

Санкт-Петербургский государственный университет

Усова Ольга Александровна

Выпускная квалификационная работа

Одномерные математические модели течения крови в вязкопластичном  
приближении

Уровень образования: магистратура

Направление 01.04.02

Прикладная математика и информатика

Прикладная математика и информатика в задачах медицинской  
диагностики

Научный руководитель:  
кандидат физ.— мат. наук,  
доцент, Кривовичев Г. В.

Рецензент: специалист по системной  
биологии ЗАО «Биокад»,  
Марнопольская Е. С.

Санкт-Петербург

2020

## Оглавление

<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>Обзор литературы</b>	<b>4</b>
Объект исследования . . . . .	4
Механические свойства крови . . . . .	6
Математическая модель кровотока . . . . .	9
Выводы . . . . .	13
<b>Математическая модель течения крови в вязкопластичном приближении</b>	<b>14</b>
Математическая модель . . . . .	14
Разностная схема . . . . .	20
Результаты . . . . .	22
<b>Вычислительный эксперимент</b>	<b>23</b>
Одиночный сосуд . . . . .	23
Сосуд с бифуркацией . . . . .	27
Сонная артерия . . . . .	30
Модель артериальной части сердечно-сосудистой системы	33
Результаты . . . . .	38
<b>Заключение</b>	<b>39</b>
<b>Список литературы</b>	<b>40</b>

## Введение

Согласно статистике, сердечно-сосудистые заболевания на сегодняшний день являются одной из основных причин инвалидности и смертности во всем мире [1]. По данным Всемирной организации здравоохранения в 2016 году от сердечно-сосудистых заболеваний умерло 17,9 миллиона человек, что составило 31% всех случаев смерти в мире. Большая часть — 85% этих смертей произошло в результате инфаркта миокарда и инсульта. В частности, по России на 2018 год 18% всех болезней — это болезни системы кровообращения [2].

Одну из лидирующих позиций среди всех заболеваний сердечно-сосудистой системы занимает атеросклероз. В результате болезни часто поражаются сразу несколько артерий, поэтому влияние и развитие патологического процесса необходимо рассматривать в сети сосудов. Современные методы исследования в области хирургии позволяют эффективно лечить подобные заболевания. Например, установкой стентов пораженных коронарных сосудов сердца, заменой клапана сердца. Требуют хирургического вмешательства и другие патологии, например, аневризмы и стенозы.

Таким образом, важной проблемой современной медицины является создание эффективных методов лечения и профилактики сердечно-сосудистых заболеваний. Огромную роль в их разработке играет математическое моделирование. Методы которого, без предварительного вмешательства в организм, позволяют прогнозировать последствия хирургических операций и патологий, оптимизировать форму имплантатов, исследовать их влияния на гемодинамику.

В данной работе рассмотрено построение одномерной математической модели течения крови как вязкопластичной жидкости. Рассмотрен использу-

мый математический аппарат. Описан численный метод решения полученной системы одномерных уравнений. Описаны и решены тестовые задачи, результаты сравниваются с данными статей.

В первой главе приводится обзор литературы, в коротком рассказывается про сердечно-сосудистую систему человека, состав и структуру крови и анатомию сосудов. Описываются физические и механические свойства крови. Показан один из наиболее известных подходов к моделированию течения крови в сосудах. Представлена математическая модель течения крови в общем виде, с учетом предполагаемых допущений. Во второй главе вводится реологическая модель для моделирования поведения крови, с учетом которой выводится часть уравнений, отвечающая за вязкие свойства крови, профиль скорости и коэффициент Буссинеска. Далее представлена одномерная математическая модель, учитывающая вязкие и неньютоновские свойства крови. Затем проводится анализ полученной модели и описывается разностная схема Лакса — Вендроффа. В третьей главе описаны тестовые нелинейные задачи, такие как течение крови в одиночном сосуде и сосуде с бифуркацией. Рассматриваются задачи о моделировании течений в реальных сосудах: в сонной артерии и в модели артериальной части сердечно-сосудистой системы. Описаны необходимые для решения начальные и граничные условия. Представлены полученные графики решения и выводы. В заключении приведены результаты и выводы работы.

# Обзор литературы

## Объект исследования

Как известно, кровь — жидкая подвижная соединительная ткань внутренней среды организма, которая состоит из жидкой среды — плазмы и взвешенных в ней клеток — форменных элементов: лейкоцитов, постклеточных структур (эритроцитов) и тромбоцитов (кровяные пластинки). У взрослого человека форменные элементы крови составляют около 40-48%, а плазма — 52-60%. Соотношение суммарного объема всех форменных элементов клеток к общему объему плазмы крови называется гематокритным числом [3].

Кровь движется по сосудам, представляющим из себя замкнутую систему, циркуляция по которой происходит от сердца и обратно. Кровеносная система человека — сложная, разветвленная сеть, состоящая из вен, артерий и капилляров (рис. 1). Капилляры соединяют артерии и вены, общее их число варьируется от  $10^{11}$  до  $16 \cdot 10^{10}$ . В длину кровеносные сосуды человеческого тела составляют приблизительно  $10^5$  километров [4].

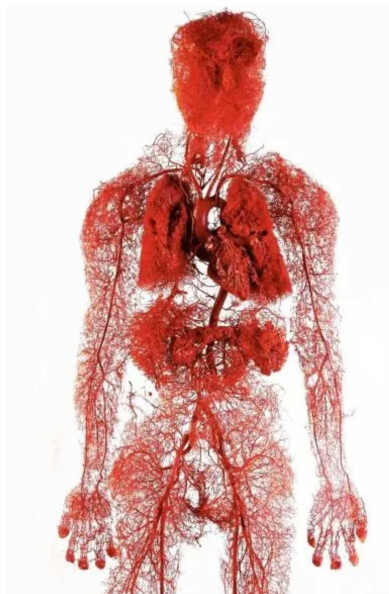


Рис. 1: Кровеносные сосуды человека [5].

Сложным и разнообразным является и строение стенок сосудов. В зависимости от расположения и выполняемой функции, артерии, вены и микроциркуляторные сосуды имеют различную анатомию (рис. 2). Подробнее о классификации сосудов, движении крови по различным сосудам, а так же о составе и основных функциях крови можно прочитать в [3].

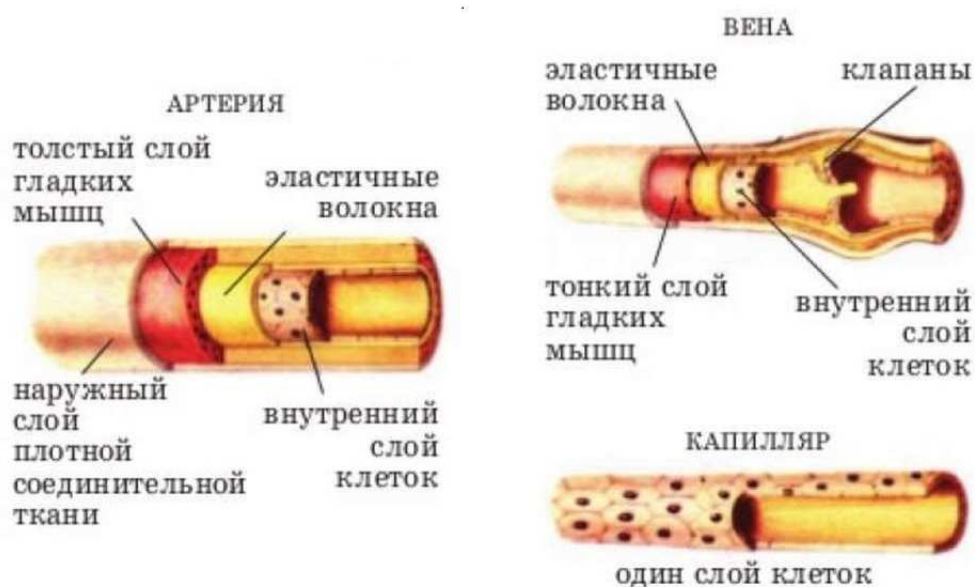


Рис. 2: Строение стенок сосудов [6].

## Механические свойства крови

В настоящий момент используются различные подходы к моделированию кровообращения. В данной работе будет рассмотрен гидродинамический подход, в рамках которого кровь считается вязкой несжимаемой неньютоновской жидкостью, протекающей по сети эластичных трубок.

Жидкость считают несжимаемой, если скорость движения частиц среды мала по сравнению со скоростью звука. А поскольку максимальная скорость кровотока равна 1,2 м/с [8], то можно считать кровь несжимаемой жидкостью.

Установлено, что плазма крови — раствор крупных молекул, но при масштабах движения и при скоростях сдвига, обычно встречающихся в кровеносных сосудах, ее можно считать однородной ньютоновской жидкостью [8]. А так как большую часть форменных элементов составляют эритроциты, именно они определяют механические свойства крови.

Однако кровь является типичной неньютоновской жидкостью, поскольку вязкость крови не одинакова в различных участках сосудистой системы и зависит от гематокритного числа и от величины градиентов скоростей, реализующихся при ее движении. Связано это с тем, что в неподвижной крови или же при малых скоростях течения эритроциты склонны к агрегации (слипанию) и образуют крупные структуры — «монетные столбики» (рис. 3), что приводит к возрастанию вязкости. При увеличении скорости движения крови «монетные столбики» разрушаются, и вязкость крови снижается.

Кроме того, при течении в крупных сосудах, наблюдается «уплощение» профиля скорости крови (рис. 4). Это происходит по нескольким причинам. У стенки сосуда возникают большие градиенты скорости и, следовательно, большие деформации сдвига, которые «выталкивают» эритроциты в область меньших сдвиговых деформаций, т. е. к центру сосуда, где градиент скорости

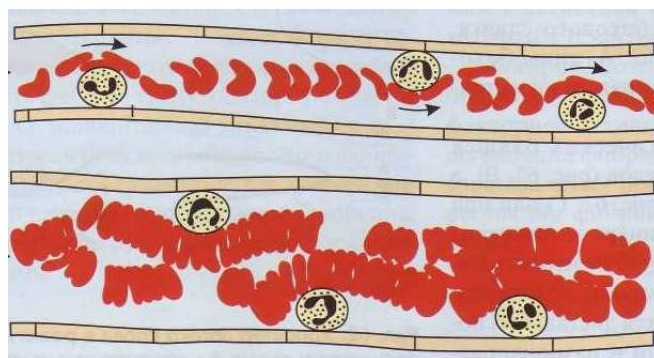


Рис. 3: Монетные столбики [9].

