

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ – ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ
Кафедра теории управления

Смолькин Юрий Андреевич

Магистерская диссертация

**ПРИМЕНЕНИЕ СИМВОЛЬНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ
ВЫЧИСЛЕНИЯ РАДИУСА УСТОЙЧИВОСТИ**

Направление 01.04.02

Прикладная математика и информатика

Магистерская программа «Методы прикладной математики и
информатики в задачах управления»

Научный руководитель,
доктор физ.-мат. наук,
доцент
Калинина Е. А.

Санкт-Петербург

2020

Содержание

Основные обозначения и соглашения	3
Введение	4
1 Устойчивость в пространстве параметров	6
1.1 Устойчивость постоянных матриц	6
1.2 Устойчивость по Гурвицу	7
1.3 Устойчивость по Шуру	10
1.4 Вычисление спектральной абсциссы и спектрального радиуса	12
2 Комплексный радиус устойчивости	15
2.1 Вычисление комплексного радиуса устойчивости по Гурвицу	15
2.2 Вычисление комплексного радиуса устойчивости по Шуру	19
3 Вещественный радиус устойчивости	24
3.1 Вычисление вещественного радиуса устойчивости по Гурвицу	24
Приложение. Программная реализация в системе Wolfram Mathematica	30
Список литературы	33

Основные обозначения и соглашения

$M_{m,n}(F), M_n(F)$	множество матриц над F порядка $m \times n, n \times n$
$\Lambda(A), \Lambda(W)$	спектр матрицы A , спектр матричного пучка W
\mathbb{C}_-	множество $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0\}$
\mathbb{C}_1	множество $\{z \in \mathbb{C} \mid z < 1\}$
$\mathcal{S}_n^-(F), \mathcal{S}_n^1(F)$	множество устойчивых матриц по Гурвицу, по Шуру
$\mathcal{U}_n^-(F), \mathcal{U}_n^1(F)$	множество неустойчивых матриц по Гурвицу, по Шуру

Матрица называется *устойчивой по Гурвицу* (или просто *устойчивой*), если ее спектр лежит в \mathbb{C}_- . Аналогично матрица называется *устойчивой по Шуру*, если ее спектр лежит внутри \mathbb{C}_1 .

A^T, A^*	транспонирование матрицы A , эрмитово сопряжение матрицы A
$\ A\ _2$	2-норма матрицы A
$\sigma_{\min}(A)$	минимальное сингулярное число A
$\eta(A)$	спектральная абсцисса матрицы A
$\rho(A)$	спектральный радиус матрицы A
\sqcup	дизъюнктное объединение
$\mathcal{P}(X)$	множество всех подмножеств X
$\mathcal{D}(f), \mathcal{D}_x(f(x))$	дискриминант полинома $f(x)$
$\mathcal{R}(f, g), \mathcal{R}_x(f(x), g(x))$	результант двух полиномов
$f^*, f^*(x)$	полином, коэффициенты которого записаны в обратном порядке
$\bar{f}, \bar{f}(x)$	сопряжение коэффициентов полинома

Если коэффициенты полинома зависят от параметров, то дополнительно указывается относительно какой переменной происходят преобразования. Пусть, например,

$$f(\lambda, t) = a_0(t)\lambda^n + a_1(t)\lambda^{n-1} + \dots + a_n(t),$$

тогда

$$\bar{f}_\lambda(\lambda, t) := \overline{a_0(t)}\lambda^n + \overline{a_1(t)}\lambda^{n-1} + \dots + \overline{a_n(t)},$$

$$f_\lambda^*(\lambda, t) := a_n(t)\lambda^n + a_{n-1}(t)\lambda^{n-1} + \dots + a_0(t).$$

Введение

Во многих инженерных и физических приложениях исследуется устойчивость линейных систем. Для ее анализа в ряде работ [1, 2] был введен в рассмотрение радиус устойчивости. Данное понятие нашло свое применение во многих приложениях, таких как электродинамика, теория управления, робототехника, ядерная энергетика [8, 13, 18], в частности, оно применялось для сравнения динамики нейромеханических систем [11], при анализе уязвимости комплексных систем [12], для выбора оптимальных параметров течения в системе управления температурой теплоносителя быстрого свинцового реактора [13].

Рассмотрим необходимые сведения. Пусть $\mathbb{C} = \mathbb{C}_g \sqcup \mathbb{C}_b$ — разбиение комплексной плоскости на «хорошую» и «плохую» области, где \mathbb{C}_g открыто, а \mathbb{C}_b замкнуто. В наиболее общем случае *радиус устойчивости* представляет собой следующую функцию [1]:

$$r_F : M_n(F) \times M_{n,l}(F) \times M_{q,n}(F) \times \mathcal{P}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$(A, B, C, \mathbb{C}_b) \mapsto \inf\{\|\Delta\|_2 \mid \Delta \in M_{l,q}(F), \Lambda(A + B\Delta C) \cap \mathbb{C}_b \neq \emptyset\}.$$

При $F = \mathbb{C}$ будем называть радиус устойчивости *комплексным*, а при $F = \mathbb{R}$ — *вещественным*.

В связи с важной прикладной ролью, особое внимание в работе уделено следующим частным случаям:

$$r_F^-(A, B, C) := r_F(A, B, C, \mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_-), \quad r_F^-(A) := r_F^-(A, E, E),$$

$$r_F^1(A, B, C) := r_F(A, B, C, \mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_1), \quad r_F^1(A) := r_F^1(A, E, E).$$

В статьях [1, 2, 3, 4, 5] были приведены численные методы вычисления радиуса устойчивости. Среди их недостатков можно выделить необходимость выбора начального приближения, сходимость к разным значениям для разных методов с одним и тем же начальным приближением, невозможность проверить точность и погрешность полученного значения. Более подробно эти моменты были описаны в [22]. В данной работе используется алгебраический подход, основанный на понятии дискриминанта. В результате работы алгоритма за конечное число элементарных алгебраических операций вычисляется полином, корнем которого является искомое значение радиуса устойчивости.

В первой главе исследуется устойчивость матриц в пространстве параметров. Данная задача позволяет определить множество значений параметров, при котором радиус устойчивости исходной матрицы будет равен нулю. Также в этой главе для анализа устойчивости предложены аналитические алгоритмы вычисления спектральной абсциссы и спектрального радиуса без непосредственного нахождения спектра исходной матрицы.

Во второй главе рассмотрен комплексный радиус устойчивости по Гурвицу и Шуру. Доказан ряд утверждений, позволяющих упростить вычисления. В качестве примера вычислено значение $r_{\mathbb{C}}^{-}$ для матрицы, полиномиально зависящей от одного параметра.

Третья глава посвящена вещественному радиусу устойчивости. Альтернативным образом вычислен пример из статьи [5]. Также рассмотрено вычисление $r_{\mathbb{R}}^{-}$ для матрицы, зависящей от одного параметра. В заключение главы приводятся особые случаи, при которых вычисление вещественного радиуса устойчивости существенно упрощается.

В приложении приведен код алгоритмов в системе Wolfram Mathematica.

Основные результаты данной работы были опубликованы в статьях [21, 22, 23].

Глава 1

Устойчивость в пространстве параметров

1.1 Устойчивость постоянных матриц

В данном параграфе приведены критерии, позволяющие устанавливать устойчивость постоянной матрицы без вычисления ее спектра. Рассмотрим матрицу $A \in M_n(\mathbb{R})$ и введем $f(\lambda)$ — ее характеристический полином. Предложенные далее алгоритмы основаны на проверке этого полинома на устойчивость. В качестве эффективного способа нахождения характеристического полинома матрицы можно выбрать метод Данилевского, рассмотренный в [15], требующий всего $n^3 - n^2$ умножений.

Теорема 1.1.1 (Критерий Рауса – Гурвица). *Полином $f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$ ($a_0 > 0$) с вещественными коэффициентами устойчив тогда и только тогда, когда выполнены неравенства*

$$\Gamma_1 > 0, \Gamma_2 > 0, \dots, \Gamma_n > 0,$$

где

$$\Gamma_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ a_{2k-1} & a_{2k-2} & a_{2k-3} & a_{2k-4} & a_{2k-5} & a_{2k-6} & \dots & a_k \end{vmatrix}$$

(предполагается, что $a_s = 0$ при $s > n$).

В случае симметричности матрицы вычисление характеристического полинома не требуется. Ниже приведен критерий Сильвестра, сформулированный в терминах устойчивости.

Теорема 1.1.2 (Критерий Сильвестра). *Симметричная матрица A устойчива тогда и только тогда, когда*

$$A_1 < 0, A_2 > 0, \dots, (-1)^n A_n > 0,$$

где A_k — k -й угловой минор матрицы A .

Перейдем к устойчивости по Шуру. Здесь можно привести следующий аналог критерия Рауса–Гурвица:

Теорема 1.1.3 (Критерий Шура–Кона). *Полином $f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$ ($a_0 > 0$) с вещественными коэффициентами устойчив по Шуру тогда и только тогда, когда выполнены неравенства*

$$D_1 < 0, D_2 > 0, \dots, (-1)^n D_n > 0,$$

где

$$D_j = \begin{vmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 & | & a_0 & a_1 & \cdots & a_{j-1} \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 & | & 0 & a_0 & \cdots & a_{j-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-j+1} & a_{n-j+2} & \cdots & a_n & | & 0 & 0 & \cdots & a_0 \\ a_0 & 0 & \cdots & 0 & | & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_{n-j+1} \\ a_1 & a_0 & \cdots & 0 & | & 0 & a_n & \cdots & a_{n-j+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j-1} & a_{j-2} & \cdots & a_0 & | & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

Замечание 1.1.1. *В случае комплексной матрицы характеристический полином будет иметь комплексные коэффициенты, что не позволит нам применять вышеуказанные критерии. Чтобы использовать их, мы должны заменить в условии полином $f(\lambda)$ на полином*

$$f_{\mathbb{R}}(\lambda) = f(\lambda)\bar{f}(\lambda).$$

Если $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — корни f , то $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n$ — корни $f_{\mathbb{R}}$. Ясно, что $f_{\mathbb{R}}$ имеет вещественные коэффициенты, а также его устойчивость по Гурвицу (по Шуру) эквивалентна устойчивости f по Гурвицу (по Шуру).

1.2 Устойчивость по Гурвицу

Пусть $A(t)$ — квадратная матрица порядка n , элементы которой являются непрерывными вещественными функциями от t . Рассмотрим вопрос нахождения области устойчивости матрицы $A(t)$, то есть множества значений параметра t , при которых она будет являться устойчивой. Из соображений непрерывности собственные числа матрицы $A(t)$ при увеличении t будут непрерывно изменять свое положение на комплексной плоскости. Матрица становится неустойчивой, когда некоторое собственное число пересекает мнимую ось. Определим сначала, при каких значениях параметра t исходная матрица будет иметь чисто мнимое собственное число.

