Санкт-Петербургский государственный университет

РЯЗАНОВА Дарья Денисовна

Выпускная квалификационная работа

Сетевая модель распределения общественных благ

Уровень образования:магистратура
Направление: 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
Основная образовательная программа ВМ.5504 «Исследование операций и системный анализ»

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор
Петросян Л.А.

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент
Седаков А.А.

Рецензент
д.ф.-м.н., доцент
Реттиева А.Н.

Санкт-Петербург
2020г.

Содержание

1. Введение

Теория игр представляет собой набор математических инструментов, с помощью которых можно выяснить природу конфликта и найти одно из его решений. Первоначально теория игр находила свое применение в рамках экономической науки, но позднее также получила широкое признание и в других сферах. В настоящее время теория игр применима к широкому диапазону поведенческих отношений и является общим термином для науки логического принятия решений.

В данной работе будет рассмотрена игра распределения общественных благ. Существует множество различных примеров подобных игр в реальной жизни: когда человек сажает сад, его соседи также получают выгоду, когда регион устанавливает программу борьбы с загрязнением окружающей среды, выгоду также получают и регионы по соседству, когда одни люди вводят новшества, например, экспериментируют с новой технологией или генерируют новую информацию, то полученные результаты могут быть применены другими.

В контексте игры распределения общественных благ будет рассмотрен сетевой подход для этого класса игр. Будет изучено, как различные параметры формирования связей между игроками в конфликтно-управляемых системах, будут определять выигрыши игроков с учётом этих связей.

В теории игр различают несколько классов игр, среди них всех остановимся на кооперативном. В отличие от некооперативного поведения, согласованный выбор действий игроками приводит к лучшему исходу в смысле большего общего выигрыша игроков. Дополнительно, кооперация дает возможность каждому игроку гарантировать не меньший выигрыш в сравнении с его выигрышем при некооперативном поведении, например, в равновесии по Нэшу.

Игра считается кооперативной, если игроки могут объединяться в коалиции и действовать в соответствии с некоторым заранее определенным принципом оптимальности. Под данным принципом может пониматься соглашения о множестве кооперативных стратегий и способ дележа общего выигрыша между игроками. Большинство кооперативных игр описывается с помощью характеристической функции. Построение данной функции возможно несколькими способами, и потому является одним из основных предметов изучения кооперативной теории игр [1, 5, 11, 14, 15]. В данной работе, как уже сказано выше, будет рассмотрена игра общественных благ на графе (сети), для нее будут исследованы два способа построения характеристической функции, α-характеристическая и γ-характеристическая функции. Данные характеристические функции были выбраны по следующим причинам: α-характеристическая функция является классическим подходом, при котором игроки коалиции максимизируют выигрыш коалиции, тогда как не вступившие в нее игроки играют против коалиции [11]. С другой стороны, γ-характеристическая функция описывает ситуацию, при которой игроки, не вошедшие в коалицию, не играют против нее, а максимизируют свой индивидуальный выигрыш [5, 15]. В игре распределения общественных благ данный поход, с точки зрения применений в реальной жизни, может оказаться более подходящим, так как в играх данного типа нет явной конфронтации между игроками, вступившими и не вступившими в коалицию.

Еще одним важным вопросом кооперативной теории игр является выбор правила распределения суммарного выигрыша игроков между собой внутри коалиции. Для возможности свободно разделять выигрыши между игроками, в данной игре будет рассматриваться игра с трансферабельной полезностью. Под данным выражением подразумевается, что полезность может быть оценена по единой шкале для всех участников игры и может передаваться от игрока к игроку без потерь и трансформаций. В играх с трансферабельной полезностью, существуют несколько различных правил распределения суммарного выигрыша (дележей). В работе в качестве дележей будут рассматриваться вектор Шепли (классическое решение теории кооперативных игр) и τ-вектор, построенные специальным образом с учётом сетевой структуры взаимодействия [7, 16].