значительно меньше. Концентрация эритроцитов и, соответственно, вязкость крови возрастают к центру сосуда, что и приводит к «уплощению» профиля скорости. Одновременно у стенок сосуда образуется тонкий пристеночный слой плазмы крови, не содержащий эритроцитов и поэтому обладающий низкой вязкостью. В итоге, эритроциты продвигаются по сосуду как бы в оболочке из плазмы, что уменьшает трение крови о стенки и облегчает ее движение по сосудам.

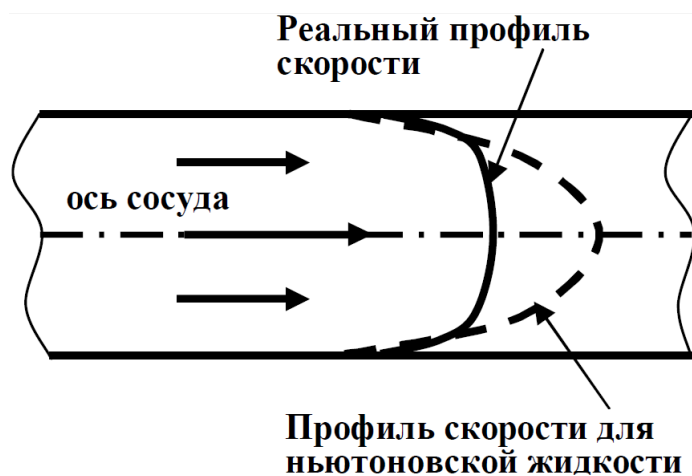


Рис. 4: Профиль скорости ньютоновской и неньютоновской жидкости [10].

Необходимо отметить, что течение крови имеет свои особенности: в мелких кровеносных сосудах кровь нельзя полагать однородной жидкостью, поскольку диаметры эритроцита и капилляра сравнимы по величине. Исходя



из этого, кровь как жидкость можно рассматривать в крупных кровеносных сосудах. Поэтому, для описания течения крови в венах и артериях, используются различные модели течения жидкости. В данной работе кровь рассматривается как вязкая несжимаемая неньютоновская жидкость.

# Математическая модель кровотока

Для описания движения жидкости в каждом сосуде используются уравнения гидродинамики. Общие законы течения жидкости, изучаемые гидродинамикой, установлены в рамках классической физики и являются основой для описания гемодинамических процессов в живом организме [7].

Течение крови в системе кровообращения описывается трехмерными уравнениями:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} + \operatorname{div} \boldsymbol{\Sigma}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{v}$  — вектор скорости,  $\rho$  — плотность крови ( $\rho = \text{const}$ ),  $t$  — время,  $\mathbf{f}$  — вектор плотности массовых сил (будем полагать  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ ),  $\boldsymbol{\Sigma}$  — тензор напряжений.

Уравнение (1) называют уравнением неразрывности, а уравнение (2) — уравнением количества движения.

Как известно, все рассматриваемые компоненты тензора напряжений принимаются состоящими из двух частей:

$$\boldsymbol{\Sigma} = -p\mathbf{I} + \mathbf{T},$$

где  $p$  — давление,  $\mathbf{I}$  — единичный тензор,  $\mathbf{T}$  — тензор касательных напряжений. В свою очередь тензор касательных напряжений является функцией тензора скоростей деформации:  $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{D})$ , где  $\mathbf{D}$  — тензор скоростей деформаций:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T).$$

В зависимости от требуемой детализации и сложности исследуемого процесса используются модели разных размерностей. Например, в данной ра-

боте мы будем использовать одномерные модели [11], позволяющие делать гемодинамические расчеты во всей сосудистой сети. Для этого в работе используется ряд допущений [12]:

1. Сосуд представляется как круговой цилиндр с переменным поперечным сечением. Целесообразно в дальнейшем использовать цилиндрические координаты  $(r, \varphi, z)$ . И подразумевается осевая симметрия, т. е. все величины не зависят от угла  $\varphi$ .

2. Ось цилиндра не смещается во времени. И имеют место только радиальные смещения стенок сосуда (нет смещения по  $z$ ).

3. Давление постоянно вдоль каждого поперечного сечения  $p = p(t, z)$ .

4. Считаем, что радиальная компонента вектора скорости  $v_r$  пренебрежимо мала по сравнению с осевой компонентой  $v_z$ , т. о.  $\mathbf{v} = (0, 0, v_z)^T$ .

5. Предполагаем, что осевая компонента скорости имеет вид:

$$v_z(t, r, z) = U(t, z)s\left(\frac{r}{R(t, z)}\right), \quad (3)$$

где  $U(t, z)$  — средняя скорость (по поперечному сечению),  $s$  — заданный безразмерный профиль скорости,  $R(t, z)$  — радиус сосуда в деформированном состоянии.

Необходимо отметить, что на функцию  $s$  налагаются некоторые ограничения, исходя из определения средней скорости:

$$U(t, z) = \frac{\iint_{\Pi} v_z d\gamma}{A(t, z)},$$

где  $\Pi$  — поперечное сечение сосуда и  $A(t, z) = \pi R^2(t, z)$ .

Вычисляя интеграл, введя замену  $y = \frac{r}{R}$  и преобразуя уравнение получаем условие на  $s$  :

$$\int_0^1 ys(y)dy = \frac{1}{2}.$$

6. Выполняется условие прилипания на стенке сосуда (граничное условие на границе сосуда и жидкости:  $\mathbf{v} = \dot{\boldsymbol{\eta}} = \dot{\eta}\mathbf{e}_r$ , где  $\mathbf{e}_r$  — орт, отвечающий координате  $r$ ,  $\eta = R - R_0$ , где  $R$  и  $R_0$  — радиус сосуда в деформированном и недеформированном состоянии соответственно).

Вдобавок необходимо упомянуть про такую важную характеристику течения, как коэффициент Буссинеска. Это отношение количества движения жидкости, протекающего в единицу времени через поперечное сечение, к количеству движения, вычисленному по средней скорости. По определению и при данных предположениях он имеет вид:

$$\alpha = \frac{\int_{\Pi} v_z^2 d\gamma}{AU^2} = \frac{\int_{\Pi} U^2 s^2 d\gamma}{AU^2} = \frac{\iint_{\Pi} s^2 d\gamma}{A(t, z)}. \quad (4)$$

Введем дополнительно еще одну величину  $Q$  — объемный расход, который представляет собой объем жидкости, протекающей через поперечное сечение за единицу времени:

$$Q(t, z) = \iint_{\Pi} v_z d\gamma = A(t, z)U(t, z).$$

После осреднения трехмерных уравнений получается следующая одномерная система [12]:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = f(A, Q), \quad (6)$$

где  $f(A, Q)$  отвечает за вязкие свойства крови.

Уравнение (5) является следствием условия несжимаемости, а (6) — следствием уравнения движения. Полученные уравнения не зависят от физиологических свойств конкретного сосуда. В качестве замыкающего третьего уравнения обычно используют соотношение, связывающее площадь поперечного сечения сосуда и трансмуральное давление в сосуде:

$$A = A(p). \quad (7)$$

Именно в этом уравнении, которое называют уравнением состояния, учитываются все свойства, присущие данному типу сосуда.

## Выводы

1. Поскольку для моделирования крови необходимо рассматривать сложную биологическую систему, на работу которой влияет множество различных факторов, не удивительно, что общая модель течения крови в сердечно-сосудистой системы так до сих пор и не реализована. В исследованиях чаще используют одномерные модели, поскольку для трехмерного моделирования необходима более сложная реализация решения и вычисления.

2. В настоящее время, используя распространенный подход к моделированию в гемодинамике, кровь рассматривается как однородная несжимаемая ньютоновская среда. Довольно часто встречается несоответствие модели течения крови, профиля скорости и коэффициента Пуассона. Поэтому актуально рассмотреть корректную модель течения крови как вязкой несжимаемой неньютоновской жидкости.

С учетом всего выше сказанного определим цель работы: математическое моделирование течения крови как неньютоновской вязкопластичной жидкости.

В связи с этим поставим следующие задачи:

1. Построение одномерной математической модели в вязкопластичном приближении.
2. Программная реализация алгоритмов численных методов.
3. Решение задач о численном моделировании кровотока в одиночных сосудах и их системах.
4. Анализ полученных результатов.

# Математическая модель течения крови в вязкопластичном приближении

## Математическая модель

Известно множество различных реологических моделей для моделирования поведения крови [13]. Ведь именно реология позволяет установить связь между тензором касательных напряжений и тензором скоростей деформации:  $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{D})$ . Для ньютоновских жидкостей эта зависимость определяется обобщенной формулой Ньютона:

$$\mathbf{T} = 2\mu\mathbf{D},$$

где  $\mu$  — динамическая вязкость.

Для некоторых неньютоновских жидкостей величину напряжений, зависящих от вязкости, тоже можно выразить в виде:

$$\mathbf{T} = 2\mu_a\mathbf{D}, \quad (8)$$

где  $\mu_a$  — кажущаяся вязкость.

К группе вязких жидкостей относятся все жидкости, для которых справедливо реологическое уравнение вида  $\dot{\gamma} = f(\tau)$ , где  $\dot{\gamma}$  — скорость деформаций сдвига,  $\tau$  — напряжение сдвига. Из этого реологического соотношения следует, что скорость сдвига в любой точке такой жидкости является однозначной функцией напряжений в этой точке. К вязким жидкостям относятся и вязкопластичные жидкости.

Кривые течения вязкопластичных жидкостей (см. рис. 5) не проходят через начало координат, а отсекают на оси напряжений сдвига отрезок, равный  $\tau_0$  — пределу текучести при сдвиге.

