор кафедры вычислительных методов механики деформируемого тела,

доктор физ.-мат. наук,

Колпак Е.П.

Санкт-Петербург

2020

## Содержание

Введение.....	3
Постановка задачи .....	6
Обзор литературы .....	7
Глава 1. Методы оптического потока.....	8
1.1. Метод Хорна—Шанка .....	8
1.2. Метод Лукаса—Канаде.....	10
1.3. Комбинация локального и глобального методов .....	12
Глава 2. Разработка алгоритмов и программная реализация .....	13
2.1. Пирамиды изображений.....	13
2.2. Алгоритмы обработки изображений.....	14
2.3. Тестирование методов.....	15
2.4. Применение метода к радионуклидным изображениям.....	18
Выводы.....	21
Заключение.....	22
Список литературы .....	23

## Введение

В задачах обработки изображений часто возникает необходимость отслеживания интересующего объекта и его движения. Конечная цель решения этой проблемы может быть довольно разнообразной: распознавание лиц, оценка трафика на дорогах, автоматизация процесса обработки медицинских изображений, реконструкция трехмерной сцены, стабилизация видео, управление дроном и др. Одним из основных инструментов для обработки последовательности изображений является оптический поток.

Оптический поток между двумя изображениями — это векторное поле, задающее естественную трансформацию первого изображения во второе [3].

Расчет оптического потока может быть двух видов: выборочный и плотный. Первый отображает поле скоростей некоторых интересующих точек (например, пикселей на краях и углах объекта), второй — скорости всех пикселей изображения. Плотный оптический поток, в отличие от разреженного, дает большую точность, но требует больше времени и вычислительных мощностей.

В рамках данной работы будут изучены два классических метода, а также их комбинация, которые затем будут применены к радионуклидным изображениям.

Актуальность использования методов оптического потока в радионуклидных исследованиях связана с тем, что такая медицинская диагностика требует решение задач, связанных как с совершенствованием аппаратных средств, так и с математической обработкой информации, получаемой в ходе исследований. Программы обработки данных радионуклидных исследований помогают определить множество физиологических параметров.

Радионуклидные исследования проводятся с помощью гамма-камер и томографов, которые предоставляют большое количество информации о функциях органов и систем.

Существуют такие режимы сбора данных радионуклидного исследования, как планарное статическое или динамическое сканирование, сцинтиграфия всего тела, томографическое сканирование, «Синхронизация» и «Томография с синхронизацией». Положение пациента по отношению к гамма-камере, количество получаемых изображений, возможность наблюдения за распределением индикатора в организме с течением времени и получение объемного распределения радиофармпрепарата — основные отличия между перечисленными режимами.

Одним из важных этапов при обработке радионуклидных данных является обнаружение и коррекция движения пациента во время исследования, так как даже небольшое смещение человека или исследуемого органа во время сбора данных может повлиять на правильность результатов. Полностью избежать движения невозможно, поскольку проведение исследования некоторых органов может занимать довольно много времени.

Методы оптического потока являются актуальными для применения в области радионуклидных исследований, поскольку они позволяют выполнять автоматическую коррекцию движения, возникшего на изображениях, благодаря чему процесс радионуклидной диагностики становится более точным и быстрым, поскольку врачу больше не приходится выполнять данную работу вручную.

Таким образом, цель работы — вычисление поля скоростей, отображающего направление смещения объектов на последовательности двух изображений. Изложенную задачу можно разбить на следующие шаги:

- изучить научную литературу и публикации, в которых описаны существующие для выполнения задачи методы;
- предложить алгоритмы обработки изображений;
- проанализировать полученные на тестах результаты, выявить основные преимущества и недостатки методов.

## Постановка задачи

Целью данной работы является разработка и реализация алгоритмов обработки изображений на основе методов оптического потока и анализ результатов.

Обозначим за  $I(t, x, y)$  — значение яркости изображения в точке  $(x, y)$  в момент времени  $t$ . Пусть следующее изображение сделано через малое время  $\Delta t$ , при этом пиксель перейдет в точку  $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ . Введем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u(t, x, y) \\ \frac{dy}{dt} = v(t, x, y), \end{cases} \quad (1)$$

где компоненты  $u$  и  $v$  определяют поле скоростей, задающее перемещение.

Кроме того, будем предполагать, что яркость изображения не изменяется с течением времени вдоль траектории движения, то есть:

$$\left. \frac{dI(t, x, y)}{dt} \right|_{(1)} = 0. \quad (2)$$

Распишем полную производную из уравнения (2) в силу системы (1):

$$I_x u + I_y v + I_t = 0. \quad (3)$$

Таким образом, мы имеем одно уравнение с двумя неизвестными, которое, очевидно, не может быть решено однозначно. С этого момента для разрешимости поставленной задачи авторы методов дополнительно накладывают разного рода ограничения.

## Обзор литературы

Вычисление оптического потока бурно развивающаяся область в сфере компьютерного зрения. В настоящее время существует огромное число статей, предлагающих как новые техники, так и модификации старых. Из наиболее цитируемых можно выделить методы, предложенные в 1981 году Хорном и Шанком [11], Лукасом и Канаде [17]. Первый метод основан на минимизации функционала, состоящего из ограничений на данные и на гладкость векторного поля, второй — на предположении о тождественности скоростей пикселей из окрестности точки изображения.

Несмотря на то, что обычно авторы принимают условие о постоянстве яркости, в некоторых работах можно найти методы, предполагающие постоянство градиента [2], гессиана [20] и другое [7].

В статье [16] предложен метод, который предполагает участие человека в вычислении оптического потока, а именно ручное сегментирование объектов интереса на изображении.