Также в работе будут представлены результаты численного эксперимента, в рамках которого были изучены следующие зависимости:

1. среднего выигрыша коалиции от размера коалиции,
2. среднего выигрыша коалиции от заданного уровня издержек,
3. среднего выигрыша коалиции от вероятности создания связи в графе,
4. среднего выигрыша игроков от вероятности создания связи в графе и количества соседей для фиксированного игрока, полученных после процедуры дележа с помощью вектора Шепли,
5. среднего выигрыша игроков от вероятности создания связи в графе и количества соседей для фиксированного игрока, полученных после процедуры дележа с помощью τ-вектора.

2. Обзор литературы

В данной работе рассматривается игра распределения общественных благ. Данный тип игр активно исследуется в настоящий момент в различных сферах науки, например, в статье [10], исследуется эволюционный подход к такому классу игр. В статье [6] описываются причины кооперативного взаимодействия в игре распределения общественных благ на примере задачи термодинамики.

Рассматриваемая в статье [4] сетевая модель игры распределения общественных благ была взята за основу для исследования в данной работе. В статье [4] исследовался вопрос о нахождении равновесия по Нэшу для фиксированного графа с учетом заданной функции полезности.

В работе также рассматривается сетевая модель построения игры, основные понятия теории графов были изучены с помощью работ [3] и [9]. Для построения модели случайного графа была изучена классическая статья [8], в которой описывается модель Эрдёша – Реньи построения случайного графа, и более современная книга [12], в которой приводятся некоторые следствия из свойств данной модели, а также рассматриваются возможные применения данной модели.

Основные понятия кооперативной теории игр были изучены с помощью учебных материалов [2].

Для изучения подходов к построению α и γ-характеристических функций были изучены следующие материалы: [1, 5, 11, 13].

Различные способы построения дележа были изучены в классических статьях: [7, 16]. В статье [16] описана аксиоматика и определение вектора Шепли, а в статье [7] приводится один из методов построения τ-вектора.

3. Постановка задачи

В работе рассматривается теоретико-игровая модель на конечном множестве N игроков (агентов), $N = \{1, \ldots, n\}$. Обозначим за $e_i \in [0, \infty)$ – количество (объем) усилий i-го игрока. Выбор количества усилий и будет являться стратегией игроков. Количеством усилий в игре общественных благ может считаться время потребителя, которое он тратит на поиск нового продукта, или размер участка земли, выделенного под новый урожай. В рамках этой задачи будем предполагать, что собственные затраты, связанные с выбором единицы объема усилий агентов постоянны и равны c. Обозначим через $e = (e_1, \ldots, e_n)$ набор усилий для всех игроков [4].

Агенты располагаются в сети, которая задается графом g. Графом будем называть пару (N, Q), где N – множество вершин, а Q – множество ребер [3]. В контексте данной работы, множество вершин графа определяем равным множеству игроков, каждая вершина графа будет соответствовать игроку из множества игроков $i \in N$, и для $\forall\ i,\ j : g_{ij} \in Q : g_{ij} = 1$, если игрок j получает прямую выгоду от результатов работы игрока i, и $g_{ij} = 0$ иначе. Также предполагается, что граф является неориентированным: $g_{ij} = g_{ji}$.

Пусть N_i – набор игроков, которые получают выгоду от усилий игрока i, будем называть данный набор соседями i-го игрока: $N_i = \{j \in N \backslash \{i\} : g_{ij} = 1\}$.

В данной работе принимается два предположения относительно взаимозаменяемости усилий игроков. Во-первых, усилия игрока являются заменой усилий его соседей, но не игроков, не связанных с ним напрямую. Во-вторых, усилия соседа — это идеальная замена своих собственных.

Предполагается, что каждый игрок получает выгоду от собственных усилий и усилий своих соседей в соответствии с дважды дифференцируемой, строго вогнутой функцией полезности $b(\cdot)$, где:

$$b(0) = 0, \quad b' > 0, \quad b'' < 0. \tag{1}$$

В соответствии с принятыми выше предположениями индивидуальный выигрыш игрока i будем рассчитывать по следующей формуле:

$$U_i(e, g) = b(e_i + \sum_{j \in N_i} e_j) - ce_i. \tag{2}$$

Процесс игры заключается в том, что игроки одновременно выбирают величину усилий, с учетом структуры g и каждый игрок i при этом получает выигрыш (2).