Предел текучести вязкопластичных жидкостей при сдвиге характеризует пластические свойства материала. Поведение этих жидкостей обычно объ-

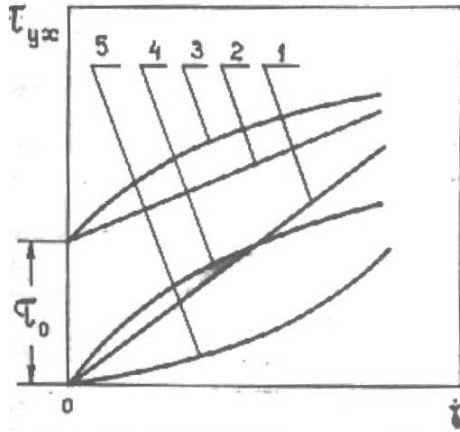


Рис. 5: Кривые течения чистовязких жидкостей: 1 — ньютоновская, 2 — вязкопластичная Шведова-Бингама, 3 — вязкопластичная с нелинейной кривой течения, 4 — псевдопластичная, 5 — дилатантная [13].

ясняют внутренней пространственной структурой, которая способна предотвращать течение до тех пор, пока приложенные сдвиговые напряжения меньше предела текучести, если они превышают предел текучести, то внутренняя структура полностью разрушается и материал ведет себя как жидкость. Структура вновь восстанавливается, когда сдвиговые напряжения становятся меньше предела текучести.

Реологическое уравнение для линейных вязкопластичных жидкостей можно записать следующим образом:

$$\tau_{yx} = \tau_0 + \mu_p \dot{\gamma}, \quad (9)$$

где  $\mu_p$  — пластическая вязкость.

Исходя из (9) определяется конкретный вид функциональной зависимости (8). И выражение для кажущейся вязкости линейной вязкопластичной жидкости при пространственном течении таких жидкостей имеет вид:

$$\mu_a = \frac{\tau_0}{\sqrt{I_2}} + \mu_p,$$

где  $I_2 = \dot{\gamma}_{ij}\dot{\gamma}_{ji} = 2(\dot{\gamma}_{xx}^2 + \dot{\gamma}_{yy}^2 + \dot{\gamma}_{zz}^2) + \dot{\gamma}_{xy}^2 + \dot{\gamma}_{yz}^2 + \dot{\gamma}_{xz}^2$  — второй инвариант тензора



скоростей деформации.

Теперь тензор напряжений переписется в виде:

$$\mathbf{T} = 2\left(\frac{\tau_0}{\sqrt{I_2}} + \mu_p\right)\mathbf{D}.$$

Таким образом, с учетом введенных в предыдущей главе допущений система (1), (2) принимает вид:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + \operatorname{div}(v_z \mathbf{v}) = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_z, \quad (10)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}_z$  — напряжения.  $\boldsymbol{\sigma}_z = (\sigma_{zr}, \sigma_{z\varphi}, \sigma_{zz})^T$ .

Для вывода правой части  $f(A, Q)$  уравнения (6), отвечающей за вязкие свойства крови, необходимо рассмотреть правый член уравнения (10), который и отвечает за вязкость. Осредняя правую часть уравнения по пространству, рассматривая бесконечно малый цилиндрический объем:

$$\Omega = \left\{ (r, \varphi, z) \mid r \in [0, R], \varphi \in [0, 2\pi], z \in \left[ z^* - \frac{dz}{2}, z^* + \frac{dz}{2} \right] \right\},$$

где  $z^*$  — произвольная точка. Считаем, что  $dz$  настолько мал, что  $R$  на участке  $\left[ z^* - \frac{dz}{2}, z^* + \frac{dz}{2} \right]$  не зависит от  $z$ . И с учетом допущений, вводимых для построения одномерной модели при интегрировании получим:

$$\frac{1}{\rho} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_z dV = -\frac{1}{\rho} \iiint_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial z} dV + \frac{1}{\rho} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_z dV,$$

где  $\boldsymbol{\tau}_z = (\tau_{zr}, 0, 0)^T$  — касательные напряжения.

Преобразуем первое слагаемое:

$$-\frac{1}{\rho} \iiint_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial z} dV = -\frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz + o(dz)$$

Второе слагаемое по формуле Гаусса-Остроградского запишется в виде:

$$\frac{1}{\rho} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \tau_z dV = \frac{1}{\rho} \iint_{\Gamma} \tau_{zr} d\sigma,$$

где  $\Gamma = \{(x, y, z) | x = R \cos \varphi, y = R \sin \varphi, z = z, \varphi \in [0, 2\pi], z \in [z^* - \frac{dz}{2}, z^* + \frac{dz}{2}]\}$ .

С учетом формулы (3):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \iint_{\Gamma} \tau_{zr} d\sigma &= \frac{1}{\rho} \int_0^{2\pi} \int_{z^* - \frac{dz}{2}}^{z^* + \frac{dz}{2}} \tau_{zr} R d\varphi dz = \frac{2\pi R}{\rho} \int_{z^* - \frac{dz}{2}}^{z^* + \frac{dz}{2}} \tau_{zr} \Big|_{r=R} dz = \\ &= \frac{2\pi R}{\rho} \left( \int_{z^* - \frac{dz}{2}}^{z^* + \frac{dz}{2}} \mu_p \frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_{r=R} dz + \int_{z^* - \frac{dz}{2}}^{z^* + \frac{dz}{2}} \frac{\tau_0}{|\frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_{r=R}} \frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_{r=R} dz \right) = \\ &= \frac{2\pi}{\rho} \left( \int_{z^* - \frac{dz}{2}}^{z^* + \frac{dz}{2}} \mu_p U(t, z) s'(1) dz + R \tau_0 \int_{z^* - \frac{dz}{2}}^{z^* + \frac{dz}{2}} \frac{U s'(1)}{|U s'(1)|} dz \right) = \\ &= 2\pi \mu_p s'(1) \frac{1}{\rho} \frac{Q}{A} dz + 2\sqrt{\pi A} \tau_0 \frac{1}{\rho} \operatorname{sign}(U s'(1)) dz + o(dz). \end{aligned}$$

Получим безразмерный профиль, рассмотрев ламинарное течение линейной вязкопластичной жидкости в цилиндрической круглой трубке [13]. Учитывая, что сдвиговое течение наблюдается только при радиусах больших  $r_0$ , а внутри  $r_0$  жидкость движется как твердый стержень, и используя замены  $y = \frac{r}{R}$  и  $y_0 = \frac{r_0}{R}$ :

$$s(y) = \begin{cases} \frac{2(1 - y^2) - 4y_0(1 - y)}{1 - \frac{4}{3}y_0 + \frac{1}{3}y_0^4}, & y > y_0, \\ \frac{2(1 - y_0)^2}{1 - \frac{4}{3}y_0 + \frac{1}{3}y_0^4}, & y \in [0, y_0]. \end{cases}$$

В большом количестве статей значение коэффициента Буссинеска не согласуется с используемым профилем скорости. Часто в работах, где кровь рассматривается как ньютоновская жидкость, берется  $\alpha = 1$ . Однако такое значение  $\alpha$  характерно для случая идеальной жидкости, а для ньютоновской жидко-

сти  $\alpha = \frac{4}{3}$ . Поэтому для рассматриваемой неньютоновской модели найдем корректный коэффициент Буссинеска по формуле (4):

$$\alpha = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} s^2\left(\frac{r}{R}\right) r dr d\varphi.$$

Используя замену переменных  $t = \frac{r}{R}$  и предполагая  $t_0 = \frac{r_0}{R}$  получаем:

$$\alpha = 2 \int_0^1 t s^2(t) dt = 2 \left( \int_0^{t_0} t s^2(t) dt + \int_{t_0}^1 t s^2(t) dt \right).$$

Вычисляя интеграл, получим:

$$\alpha = \frac{12(4t_0^2 + 6t_0 + 5)}{5(t_0^2 + 2t_0 + 3)^2}.$$

Как уже говорилось выше, для замыкания системы из двух уравнений относительно трех неизвестных используется уравнение состояния (7). В большинстве работ для артерий используется зависимость:

$$p(A) = \xi \frac{\sqrt{A} - \sqrt{A_{\min}}}{A_{\min}} + p_{\min},$$

где  $\xi = \frac{\sqrt{\pi h E}}{1-\nu^2}$ ,  $h$  — толщина стенки,  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $A_{\min}$  — наименьшая площадь,  $p_{\min}$  — наименьшее давление. Важной характерной особенностью зависимости сечения от давления является возрастание сечения с ростом давления, то есть выполнения условия [11]:

$$\frac{dA}{dp}(p) \geq 0.$$

В результате, построенная математическая модель учитывающая вязкие и неньютоновские свойства крови имеет следующий вид:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - K_1 \frac{Q}{A} - K_2 \sqrt{A} \text{sign}\left(\frac{Q}{A} s'(1)\right) = 0, \quad (12)$$

где

$$K_1 = \frac{2\pi\mu_p s'(1)}{\rho}, \quad K_2 = \frac{2\sqrt{\pi}\tau_0}{\rho}, \quad s'(1) = \frac{4y_0 - 4}{1 - \frac{4}{3}y_0 + \frac{1}{3}y_0^4},$$

$$p(A) = \xi \frac{\sqrt{A} - \sqrt{A_{\min}}}{A_{\min}} + p_{\min}, \quad (13)$$

где  $A(t, z)$  — площадь поперечного сечения,  $Q(t, z)$  — объемный расход,  $\alpha$  — коэффициент Буссинеска,  $\rho$  — плотность крови,  $\mu_p$  — пластическая вязкость,  $\tau_0$  — предел текучести,  $L$  — длина сосуда.