Говоря о современных подходах, в [18] применяется статистический подход к проблеме вычисления поля скоростей. Такой способ, помимо “точечной”, предоставляет и вероятностную оценку потока. Кроме того, активно используются нейронные сети [12].

В работе [10] проведено сравнение многих существующих методов. Особо стоит отметить [14], в которой авторы сделали упор не столько на производительный анализ алгоритмов, сколько на теоретический.

Использование методов непосредственно в обработке радионуклидных изображений можно найти в статьях [1, 2, 4, 5, 15].

# Глава 1. Методы оптического потока

## 1.1. Метод Хорна—Шанка

В данном методе проблема вычисления оптического потока формулируется как вариационная, где вектор  $(u, v)$  определяется в результате решения задачи минимизации функционала:

$$E_{HS}(u, v) = \iint_{\Omega \in \mathbb{R}^2} (I_x u + I_y v + I_t)^2 + \alpha(u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) dx dy, \quad (4)$$

где первое слагаемое — условие оптического потока, а второе — условие гладкости, которое умножается на параметр регуляризации по А.Н. Тихонову  $\alpha$  [6]. Минимизация функционала (4) приводит к уравнениям Эйлера—Лагранжа:

$$\begin{aligned} I_x^2 u + I_x I_y v &= \alpha \Delta u - I_x I_t, \\ I_y^2 v + I_x I_y u &= \alpha \Delta v - I_y I_t. \end{aligned} \quad (5)$$

Получаем систему в частных производных, граничные условия которой имеют вид:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= f(x, y), \quad (x, y) \in \gamma, \\ v(x, y) &= g(x, y), \quad (x, y) \in \gamma, \end{aligned}$$

где  $\gamma$  — граница области  $\Omega$ ,  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$  — наперед заданные функции.

Так как изображение представляет из себя набор дискретных значений, воспользуемся следующими формулами для вычисления лапласианов компонент  $u$  и  $v$  (рис.1):

$$\begin{aligned} \Delta u &\approx \bar{u} - u, \\ \Delta v &\approx \bar{v} - v, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\bar{u}, \bar{v}$  определяются таким образом:



$$\bar{u}_{i,j,k} \approx M * W_u ,$$

$$\bar{v}_{i,j,k} \approx M * W_v ,$$

$$M = \begin{pmatrix} 1/12 & 1/6 & 1/12 \\ 1/6 & 0 & 1/6 \\ 1/12 & 1/6 & 1/12 \end{pmatrix};$$

$$W_u = \begin{pmatrix} u_{i-1,j-1} & u_{i-1,j} & u_{i-1,j+1} \\ u_{i,j-1} & u_{i,j} & u_{i,j+1} \\ u_{i+1,j-1} & u_{i+1,j} & u_{i+1,j+1} \end{pmatrix}; \quad W_v = \begin{pmatrix} v_{i-1,j-1} & v_{i-1,j} & v_{i-1,j+1} \\ v_{i,j-1} & v_{i,j} & v_{i,j+1} \\ v_{i+1,j-1} & v_{i+1,j} & v_{i+1,j+1} \end{pmatrix}.$$

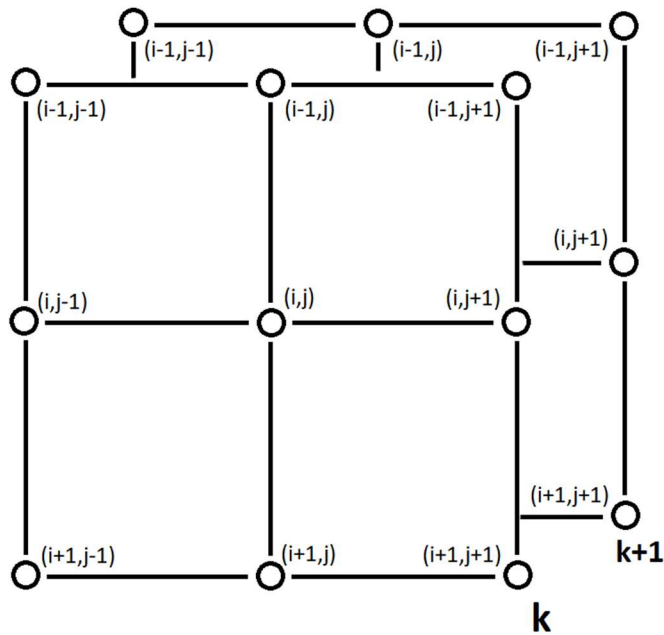


Рис. 1. Квадратная сетка для дискретизации.

Подставим дискретное представление лапласианов (6) в (5), оставляя в левой части равенств только слагаемые, содержащие  $u$  и  $v$ :

$$(\alpha + I_x^2)u + I_x I_y v = (\alpha \bar{u} - I_x I_t),$$

$$I_x I_y u + (\alpha + I_y^2)v = (\alpha \bar{v} - I_y I_t).$$

Определитель матрицы относительно вектора  $(u, v)$  равен  $\alpha(\alpha + I_x^2 + I_y^2)$ , отсюда:

$$\begin{aligned}(\alpha + I_x^2 + I_y^2)(u - \bar{u}) &= -I_x(I_x\bar{u} + I_y\bar{v} + I_t), \\(\alpha + I_x^2 + I_y^2)(v - \bar{v}) &= -I_y(I_x\bar{u} + I_y\bar{v} + I_t),\end{aligned}$$

Выписав эту систему уравнений для каждого пикселя, получим большую разреженную матрицу. Решить ее можно с помощью любой итерационной схемы. Используя метод последовательной релаксации, получаем окончательные формулы для вычисления оптического потока:

$$\begin{aligned}u^{n+1} &= (1 - \omega)u^n + \omega \frac{\alpha^2 \bar{u}^n - I_x I_y v^n - I_x I_t}{I_x^2 + \alpha^2}, \\v^{n+1} &= (1 - \omega)v^n + \omega \frac{\alpha^2 \bar{v}^n - I_x I_y u^{n+1} - I_y I_t}{I_y^2 + \alpha^2},\end{aligned}$$

где  $\omega \in (0,2)$  – коэффициент релаксации, при этом  $\omega = 1$  соответствует методу Гаусса-Зейделя.