В данной работе будет рассматриваться кооперативный подход для вышеописанной модели. Будем считать, что игроки объединяются в коалиции для того, чтобы увеличить суммарный выигрыш:

$$\max_e \sum_{i \in N} U_i(e, g).$$

Для нас неважно является граф связным или нет, игроки могут вступать в коалицию, даже если они не связаны ребром. Главной задачей в данной работе будет исследование двух различных подходов к построению характеристической функции в рамках описанной выше модели, оценка среднего выигрыша для коалиций и игроков при стохастическом подходе к построению графа.

4. α-характеристическая функция

В данной главе приводится определение α-характеристической функции и её применение к нашей модели, рассматриваются разные способы построения дележа: вектор Шепли и τ-вектор. Построен пример на конкретном графе.

α-характеристическая функция была определена фон Нейманном и Моргенштерном в книге [11], как максимальная величина, которую может гарантировать себе некая коалиция $S \subseteq N$, без учета стратегий игроков находящихся в $N \backslash S$.

4.1. Построение характеристической функции

Коалицией S будем называть подмножество множества N. Определим характеристическую функцию для каждой коалиции с учетом функций выигрыша игроков $U_i(e, g)$.

Определение 1. *Кооперативной игрой в форме характеристической функции будем называть пару $\langle N, V \rangle$, где $N = 1, \ldots, n$ — множество игроков, $V(S), S \subseteq N$ — характеристическая функция, под которой понимается отображение из множества всех возможных коалиций в поле вещественных чисел $V : 2^N \to R^1$, $V(\varnothing) = 0$.*

Определение 2. *α-характеристической функцией будем называть функцию V_α:*

$$V_\alpha(S, g) = \max_{e_S} \min_{e_{N \backslash S}} \sum_{i \in S} U_i(e, g), \quad e_i \in [0, \infty),$$

где $e_S = \{e_j, j \in S\}$, $e_{N \backslash S} = \{e_j, j \in N \backslash S\}$ – вектора, соответствующие усилиям игроков, входящих в коалиции S и $N \backslash S$ соответственно[11].

Утверждение 1. *Характеристическая функция V_α в рассматриваемой* *кооперативной игре распределения общественных благ принимает следующий вид:*

$$V_\alpha(S,g)=\max_{e_S}\sum_{i\in S}[b(e_i+\sum_{j\in N_i\cap S}e_j)-ce_i],\quad e_i\in[0,\infty)\quad S\subseteq N. \tag{3}$$

Доказательство. Согласно определению α-характеристической функции с учетом вида (2) получим следующее выражение:

$$V_\alpha(S,g)=\max_{e_S}\min_{e_{N\setminus S}}\sum_{i\in S}[b(e_i+\sum_{j\in N_i}e_j)-ce_i],\quad e_i\in[0,\infty). \tag{4}$$

Рассмотрим подробнее сумму усилий по соседям. Поскольку всех соседей можно разделить на две группы: тех кто входит в рассматриваемую коалицию S и на тех, кто не входит, можем перейти к следующему виду:

$$\max_{e_S}\min_{e_{N\setminus S}}\sum_{i\in S}[b(e_i+\sum_{j\in N_i\cap S}e_j+\sum_{j\in N_i\setminus S}e_j)-ce_i],\quad e_i\in[0,\infty). \tag{5}$$

Далее, по условию (1), получаем, что рассматриваемый минимум:

$$\begin{aligned}\min_{e_{N\setminus S}}\sum_{i\in S}[b(e_i+\sum_{j\in N_i\cap S}e_j+\sum_{j\in N_i\setminus S}e_j)-ce_i]=\\ \sum_{i\in S}[b(e_i+\sum_{j\in N_i\cap S}e_j)-ce_i].\end{aligned} \tag{6}$$