Систему уравнений (11), (12) можно переписать в квазилинейной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{H}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} = \mathbf{f}(\mathbf{U}),$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{A}{\rho} \frac{dp}{dA} - \alpha \left(\frac{Q}{A}\right)^2 & 2\alpha \frac{Q}{A} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ K_1 \frac{Q}{A} + K_2 \sqrt{A} \text{sign}\left(\frac{Q}{A} s'(1)\right) \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы  $\mathbf{H}$  имеют вид:

$$\lambda_{1,2} = \alpha \frac{Q}{A} \mp \sqrt{c_s^2 + \frac{Q^2}{A^2}(\alpha^2 - \alpha)},$$

где

$$c_s = \sqrt{\frac{A}{\rho} \frac{dp}{dA}},$$

$$\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 > 0.$$

Получили вещественные и различные собственные значения, следовательно, можно сделать вывод, что эта система нелинейных уравнений гиперболического типа, решение представляется в виде волн. И для решения системы можно применять различные численные методы.

## Разностная схема

Большое число численных методов предложено для системы в дивергентной форме, поэтому перепишем систему уравнений (11), (12) в дивергентной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial z} = \mathbf{f}(\mathbf{U}),$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} Q \\ \alpha \frac{Q^2}{A} + \varphi(A) \end{pmatrix},$$

$$\varphi(A) = \int_{A_{\min}}^A \psi(\tau) d\tau,$$

$$\psi(\tau) = \frac{\tau}{\rho} \frac{dp}{dA}(\tau).$$

Надо отметить, что все существующие работы в области гемодинамики, помимо построения и разработки собственно моделей, требуют определенных усилий по созданию численных методов решения соответствующих задач. Одной из широко используемых схем для решения гиперболической системы уравнений является схема Лакса — Вендроффа. Она достаточно проста для реализации и имеет второй порядок точности по временным и пространственным переменным.

Схема состоит из двух этапов. На первом этапе вычисляются значения в полуцелых узлах:

$$\mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^{s+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\mathbf{U}_j^s + \mathbf{U}_{j+1}^s) - \frac{\Delta t}{2h} (\mathbf{F}(\mathbf{U}_{j+1}^s) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_j^s)) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{f}(\mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^s).$$

На втором этапе вычисляется окончательное решение в целых узлах:

$$\mathbf{U}_j^{s+1} = \mathbf{U}_j^s - \frac{\Delta t}{h} \left( \mathbf{F}(\mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^{s+\frac{1}{2}}) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_{j-\frac{1}{2}}^{s+\frac{1}{2}}) \right) + \Delta t \mathbf{f}(\mathbf{U}_j^{s+\frac{1}{2}}).$$

Программа расчета течений на графе сосудов по одномерной модели (11) — (13) была реализована в пакете Matlab. Matlab — пакет прикладных программ для решения различных задач и обработки данных. Широкие возможности и удобный интерфейс программы позволяет создавать понятные и быстро компилируемые проекты.

Для корректной работы программы сначала объявляются все необходимые модельные параметры, задаются начальные условия и сетка по времени. Затем, в цикле по времени, для каждого сосуда вызывается основная функция — BloodVessel, для расчета  $A$  и  $Q$  по схеме Лакса — Вендроффа в кровеносном сосуде с заданными параметрами. В ней задается необходимая сетка разбиения по пространству для конкретного сосуда, реализована численная схема Лакса — Вендроффа для решения системы (11) — (13) в дивергентной форме. В зависимости от того рассматривается один сосуд или сосуд с бифуркацией, ставятся различные граничные условия, которые определяются в той же функции BloodVessel. При бифуркации (ветвления сосудов) условия совместности преобразуются в систему нелинейных алгебраических уравнений, которая решается методом Ньютона. В результате работы BloodVessel для одного сосуда получаем массивы для  $A$ ,  $Q$ ,  $p$ , набор узлов сетки по пространству и шаг по пространству. По которым в итоге строим необходимые графики. Также можно построить графики изменения искомых параметров во времени.

## Результаты

1. Выбрана реологическая модель течения жидкости, которая описывает поведение крови в сосуде. С учетом этого было получено выражение для вязкого члена  $f(A, Q)$  уравнения (10), что позволило получить полную одномерную математическую модель течения крови (11) — (13), в рамках которой она описывается вязкопластичной жидкостью.

2. Кроме того, исходя из реологической модели, было получено выражение для коэффициента Буссинеска.

3. В результате произведенного анализа получившейся системы (11), (12), был сделан вывод, что система является гиперболической и для решения подобных систем можно применять различные численные методы.

4. Для численного решения системы была выбрана схема Лакса — Вендроффа, из-за достаточной простоты ее реализации и второго порядка точности по пространственным и временным переменным.

# Вычислительный эксперимент

## Одиночный сосуд

Рассматривается задача о течении крови в одиночном сосуде (рис. 6). Необходимые характеристики взяты из статьи [11], приведем их в системе СГС:

Длина сосуда:	$L = 10^3$ см
Толщина стенки сосуда:	$h = 0.15$ см
Плотность крови:	$\rho = 1.05$ г/см <sup>3</sup>
Модуль Юнга:	$E = 4 \cdot 10^6$ дин/см <sup>2</sup>
Коэффициент Буссинеска:	$\alpha = 1$ и $\alpha = \frac{4}{3}$
Начальная площадь поперечного сечения:	$A_0 = \pi$ см <sup>2</sup>



Рис. 6: Одиночный сосуд.

Система решалась с начальными условиями:  $A(0, z) = A_0$ ,  $Q(0, z) = 0$ . Граничные условия на левом конце имеют вид:  $Q(t, 0) = Q_{in}(t)$  ( $Q_{in}(t)$  получена также из [11]) — расход как функция времени и условие совместности (изменение решения вдоль характеристики системы, покидающей область):

$$\mathbf{I}_1 \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} \right) = \mathbf{I}_1 \mathbf{f}, \Leftrightarrow \mathbf{I}_1 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \lambda_1 \mathbf{I}_1 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} = \mathbf{I}_1 \mathbf{f},$$

где  $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_1(\mathbf{U})$  — левый собственный вектор, отвечающий  $\lambda_1(\mathbf{U})$ .

На правом конце задается условие совместности:

$$\mathbf{I}_2 \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} \right) = \mathbf{I}_2 \mathbf{f}, \Leftrightarrow \mathbf{I}_2 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \lambda_2 \mathbf{I}_2 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} = \mathbf{I}_2 \mathbf{f},$$



где  $\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_2(\mathbf{U})$  — левый собственный вектор, отвечающий  $\lambda_2(\mathbf{U})$ , и неотражающее условие, гарантирующее выход возмущения за границу области:

$$\mathbf{I}_1\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \mathbf{f}\right) = 0.$$

Для программной реализации граничных условий сначала производится дискретизация производных на левом и правом концах соответственно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}(t_{n+1}, z_0) &\approx \frac{\mathbf{U}_0^{n+1} - \mathbf{U}_0^n}{\Delta t}, & \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z}(t_{n+1}, z_0) &\approx \frac{\mathbf{U}_1^{n+1} - \mathbf{U}_0^n}{h}, \\ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}(t_{n+1}, z_N) &\approx \frac{\mathbf{U}_N^{n+1} - \mathbf{U}_N^n}{\Delta t}, & \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z}(t_{n+1}, z_N) &\approx \frac{\mathbf{U}_N^{n+1} - \mathbf{U}_{N-1}^{n+1}}{h}, \end{aligned}$$

где  $t_i$  — узел по времени, где  $i = 1, \dots, m$ ,  $\Delta t$  — шаг по времени,  $z_i$  — узел по пространству,  $i = 1, \dots, N$ ,  $h$  — шаг по пространству. Введем следующие упрощения:

$$\mathbf{I}_1(\mathbf{U}_0^{n+1}) \approx \mathbf{I}_1(\mathbf{U}_0^n), \quad \lambda_1(\mathbf{U}_0^{n+1}) \approx \lambda_1(\mathbf{U}_0^n), \quad \mathbf{f}(\mathbf{U}_0^{n+1}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{U}_0^n),$$

$$\mathbf{I}_2(\mathbf{U}_N^{n+1}) \approx \mathbf{I}_2(\mathbf{U}_N^n), \quad \lambda_2(\mathbf{U}_N^{n+1}) \approx \lambda_2(\mathbf{U}_N^n), \quad \mathbf{f}(\mathbf{U}_N^{n+1}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{U}_N^n),$$

$$\mathbf{I}_1(\mathbf{U}_N^{n+1}) \approx \mathbf{I}_1(\mathbf{U}_N^n).$$

В результате имеем:

$$\mathbf{I}_1(\mathbf{U}_0^n)(\mathbf{U}_0^{n+1} - \mathbf{U}_0^n + \frac{\Delta t}{h}\lambda_1(\mathbf{U}_0^n)(\mathbf{U}_1^{n+1} - \mathbf{U}_0^{n+1}) - \Delta t\mathbf{f}(\mathbf{U}_N^n)) = 0,$$

$$\mathbf{I}_2(\mathbf{U}_N^n)(\mathbf{U}_N^{n+1} - \mathbf{U}_N^n + \frac{\Delta t}{h}\lambda_2(\mathbf{U}_N^n)(\mathbf{U}_N^{n+1} - \mathbf{U}_{N-1}^{n+1}) - \Delta t\mathbf{f}(\mathbf{U}_N^n)) = 0,$$

$$\mathbf{I}_1(\mathbf{U}_N^n)(\mathbf{U}_N^{n+1} - \mathbf{U}_N^n - \Delta t\mathbf{f}(\mathbf{U}_N^n)) = 0.$$

Затем на правом конце формируется система линейных алгебраических уравнений относительно компонент вектора  $\mathbf{U}$ . На левом конце получаем одно уравнение и подставляя необходимое значение  $Q$  из граничного условия, получаем уравнение для  $A$ .

Результаты работы программы представлены на рис. 7. На графике показаны давление в случае отсутствия вязкости и в случае ньютоновской жидкости в избранные моменты времени. Это решение сравнивалось с графиком из статьи [11], изображенном на рис. 8. Как можно заметить, результаты работы программы с параметрами, представленными в статье, и график идеальной и ньютоновской жидкости из статьи хорошо согласованы друг с другом.