Формулы дискретизации производных имеют вид:

$$I_x \approx \frac{1}{4} (I_{i,j+1,k} - I_{i,j,k} + I_{i+1,j+1,k} - I_{i+1,j,k} + I_{i,j+1,k+1} - I_{i,j,k+1} + I_{i+1,j+1,k+1} - I_{i+1,j+1,k+1}),$$

$$I_y \approx \frac{1}{4} (I_{i+1,j,k} - I_{i,j,k} + I_{i+1,j+1,k} - I_{i,j+1,k} + I_{i+1,j,k+1} - I_{i,j,k+1} + I_{i+1,j+1,k+1} - I_{i,j+1,k+1}),$$

$$I_t \approx \frac{1}{4} (I_{i,j,k+1} - I_{i,j,k} + I_{i+1,j,k+1} - I_{i+1,j,k} + I_{i,j+1,k+1} - I_{i,j+1,k} + I_{i+1,j+1,k+1} - I_{i+1,j+1,k}),$$

Стоит также отметить, что данный метод относится к классу *глобальных*, так как поле векторов будет рассчитано для всех точек изображения.

## 1.2. Метод Лукаса—Канаде

Следующий метод, который будет использоваться в данной работе, основан на предположении о том, что в некоторой окрестности размера

$(m \times m)$ ,  $m \geq 3$ , точки  $(x, y)$  все соседние пиксели смещаются на одинаковое расстояние. Для нахождения вектора  $(u, v)$  применяется метода наименьших квадратов:

$$E_{LK} = \sum_{(x,y) \in \Omega} W(x, y) (I_x u + I_y v + I_t)^2, \quad (7)$$

где  $W(x, y)$  — функция весов, которая используется для регулирования влияния значений яркости пикселей, входящих в окрестности. Чем дальше соседний пиксель от центрального, тем меньше связанный с ним весовой коэффициент.

Для нахождения точки минимума функционала (7) приравняем производные к нулю:

$$\begin{aligned} \frac{dE_{LK}}{du} &= 2 \sum_{(x,y) \in \Omega} W(x, y) (I_x u + I_y v + I_t) I_x = 0, \\ \frac{dE_{LK}}{dv} &= 2 \sum_{(x,y) \in \Omega} W(x, y) (I_x u + I_y v + I_t) I_y = 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения можно переписать в матричной форме:

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \vec{b},$$

где  $A = \begin{pmatrix} \sum_{(x,y) \in \Omega} W(x, y) I_x^2 & \sum_{(x,y) \in \Omega} W(x, y) I_x I_y \\ \sum_{(x,y) \in \Omega} W(x, y) I_x I_y & \sum_{(x,y) \in \Omega} W(x, y) I_y^2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = - \begin{pmatrix} \sum_{(x,y) \in \Omega} W(x, y) I_x I_t \\ \sum_{(x,y) \in \Omega} W(x, y) I_y I_t \end{pmatrix}$ .

Матрица  $A$  может быть особой или плохо обусловленной, и тогда хотя бы одно собственное число будет равно или близко нулю. В обоих случаях нужно установить порог  $\tau$ , и, если модуль наименьшего собственного числа будет меньше этого значения, то вектор  $(u, v)$  просто обнуляется в этой точке.

В отличие от предыдущего данный метод является *локальным*, поскольку учитывает данные ограниченной области, что, однако, делает его устойчивым по отношению к шуму.

### 1.3. Комбинация локального и глобального методов

Bruhn с соавторами [9, 13] предложили метод, соединивший в себе подходы обоих вышеописанных техник вычисления. В таком случае оптический поток является плотным, но при этом менее подвержен влиянию шумов, благодаря введению сглаживающего члена уравнения.

Обозначим  $\vec{w} := (u, v, 1)^T$ , тогда функционал метода будет иметь вид:

$$E_{\text{CLG}}(\vec{w}) = \iint_{\Omega} \vec{w}^T J_{\rho}(\nabla I) \vec{w} + \alpha(u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) dx dy, \quad (8)$$

где  $J_{\rho}(\nabla I) := G_{\rho} * (\nabla I \nabla I^T)$  — свёртка между матричным фильтром Гаусса со стандартным отклонением  $\rho$  и матрицей  $(\nabla I \nabla I^T)$ . Если  $\rho = 0$ , то получаем метод Хорна—Шанка. Если  $\alpha = 0$ , то (8) эквивалентен функционалу Лукаса—Канаде.

Здесь точка минимума  $(u, v)$  будет удовлетворять следующим уравнениям Эйлера—Лагранжа:

$$\begin{aligned} G_{\rho} * (I_x^2)u + G_{\rho} * (I_x I_y)v &= \alpha \Delta u - G_{\rho} * (I_x I_t), \\ G_{\rho} * (I_y^2)v + G_{\rho} * (I_x I_y)u &= \alpha \Delta v - G_{\rho} * (I_y I_t). \end{aligned}$$

Таким образом, отличие данной системы от уравнений Хорна—Шанка (5) заключается в применении операции свертки.