так как функция является монотонной и $b(0)=0$, тем самым получаем вид (3). □

Решая задачу максимизации с учетом вида графа и количества игроков, имеем конечный вид характеристической функции для произвольной коалиции S:

$$\begin{array}{rcl} V_\alpha(S,g) & = & \sum\limits_{i\in S}[b(e_i^{\alpha,S} + \sum\limits_{j\in N_i} e_j^{\alpha,S}) - ce_i^{\alpha,S}], \quad \text{где:} \\ e_i^{\alpha,S} & = & 0, i \notin S, \\ e_S^{\alpha,S} & = & \arg\max\limits_{e_S} \sum\limits_{i\in S}[b(e_i + \sum\limits_{j\in N_i} e_j) - ce_i]. \end{array} \tag{7}$$

т.е. игроки не входящие в коалицию выбирают нулевые усилия.

Для гранд-коалиции получим следующее выражение:

$$\begin{array}{rcl} V_\alpha(N,g) & = & \sum\limits_{i\in N}[b(e_i^{\alpha,N} + \sum\limits_{j\in N_i} e_j^{\alpha,N}) - ce_i^{\alpha,N}], \\ e_N^{\alpha,N} & = & \arg\max\limits_{e_N} \sum\limits_{i\in N}[b(e_i + \sum\limits_{j\in N_i} e_j) - ce_i]. \end{array} \tag{8}$$

Так как в рассматриваемой модели принимается предположение, что построенная игра распределения общественных благ имеет трансферабельную полезность, после совместного выбора игроками стратегий и выигрыша игроками величины $V_\alpha(N,g)$, встает вопрос о разделении этой величины. Для распределения между игроками выигрыша используется дележ.

Определение 3. *Вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, удовлетворяющий условиям:*

$$\begin{array}{rcl} \alpha_i & \geqslant & V_\alpha(\{i\},g), \quad i \in N, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i & = & V_\alpha(N,g), \end{array} \tag{9}$$

где $V_\alpha(\{i\},g)$ - значение характеристической функции для одноэлементной коалиции $S = \{i\}$, называется дележом [2].

В работе будет рассмотрено два различных подхода к построению дележа: вектор Шепли и τ-вектор.

4.2. Построение вектора Шепли

В кооперативных играх существует вопрос об оптимальном распределении выигрыша между игроками. Один из вариантов решения задачи о распределении выигрыша – вектор Шепли. После построения характеристической функции можем найти соответствующее определение для вектора Шепли. Рассмотрим классическое определение вектора Шепли [16].

Для определения вектора Шепли введем следующие обозначения:

- n — число игроков,
- s — размер коалиции S,
- $V_\alpha(S, g)$ — значение характеристической функции для коалиции $S \subseteq N$.

Определение 4. *Компоненты вектора Шепли определяются как:*

$$Sh(V_\alpha)_i = \sum_{i \in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}(V_\alpha(S, g) - V_\alpha(S \setminus \{i\}, g)). \tag{10}$$

Утверждение 2. *В рамках построенной α-характеристической функции вида (7), вектор Шепли будет выглядеть следующим образом:*

$$\begin{gathered} Sh(V_\alpha)_i = \sum_{i \in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}(\sum_{i \in S}[b(e_i^{\alpha,S} + \sum_{j \in N_i} e_j^{\alpha,S}) - ce_i^{\alpha,S}] - \\ \sum_{l \in S \setminus \{i\}}[b(e_l^{\alpha,S\setminus\{i\}} + \sum_{k \in N_l} e_k^{\alpha,S\setminus\{i\}}) - ce_l^{\alpha,S\setminus\{i\}}]). \end{gathered} \tag{11}$$

Замечание 1. *Для случая, если игрок i изолирован (не имеет соседей), из (11) следует, что соответствующее ему значение вектора Шепли представимо следующим образом:*

$$Sh(V_\alpha)_i = b(e_i^{\alpha,\{i\}}) - ce_i^{\alpha,\{i\}}. \tag{12}$$

4.3. Построение τ-вектора

Другим способом построения дележа является τ-вектор, этот метод подробно описан в статье [7]. Для построения τ-вектора, рассмотрим определения вспомогательных векторов:

Определение 5. *Вектор $q \in R^n$, компоненты которого определяются как:*

$$q_i = V_\alpha(N, g) - V_\alpha(N \backslash \{i\}, g), \tag{13}$$

называется верхним вектором игры, где q_i – это i -я координата вектора q или предельный вклад игрока i в V_α [7].