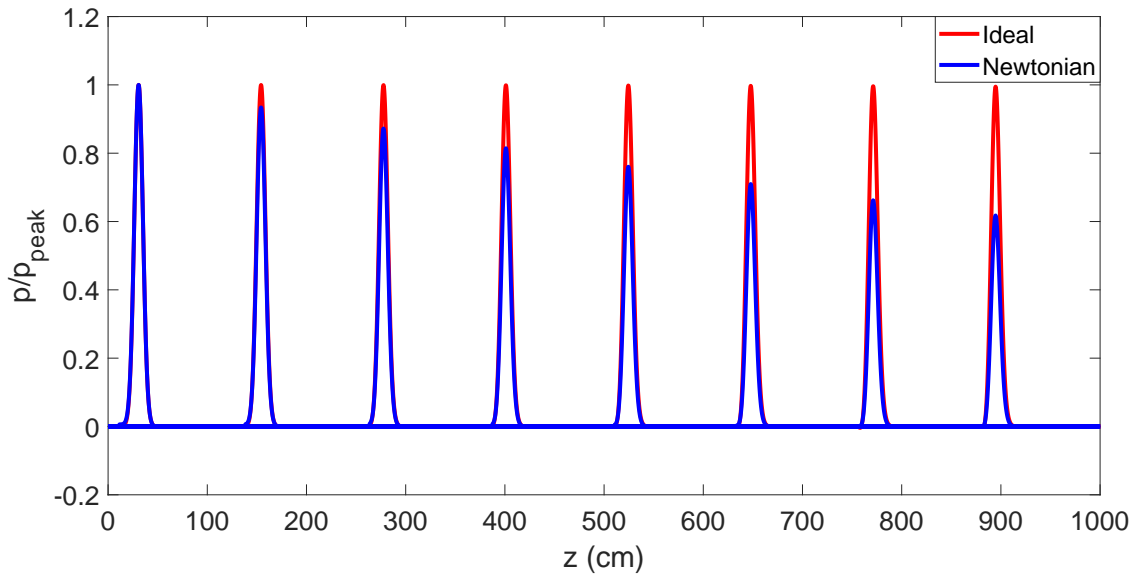


Рис. 7: График давления, отнесенного к максимальному значению  $p_{peak}$  в фиксированные моменты времени: 0.1 с., 0.3 с., 0.5 с., 0.7 с., 0.9 с., 1.1 с., 1.3 с., 1.5 с.

Аналогичная задача решалась для случая неньютоновской модели и ньютоновской при правильном значении  $\alpha = \frac{4}{3}$ . На рис. 9 представлены графики приведенного давления в избранные моменты времени. Как можно видеть, для модельного сосуда такой протяженности неньютоновские эффекты играют существенную роль и их необходимо учитывать при моделировании.

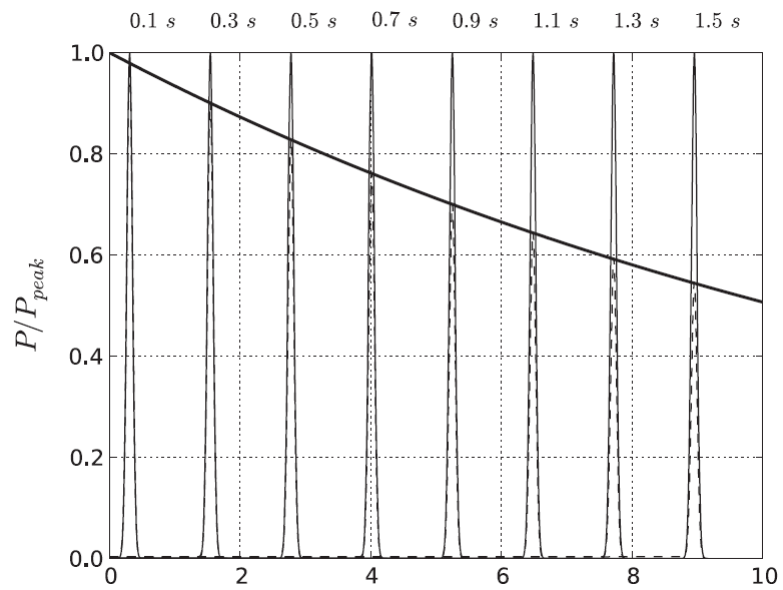


Рис. 8: Сравнение с результатами статьи [11]. Сплошная кривая — случай нулевой вязкости; пунктирные линии — с вязкостью.

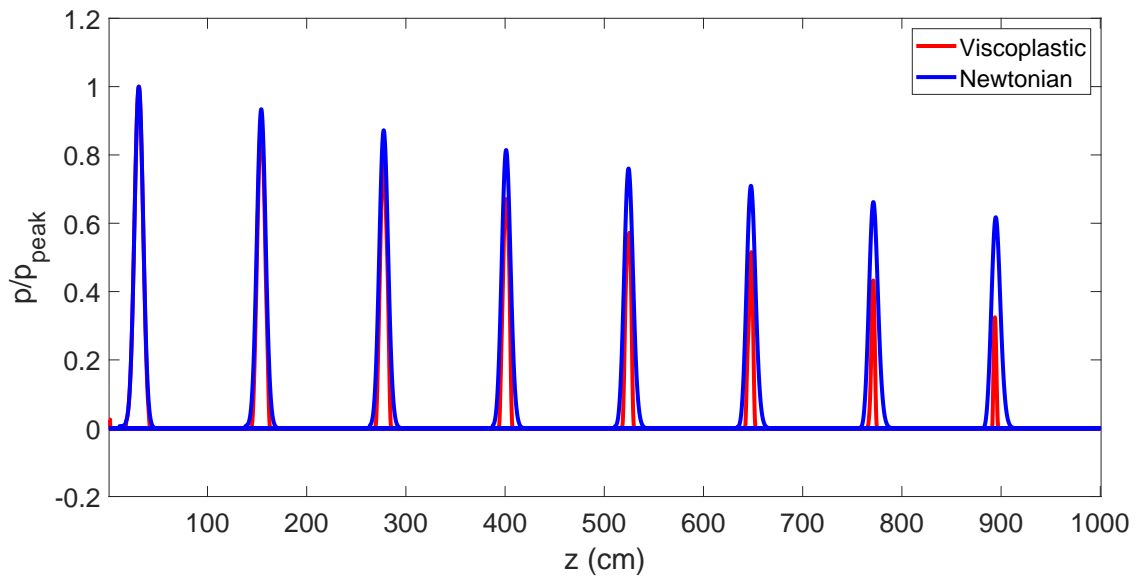


Рис. 9: Сравнение ньютоновской и неньютоновской моделей. Синяя кривая — случай линейной вязкости; красная кривая — случай нелинейной вязкости.

## Сосуд с бифуркацией

Для возможности моделирования многокомпонентной сети сосудов необходимо рассмотреть соединение нескольких сосудов. Поэтому далее была рассмотрена задача о течении в сосуде с бифуркацией (рис. 10). В рамках этой задачи рассматривается родительский сосуд и два дочерних.

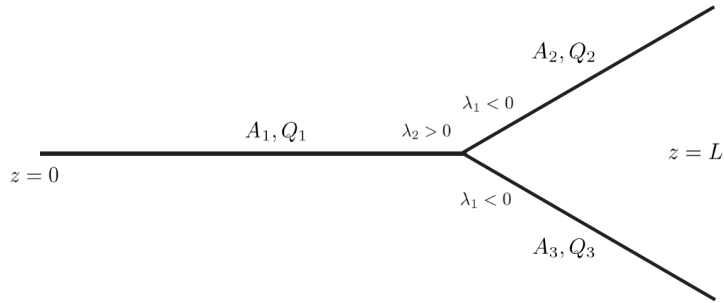


Рис. 10: Сосуд с бифуркацией.

Необходимые характеристики для модели взяты из статьи [14], приведем их в системе СГС:

Длина родительского сосуда:  $L_1 = 20$  см

Длина дочерних сосудов:  $L_2 = L_3 = 20$  см

Плотность крови:  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>

$\xi$  из (13) для родительского сосуда:  $\xi_1 = 25.52$  г/(с<sup>2</sup> · см<sup>2</sup>)

$\xi$  из (13) для дочерних сосудов:  $\xi_2 = \xi_3 = 10.42$  г/(с<sup>2</sup> · см<sup>2</sup>)

Коэффициент Буссинеска:  $\alpha = 1$  и  $\alpha = \frac{4}{3}$

Начальная площадь поперечного сечения  
для родительского сосуда:  $A_1 = \frac{\pi}{4}$  см<sup>2</sup>

Начальная площадь поперечного сечения  
для дочерних сосудов:  $A_2 = A_3 = \frac{\pi}{24}$  см<sup>2</sup>

Граничные условия на левом и правом концах аналогичны предыдущей задаче, но в точке ветвления ставятся условия сопряжения (постоянство расхода и непрерывность давления) и условия совместности:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3,$$

$$P_2 = P_1, P_3 = P_1,$$

$$\mathbf{I}_2(\mathbf{U}_1) \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial t} + \lambda_2(\mathbf{U}_1) \mathbf{I}_2(\mathbf{U}_1) \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial z} = \mathbf{I}_2(\mathbf{U}_1) \mathbf{f}(\mathbf{U}_1),$$

$$\mathbf{I}_1(\mathbf{U}_2) \frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial t} + \lambda_1(\mathbf{U}_2) \mathbf{I}_1(\mathbf{U}_2) \frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial z} = \mathbf{I}_1(\mathbf{U}_2) \mathbf{f}(\mathbf{U}_2),$$

$$\mathbf{I}_1(\mathbf{U}_3) \frac{\partial \mathbf{U}_3}{\partial t} + \lambda_1(\mathbf{U}_3) \mathbf{I}_1(\mathbf{U}_3) \frac{\partial \mathbf{U}_3}{\partial z} = \mathbf{I}_1(\mathbf{U}_3) \mathbf{f}(\mathbf{U}_3).$$

После дискретизации производных и упрощений формируется система нелинейных алгебраических уравнений относительно компонент векторов  $\mathbf{U}_1$ ,  $\mathbf{U}_2$ ,  $\mathbf{U}_3$ , которая решается методом Ньютона.