Введем $f(\lambda, t) = \lambda^n + a_1(t)\lambda^{n-1} + \dots + a_n(t)$ — характеристический полином матрицы $A(t)$ и пусть $\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)$ — его корни по λ . Заметим, что корнями полинома

$f(-\lambda, t)$ по λ будут являться значения $-\lambda_1(t), \dots, -\lambda_n(t)$. Так как коэффициенты полинома вещественны, то геометрически мы получаем корни, симметричные относительно мнимой оси. Таким образом, для того чтобы вещественная матрица $A(t)$ имела чисто мнимое собственное число, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathcal{R}_\lambda(f(\lambda, t), f(-\lambda, t)) = 0. \quad (1.1)$$

Рассмотрим упрощение вычисления приведенного результата.

Лемма 1.2.1 ([16]). Пусть $\deg F = n \geq \deg G = m \geq 1$, $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$ и $\deg(\alpha F + \beta G) = \deg(\gamma F + \delta G) = n$, тогда

$$\mathcal{R}(\alpha F + \beta G, \gamma F + \delta G) = (\alpha\delta - \beta\gamma)^n \mathcal{R}(F, G).$$

Следствие 1.2.1. Пусть $\deg F = n \geq \deg G = m \geq 1$ и $\deg(F + G) = \deg(F - G) = n$, тогда

$$\mathcal{R}(F + G, F - G) = (-2)^n \mathcal{R}(F, G).$$

Теорема 1.2.1. Пусть $f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n \in \mathbb{R}[\lambda]$, $a_1 \neq 0$. Рассмотрим полиномы

$$p(\mu) = a_n + a_{n-2}\mu + \dots, \quad q(\mu) = a_{n-1} + a_{n-3}\mu + \dots$$

Введем обозначение

$$K(f) = K_\lambda(f(\lambda)) := \mathcal{R}_\mu(p(\mu), q(\mu)).$$

Справедливо равенство

$$\mathcal{R}_\lambda(f(\lambda), f(-\lambda)) = 2^n a_n K(f)^2. \quad (1.2)$$

Доказательство. Рассмотрим полином $f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n =$

$$= \underbrace{(a_n + a_{n-2}\lambda^2 + \dots)}_{P(\lambda)} + \lambda \underbrace{(a_{n-1} + a_{n-3}\lambda^2 + \dots)}_{Q(\lambda)} = P(\lambda) + \lambda Q(\lambda).$$

Легко видеть, что $P, Q \in \mathbb{R}[\lambda]$ — четные полиномы. Таким образом,

$$f(\lambda) = P(\lambda) + \lambda Q(\lambda), \quad f(-\lambda) = P(\lambda) - \lambda Q(\lambda).$$

Вернемся к результату:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\lambda(f(\lambda), f(-\lambda)) &= \mathcal{R}(P + \lambda Q, P - \lambda Q) = \begin{cases} \mathcal{R}(P + \lambda Q, P - \lambda Q) & , n \text{ четно} \\ \mathcal{R}(\lambda Q + P, -\lambda Q + P) & , n \text{ нечетно} \end{cases} = \\ &= \begin{cases} (-2)^n \mathcal{R}(P, \lambda Q) & , n \text{ четно} \\ 2^n \mathcal{R}(\lambda Q, P) & , n \text{ нечетно} \end{cases} = \begin{cases} (-2)^n \mathcal{R}(P, \lambda) \mathcal{R}(P, Q) & , n \text{ четно} \\ 2^n \mathcal{R}(\lambda, P) \mathcal{R}(Q, P) & , n \text{ нечетно} \end{cases} \end{aligned}$$

Последнее выражение равно $2^n a_n \mathcal{R}(P, Q)$ в обоих случаях. Здесь мы воспользовались следствием 1.2.1. Сделаем замену $\lambda^2 = \mu$, $p(\mu) = p(\lambda^2) = P(\lambda)$, аналогично $q(\mu) = q(\lambda^2) = Q(\lambda)$. Тогда $\mathcal{R}_\lambda(P, Q) = \mathcal{R}_\mu(p, q)^2$, таким образом, окончательно получаем равенство $\mathcal{R}_\lambda(f(\lambda), f(-\lambda)) = 2^n a_n K(f)^2$. \square

Справедлива следующая теорема, основанная на принципе исключения нуля [18]:

Теорема 1.2.2. *Для того чтобы матрица $A(t)$ была устойчива при всех значениях параметра t из $[\underline{t}, \bar{t}]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие три условия:*

(i) *Матрица $A(t^*)$ устойчива для некоторого значения t^* из $[\underline{t}, \bar{t}]$,*

(ii) *$\det A(t) \neq 0$ для всех t из $[\underline{t}, \bar{t}]$,*

(iii) *$K_\lambda(f(\lambda, t)) \neq 0$ для всех t из $[\underline{t}, \bar{t}]$.*

Замечание 1.2.1. *Если матрица $A(t)$ является симметричной, то проверка условия (iii) не требуется, поскольку все собственные числа вещественны.*

Замечание 1.2.2. *Пусть $f(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n)$. Определим полином f^+ следующим образом:*

$$f^+(\lambda) := \prod_{1 \leq j < k \leq n} (\lambda - (\lambda_j + \lambda_k)), \quad \deg f^+ = n(n-1)/2.$$

Процесс его вычисления описан в [9]. Можно показать, что $K(f) = \pm f^+(0)$. Таким образом, формула (1.2) примет вид

$$\mathcal{R}_\lambda(f(\lambda), f(-\lambda)) = 2^n f(0) f^+(0)^2.$$

Замечание 1.2.3. *Для простоты был рассмотрен случай, когда матрица зависит от одного параметра. Случай зависимости от нескольких параметров рассматривается аналогично.*

Замечание 1.2.4. *Если $A \in M_n(\mathbb{C})$, то для обеспечения симметрии относительно мнимой оси вместо результата (1.1) необходимо рассматривать результат $\mathcal{R}_\lambda(f(\lambda, t), \bar{f}_\lambda(-\lambda, t))$, который уже не поддается дальнейшему упрощению.*

Пример 1.2.1. *Для матрицы, исследуемой в работе [8]*

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 & -t^2 & -1 \\ t & -t-1 & t \\ t^2 & 1 & -t^2-1 \end{bmatrix}$$

найти область устойчивости по Гурвицу.

Согласно теореме 1.2.2 вычислим два полинома:

$$\det A(t) = -1 - t - 2t^2 - 3t^3 - 2t^5, \quad K_\lambda(f(\lambda, t)) = 8 + 5t + 11t^2 + 7t^3 + 5t^4.$$

Первый полином имеет единственный вещественный корень

$$t_0 = \frac{1}{6} \left(\sqrt[3]{-108 + 12\sqrt{93}} - \sqrt[3]{108 + 12\sqrt{93}} \right) \approx -0.682328.$$

Второй полином вещественных корней не имеет. Легко убедиться, что матрица $A(0)$ устойчива, в то время как $A(-2)$ нет. Таким образом, область устойчивости $A(t)$ есть множество

$$\left[\frac{1}{6} \left(\sqrt[3]{-108 + 12\sqrt{93}} - \sqrt[3]{108 + 12\sqrt{93}} \right), +\infty \right).$$

1.3 Устойчивость по Шуру

Рассмотрим теперь задачу вычисления области устойчивости матрицы $A(t)$ по Шуру. Действовать будем по аналогии с предыдущим параграфом. Определим, при каких значениях t исходная матрица будет иметь собственное число на единичной окружности.

Пусть $f(\lambda, t) = \lambda^n + a_1(t)\lambda^{n-1} + \dots + a_n(t)$ — характеристический полином матрицы $A(t)$. Рассмотрим полином, коэффициенты которого записаны в обратном порядке:

$$f_\lambda^*(\lambda, t) = a_n(t)\lambda^n + a_{n-1}(t)\lambda^{n-1} + \dots + 1.$$

Этот полином обладает важным свойством [17]: если $\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)$ — корни $f(\lambda, t)$ по λ , то $\lambda_1^{-1}(t), \dots, \lambda_n^{-1}(t)$ — корни $f_\lambda^*(\lambda, t)$ по λ . Так как мы рассматриваем вещественные матрицы, то значения $\bar{\lambda}_1^{-1}(t), \dots, \bar{\lambda}_n^{-1}(t)$ также будут являться корнями f_λ^* . Геометрически мы получаем корни, к которым применена инверсия относительно единичной окружности.

Заметим, что для существования значений $\lambda_1^{-1}(t), \dots, \lambda_n^{-1}(t)$ требуется, чтобы корни исходного полинома f были ненулевыми, что равносильно условию $\det A(t) \neq 0$. Если же при каком-то значении t^* этот определитель равен нулю, то здесь мы можем применить критерий Шура–Кона для проверки постоянной матрицы $A(t^*)$ на устойчивость по Шуру.

Таким образом, для того чтобы вещественная матрица $A(t)$ имела собственное число на единичной окружности, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathcal{R}_\lambda(f(\lambda, t), f_\lambda^*(\lambda, t)) = 0. \quad (1.3)$$

Аналогично предыдущему параграфу данный результат можно упростить.

Теорема 1.3.1. Пусть $f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = a_0(\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n)$. Определим полином f^\times следующим образом:

$$f^\times(\lambda) := \prod_{1 \leq j < k \leq n} (\lambda - \lambda_j \lambda_k), \quad \deg f^\times = n(n-1)/2.$$

Справедливо равенство

$$\mathcal{R}_\lambda(f(\lambda), f^*(\lambda)) = (-1)^n f(-1) f(1) f^\times(1)^2 f^*(0)^{2n-2}.$$

Доказательство. Рассмотрим результат

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\lambda(f(\lambda), f^*(\lambda)) &= a_0^n a_n^n \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^n (\lambda_j - \lambda_k^{-1}) = \frac{(-1)^{n^2} a_0^n a_n^n}{\prod_{j=1}^n \lambda_j^n} \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^n (1 - \lambda_j \lambda_k) = \\ &= a_0^{2n} \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^n (1 - \lambda_j \lambda_k) = a_0^{2n} \prod_{j=1}^n (1 - \lambda_j) \prod_{j=1}^n (1 + \lambda_j) \prod_{1 \leq j < k \leq n} (1 - \lambda_j \lambda_k)^2. \end{aligned}$$

Последнее выражение представляет собой $(-1)^n f(-1) f(1) f^\times(1)^2 f^*(0)^{2n-2}$. \square

Процесс вычисления полинома f^\times описан в работе [21]. Для нахождения области устойчивости по Шуру можно использовать следующую теорему:

Теорема 1.3.2. Для того чтобы матрица $A(t)$ была устойчива по Шуру при всех значениях параметра t из $[\underline{t}, \bar{t}]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие четыре условия:

- (i) Матрица $A(t^*)$ устойчива по Шуру для некоторого значения t^* из $[\underline{t}, \bar{t}]$,
- (ii) $\det(E - A(t)) \neq 0$ для всех t из $[\underline{t}, \bar{t}]$,
- (iii) $\det(E + A(t)) \neq 0$ для всех t из $[\underline{t}, \bar{t}]$,
- (iv) $f^\times(1, t) \neq 0$ для всех t из $[\underline{t}, \bar{t}]$.