Определение 6. *Функция $f(S)$, вида:*

$$f(S, g) = \sum_{i \in S} q_i - V_\alpha(S, g), \tag{14}$$

называется функцией разрыва коалиции S [7].

Определение 7. *Вектор λ, компоненты которого определяются как:*

$$\lambda_i = \min_{S: i \in S} f(S, g), \tag{15}$$

называется вектором концессии игры [7].

Определение 8. *τ-вектор определяется следующим образом:*

$$\left[\begin{array}{ll} \tau = q, & f(N, g) = 0, \\ \tau = q - f(N, g)(\lambda(N))^{-1}\lambda, & f(N, g) \neq 0, \end{array} \right. \tag{16}$$

где $\lambda(N) = \sum\limits_{i \in N} \lambda_i$.

Утверждение 3. *Для модели предоставления общественных благ с учетом рассматриваемой характеристической функции $V_\alpha(S,g)$ компоненты вектора q представимы следующим образом:*

$$q_i = \sum_{i\in N}[b(e_i^{\alpha,N} + \sum_{j\in N_i} e_j^{\alpha,N}) - ce_i^{\alpha,N}] - \sum_{k\in N\setminus\{i\}}[b(e_k^{\alpha,N\setminus\{i\}} + \sum_{m\in N_k} e_m^{\alpha,N\setminus\{i\}}) - ce_k^{\alpha,N\setminus\{i\}}]. \tag{17}$$

Утверждение 4. *Для модели предоставления общественных благ с учетом рассматриваемой характеристической функции $V_\alpha(S,g)$ функция $f(S,g)$ представима следующим образом:*

$$f(S,g) = \sum_{l\in S}\left\{\sum_{i\in N}[b(e_i^{\alpha,N} + \sum_{j\in N_i} e_j^{\alpha,N}) - ce_i^{\alpha,N}]) - \sum_{k\in N\setminus\{i\}}[b(e_k^{\alpha,N\setminus\{i\}} + \sum_{m\in N_k} e_m^{\alpha,N\setminus\{i\}}) - ce_l^{\alpha,N\setminus\{i\}}]\right\} - \sum_{i\in S}[b(e_i^{\alpha,S} + \sum_{j\in N_i} e_j^{\alpha,S}) - ce_i^{\alpha,S}]. \tag{18}$$

С помощью определенных в (17) и (18) вспомогательных вектора и функции, для функции V_α может быть вычислен τ-вектор, аналогично (16).

4.4. Примеры построения характеристической функции

Будем рассматривать граф g, представленный на Рис 1. В качестве функции b выберем $\ln(e+1)$.

Пример 1. *Рассмотрим двухэлементную коалицию {1,3} на графе g (Рис. 1).*

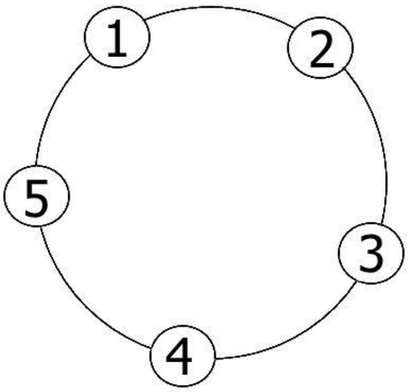

Рис. 1. Граф g.