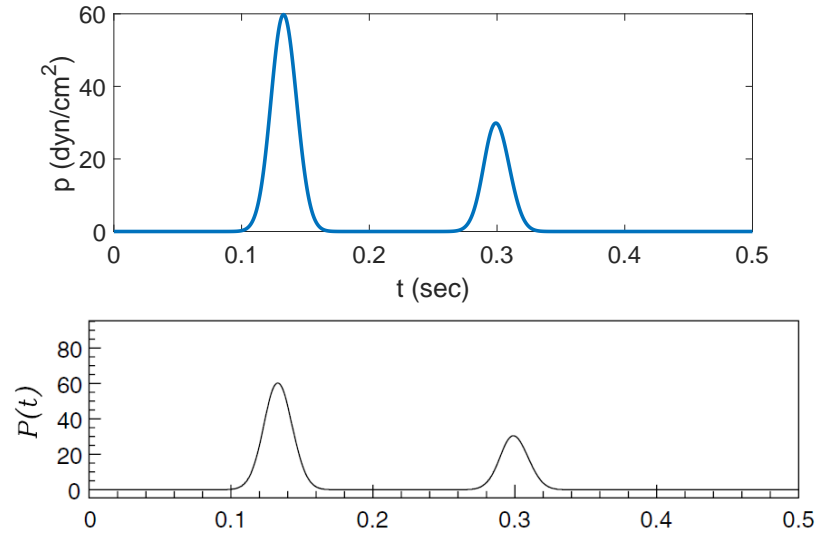


Рис. 11: График давления в середине родительского сосуда и график с результатами статьи [14].

В результате был получен верхний график на рис. 11 изменения давления во времени в центре родительского сосуда для жидкости без учета

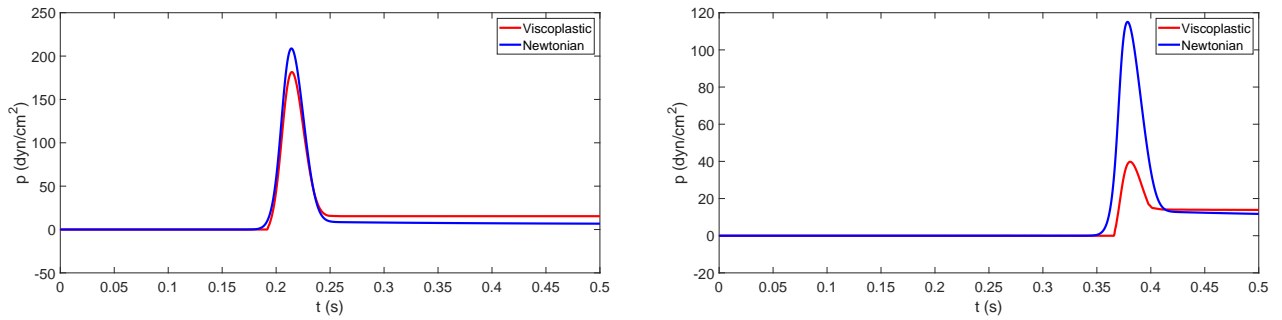


Рис. 12: Сравнение ньютоновской жидкости и неньютоновской в точке бифуркации и на выходе дочерних сосудов.

вязкости. На нижнем рис. 11 график давления в центре родительского сосуда, представленный в статье [14]. Как можно видеть, результаты хорошо согласованы.

В свою очередь, были получены графики давления в точке бифуркации и на выходе из дочерних сосудов (рис. 12) с учетом неньютоновости. В результате чего становится очевидным тот факт, что для вязких жидкостей характерно затухание решения, связанное с влиянием вязкости. При этом видно, что учет неньютоновости в модели оказывает существенное влияние на результаты.

## Сонная артерия

Как показано выше, программа работает корректно для решения нелинейных тестовых задач. Теперь рассмотрим задачи моделирования течения крови в реальных сосудах, поскольку ранее решались задачи с нефизиологическим неотражающим граничным условием, которое ставилось на выходе из сосуда.

Рассматривается сонная артерия с физиологическим граничным условием на входе (рис. 13).

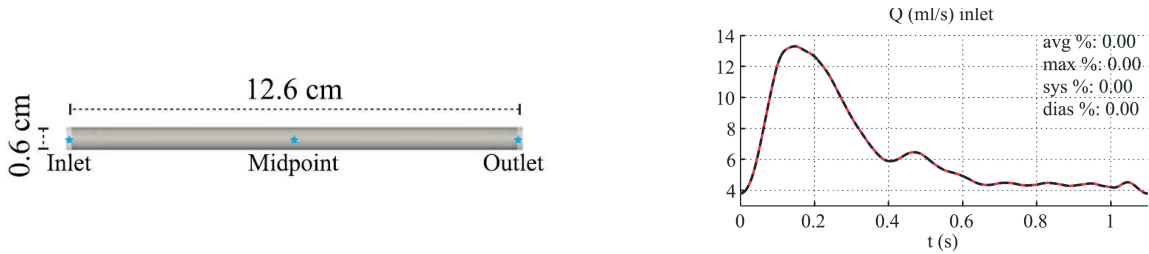


Рис. 13: Модель сонной артерии и график расхода на левом конце [15].

Необходимые параметры представлены в статье [15], приведем их в СГС:

Длина сосуда:	$L = 12.6$ см
Толщина стенки сосуда:	$h = 0.03$ см
Плотность крови:	$\rho = 1.05$ г/см <sup>3</sup>
Модуль Юнга:	$E = 7 \cdot 10^6$ дин/см <sup>2</sup>
Плотность крови:	$\rho = 1.03$ г/см <sup>3</sup>
Начальный расход:	$Q_{in} = 6.52$ см <sup>3</sup> /с
Начальная площадь поперечного сечения:	$A_0 = 0.22$ см <sup>2</sup>
Систолическое давление:	$p_c = 16.7 \cdot 10^4$ дин/см <sup>2</sup>
Диастолическое давление:	$p_d = 10.9 \cdot 10^4$ дин/см <sup>2</sup>
Емкость:	$C = 1.7529 \cdot 10^{-5}$ см <sup>5</sup> /дин
Сопротивление:	$R_1 = 2.4875 \cdot 10^3$ дин · с/см <sup>5</sup>
	$R_2 = 1.8697 \cdot 10^4$ дин · с/см <sup>5</sup>

Для решения системы, задаются начальные условия:  $A(0, z) = \pi$ ,  $Q(0, z) = Q_{in}$ . Граничные условия на левом конце имеют вид:  $Q(t, 0) = Q_0(t)$  — расход как функция времени и условие совместности. На правом конце: условие совместности и физиологическое (учитывает способность сосудов запасать определенный объем крови и оказывать гидравлическое сопротивление) условие вида [15]:

$$Q\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) + CR_1 \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{P}{R_2} + C \frac{\partial P}{\partial t}$$

где  $C$  — «емкость» сосуда,  $R_1$  — «сопротивление» сосуда,  $R_2$  — «сопротивление» периферийной части.

Функция начального расхода бралась из графика, представленного в статье [11] (рис. 13), оцифровывалась и аппроксимировалась сглаживающим сплайном.

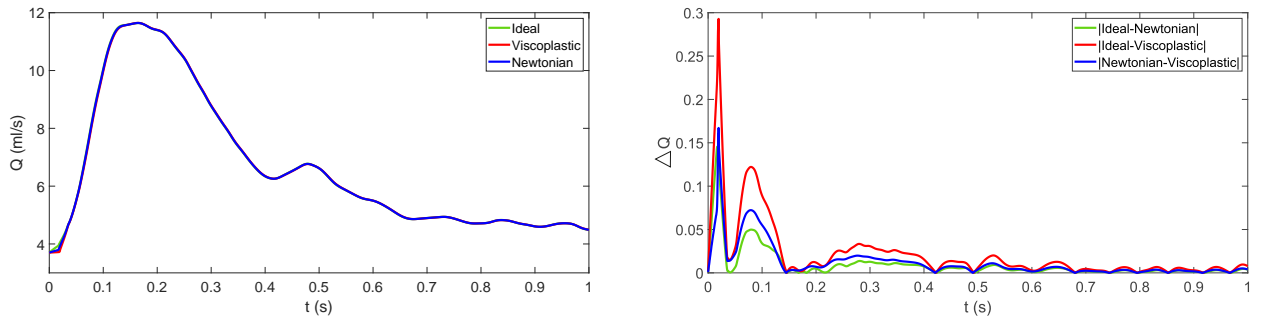


Рис. 14: График расхода на выходе из сонной артерии и графики модулей разностей численных решений.

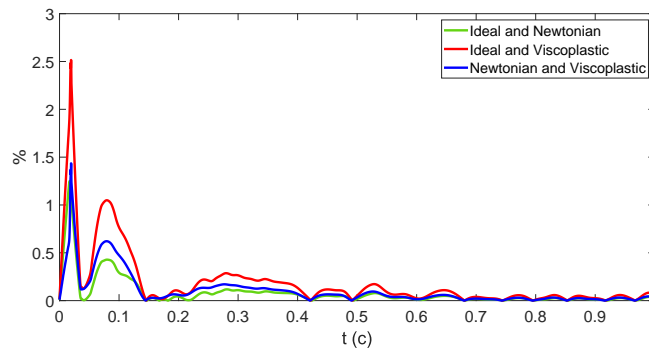


Рис. 15: Графики относительной погрешности расхода на выходе из сосуда.



В результате получено решение в виде графиков расхода и абсолютной погрешности расхода на выходе из сонной артерии — рис. 14, для идеальной и вязких моделей. Как можно видеть, результаты, полученные при различных моделях весьма близки, причем относительная погрешность моделей составляют 2,5% (рис. 15). То есть для такой задачи влияние вязкости несущественно.