Замечание 1.3.1. Если матрица $A(t)$ является симметричной, то проверка условия (iv) не требуется, так как собственные числа вещественны.

Замечание 1.3.2. Для простоты рассмотрена ситуация, когда матрица зависит от одного параметра. Случай зависимости от нескольких параметров рассматривается аналогично.

Замечание 1.3.3. Если $A \in M_n(\mathbb{C})$, то для обеспечения инверсивности собственных чисел относительно единичной окружности вместо результата (1.3) необходимо рассматривать результат $\mathcal{R}_\lambda(f(\lambda, t), \bar{f}_\lambda^*(\lambda, t))$.

1.4 Вычисление спектральной абсциссы и спектрального радиуса

В данном параграфе рассмотрено вычисление *спектральной абсциссы*

$$\eta(A) := \max\{\operatorname{Re} \lambda \mid \lambda \in \Lambda(A)\}$$

и *спектрального радиуса*

$$\rho(A) := \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \Lambda(A)\}$$

без нахождения спектра исходной матрицы A . Приведенный подход является полностью алгебраическим и позволяет рассматривать не только постоянные матрицы, но и матрицы, зависящие от параметров.

Начнем с вычисления спектральной абсциссы. В основе алгоритма лежит следующее соображение: если $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — спектр A , то спектром матрицы $A - \eta E$ будут являться числа $\lambda_1 - \eta, \dots, \lambda_n - \eta$. Геометрически, при изменении параметра η спектр матрицы A будет сдвигаться влево или вправо. Наибольшее значение параметра η , при котором матрица $A - \eta E$ будет иметь чисто мнимое собственное число, будет являться значением спектральной абсциссы $\eta(A)$. Процесс нахождения такого значения параметра основан на использовании результата и описан в предыдущих параграфах.

Алгоритм вычисления $\eta(A)$

1. Вычисляем $f(\lambda, \eta)$ — характеристический полином матрицы $A - \eta E$.
2. Находим $\varphi(\eta) = \mathcal{R}_\lambda(f(\lambda, \eta), f(-\lambda, \eta))$.
3. Вычисляем спектральную абсциссу как наибольший корень полинома φ :

$$\eta(A) = \max\{\eta \mid \varphi(\eta) = 0\}.$$

Замечание 1.4.1. В случае, когда матрица A является вещественной, мы можем использовать теорему 1.2.1 для упрощения вычисления этого результата. Если же $A \in M_n(\mathbb{C})$, то вместо результата $\mathcal{R}_\lambda(f(\lambda, \eta), f(-\lambda, \eta))$ необходимо рассматривать результат $\mathcal{R}_\lambda(f(\lambda, \eta), \bar{f}_\lambda(-\lambda, \eta))$.

Перейдем к вычислению спектрального радиуса. Если $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — спектр A , то спектром матрицы $\rho^{-1}A$ будут являться числа $\rho^{-1}\lambda_1, \dots, \rho^{-1}\lambda_n$. Будем искать вещественные значения ρ , при которых матрица $\rho^{-1}A$ будет иметь собственное число на единичной окружности. Чтобы избавиться от отрицательных степеней ρ , домножим характеристический полином матрицы $\rho^{-1}A$ на ρ^n . Как и в предыдущем параграфе,

будем считать, что нуль не является собственным числом матрицы A , что эквивалентно условию $\det A \neq 0$.

Алгоритм вычисления $\rho(A)$

1. Вычисляем $f(\lambda, \rho) = \det(\lambda\rho E - A)$.
2. Находим $\psi(\rho) = \mathcal{R}_\lambda(f(\lambda, \rho), f_\lambda^*(\lambda, \rho))$.
3. Вычисляем спектральный радиус как наибольший корень полинома ψ :

$$\rho(A) = \max\{\rho \mid \psi(\rho) = 0\}.$$

Замечание 1.4.2. В случае, когда матрица A является вещественной, мы можем использовать теорему 1.3.1 для упрощения вычисления этого результата. Если $A \in M_n(\mathbb{C})$, то вместо результата $\mathcal{R}_\lambda(f(\lambda, \rho), f_\lambda^*(\lambda, \rho))$ необходимо рассматривать результат $\mathcal{R}_\lambda(f(\lambda, \rho), \bar{f}_\lambda^*(\lambda, \rho))$.

Пример 1.4.1. Для матрицы

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 & -t^2 & -1 \\ t & -t-1 & t \\ t^2 & 1 & -t^2-1 \end{bmatrix}$$

установить зависимость значения спектральной абсциссы и параметра t .

Согласно алгоритму вычислим полином

$$f(\lambda, \eta, t) = \eta^3 + 3\eta^2\lambda + 3\eta^2 + 3\eta\lambda^2 + 6\eta\lambda + 3\eta + \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 2t^5 + 2\eta t^3 + 2\lambda t^3 + 3t^3 + \\ + \eta^2 t^2 + 2\eta\lambda t^2 + 3\eta t^2 + \lambda^2 t^2 + 3\lambda t^2 + 2t^2 + \eta^2 t + 2\eta\lambda t + \eta t + \lambda^2 t + \lambda t + t + 1.$$

Далее, используя замечание 1.4.1 находим полиномы

$$\det(A(t) - \eta E) = -\eta^3 - 3\eta^2 - 3\eta - 2t^5 - 2\eta t^3 - 3t^3 - \eta^2 t^2 - 3\eta t^2 - 2t^2 - \eta^2 t - \eta t - t - 1,$$

$$K_\lambda(f(\lambda, \eta, t)) = 8\eta^3 + 24\eta^2 + 24\eta + 2\eta t^4 + 5t^4 + 8\eta t^3 + 7t^3 + 8\eta^2 t^2 + 20\eta t^2 + 11t^2 + 8\eta^2 t + 14\eta t + 5t + 8.$$

Спектральной абсциссой матрицы $A(t)$ будет являться максимальный вещественный корень по η среди этих полиномов. На рис. 1 эта зависимость представлена графически.

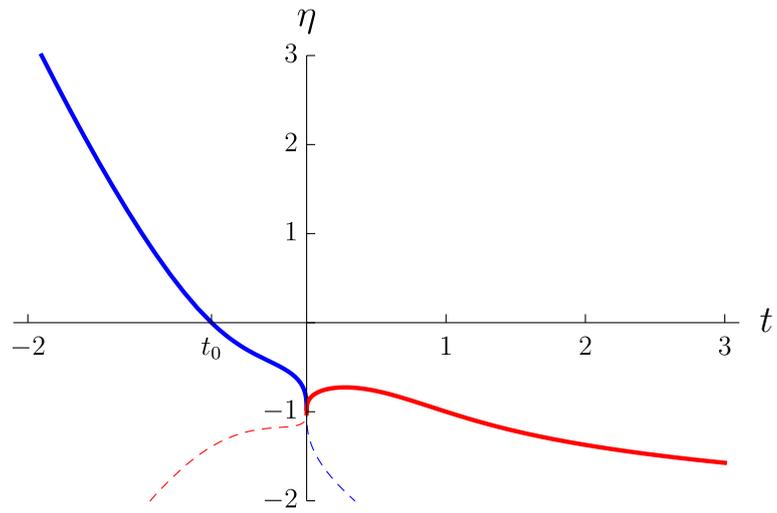


Рис. 1. График $\eta = \eta(A(t))$. $\det(A(t) - \eta E) = 0$ (синий), $K_\lambda(f(\lambda, \eta, t)) = 0$ (красный).
Лишние части графика отображены пунктиром.

Глава 2

Комплексный радиус устойчивости

2.1 Вычисление комплексного радиуса устойчивости по Гурвицу

Пусть $A \in \mathcal{S}_n^-(\mathbb{C})$, $B \in M_{n,l}(\mathbb{C})$, $C \in M_{q,n}(\mathbb{C})$. В этом параграфе рассмотрено аналитическое вычисление значения функции

$$r_{\mathbb{C}}^-(A, B, C) = \inf\{\|\Delta\|_2 \mid \Delta \in M_{l,q}(\mathbb{C}), A + B\Delta C \in \mathcal{U}_n^-(\mathbb{C})\}.$$

Приведем необходимые сведения. Матрица $H \in M_{2n}(\mathbb{C})$ называется *гамильтоновой*, если $(JH)^* = JH$, где

$$J = \begin{bmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{bmatrix}.$$

Лемма 2.1.1. *Пусть матрица H является гамильтоновой. Тогда*

$$\lambda \in \Lambda(H) \iff -\bar{\lambda} \in \Lambda(H). \quad (2.1)$$

Доказательство. Рассмотрим характеристический полином $\varphi(\lambda) =$

$$= \det(\lambda E - H) = \det(\lambda J J^* + J H J^*) = \det(\lambda E + H^*) = -\overline{\det(-\bar{\lambda} E - H)} = -\overline{\varphi(-\bar{\lambda})}.$$

Здесь мы воспользовались свойством $J^{-1} = J^* = -J$. □

Для вычисления $r_{\mathbb{C}}^-(A, B, C)$ в работе [1] была введена следующая гамильтонова матрица:

$$H(\sigma) = \begin{bmatrix} A & -BB^* \\ \sigma^2 C^* C & -A^* \end{bmatrix}.$$

Теорема 2.1.1 ([1]). *Пусть σ^* — минимальное значение параметра σ , при котором матрица $H(\sigma)$ имеет чисто мнимое собственное число. Тогда если $r_{\mathbb{C}}^-(A, B, C) < \infty$, то $r_{\mathbb{C}}^-(A, B, C) = \sigma^*$.*

Заметим, что матрица $H(\sigma^*)$ будет иметь кратное собственное число. Это следует из вышеприведенной теоремы и леммы 2.1.1. Приведенные далее рассуждения основаны на понятии дискриминанта, с помощью которого возможно аналитически установить это значение σ^* .

Рассмотрим сначала наиболее простой случай, когда A, B, C — вещественные матрицы. В этом случае свойство (2.1) имеет более простой вид:

$$\lambda \in \Lambda(H) \iff -\lambda \in \Lambda(H). \quad (2.2)$$

Введем характеристический полином матрицы $H(\sigma)$:

$$f(\lambda, \sigma) = \det(\lambda E - H(\sigma)) = \det \begin{bmatrix} \lambda E - A & BB^T \\ -\sigma^2 C^T C & \lambda E - A^T \end{bmatrix}.$$

Будем искать значения параметра σ , при которых полином f имеет кратный корень относительно λ . По свойству (2.2) видно, что этот полином является четным по λ . Поскольку его коэффициенты вещественны, в его состав входят только члены с четным показателем степени. Рассмотрим вычисление дискриминанта полинома такого типа.