# Глава 2. Разработка алгоритмов и программная реализация

## 2.1. Пирамиды изображений

Ограничение всех трех представленных методов заключается в том, что наблюдаемый объект должен подвергаться достаточно малому смещению, чтобы избежать ошибок в вычислении векторного потока. Очевидно, что это условие не может быть гарантировано для произвольной последовательности изображений. Однако, для повышения чувствительности методов часто прибегают к использованию пирамид изображения (рис. 2) [1, 3, 8].

Каждый уровень пирамиды получается путем понижения дискретизации предыдущего со значением 2. Уменьшение масштаба изображения может осуществляться как с использованием медианного или низкочастотного гауссова фильтра, так и путем простого прореживания уровней.

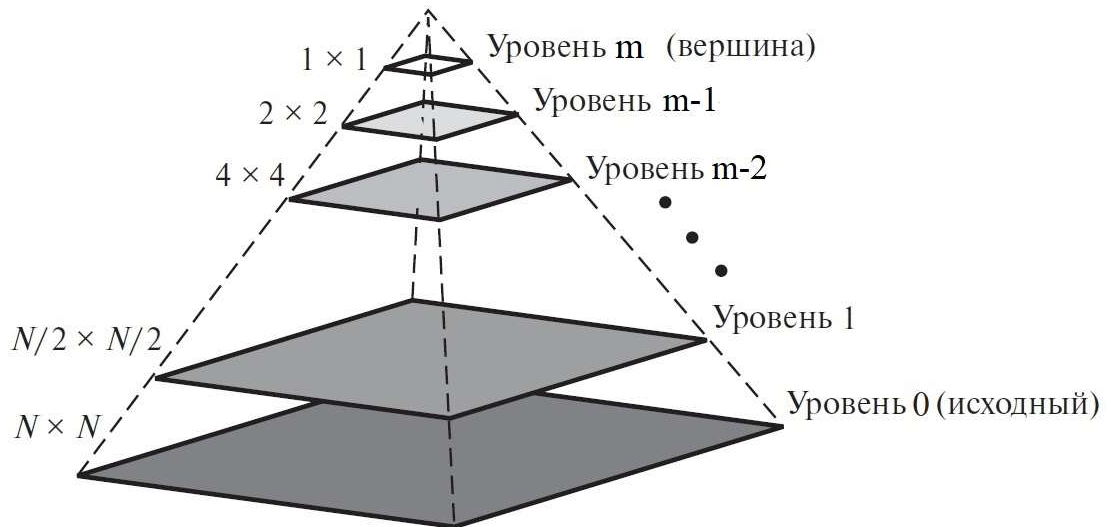


Рис. 2. Пирамида изображений.

Далее опишем алгоритм данного подхода.

Пусть имеется два кадра последовательности I и J. За  $I^L$  обозначим изображения уровней  $L = \overline{0, m}$ , где  $I^0$  — исходное изображение.

Для каждой точки  $p = (x, y) \in I$  необходимо найти соответствующее ему положение  $p' = p + w$ ,  $p' = (x', y') \in J$ , где  $w = (u, v)$  — вектор перемещения. На уровне L точка  $p^L$ , соответствующая начальной  $p = p^0$ , находится по формуле:

$$p^L = \frac{p}{2^L}.$$

Таким образом, общий алгоритм пирамиды изображений имеет вид, представленный на рис.3.



Рис. 3 Общий алгоритм применения пирамиды изображений.

## 2.2. Алгоритмы обработки изображений

На основе исследованных методов предлагается следующий алгоритм обработки изображений.

**Входные данные:** последовательность изображений из двух кадров, число L уровней пирамиды, размер окна сглаживающего фильтра, а также другие параметры в зависимости от применяемой техники вычисления.

- Для Хорна—Шанка: количество итераций k и коэффициент  $\omega$  для метода последовательной релаксации, коэффициент регуляризации  $\alpha$ .

- Для Лукаса—Канаде: размер окна интеграции, порог  $\tau$  для собственных чисел.
- Для их комбинации: все вышеперечисленные параметры.

**Алгоритм:**

1. К каждому изображению применяется сглаживающий фильтр и, если требуется, цветовая схема меняется на полутоновую.
2. Вычисляются производные  $I_x, I_y, I_t$ .
3. Для каждого уровня пирамиды вычисляется и уточняется матрица векторного поля с применением одного из описанных ранее методов.
4. Выводится результат вычисления оптического потока.

### 2.3. Тестирование методов

Для проверки методов была написана программа на языке MATLAB и проведены тесты на группе изображений в градациях серого.

Для лучшего восприятия результатов оптический поток был представлен с использованием цветовой схемы (рис.4).

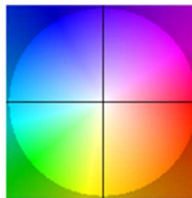


Рис. 4. Каждый цвет соответствует своему направлению. Чем больше длина вектора, тем ярче цвет.

На рисунках 5-7 представлены результаты тестирования.