Распишем функцию выигрыша для каждого игрока этой коалиции:

$$U_1(e,g) = \ln(e_1 + e_2 + e_5 + 1) - ce_1,$$
$$U_3(e,g) = \ln(e_3 + e_2 + e_4 + 1) - ce_3. \tag{19}$$

С учетом утверждения 2, значение α-характеристической функции для данной коалиции на рассматриваемом графе примет следующий вид:

$$V_\alpha(\{1,3\},g) = \max_{e_1,e_3} \min_{e_2,e_4,e_5} (U_1(e,g) + U_3(e,g)), \quad e_i \in [0,\infty). \tag{20}$$

Согласно выражению (3), получим, что игроки, не участвующие в коалиции будут иметь усилия равные нулю: $e_2^{\alpha,\{1,3\}} = e_4^{\alpha,\{1,3\}} = e_5^{\alpha,\{1,3\}} = 0$.

Для нахождения точек максимума функции $\ln(e_1+1) - ce_1 + \ln(e_3 + 1) - ce_3$, найдем частные производные от $\big(U_1(e,g) + U_2(e,g)\big)$ по $e_1^{\alpha,\{1,3\}}$, $e_3^{\alpha,\{1,3\}}$ соответственно, и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} e_1^{\alpha,\{1,3\}} = \frac{1}{c} - 1 \\ e_3^{\alpha,\{1,3\}} = \frac{1}{c} - 1 \\ e_2^{\alpha,\{1,3\}}, e_4^{\alpha,\{1,3\}}, e_5^{\alpha,\{1,3\}} = 0 \end{cases} \tag{21}$$

Подставим полученные точки максимума в формулу α-характеристической функции (20):

$$V_\alpha(\{1,3\},g) = \ln(\frac{1}{c^2}) + 2c - 2. \tag{22}$$

Задав $c = 0.3$, получим численный выигрыш коалиции $\{1,3\}$:

$$V_\alpha(\{1,3\},g) \approx 1.007. \tag{23}$$

Пример 2. *Рассмотрим коалицию состоящую из 3-х игроков {1,2,3} на графе g (Рис. 1)*

Индивидуальный выигрыш каждого игрока коалиции будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} U_1(e,g) &= \ln(e_1+e_2+e_5+1) - ce_1, \\ U_2(e,g) &= \ln(e_2+e_1+e_3+1) - ce_2, \\ U_3(e,g) &= \ln(e_3+e_2+e_4+1) - ce_3. \end{aligned} \tag{24}$$

Аналогично примеру 1 определим значение α-характеристической функции для коалиции $\{1,2,3\}$ и графа g:

$$V_\alpha(\{1,2,3\},g) = \max_{e_1,e_2,e_3} \min_{e_4,e_5} (U_1(e,g)+U_2(e,g)+U_3(e,g)), \quad e_i \in [0,\infty). \tag{25}$$

С учетом построенного графа и ранее описанных условий, значение α-характеристической функции будет находиться решением задачи максимизации, представленной ниже:

$$\max_{e_1,e_2,e_3} \left[\ln(e_1+e_2+1)-ce_1+\ln(e_2+e_1+e_3+1)-ce_2+\ln(e_3+e_2+1)-ce_3 \right], \tag{26}$$

где: $e_1 \geqslant 0$, $e_2 \geqslant 0$, $e_3 \geqslant 0$.

Для поиска максимума воспользуемся методом множителей Лагранжа:

$$L(e_1,e_2,e_3,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = U_1(e,g)+U_2(e,g)+U_3(e,g)+\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\lambda_3 e_3. \tag{27}$$

Составим условия Куна-Таккера:

$$\begin{cases} \frac{1}{1+e_1+e_2} + \frac{1}{1+e_1+e_2+e_3} - c + \lambda_1 = 0 \\ \frac{1}{1+e_1+e_2} + \frac{1}{1+e_1+e_2+e_3} + \frac{1}{1+e_3+e_2} - c + \lambda_2 = 0 \\ \frac{1}{1+e_1+e_2+e_3} + \frac{1}{1+e_3+e_2} - c + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 e_1 = 0 \\ \lambda_2 e_2 = 0 \\ \lambda_3 e_3 = 0 \end{cases} \tag{28}$$

Задав $c = 0.3$, получим решение:

$$\begin{gathered} e_1^{\alpha,\{1,2,3\}} = e_3^{\alpha,\{1,2,3\}} = e_4^{\alpha,\{1,2,3\}} = e_5^{\alpha,\{1,2,3\}} = 0, \\ e_2^{\alpha,\{1,2,3\}} = 9, \\ \lambda_1 = \lambda_3 = 0.1, \\ \lambda_2 = 0. \end{gathered} \tag{29}$$