Теорема 2.1.2. Пусть полином F имеет следующий вид: ($a_0 \neq 0$)

$$F(x) = a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-2} + \dots + a_n = a_0(x^2 - x_1^2) \dots (x^2 - x_n^2),$$

сделаем замену $x^2 = y$ и введем полином

$$\tilde{F}(y) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n = a_0(y - x_1^2) \dots (y - x_n^2).$$

Тогда

$$\mathcal{D}_x(F(x)) = (-1)^n 4^n a_0 a_n \mathcal{D}_y(\tilde{F}(y))^2.$$

Доказательство. Рассмотрим дискриминант

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_x(F(x)) &= a_0^{4n-2} \mathcal{D}_x \left(\prod_{k=1}^n (x^2 - x_k^2) \right) = a_0^{4n-2} \prod_{k=1}^n \mathcal{D}_x(x^2 - x_k^2) \prod_{1 \leq j < k \leq n} \mathcal{R}_x(x^2 - x_j^2, x^2 - x_k^2)^2 = \\ &= a_0^{4n-2} 4^n x_1^2 \dots x_n^2 \prod_{1 \leq j < k \leq n} (x_j^2 - x_k^2)^4 = (-1)^n 4^n a_0 a_n \mathcal{D}_y(\tilde{F}(y))^2. \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Пусть $\tilde{f}(\mu, \sigma)$ — полином, полученный с помощью замены $\lambda^2 = \mu$, то есть $f(\lambda, \sigma) = \tilde{f}(\mu, \sigma)$. С помощью приведенной выше теоремы вычисление дискриминан-

та f упрощается следующим образом:

$$\underbrace{\mathcal{D}_\lambda(f(\lambda, \sigma))}_{g(\sigma)} = (-1)^n 4^n \det \underbrace{\begin{bmatrix} A & -BB^T \\ \sigma^2 C^T C & -A^T \end{bmatrix}}_{g_1(\sigma)} \left(\underbrace{\mathcal{D}_\mu(\tilde{f}(\mu, \sigma))}_{g_2(\sigma)} \right)^2. \quad (2.3)$$

Заметим, что при $B = C = E$ корни полинома g_1 будут являться сингулярными числами матрицы A .

Алгоритм вычисления $r_{\mathbb{C}}^-(A, B, C)$

1. Находим характеристический полином $f(\lambda, \sigma)$ матрицы $H(\sigma)$.
2. Вычисляем полиномы $g_1(\sigma)$ и $g_2(\sigma)$ из формулы (2.3). Обозначим их положительные корни как $\sigma_1, \dots, \sigma_m$.
3. Пусть $\sigma^* = \min\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$. Далее возможны варианты:
 - (а) если $H(\sigma^*)$ имеет чисто мнимое собственное число, то $r_{\mathbb{C}}^-(A, B, C) = \sigma^*$.
 - (б) если матрица $H(\sigma^*)$ не имеет чисто мнимого собственного числа, то удаляем σ^* из списка и заново повторяем процедуру из пункта 3.

Замечание 2.1.1. Если матрицы A, B, C являются комплексными, то вместо равенства $f(\lambda, \sigma) = f(-\lambda, \sigma)$ будет выполняться $f(\lambda, \sigma) = \bar{f}_\lambda(-\lambda, \sigma)$. Замена $\mu = \lambda^2$ станет невозможна, и требуется напрямую вычислять $\mathcal{D}_\lambda(f(\lambda, \sigma))$.

Однако, стоит заметить, что полином $g(\sigma)$ всегда имеет вещественные коэффициенты, что следует из следующей теоремы:

Теорема 2.1.3. Пусть $f \in \mathbb{C}[\lambda]$ — некоторый унитарный полином, удовлетворяющий свойству

$$f(\lambda) = \bar{f}(-\lambda). \quad (2.4)$$

Тогда

- (i) Полином f представим в виде $f(\lambda) = P(\lambda) + iQ(\lambda)$, где $P, Q \in \mathbb{R}[\lambda]$ — четный и нечетный полиномы соответственно;
- (ii) Дискриминант полинома f вещественен: $\mathcal{D}(f) \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Любой полином, удовлетворяющий свойству (2.4) можно представить в виде

$$f(\lambda) = \prod_{k=1}^p (\lambda - \lambda_k)(\lambda + \bar{\lambda}_k) \prod_{k=1}^q (\lambda - i\omega_k), \quad \deg f = 2p + q.$$

Вычислим суммы Ньютона¹ этого полинома:

$$s_0 = 2p + q \in \mathbb{R}, \quad s_1 = \sum_{k=1}^p (\lambda_k - \bar{\lambda}_k) + i \sum_{k=1}^q \omega_k \in i\mathbb{R},$$

$$s_2 = \sum_{k=1}^p (\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_k^2) - \sum_{k=1}^q \omega_k^2 \in \mathbb{R}, \quad s_3 = \sum_{k=1}^p (\lambda_k^3 - \bar{\lambda}_k^3) - i \sum_{k=1}^q \omega_k^3 \in i\mathbb{R}, \dots$$

Продолжая приведенные рассуждения можно установить, что значения s_0, s_2, s_4, \dots являются вещественными, а значения s_1, s_3, s_5, \dots чисто мнимыми. Известны следующие формулы, позволяющие выразить коэффициенты полинома через его суммы Ньютона [15]:

$$a_1 = -s_1, \quad a_2 = -(s_2 + a_1 s_1)/2, \dots,$$

$$a_k = -(s_k + a_1 s_{k-1} + a_2 s_{k-2} + \dots + a_{k-1} s_1)/k, \quad k \in \{3, \dots, 2n\}.$$

С их помощью можно аналогично установить, что значения a_2, a_4, a_6, \dots вещественны, а значения a_1, a_3, a_5, \dots чисто мнимы. Таким образом, полином f представим в следующем виде: ($b_1, \dots, b_{2n} \in \mathbb{R}$)

$$f(\lambda) = \lambda^{2n} + ib_1 \lambda^{2n-1} + b_2 \lambda^{2n-2} + \dots + ib_{2n-1} \lambda + b_{2n} =$$

$$= (\lambda^{2n} + b_2 \lambda^{2n-2} + \dots + b_{2n}) + i(b_1 \lambda^{2n-1} + b_3 \lambda^{2n-3} + \dots + b_{2n-1} \lambda) = P(\lambda) + iQ(\lambda).$$

Докажем второе утверждение теоремы. Известна следующая формула [14]:

$$\mathcal{D}(f) = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{2n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{2n-1} & s_{2n} & \dots & s_{4n-2} \end{vmatrix}.$$

Легко видеть, что домножив четные строки этого определителя на i , а затем разделив четные столбцы на i , мы получим определитель вещественной матрицы, что завершает доказательство теоремы. \square

Пример 2.1.1. Для матрицы

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 & -t^2 & -1 \\ t & -t-1 & t \\ t^2 & 1 & -t^2-1 \end{bmatrix}$$

установить зависимость значения $r_{\mathbb{C}}^-(A(t))$ и параметра t .

В соответствии с алгоритмом найдем полином $f(\lambda, \sigma, t)$:

$$f(\lambda, \sigma, t) = \lambda^6 + 3\lambda^4 \sigma^2 - 3\lambda^4 + 3\lambda^2 \sigma^4 - 8\lambda^2 \sigma^2 + 3\lambda^2 + \sigma^6 - 5\sigma^4 + 6\sigma^2 - 4t^{10} + 2\sigma^2 t^8 - 12t^8 -$$

¹Суммы Ньютона полинома $f(\lambda)$ определяются как $s_p := \sum_{k=1}^n \lambda_k^p$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — корни f .

$$4\lambda^2 t^7 - 8t^7 + 10\sigma^2 t^6 - 13t^6 - 6\lambda^2 t^5 + 4\sigma^2 t^5 - 16t^5 - \lambda^4 t^4 - 4\lambda^2 \sigma^2 t^4 + 3\lambda^2 t^4 - 3\sigma^4 t^4 + 17\sigma^2 t^4 - 10t^4 + 2\lambda^4 t^3 + 2\lambda^2 \sigma^2 t^3 - 6\lambda^2 t^3 + 8\sigma^2 t^3 - 10t^3 - \lambda^4 t^2 - 6\lambda^2 \sigma^2 t^2 + 3\lambda^2 t^2 - 5\sigma^4 t^2 + 12\sigma^2 t^2 - 5t^2 - 4\lambda^4 t - 6\lambda^2 \sigma^2 t - 2\lambda^2 t - 2\sigma^4 t + 4\sigma^2 t - 2t - 1.$$

Теперь вычислим полиномы $g_1(\sigma, t)$ и $g_2(\sigma, t)$, входящие в формулу (2.3). Имеем:

$$g_1(\sigma, t) = \sigma^6 - 5\sigma^4 + 6\sigma^2 - 4t^{10} + 2\sigma^2 t^8 - 12t^8 - 8t^7 + 10\sigma^2 t^6 - 13t^6 + 4\sigma^2 t^5 - 16t^5 - 3\sigma^4 t^4 + 17\sigma^2 t^4 - 10t^4 + 8\sigma^2 t^3 - 10t^3 - 5\sigma^4 t^2 + 12\sigma^2 t^2 - 5t^2 - 2\sigma^4 t + 4\sigma^2 t - 2t - 1,$$

$$g_2(\sigma, t) = 32\sigma^6 - 27\sigma^4 + 8\sigma^2 t^{20} + 128\sigma^2 t^{19} - 200t^{19} + 688\sigma^2 t^{18} - 1960t^{18} + 1960\sigma^2 t^{17} - 3692t^{17} - 32\sigma^4 t^{16} + 4864\sigma^2 t^{16} - 9611t^{16} - 176\sigma^4 t^{15} + 8676\sigma^2 t^{15} - 12672t^{15} - 828\sigma^4 t^{14} + 17604\sigma^2 t^{14} - 25926t^{14} - 1856\sigma^4 t^{13} + 24352\sigma^2 t^{13} - 26096t^{13} + 32\sigma^6 t^{12} - 4088\sigma^4 t^{12} + 38700\sigma^2 t^{12} - 42717t^{12} + 96\sigma^6 t^{11} - 5096\sigma^4 t^{11} + 38600\sigma^2 t^{11} - 35032t^{11} + 288\sigma^6 t^{10} - 8284\sigma^4 t^{10} + 55590\sigma^2 t^{10} - 51276t^{10} + 320\sigma^6 t^9 - 6492\sigma^4 t^9 + 43012\sigma^2 t^9 - 34252t^9 + 480\sigma^6 t^8 - 9764\sigma^4 t^8 + 55768\sigma^2 t^8 - 45285t^8 + 96\sigma^6 t^7 - 3544\sigma^4 t^7 + 36060\sigma^2 t^7 - 26960t^7 + 448\sigma^6 t^6 - 8384\sigma^4 t^6 + 43148\sigma^2 t^6 - 28262t^6 - 96\sigma^6 t^5 - 1992\sigma^4 t^5 + 23148\sigma^2 t^5 - 13560t^5 + 480\sigma^6 t^4 - 4799\sigma^4 t^4 + 21692\sigma^2 t^4 - 10963t^4 - 320\sigma^6 t^3 - 276\sigma^4 t^3 + 8528\sigma^2 t^3 - 3056t^3 + 288\sigma^6 t^2 - 1898\sigma^4 t^2 + 5586\sigma^2 t^2 - 1728t^2 - 96\sigma^6 t + 192\sigma^4 t + 432\sigma^2 t$$

На рис. 2 приведена зависимость $r_{\mathbb{C}}^{-}(A(t))$ и параметра t .