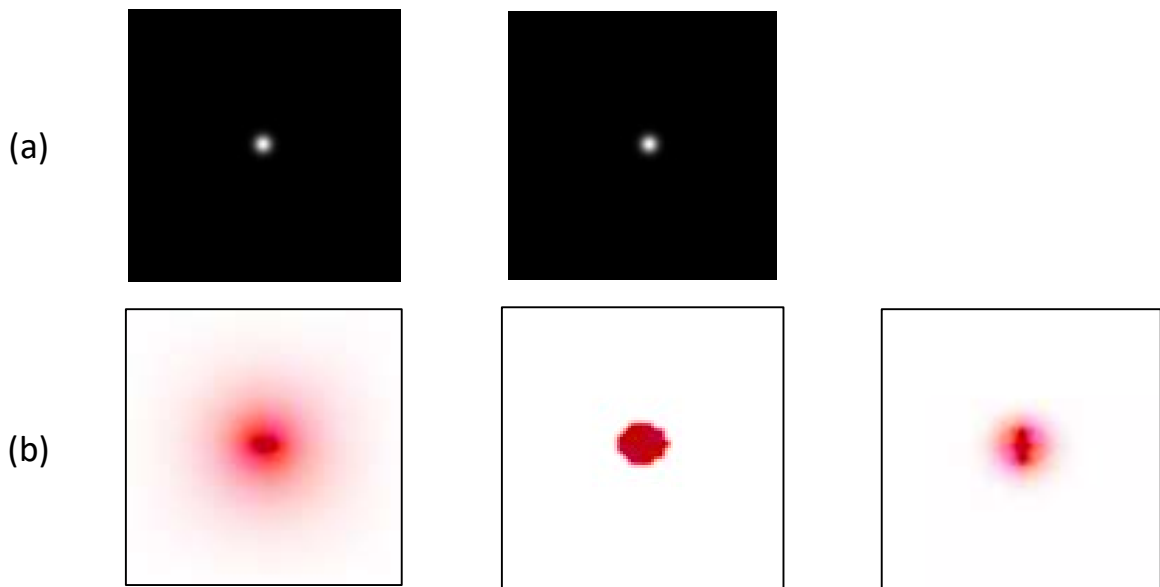


Рис. 5. (а): Изображения малой окружности (100×100 пикселей) с горизонтальным сдвигом на три пикселя вправо. (b): Результаты вычисления поля скоростей (слева направо: Хорн—Шанк, Лукас—Канаде, их комбинация).

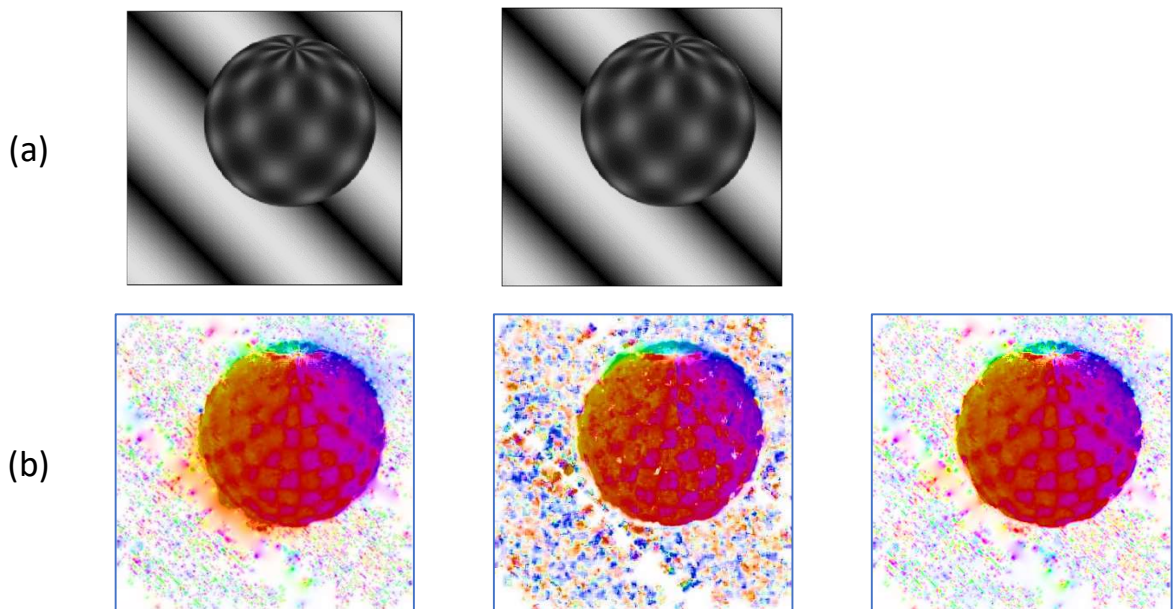


Рис. 6. (а): Изображения сферы (370×370 пикселей), совершающей поворот вокруг оси вправо. (b): Результаты вычисления поля скоростей (слева направо: Хорн—Шанк, Лукас—Канаде, их комбинация).