## Модель артериальной части сердечно-сосудистой системы

Для моделирования течения в сети сосудов, рассмотрим известную из [16] задачу о течении в модели артериальной части сердечно-сосудистой системы. В статье представлена численная модель, основанная на нелинейных одномерных уравнениях. Она проверяется на экспериментальной модели артериального дерева человека.

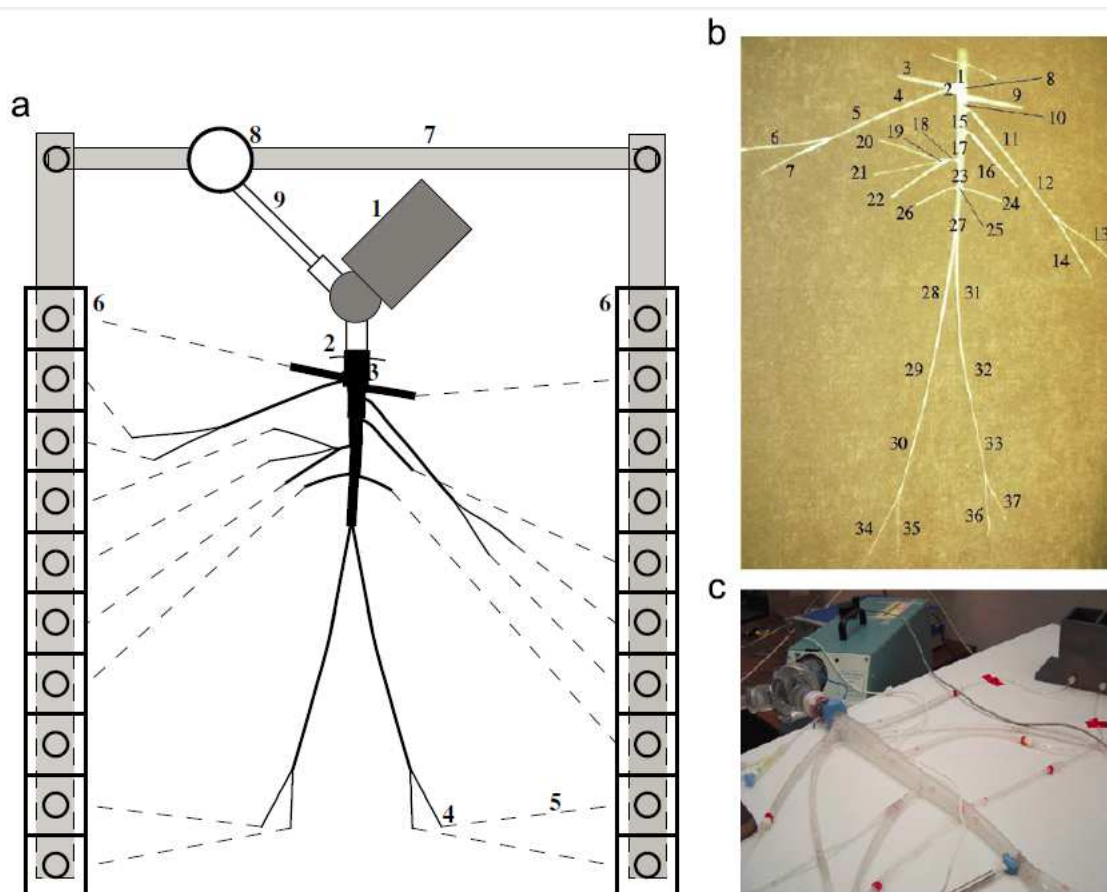


Рис. 16: (а) Схема экспериментальной установки. (б) Схема системы из 37 сосудов. (с) Фото экспериментальной установки [16].

Система состоит из 37 податливых пластиковых трубочек и моделирует артериальное дерево (рис. 16), включающее в себя самые большие центральные артерии человека, включая аорту, сонные артерии и артерии, которые пронизывают верхние и нижние конечности и основные органы брюшной по-

лости. Трубки соединены с пульсирующим насосом, обеспечивающим периодическую мощность, подобную потоку в аорте. Концевые ветви представляют собой жесткие капиллярные трубки. Для имитации вязких свойств крови и необходимой плотности жидкости используется 65–35% водно-глицериновая смесь. В статье сравниваются экспериментальные и численные результаты давления и расхода. Подобная модель сердечно-сосудистого дерева рассмотрена и в статье [11].

Модельные параметры для системы взяты из [16]. На выходе концевых сосудов ставится следующее физиологическое условие:

$$Q = \frac{p - p_{out}}{R_p}$$

где  $Q$  — скорость потока в сосуде,  $p$  — давление на выходе сосуда,  $p_{out}$  — постоянное гидростатическое давление,  $R_p$  — периферическое сопротивление потоку.

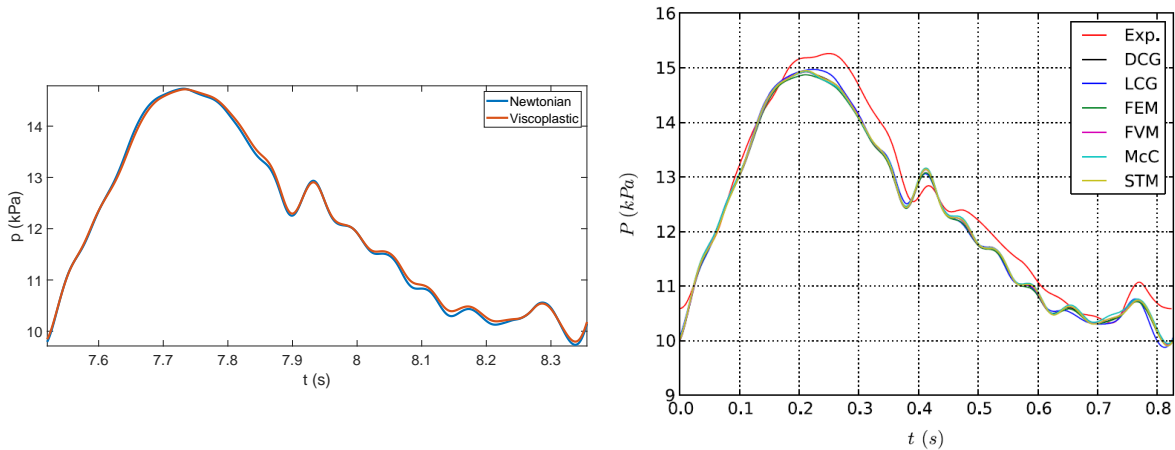


Рис. 17: График давления в середине правой локтевой артерии и график с результатами статьи [11].

Посмотрим как влияет неньютоновость на получаемое решение в этом дереве сосудов. Рассмотрим значения давления в серединах некоторых сосудов и сравним с данными, полученными в работе [11], которые хорошо согласуются с результатами из [16].

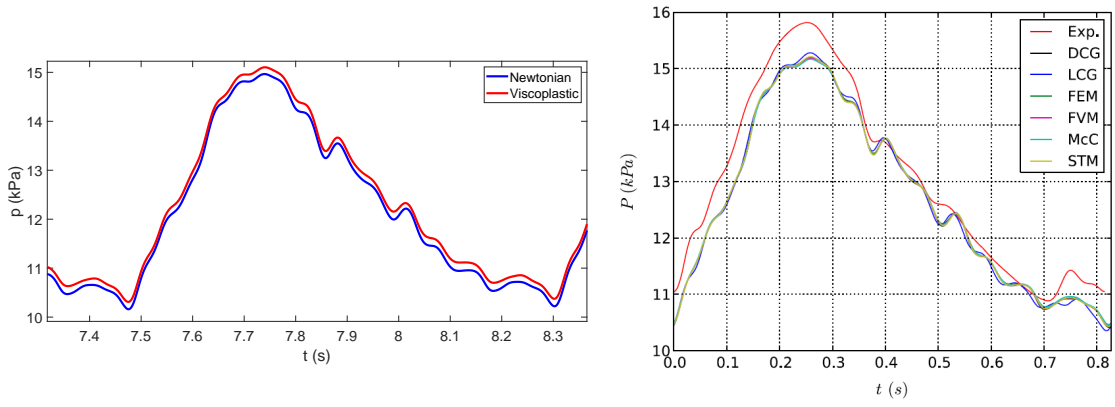


Рис. 18: График давления в середине левой подключичной артерии и график с результатами статьи [11].

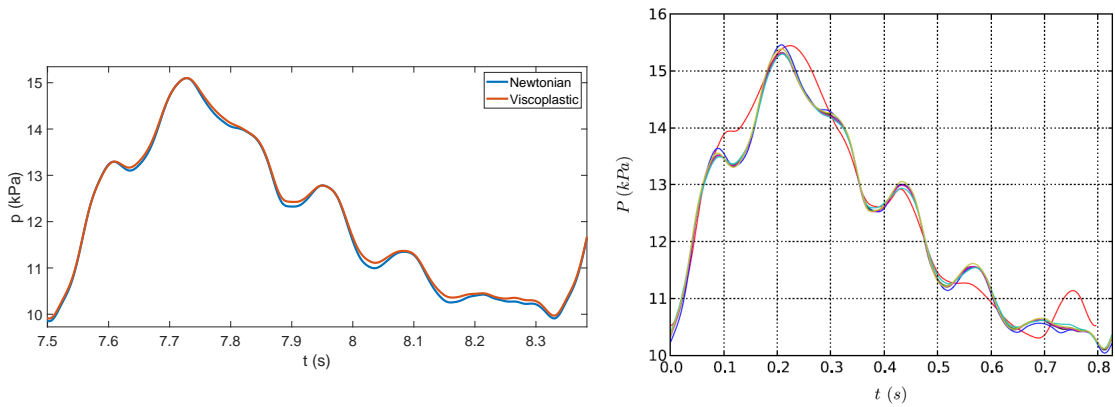


Рис. 19: График давления в середине селезеночной артерии и график с результатами статьи [11].