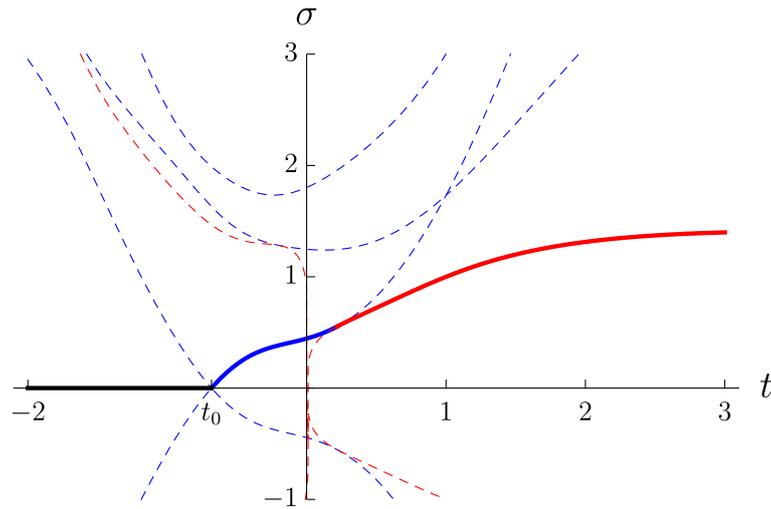


Рис. 2. График функции $\sigma = r_{\mathbb{C}}^{-}(A(t))$. $g_1(\sigma, t) = 0$ (синий), $g_2(\sigma, t) = 0$ (красный).

Лишние части графика отображены пунктиром.

2.2 Вычисление комплексного радиуса устойчивости по Шуру

Пусть $A \in \mathcal{S}_n^1(\mathbb{C})$, $B \in M_{n,l}(\mathbb{C})$, $C \in M_{q,n}(\mathbb{C})$. В данном параграфе будем вычислять значение

$$r_{\mathbb{C}}^1(A, B, C) = \inf\{\|\Delta\|_2 \mid \Delta \in M_{l,q}(\mathbb{C}), A + B\Delta C \in \mathcal{U}_n^1(\mathbb{C})\}.$$

Рассмотрим некоторые вспомогательные сведения. *Линейным матричным пучком* называется отображение

$$W : \mathbb{C} \longrightarrow M_n(\mathbb{C}), \lambda \mapsto X + \lambda Y,$$

где $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$. Значение $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *собственным числом* матричного пучка W , если $\det W(\lambda) = 0$. Множество всех таких чисел называется *спектром* матричного пучка и обозначается $\Lambda(W)$.

В работе [7] для вычисления $r_{\mathbb{C}}^1(A, B, C)$ применялся матричный пучок

$$W_{\sigma}(\lambda) = M_{\sigma} - \lambda N, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \sigma \geq 0,$$

где

$$M_{\sigma} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ \sigma^2 C^* C & E \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} E & BB^* \\ 0 & A^* \end{bmatrix}.$$

Справедливо следующее свойство [7]:

$$\lambda \in \Lambda(W_{\sigma}) \iff \bar{\lambda}^{-1} \in \Lambda(W_{\sigma}). \quad (2.5)$$

Рассмотрим аналог теоремы 2.1.1 в случае устойчивости по Шуру:

Теорема 2.2.1 ([1]). Пусть σ^* — минимальное значение параметра σ , при котором матричный пучок W_{σ} имеет собственное число на единичной окружности. Тогда если $r_{\mathbb{C}}^1(A, B, C) < \infty$, то $r_{\mathbb{C}}^1(A, B, C) = \sigma^*$.

Заметим, что матричный пучок W_{σ^*} будет иметь кратное собственное число. Это следует из вышеприведенной теоремы и свойства (2.5). Дальнейшие рассуждения проводятся по аналогии с предыдущим параграфом.

Рассмотрим сначала случай, когда A, B, C — вещественные матрицы. Утверждение (2.5) примет вид

$$\lambda \in \Lambda(W_{\sigma}) \iff \lambda^{-1} \in \Lambda(W_{\sigma}). \quad (2.6)$$

Пусть

$$f(\lambda, \sigma) = \det W_{\sigma}(\lambda) = \det \begin{bmatrix} A - \lambda E & -\lambda BB^T \\ \sigma^2 C^T C & E - \lambda A^T \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Этот полином является возвратным¹ по λ . Рассмотрим вычисление дискриминанта полинома такого типа. Пусть $F \in \mathbb{R}[x]$ — некоторый возвратный полином степени $2n$. Тогда

$$F(x) = a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = x^n (a_0(x^n + x^{-n}) + \dots + a_{n-1}(x + x^{-1}) + a_n).$$

Введем новую переменную $y = x + x^{-1}$.

Лемма 2.2.1 ([17]). Выражение $x^k + x^{-k}$ может быть представлено в виде полинома степени k от переменной $y = x + x^{-1}$ с целыми коэффициентами:

$$x^k + x^{-k} =: P_k(y) \in \mathbb{Z}[y].$$

¹Полином $F(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m$ называется *возвратным*, если $a_k = a_{m-k}$ для всех $k = 0, \dots, m$. Данное утверждение эквивалентно тождеству $F(x) \equiv x^m F(x^{-1})$.

Данная лемма сводит задачу нахождения корней полинома F степени $2n$ к вычислению корней полинома

$$\hat{F}(y) = a_0 P_n(y) + \dots + a_{n-1} P_1(y) + a_n \quad (2.8)$$

степени n . Если y — корень \hat{F} , то уравнение $x + x^{-1} = y$ даст значения двух корней возвратного уравнения.

Для эффективного вычисления полинома $\hat{F}(y)$ можно использовать отображение, приведенное в работе [10]. Пусть T_k — полином Чебышева первого рода степени k . Тогда полиномы $P_k(y)$, входящие в (2.8) могут быть представлены по формуле

$$P_k(y) = 2T_k(x/2), \quad k = 1, \dots, n.$$

Теорема 2.2.2. Пусть $F(x) = a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ — возвратный полином, $a_0 \neq 0$. Тогда

$$\mathcal{D}_x(F(x)) = (-1)^n F(-1)F(1) \left(\mathcal{D}_y(\hat{F}(y)) \right)^2.$$

Доказательство. Представим полином F в виде

$$F(x) = a_0(x - x_1) \dots (x - x_n)(x - x_1^{-1}) \dots (x - x_n^{-1}),$$

тогда соответствующий ему полином \hat{F} можно записать как

$$\hat{F}(y) = a_0(y - (x_1 + x_1^{-1})) \dots (y - (x_n + x_n^{-1})).$$

Рассмотрим дискриминант полинома F :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_x(F(x)) &= a_0^{4n-2} \mathcal{D}_x \left(\prod_{k=1}^n (x - x_k)(x - x_k^{-1}) \right) = \\ &= a_0^{4n-2} \prod_{k=1}^n \mathcal{D}_x \left((x - x_k)(x - x_k^{-1}) \right) \prod_{1 \leq j < k \leq n} \mathcal{R}_x \left((x - x_j)(x - x_j^{-1}), (x - x_k)(x - x_k^{-1}) \right)^2 = \\ &= a_0^{4n-2} \prod_{k=1}^n \frac{(x_k^2 - 1)^2}{x_k^2} \prod_{1 \leq j < k \leq n} \frac{(x_j - x_k)^4 (1 - x_j x_k)^4}{x_j^4 x_k^4} = \\ &= \left(\frac{a_0}{x_1 \dots x_n} \right)^{4n-2} \prod_{k=1}^n (1 - x_k)^2 \prod_{k=1}^n (-1 - x_k)^2 \prod_{1 \leq j < k \leq n} (x_j - x_k)^4 \prod_{1 \leq j < k \leq n} (1 - x_j x_k)^4 = \\ &= (-1)^n \left(\frac{a_0}{x_1 \dots x_n} \right)^{4n-4} F(-1)F(1) \prod_{1 \leq j < k \leq n} (x_j - x_k)^4 \prod_{1 \leq j < k \leq n} (1 - x_j x_k)^4. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим дискриминант полинома \hat{F} :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_y(\hat{F}(y)) &= a_0^{2n-2} \prod_{1 \leq j < k \leq n} \left(x_j + \frac{1}{x_j} - x_k - \frac{1}{x_k} \right)^2 = \\ &= a_0^{2n-2} \prod_{1 \leq j < k \leq n} \left(\frac{x_j^2 x_k + x_k - x_j x_k^2 - x_j^2}{x_j x_k} \right)^2 = \left(\frac{a_0}{x_1 \dots x_n} \right)^{2n-2} \prod_{1 \leq j < k \leq n} (x_j x_k - 1)^2 (x_j - x_k)^2. \end{aligned}$$

Сопоставляя полученные результаты, получим требуемое утверждение. \square

Применим этот результат к полиному $f(\lambda, \sigma)$. С помощью замены $\mu = \lambda + \lambda^{-1}$ сведем вычисления к полиному $\hat{f}(\mu, \sigma)$. Тогда $g(\sigma) = \mathcal{D}_\lambda(f(\lambda, \sigma)) =$

$$= (-1)^n \det \underbrace{\begin{bmatrix} A - E & -BB^T \\ \sigma^2 C^T C & E - A^T \end{bmatrix}}_{g_1(\sigma)} \det \underbrace{\begin{bmatrix} A + E & BB^T \\ \sigma^2 C^T C & E + A^T \end{bmatrix}}_{g_2(\sigma)} \left(\underbrace{\mathcal{D}_\mu(\hat{f}(\mu, \sigma))}_{g_3(\sigma)} \right)^2. \quad (2.9)$$

Легко видеть, что при $B = C = E$ корни g_1 и g_2 будут являться сингулярными числами матриц $E + A$ и $E - A$.