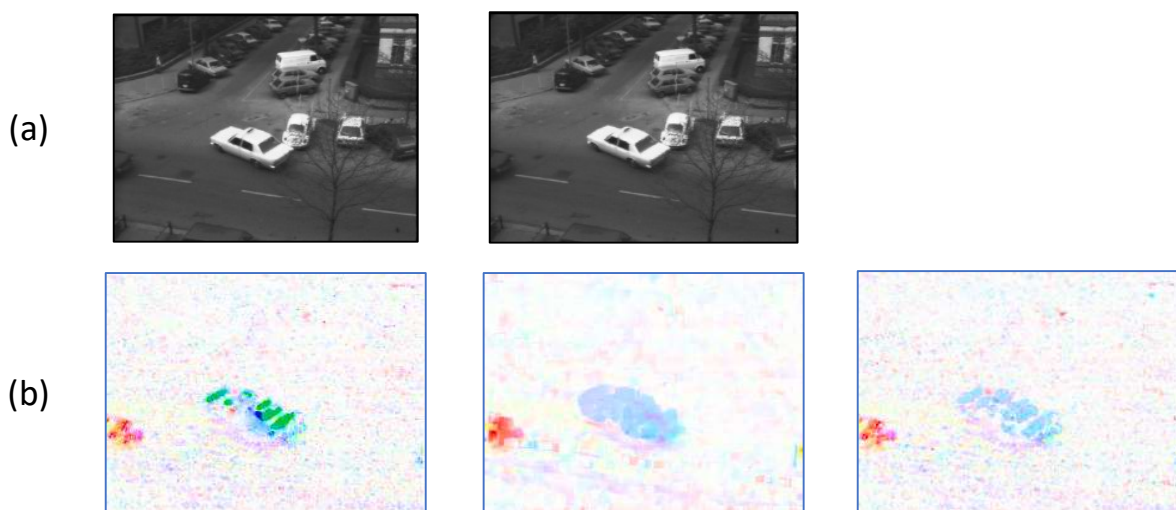


Рис. 7. (a): Изображения такси (256×191 пикселей), поворачивающего за угол. (b): Результаты вычисления поля скоростей (слева направо: Хорн—Шанк, Лукас—Канаде, их комбинация).

По результатам работы можно сделать следующие выводы. В силу особенности глобальных техник вычисления метод Хорна—Шанка при определении векторного поля для движущегося объекта распространяет его скорость и на другие области, когда изображение является неоднородным (рис.5, 6). В свою очередь, оптический поток, рассчитанный методом Лукаса—Канаде, избавлен от такой проблемы, поскольку информация с изображения используется локально. Однако этот факт является и недостатком данного метода, так как не всегда хватает информации для определения скорости, что проявляется в виде белых пятен на изображении (рис.6). Еще одно преимущество метода Лукаса—Канаде — бóльшая устойчивость к шумам (рис.7).

Перечисленные достоинства классических способов вычисления поля скоростей удастся совместить в методе, представляющем их комбинацию. Как видно из рисунков, итоговое изображение движения более однородно и при этом менее подвержено влиянию шумов.

## 2.4. Применение метода к радионуклидным изображениям

Основываясь на сделанных ранее выводах, будем использовать комбинацию локального и глобального методов для обнаружения движения на радионуклидных изображениях. Особенность таких изображений состоит в наличии сильных шумов.

Будем обрабатывать радионуклидную последовательность из двух кадров, на которой объект интереса перемещается и сжимается (рис. 8-10).

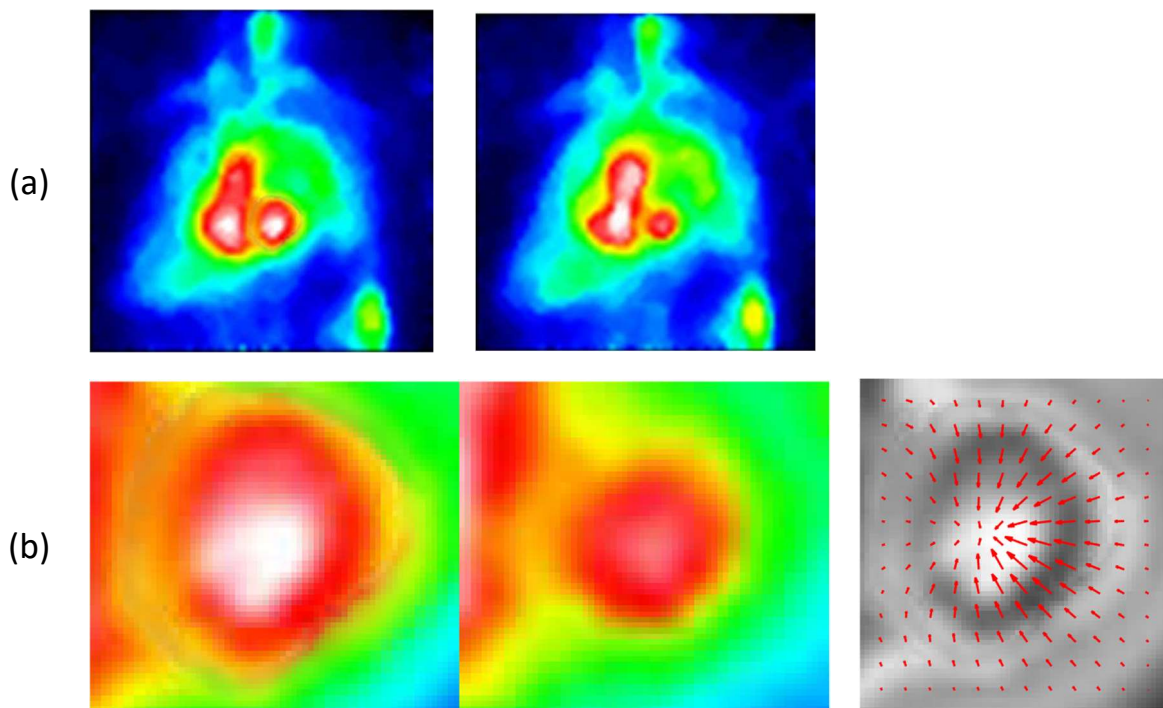


Рис. 8. (a): Изображение левого желудочка сердца. (b): Результат вычисления поля скоростей для области интереса комбинацией локального и глобального методов.