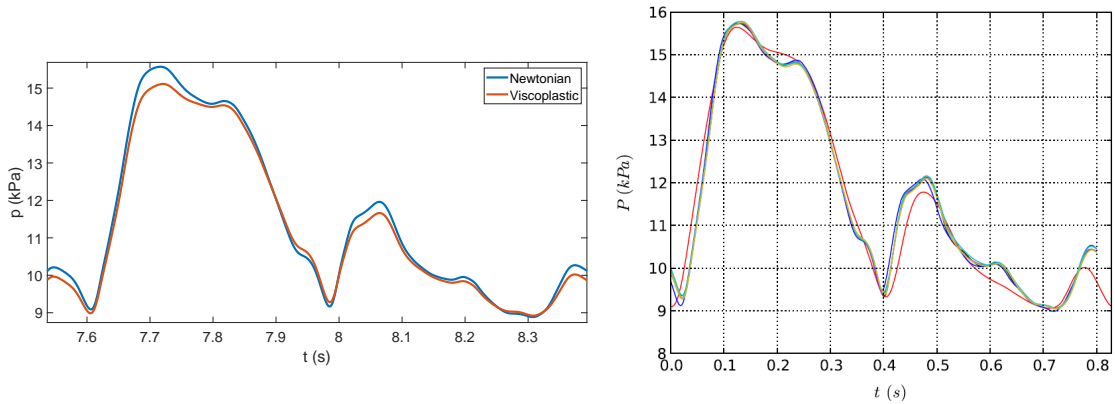


Рис. 20: График давления в середине передней большеберцовой артерии и график с результатами статьи [11].

Будем рассматривать сосуды, находящиеся в руке, около сердца, в брюшной полости и ноге.

Как можно видеть, относительная погрешность в правой локтевой ар-

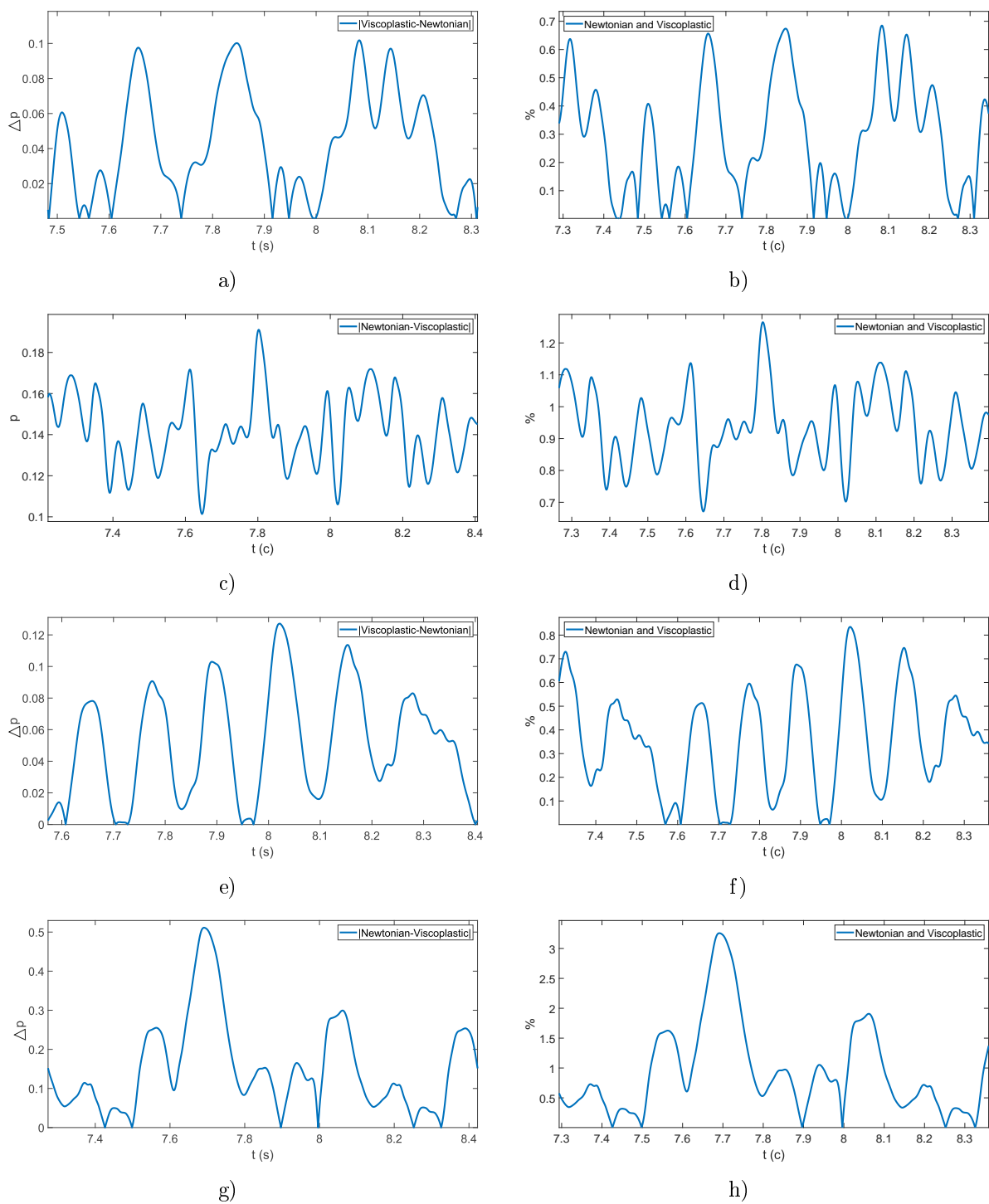


Рис. 21: Абсолютная и относительная погрешность: а), б) — правая локтевая артерия, с), д) — левая подключичная артерия, е), ф) — селезеночная артерия, г), h) — передняя большеберцовая артерия.

терии и селезеночной артерии составляет менее 1% (рис. 21 б и ф), однако в передней большеберцовой артерии она составляет менее 4% (рис. 21 h), что позволяет предположить, что при удалении от насоса, имитирующего сердце,

неньютоновость оказывает влияние на результаты. Зато в левой подключичной артерии (рис. 21 d) наблюдается достаточно хорошее соответствие вязкопластичной жидкости и ньютоновской, погрешность менее 1.3%.

## Результаты

Таким образом, в результате тестирования программы, была показана корректность ее работы. Также были решены задачи моделирования течения крови в реальных сосудах с физиологическими условиями. И моделирование течения крови в модели из 37-ми сосудов, показывающее что и на разветвленной сети сосудов получаются достаточно близкие результаты.

В результате были получены схожие результаты для модели с ньютоновской жидкостью и вязкопластичной. Из этого можно сделать вывод, что неньютоновость незначительно влияет на результаты. По всей видимости, это связано с тем, что рассмотренная модель слабо отличается от ньютоновской и зависит от тензора скоростей деформации тоже линейно.

## Заключение

В результате магистерской диссертации рассмотрена предложенная одномерная модель кровотока, учитывающая неньютоновские свойства крови, на основе которой написана программа, позволяющая моделировать течение крови в системе сосудов.

Следовательно, получены следующие результаты:

1. Предложена одномерная математическая модель течения крови с учетом неньютоновских эффектов.
2. Написана программа, реализующая расчеты по предложенной модели с помощью схемы Лакса — Вендроффа.
3. Решены и проанализированы тестовые задачи, предложенные в литературе.
4. Проведено моделирование течения крови на участках крупных сосудов.

По полученным результатам можно сделать соответствующие выводы:

1. Одномерное моделирование способно достаточно точно предсказать поведение крови. И разработанная программа позволяет получать корректные результаты.
2. Применение квазиодномерного приближения позволяет ставить и численно решать гемодинамические задачи на достаточно разветвленной сети сосудов системы кровообращения.
3. Неньютоновские эффекты при определенных условиях оказывают влияние на получившиеся результаты.



## Список литературы

- [1] [https://www.who.int/ru/news-room/fact-sheets/detail/cardiovascular-diseases-\(cvds\)](https://www.who.int/ru/news-room/fact-sheets/detail/cardiovascular-diseases-(cvds))
- [2] <https://www.gks.ru/>
- [3] Физиология человека: учебник под ред. В. М. Покровского, Г.Ф. Коротко. М.: Медицина, 2003. — 656 с.
- [4] [https://densegodnya.ru/zdorove/article\\_post/obshchaya-dlina-krovenosnykh-sosudov-v-organizme-cheloveka-100-000-km](https://densegodnya.ru/zdorove/article_post/obshchaya-dlina-krovenosnykh-sosudov-v-organizme-cheloveka-100-000-km)
- [5] <https://placefun.ru/83525-kak-sozdayut-tochnuyu-model-krovenosnoy-sistemy-cheloveka.html>
- [6] <http://feel-feet.ru/chto-takoe-angiografiya-sosudov-nog.html>
- [7] Валландер С. В. Лекции по гидроаэромеханике. Л.: Изд. ЛГУ, 1978. — 296 с.
- [8] Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов: Пер. с англ. — М.: Мир, 1983. — 400 с.
- [9] <https://mexamoll.ru/erythrocytes-are-produced-in-what-are-red-blood-cells/>
- [10] Ильич Г.К. Физические основы гидро- и гемодинамики. Методическое пособие. — 35 с.
- [11] Boileau E. et al A benchmark study of numerical schemes for one-dimensional arterial blood flow modelling // Int. J. Numer. Meth. Biomed. Engng. 2015.
- [12] Formaggia L, Lamponi D and Quarteroni A. One-dimensional models for blood flow in arteries // J. of Eng. Math. 2003. 47.: P. 251-276

- [13] Артюшков Л. С. Динамика неньютоновских жидкостей. СПб.: Изд. Центр СПбГМТУ. 1997
- [14] Xiu D. et al Parametric uncertainty analysis of pulse wave propagation in a model of a human arterial network // Journal of Computational Physics 226 (2007) 1385–1407
- [15] Xiao N. et al. A systematic comparison between 1-D and 3-D hemodynamics in compliant arterial models // Int. J. Numer. Meth. Biomed. Engng. 2014. 30: P. 204–231
- [16] Matthys K. S. et al. Pulse wave propagation in a model human arterial network: Assessment of 1-D numerical simulations against in vitro measurements // Journal of Biomechanics 40 (2007) 3476–3486