Алгоритм вычисления $r_{\mathbb{C}}^1(A, B, C)$

1. Вычисляем полином $f(\lambda, \sigma)$ по формуле (2.7).
2. Находим $\hat{f}(\mu, \sigma)$ через полиномы Чебышева по формуле (2.8).
3. Вычисляем полиномы $g_1(\sigma)$, $g_2(\sigma)$, $g_3(\sigma)$, входящие в формулу (2.9). Обозначим их положительные корни как $\sigma_1, \dots, \sigma_m$.
4. Пусть $\sigma^* = \min\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$. Далее возможны варианты:
 - (а) если матричный пучок W_{σ^*} имеет собственное число на единичной окружности, то $r_{\mathbb{C}}^1(A, B, C) = \sigma^*$.
 - (б) если матричный пучок W_{σ^*} не имеет собственного числа на единичной окружности, то удаляем σ^* из списка и заново повторяем процедуру из пункта 4.

Замечание 2.2.1. Если матрицы A, B, C являются комплексными, то вместо равенства $f(\lambda, \sigma) = f_\lambda^*(\lambda, \sigma)$ будет выполняться $f(\lambda, \sigma) = \bar{f}_\lambda^*(\lambda, \sigma)$. Замена $\mu = \lambda + \lambda^{-1}$ станет невозможна, и требуется напрямую вычислять $\mathcal{D}_\lambda(f(\lambda, \sigma))$.

Стоит заметить, что полином $g(\sigma)$ всегда будет иметь вещественные коэффициенты. Можно сформулировать следующий аналог теоремы 2.1.3:

Теорема 2.2.3. Пусть $f \in \mathbb{C}[\lambda]$ — некоторый полином, удовлетворяющий свойству

$$f(\lambda) = \bar{f}^*(\lambda).$$

Тогда

- (i) Полином f представим в виде $f(\lambda) = P(\lambda) + iQ(\lambda)$, где $P, Q \in \mathbb{R}[\lambda]$ — возвратный и антивозвратный¹ полиномы соответственно;
- (ii) Дискриминант полинома f вещественен: $\mathcal{D}(f) \in \mathbb{R}$.

¹Полином $F(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m$ называется *антивозвратным*, если $a_k = -a_{m-k}$ для всех $k = 0, \dots, m$ (в англоязычной литературе принято название *antipalindromic polynomial*).

Глава 3

Вещественный радиус устойчивости

3.1 Вычисление вещественного радиуса устойчивости по Гурвицу

В данной главе рассмотрен алгоритм вычисления полинома, корнем которого является значение вещественного радиуса устойчивости

$$r_{\mathbb{R}}^{-}(A) = \min\{\|\Delta\|_2 \mid \Delta \in M_n(\mathbb{R}), A + \Delta \in \mathcal{U}_n^{-}(\mathbb{R})\}.$$

В работе [6] представлена следующая формула для вычисления вещественного радиуса устойчивости:

$$r_{\mathbb{R}}^{-}(A) = \min_{\omega \in \mathbb{R}} \max_{\gamma \in (0,1]} \sigma_{2n-1}(B(\omega, \gamma)), \quad (3.1)$$

где $\sigma_{2n-1}(\cdot)$ обозначает второе минимальное сингулярное число матрицы (\cdot) ,

$$B(\omega, \gamma) = \begin{bmatrix} A & -\omega\gamma E \\ \frac{\omega}{\gamma} E & A \end{bmatrix}.$$

Утверждение 3.1.1. Пусть минимакс (3.1) достигается при ω^* и γ^* . Тогда

- (i) Если $\omega^* = 0$, то $r_{\mathbb{R}}^{-}(A) = \sigma_{\min}(A)$,
- (ii) Если $\omega^* \neq 0$, $\gamma^* = 1$, то $r_{\mathbb{R}}^{-}(A) = r_{\mathbb{C}}^{-}(A)$.

Доказательство. Пусть $\omega^* \neq 0$. Тогда $\sigma_{2n-1}(B(0, \gamma)) = \sigma_{\min}(B(0, \gamma)) = \sigma_{\min}(A)$. Если же $\omega^* \neq 0$, $\gamma^* = 1$, то

$$\sigma_{2n-1}(B(\omega, 1)) = \sigma_{2n-1} \left(\begin{bmatrix} A & -\omega E \\ \omega E & A \end{bmatrix} \right) = \sigma_{\min}(A - i\omega E) = r_{\mathbb{C}}^{-}(A).$$

Теорема 3.1.1 ([17]). Пусть функция $y = \varphi(x)$ задается алгебраическим уравнением $\Phi(x, y) = 0$, где $\Phi \in \mathbb{R}[x, y]$. Тогда экстремальные значения неявной функции являются

вещественными корнями полинома

$$\mathcal{F}(y) = \mathcal{D}_x(\Phi(x, y)).$$

Вернемся к вычислению (3.1). Поскольку здесь функция $\sigma_{2n-1}(\cdot)$ задается алгебраическим уравнением

$$\det(\sigma^2 E - BB^T) = 0,$$

мы можем применить теорему 3.1.1. Сначала возьмем дискриминант по γ , затем по ω . Лишние степени и множители будем сразу отбрасывать. Так как исходная матрица $B(\omega, \gamma)$ обладает простой блочной структурой, то вычисления можно упростить. Рассмотрим определитель

$$\det(\sigma^2 E - BB^T) = \frac{1}{\gamma^{2n}} \det \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma(\sigma^2 E - \omega^2 \gamma^2 E - AA^T) & -\omega(A - \gamma^2 A^T) \\ \omega(\gamma^2 A - A^T) & \gamma(\sigma^2 E - \frac{\omega^2}{\gamma^2} E - AA^T) \end{bmatrix}}_{f(\sigma, \omega, \gamma)} =$$

$$= \gamma^{-2n} f(\sigma, \omega, \gamma), \text{ где } f \in \mathbb{R}[\sigma, \omega, \gamma].$$

Лемма 3.1.1. *Полином $f(\sigma, \omega, \gamma)$ является четным и возвратным по γ .*

Доказательство. Сначала докажем, что $f(\sigma, \omega, \gamma) = f(\sigma, \omega, -\gamma)$. Имеем:

$$f(\sigma, \omega, -\gamma) = \det \begin{bmatrix} -\gamma(\sigma^2 E - \omega^2 \gamma^2 E - AA^T) & -\omega(A - \gamma^2 A^T) \\ \omega(\gamma^2 A - A^T) & -\gamma(\sigma^2 E - \frac{\omega^2}{\gamma^2} E - AA^T) \end{bmatrix} = f(\sigma, \omega, \gamma),$$

поскольку для блочных $(n \times n)$ -матриц R, S, P, Q справедливо следующее:

$$\det \begin{bmatrix} -R & S \\ P & -Q \end{bmatrix} = (-1)^n \det \begin{bmatrix} R & -S \\ P & -Q \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} R & S \\ P & Q \end{bmatrix}.$$

Теперь докажем возвратность f по γ . Так как $\deg_\gamma f = 4n$, нам необходимо доказать, что $\gamma^{4n} f(\sigma, \omega, \gamma^{-1}) = f(\sigma, \omega, \gamma)$. Действительно,

$$\begin{aligned} \gamma^{4n} f(\sigma, \omega, \gamma^{-1}) &= \gamma^{4n} \det \begin{bmatrix} \gamma^{-1}(\sigma^2 E - \omega^2 \gamma^{-2} E - AA^T) & -\omega(A - \gamma^{-2} A^T) \\ \omega(\gamma^{-2} A - A^T) & \gamma^{-1}(\sigma^2 E - \omega^2 \gamma^{-2} E - AA^T) \end{bmatrix} = \\ &= \det \begin{bmatrix} \gamma(\sigma^2 E - \omega^2 \gamma^{-2} E - AA^T) & -\omega(\gamma^2 A - A^T) \\ \omega(A - \gamma^2 A^T) & \gamma(\sigma^2 E - \omega^2 \gamma^{-2} E - AA^T) \end{bmatrix} = \\ &= \det \begin{bmatrix} \gamma(\sigma^2 E - \omega^2 \gamma^{-2} E - AA^T) & -\omega(A - \gamma^2 A^T) \\ \omega(\gamma^2 A - A^T) & \gamma(\sigma^2 E - \omega^2 \gamma^{-2} E - AA^T) \end{bmatrix} = f(\sigma, \omega, \gamma). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались следующим соображением:

$$\det \begin{bmatrix} R & S \\ P & Q \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} Q & P \\ S & R \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} Q & -P \\ -S & R \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим вычисление дискриминанта возвратного и четного полинома. Произведем следующую цепочку преобразований: ($a_0 \neq 0$)

$$\begin{aligned}
F(x) &= a_0x^{4n} + a_1x^{4n-2} + \dots + a_{n-1}x^{2n+2} + a_nx^{2n} + \dots + a_1x^2 + a_0 \\
&\quad \downarrow \text{ замена } x^2 - y = 0 \downarrow \\
\tilde{F}(y) &= a_0y^{2n} + a_1y^{2n-1} + \dots + a_{n-1}y^{n+1} + a_ny^n + \dots + a_1y + a_0 \\
&\quad \downarrow \text{ замена } y^2 - yz + 1 = 0 \downarrow \\
\hat{F}(z) &= b_0z^n + b_1z^{n-1} + \dots + b_n
\end{aligned}$$

Соответствующие замены переменных были описаны в главе 2.

Теорема 3.1.2. Пусть $F \in \mathbb{R}[x]$ — возвратный и четный полином. Тогда

$$\mathcal{D}_x(F(x)) = 16^n F(0)^2 F(1)^2 F(i)^2 \left(\mathcal{D}_z(\hat{F}(z)) \right)^4.$$

Доказательство. Рассмотрим дискриминант

$$\mathcal{D}_x(F(x)) = (-1)^{2n} 4^{2n} a_0^2 \mathcal{D}_y(\tilde{F}(y))^2 = 16^n F(0)^2 \mathcal{D}_y(\tilde{F}(y))^2 = 16^n F(0)^2 F(1)^2 F(i)^2 \mathcal{D}_z(\hat{F}(z))^4.$$

Здесь мы воспользовались теоремами 2.1.2 и 2.2.2. □

Применим данную теорему к вычислению дискриминанта $f(\sigma, \omega, \gamma)$ по γ . Сделаем замену $\gamma^2 + \gamma^{-2} = \mu$ и получим полином $\hat{f}(\sigma, \omega, \mu)$. Имеем:

$$\mathcal{D}_\gamma(f(\sigma, \omega, \gamma)) = 16^n f(\sigma, \omega, 0)^2 f(\sigma, \omega, 1)^2 f(\sigma, \omega, i)^2 \left(\mathcal{D}_\mu(\hat{f}(\sigma, \omega, \mu)) \right)^4. \quad (3.2)$$

Множители $f(\sigma, \omega, 0)$ и $f(\sigma, \omega, i)$ можно далее не учитывать, поскольку значение γ тут выходит из полуинтервала $(0, 1]$. Множитель $f(\sigma, \omega, 1)$ нам будет интересен только в случае $r_{\mathbb{R}}^-(A) = \sigma_{\min}(A)$. Таким образом, далее мы будем брать дискриминант по ω только от полиномов $f(\sigma, \omega, 1)$ и $g(\sigma, \omega) := \mathcal{D}_\mu(\hat{f}(\sigma, \omega, \mu))$.