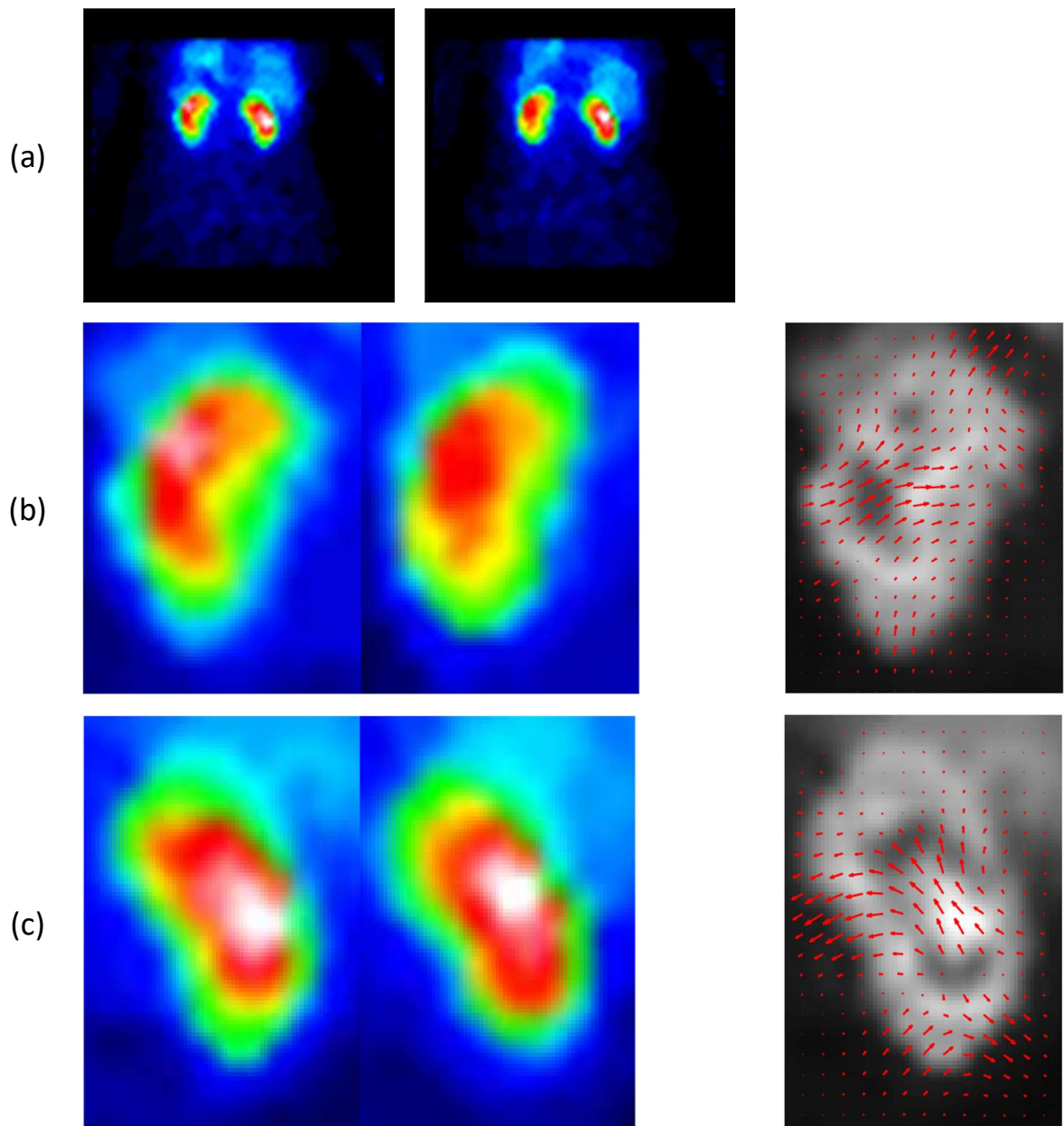


Рис. 9. Изображения почек. (b) и (c): Результаты вычисления поля скоростей комбинацией локального и глобального методов соответственно для области левой и правой почки.

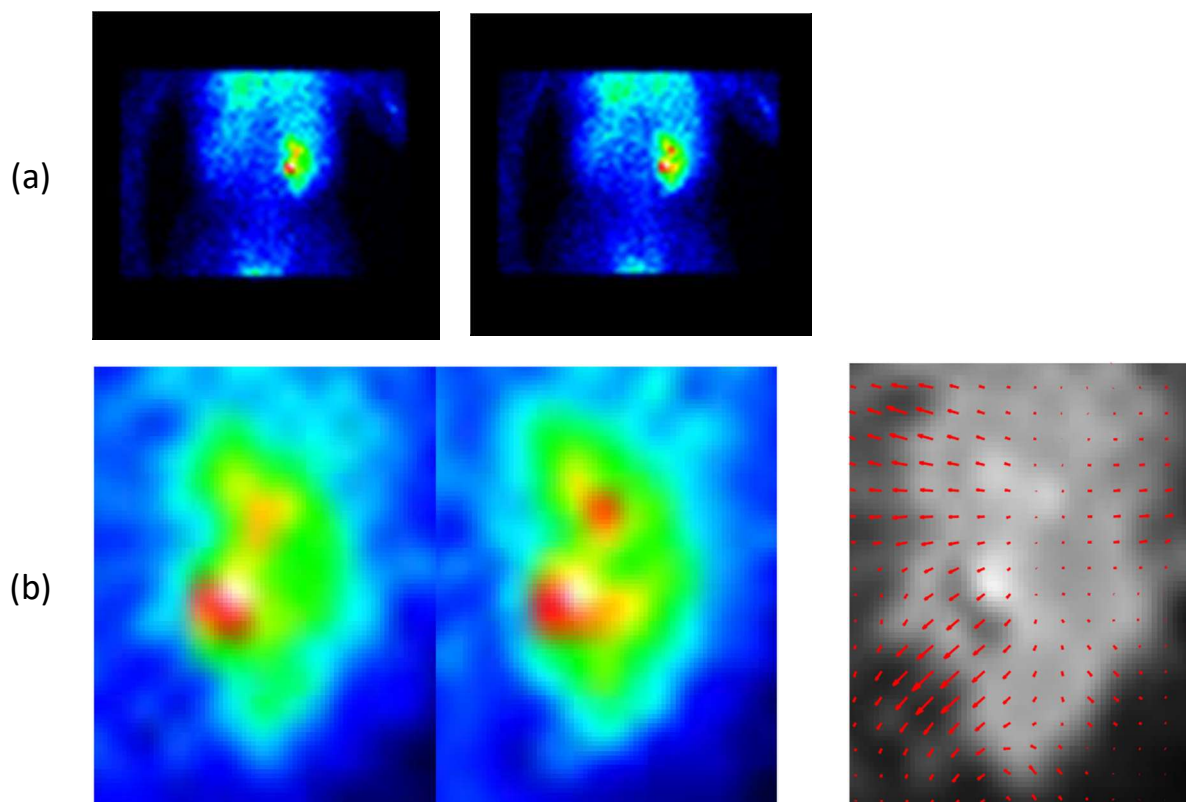


Рис. 10. (a): Изображения почки. (b): Результат вычисления поля скоростей для области интереса комбинацией локального и глобального методов.

## Выводы

В данной работе решается задача вычисления поля скоростей в цифровой обработке последовательности радионуклидных изображений. Предложены алгоритмы с использованием пирамиды изображений, проведено тестирование программы, проанализированы результаты.

Развитие ядерной медицины обуславливает актуальность работы — сейчас практически никакая диагностика заболеваний не проходит без проведения ОФЭКТ или ПЭТ исследования. Такие радионуклидные методы помогают обнаружить болезни на ранних стадиях, уточнить диагноз или локализовать очаг.

## Заключение

В ходе проделанной работы получены следующие результаты:

- Изучены классические модели определения оптического потока Лукаса—Канаде, Хорна—Шанка, а также их комбинация.
- Предложены алгоритмы обработки изображений с использованием пирамиды изображений.
- Разработана программа и проведены тесты на различных изображениях, в том числе радионуклидных.

## Список литературы

1. Котина Е.Д., Максимов К.М. Коррекция движения при томографических и планарных радионуклидных исследованиях // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления, 2011. № 1. С. 29–36.
2. Котина Е. Д., Пасечная Г. А. Определение поля скоростей в задачах обработки изображений // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика, 2013. Т. 6, № 3. С. 48–59.
3. Котина Е.Д. Некоторые вопросы моделирования динамических процессов в радионуклидных исследованиях. СПб.: ВВМ, 2013. 150 с.
4. Котина Е. Д., Бажанов П. В. Об оптимизационном подходе при построении поля скоростей в задачах обработки изображений // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика, 2018. Т. 24. С. 3–11.
5. Котина Е. Д., Леонова Е. Б., Плоских В. А. Обработка радионуклидных изображений с использованием дискретных систем // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15, Вып. 4. С. 544–554.
6. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 285 с.
7. Beauchemin, S. S., Barron, J. L. The computation of optical flow // ACM Computing Surveys, 1995. Vol. 27, No 3. P. 433–466.
8. Bouguet J.Y. Pyramidal Implementation of the Lucas Kanade Feature Tracker Description of the Algorithm // Intel Corporation Microprocessor Research Labs, 1999.

9. Bruhn A., Weickert J., & Schnörr C. Lucas/Kanade Meets Horn/Schunck: Combining Local and Global Optic Flow Methods // International Journal of Computer Vision, 2005, P. 1–21.
10. Fortun D., Bouthemy P., Kervrann C. Optical flow modeling and computation: A survey // Computer Vision and Image Understanding, 2015. Vol. 134. P. 1–21.
11. Horn B.K.P., Schunck B.G. Determining optical flow // Artificial intelligence, 1981. Vol. 17. P. 185–203.
12. Ilg E., Mayer N., Saikia T., Keuper M., Dosovitskiy A., Brox T. FlowNet 2.0: Evolution of Optical Flow Estimation with Deep Networks // IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 2017.
13. Jara-Wilde J., Cerda M., Delpiano J., Härtel S. An implementation of combined local-global optical flow // Image Process On Line, 2015. P. 139–158.
14. Kondermann D., Abraham S., Brostow G., Förstner W., Gehrig S., Imiya A., Bernd J., Felix K., Marcus M., Helmut M., Rudolf M., Tomas P., Ralf R., Zimmer H. On Performance Analysis of Optical Flow Algorithms // Outdoor and Large-Scale Real-World Scene Analysis, 2011.
15. Kotina E.D., Ovsyannikov D.A. Velocity field based method for data processing in radionuclide studies // Problems of Atomic Science and Technology. Vol. 115, No 3, 2018. P. 128-131.
16. Liu C., Freeman W., Adelson E., Weiss Y. Human-assisted motion annotation // IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 2008.
17. Lucas B.D., Kanade T. An iterative image registration technique with an application to stereo vision // IJCAI, 1981. P. 674–679.
18. Sun J., Quevedo F. J., Bollt E. Bayesian optical flow with uncertainty quantification // Inverse Problems, 2018. P. 34.



19. Uras S., Girosi F., Verri A., Torre V. A computational approach to motion perception // *Biological Cybernetics*, 1988. Vol. 60. P. 79–87.