Лемма 3.1.2. Полином $g(\sigma, \omega)$ является четным по ω .

В соответствии с леммой сделаем замену $\omega^2 = \rho$: $g(\sigma, \omega) = \tilde{g}(\sigma, \rho)$.

Пусть $\deg_\omega g(\sigma, \omega) = 2s$. Тогда

$$h(\sigma) := \mathcal{D}_\omega(g(\sigma, \omega)) = (-1)^s 4^s \underbrace{\tilde{g}(\sigma, 0)}_{h_1(\sigma)} \left(\underbrace{\mathcal{D}_\rho(\tilde{g}(\sigma, \rho))}_{h_2(\sigma)} \right)^2. \quad (3.3)$$

Алгоритм вычисления $r_{\mathbb{R}}^-(A)$

1. Вычисляем $f(\sigma, \omega, \gamma)$ и преобразованный полином $\hat{f}(\sigma, \omega, \mu)$, полученный после замены $\gamma^2 + \gamma^{-2} = \mu$.
 2. Находим первый дискриминант: $g(\sigma, \omega) = \mathcal{D}_{\mu}(\hat{f}(\sigma, \omega, \mu))$. Если в $g(\sigma, \omega)$ присутствуют ненужные нам степени или множители, сразу отбрасываем их.
 3. Находим полиномы $h_1(\sigma)$, $h_2(\sigma)$, определенные в соотношении (3.3).
 4. Если $r_{\mathbb{R}}^-(A) \neq \sigma_{\min}(A)$, то значение $r_{\mathbb{R}}^-(A)$ является корнем полинома $h(\sigma)$. В противном случае $r_{\mathbb{R}}^-(A)$ является корнем полинома $p(\sigma) = \mathcal{D}_{\omega}(f(\sigma, \omega, 1))$.
-

Пример 3.1.1. Для матрицы, рассмотренной в [5]

$$A = \begin{bmatrix} -0.4 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

найти значение вещественного радиуса устойчивости $r_{\mathbb{R}}^-(A)$.

Полиномы $f(\sigma, \omega, \gamma)$ и $\hat{f}(\sigma, \omega, \mu)$ в алгоритме получаются довольно большими, поэтому далее приведены только их степени:

$$\deg_{\sigma} f(\sigma, \omega, \gamma) = \deg_{\omega} f(\sigma, \omega, \gamma) = \deg_{\gamma} f(\sigma, \omega, \gamma) = 24, \quad \deg_{\mu} \hat{f}(\sigma, \omega, \mu) = 6;$$

$$\deg_{\omega} g(\sigma, \omega) = 60, \quad \deg_{\rho} \tilde{g}(\sigma, \rho) = 30.$$

Полином $h_1(\sigma)$ имеет степень 60, а полином $h_2(\sigma)$ степень 1710. Сам полином h_2 тоже допускает факторизацию: $h_2 = H_1^2 H_2^2 H_3 H_4^3 H_5^2$, где

$$\deg H_1 = 28, \quad \deg H_2 = 48, \quad \deg H_3 = 142, \quad \deg H_4 = 240, \quad \deg H_5 = 348.$$

Значение $r_{\mathbb{R}}^-(A)$ является минимальным положительным корнем полинома $H_3(\sigma)$. Но так как еще возможна замена $\sigma^2 = \tau$, то, в действительности, мы имеем полином степени 71.

Таким образом, можно получить значение $r_{\mathbb{R}}^-(A) \approx 0.3612$, что сходится с результатом [5].

Пример 3.1.2. Для матрицы

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 & -t^2 & -1 \\ t & -t-1 & t \\ t^2 & 1 & -t^2-1 \end{bmatrix}$$

найти зависимость $r_{\mathbb{R}}^{-}(A(t))$ и параметра t .

Для начала найдем полином $f(\sigma, \omega, \gamma, t)$. Ввиду громоздкости полиномов ниже отображены только их степени. Имеем:

$$\deg_t f(\sigma, \omega, \gamma, t) = 20, \deg_{\sigma} f(\sigma, \omega, \gamma, t) = \deg_{\omega} f(\sigma, \omega, \gamma, t) = \deg_{\gamma} f(\sigma, \omega, \gamma, t) = 12;$$

$$\deg_{\sigma} g(\sigma, \omega, t) = \deg_{\omega} g(\sigma, \omega, t) = 12, \deg_t g(\sigma, \omega, t) = 42.$$

Далее получаем $\deg_{\sigma} h_1(\sigma, t) = 12, \deg_{\sigma} h_2(\sigma, t) = 58$, но $h_2 = H_1 H_2 H_3^2 H_4^3$,

$$\deg_{\sigma} H_1 = \deg_{\sigma} H_2 = 3, \deg_{\sigma} H_3 = 8, \deg_{\sigma} H_4 = 12.$$

На рис. 3 представлены: интересующая нас часть кривой $h(\sigma, t) = 0$ ($H_1(\sigma, t) = 0$) и кривая $p(\sigma, t) = 0$, отвечающая за σ_{\min} и $r_{\mathbb{C}}^{-}$.

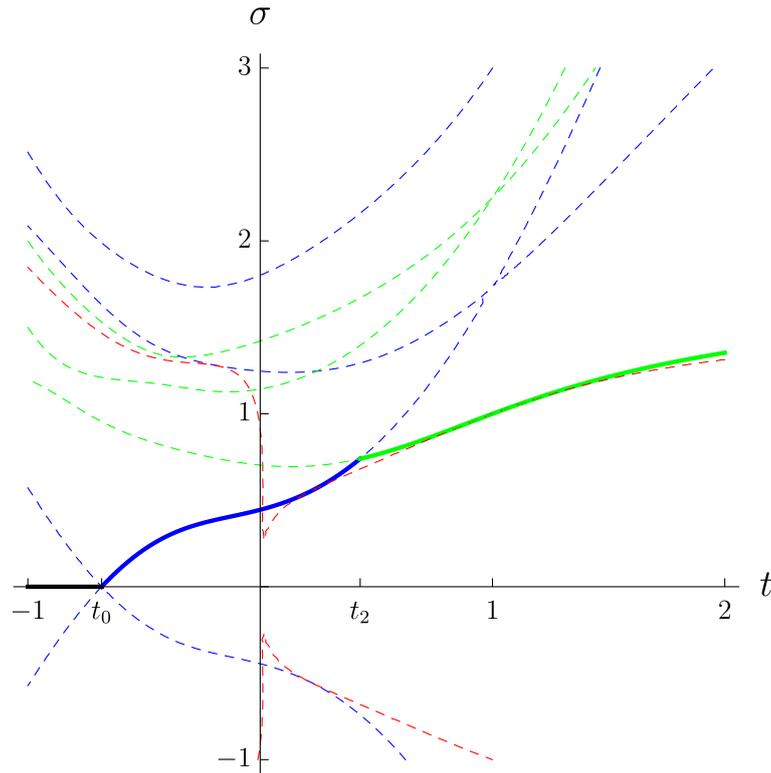


Рис. 3. График функции $\sigma = r_{\mathbb{R}}^{-}(A(t))$. $p(\sigma, t) = 0$ (синий, красный), $H_1(\sigma, t) = 0$ (зеленый). Лишние части графика отображены пунктиром.

При $-0.6823 < t < 0.4305$ значение $r_{\mathbb{R}}^{-}$ совпадает с σ_{\min} (синий цвет). На этом интервале дестабилизирующее возмущение до ближайшей вырожденной матрицы является вещественным.

Красный график представляет собой комплексный радиус устойчивости, кото-

рый здесь не учитывается.

При $t > 0.4305$ значение $r_{\mathbb{R}}^-$ ассоциируется с зеленым графиком. Данная кривая задается алгебраическим уравнением $H_1(\sigma, t) = 56\sigma^3 - 183\sigma^2 + 192\sigma + 2\sigma^2t^8 + 10\sigma t^8 - 25t^8 - 4\sigma^2t^7 + 54\sigma t^7 - 70t^7 - 2\sigma^3t^6 - 32\sigma^2t^6 + 178\sigma t^6 - 159t^6 + 4\sigma^3t^5 - 108\sigma^2t^5 + 308\sigma t^5 - 204t^5 + 22\sigma^3t^4 - 232\sigma^2t^4 + 494\sigma t^4 - 271t^4 + 52\sigma^3t^3 - 298\sigma^2t^3 + 486\sigma t^3 - 222t^3 + 72\sigma^3t^2 - 353\sigma^2t^2 + 494\sigma t^2 - 201t^2 + 52\sigma^3t - 200\sigma^2t + 232\sigma t - 80t - 64 = 0$.

В заключение главы рассмотрим некоторые особые случаи, при которых вычисление вещественного радиуса устойчивости значительно упрощается.

Теорема 3.1.3 ([1]). Пусть A — вещественная нормальная матрица, то есть $AA^T = A^T A$. Справедливы следующие утверждения:

(i) Если A устойчива по Гурвицу, то $r_{\mathbb{R}}^-(A) = r_{\mathbb{C}}^-(A) = -\eta(A)$.

(ii) Если A устойчива по Шуру, то $r_{\mathbb{R}}^1(A) = r_{\mathbb{C}}^1(A) = 1 - \rho(A)$.

Теорема 3.1.4 ([1]). Пусть A — вещественная симметричная матрица. Верно следующее:

(i) Если A устойчива по Гурвицу, то $r_{\mathbb{R}}^-(A) = r_{\mathbb{C}}^-(A) = \sigma_{\min}(A)$.

(ii) Если A устойчива по Шуру, то $r_{\mathbb{R}}^1(A) = r_{\mathbb{C}}^1(A) = \min\{\sigma_{\min}(E - A), \sigma_{\min}(E + A)\}$.

Приложение. Программная реализация в системе Wolfram Mathematica

Вычисление области устойчивости по Гурвицу

```
1 (* Составление матрицы Гурвица Г *)
2 HurwitzMatrix[f_, x_] := Block[{a, n, T, i, j},
3 n = Exponent[f, x]; T = ConstantArray[0, {n, n}];
4 For[i = 2 - n, i <= 2 n - 1, i++,
5 a[i] = If[i < 0 || i > n, a[i] = 0, Coefficient[f, x, n - i]];
6 For[i = 1, i <= n, i++,
7 For[j = 1, j <= n, j++, T[[i, j]] = a[-j + 2 i]]; T]
8 HurwitzMatrix[A_] := Block[{x}, HurwitzMatrix[(-1)^Length@A CharacteristicPolynomial[A, x], x]]
9
10 (* Проверка постоянной матрицы A на устойчивость по Гурвицу *)
11 StableQ[A_] := Block[{HM}, HM = HurwitzMatrix[A];
12 Reduce[Table[Det@HM[[1 ;; k, 1 ;; k]], {k, Length[HM]}] > 0]]
13
14 (* Функция K(f) *)
15 KFunction[f_, x_] := Block[{n, p, q, Y}, n = Exponent[f, x];
16 p = Sum[Coefficient[f, x, 2 k]*Y^k, {k, 0, Floor[n/2]}];
17 q = Sum[Coefficient[f, x, 2 k + 1]*Y^k, {k, 0, Floor[(n - 1)/2]}];
18 Expand@Resultant[p, q, Y]
19 KFunction[A_] := Block[{x}, KFunction[(-1)^Length[A] CharacteristicPolynomial[A, x], x]]
20
21 (* Область устойчивости по Гурвицу матрицы A(t) *)
22 StabilityRegion[A_, t_] := Block[{p, q, a, n, b, l, k, r},
23 r = 10^-100; p = (t /. Solve[KFunction[A] == 0, t, Reals]);
24 If[! ListQ[p], p = {}]; q = (t /. Solve[Det[A] == 0, t, Reals]);
25 If[! ListQ[q], q = {}];
26 a = Sort[Union[p, q], Less];
27 If[a == {}, Return[StableQ[A /. t -> 0]]];
28 l = {}; n = Length[a];
29 b = Table[(a[[k]] + a[[k + 1]])/2, {k, n - 1}];
30 b = Prepend[b, First[a] - 1]; b = Append[b, Last[a] + 1];
31 b = Map[Rationalize[#, r] &, b];
32 Do[If[StableQ[A /. t -> b[[k]]],
33 l = Append[l, (a[[k - 1]] < t < a[[k]])], {k, 2, n}];
34 If[StableQ[A /. t -> First[b]], l = Prepend[l, (t < First[a])]];
35 If[StableQ[A /. t -> Last[b]], l = Append[l, (t > Last[a])]];
36 Or @@ l]
```

Вычисление области устойчивости по Шуру

```
1 (* Составление матрицы Шура *)
2 SchurMatrix[f_, x_, k_] := Block[{X, Y, n}, n = Exponent[f, x];
3 X = LowerTriangularize[ToeplitzMatrix[Table[Coefficient[f, x, i], {i, 0, k - 1}]]];
4 Y = LowerTriangularize[ToeplitzMatrix[Table[Coefficient[f, x, n - i], {i, 0, k - 1}]]];
5 ArrayFlatten[({{X, Transpose[Y]}, {Y, Transpose[X]}})]
6
7 (* Проверка постоянной матрицы A на устойчивость по Шуру *)
8 SchurStableQ[A_] := Block[{f, x},
9 f = (-1)^Length@A CharacteristicPolynomial[A, x];
10 Reduce[(Table[Det[SchurMatrix[f, x, k]], {k, Exponent[f, x]}]*
11 Table[(-1)^k, {k, Exponent[f, x]}]) > 0]
12
13 (* Получение полинома f*(x) *)
14 ReciprocalPolynomial[f_, x_] := Block[{n, l},
15 n = Exponent[f, x]; l = CoefficientList[f, x];
16 Sum[l[[k]]*x^(n - k + 1), {k, n + 1}]
17
18 (* Область устойчивости по Шуру матрицы A(t) *)
19 SchurStabilityRegion[A_, t_] := Block[{p, q, x, a, n, b, l, k, f, r},
20 r = 10^-100; f = (-1)^Length@A CharacteristicPolynomial[A, x];
21 p = (t /. Solve[Resultant[f, ReciprocalPolynomial[f, x], x] == 0, t, Reals]);
22 If[! ListQ[p], p = {}]; a = Sort[p];
23 If[a == {}, Return[SchurStableQ[A /. t -> 0]]];
24 l = {}; n = Length[a];
25 b = Table[(a[[k]] + a[[k + 1]])/2, {k, n - 1}];
26 b = Prepend[b, First[a] - 1]; b = Append[b, Last[a] + 1];
27 b = Map[Rationalize[#, r] &, b];
28 Do[If[SchurStableQ[A /. t -> b[[k]]],
29 l = Append[l, (a[[k - 1]] < t < a[[k]])], {k, 2, n}];
30 If[SchurStableQ[A /. t -> First[b]], l = Prepend[l, (t < First[a])]];
31 If[SchurStableQ[A /. t -> Last[b]], l = Append[l, (t > Last[a])]];
32 Or @@ l]
```

Вычисление спектральной абсциссы и спектрального радиуса

```
1 (* Вычисление  $\eta(A)$  *)
2 SpectralAbscissa[A_] := Block[{f, x, phi, p, l},
3 f = (-1)^Length@A CharacteristicPolynomial[A - p*IdentityMatrix[Length[A]], x];
4 phi = Resultant[f, f /. x -> -x, x]; l = p /. Solve[phi == 0, p, Reals]; Max[l]
5
6 (* Вычисление  $\rho(A)$  *)
7 SpectralRadius[A_] := Block[{f, x, psi, p, l},
8 f = (-1)^Length@A CharacteristicPolynomial[A/p, x];
9 psi = Resultant[f, ReciprocalPolynomial[f, x], x];
10 l = p /. Solve[psi == 0, p, Reals]; Max[l]
```

Вычисление комплексного радиуса устойчивости по Гурвицу

```
1 (* Матрица  $H(\sigma)$  *)
2 HMatrix[A_, B_, c_, s_] := ArrayFlatten[({{A, -B.ConjugateTranspose[B]},
3 {s^2*ConjugateTranspose[c].c, -ConjugateTranspose[A]}})]
4
5 (* Функция  $r_C^-(A, B, C)$  *)
6 StabilityRadius[A_, B_, c_] := Block[{s, x, H, f, g, l}, If[!StableQ[A], Return[0];];
7 H = HMatrix[A, B, c, s]; f = CharacteristicPolynomial[H, x]; g = Discriminant[f, x];
8 l = DeleteDuplicates[Select[s /. Solve[g == 0, s, Reals], Positive]];
9 Do[If[Min@Abs@Re@Eigenvalues@HMatrix[A, B, c, l[[k]]] < 10^-3,
10 Return[l[[k]]], {k, Length[l]}]]
```

Вычисление комплексного радиуса устойчивости по Шуру

```
1 (* Матрица  $W_\sigma(\lambda)$  *)
2 WMatrix[A_, B_, c_, l_, s_] := ArrayFlatten[({{A, 0},
3 {s^2*ConjugateTranspose[c].c, IdentityMatrix[Length[A]]}})] -
4 l*ArrayFlatten[({{IdentityMatrix[Length[A]], B.ConjugateTranspose[B]}, {0, ConjugateTranspose[A]}})]
5
6 (* Функция  $r_C^1(A, B, C)$  *)
7 SchurStabilityRadius[A_, B_, c_] := Block[{s, x, W, f, g, list, eps}, eps = 10^-3;
8 If[! SchurStableQ[A], Return[0];]; W = WMatrix[A, B, c, x, s]; f = Det[W]; g = Discriminant[f, x];
9 list = Sort[DeleteDuplicates[Select[s /. Solve[g == 0, s, Reals], Positive]], Less];
10 Do[If[Select[x /. Solve[(f /. s -> list[[k])] == 0, x],
11 1 - eps < Abs[#] < 1 + eps &] != {}, Return[list[[k]]], {k, Length[list]}]]
```

Список литературы

- [1] Hinrichsen D. Pritchard A. J. Real and Complex Stability Radii: A Survey // Control of uncertain systems, 1990, p. 119-162.
- [2] Byers R. A bisection method for measuring the distance of a stable matrix to the unstable matrices // SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing. 1988. Vol. 9. P. 875–881.
- [3] He C., Watson G.A. An algorithm for computing the distance to instability // SIAM journal on matrix analysis and applications, 1998.
- [4] Freitag M. A., Spence A. A Newton-based method for the calculation of the distance to instability // Linear Algebra and its Applications. 2011. Vol. 435. P. 3189–3205.
- [5] Freitag M. A., Spence A. A new approach for calculating the real stability radius // BIT Numerical Mathematics, 2014.
- [6] Qiu, L., Bernhardsson, B., Rantzer, A., Davison, E., Young, P., Doyle, J.: A formula for computation of the real stability radius // Automatica 31, p. 879–890 (1995).
- [7] Hinrichsen D., Son N. K. Stability radii of linear discrete-time systems and symplectic pencils // International Journal of Robust and Nonlinear Control, 1991.
- [8] Li W., Wang L. A Criterion for Stability of Matrices // Journal Of Mathematical analysis and applications 225, 1998.
- [9] Takeshima T. Strelitz test for stable polynomials and its application to design problems of control systems // Japan Society for Symbolic and Algebraic Computation, 2005.
- [10] Lakatos P. On zeros of reciprocal polynomials // Publicationes Mathematicae-Debrecen, 2002.
- [11] Bingham J., Ting L. Stability Radius as a Method for Comparing the Dynamics of Neuromechanical Systems // IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering, 2013.
- [12] Fabio, P., Zhao, S., Chiara, F., Sandro, Z. Fragility Limits Performance in Complex Networks // Scientific Reports, 2020.

- [13] Yao Y., Wang J., Zhang J., Yang M. Stability analysis on flow parameters in coolant temperature control system of lead-cooled fast reactor // *Annals of Nuclear Energy*, 2019.
- [14] Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 1: Основы алгебры Изд. 2-е, стер. М.: МЦНМО, 2012. 272 с.
- [15] Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. Изд. 3-е, стер. СПб: Лань, 2009. 736 с.
- [16] Калинина Е.А., Утешев А.Ю. Теория исключения. Теория исключения: Учеб. пособие - СПб.: НИИ химии СПбГУ, 2002.
- [17] Записная книжка Утешева Алексея Юрьевича [Электронный ресурс] URL:<http://vmath.ru/vf5/>
- [18] Bhattacharyya S. P., Chapellat H., Keel L. H. Robust control. The parametric approach. NJ: Prentice HallPTR, Englewood Cliffs; 1995.
- [19] Smith III, J.O.: Introduction to Digital Filters: with Audio Applications. W3K Publishing, USA (2007)
- [20] Kulenovic, Merino.: Discrete dynamical systems and difference equations with Mathematica, 2002.
- [21] Kalinina, E. A., Smol'kin, Yu. A. Uteshev, A. Yu.: Robust Schur Stability of a Polynomial Matrix Family. In: Proc. of the 21th Intern. Workshop, CASC 2019. LNCS 11661, pp. 262–279 (2019).
- [22] Kalinina, E. A., Smol'kin, Yu. A. Uteshev, A. Yu.: Stability and distance to instability for polynomial matrix families. Complex perturbations. Linear and Multilinear Algebra, 2020, <https://doi.org/10.1080/03081087.2020.1759500>
- [23] Смолькин Ю. Вычисление комплексного радиуса устойчивости // Процессы управления и устойчивость, 2019.