Подставим получившиеся значения в формулу α-характеристической функции получим выигрыш коалиции:

$$V_\alpha(\{1,2,3\}, g) \approx 4.21. \tag{30}$$

5. γ-характеристическая функции

В данной главе будет приведено определение γ-характеристической функции и её применение её к нашей модели игры распределения общественных благ. Введенная в работе [15], γ-характеристическая функция описывает частично равновесный подход, когда игроки, не вошедшие в коалицию S действуют индивидуально, а игроки в коалиции S – как один игрок. В главе также будут рассмотрены вектор Шепли и τ-вектор, как способы построения дележа. Будет построен и решен пример на заданном графе.

5.1. Построение характеристической функции

Определение 9. *γ-характеристической функцией будем называть функцию $V_\gamma(S, g)$:*

$$\begin{aligned} &V_\gamma(S,g) = \sum_{i\in S} U_i(e^{\gamma,S}, g), \quad \text{где:} \\ &e_S^{\gamma,S} = \arg\max_{e_S} \sum_{i\in S} U_i\big((e_S, e_{N\setminus S}^{\gamma,S}), g\big), \\ &e_k^{\gamma,S} = \arg\max_{e_k} U_k\big((e_k, e_{N\setminus\{k\}}^{\gamma,S}), g\big), \forall k \in N\setminus S, \\ &e_i \in [0,\infty), \quad \forall i \in N. \end{aligned} \tag{31}$$

Утверждение 5. *Характеристическая функция V_γ в рамках рассматриваемой модели предоставления общественных благ принимает следую-*

щий вид:

$$
\begin{aligned}
&V_\gamma(S,g) = \sum_{i\in S}[b(e_i^{\gamma,S} + \sum_{j\in N_i} e_j^{\gamma,S}) - ce_i^{\gamma,S}],\\
&e_S^{\gamma,S} = \arg\max_{e_S} \sum_{i\in S}[b(e_i + \sum_{j\in N_i\cap S} e_j + \sum_{j\in N_i\setminus S} e_j^{\gamma,S}) - ce_i],\\
&e_k^{\gamma,S} = \arg\max_{e_k}\left[b(e_k + \sum_{l\in N_k} e_l^{\gamma,S}) - ce_k\right], \forall k\in N\setminus S.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Заметим, что в отличие от α-характеристической функции, при данном подходе не предполагается нулевых усилий игроков, не входящих в коалицию S, а с учетом нашей модели, игроки, не входящие в коалицию также могут принести коалиции S пользу, если они являются соседями игрока $i \in S$.

Для гранд-коалиции γ-характеристическая функция примет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
V_\gamma(N,g) &= \sum_{i\in N}[b(e_i^{\gamma,N} + \sum_{j\in N_i} e_j^{\gamma,N}) - ce_i^{\gamma,N}],\\
e^{\gamma,N} &= \arg\max_{e_N} \sum_{i\in N}[b(e_i + \sum_{j\in N_i} e_j) - ce_i].
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Замечание 2. *Для случая гранд-коалиции, значение γ-характеристической функции будет совпадать со значением α-характеристической функции.*

После объединения игроков и выигрыша игроками величины $V_\gamma(N,g)$, возникает проблематика распределения выигрыша.

Как и для случая α-характеристической функции, рассмотрим два вида построения дележа: вектор Шепли и τ-вектор.

5.2. Построение вектора Шепли

Построим вектор Шепли для игры с γ-характеристической функцией, пользуясь классическим определением [16].

Утверждение 6. *Вектор Шепли для построенной γ-характеристической функции* (32) *будет выглядеть следующим образом:*

$$Sh(V_\gamma)_i = \sum_{i\in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} (\sum_{i\in S}[b(e_i^{\gamma,S} + \sum_{j\in N_i} e_j^{\gamma,S}) - ce_i^{\gamma,S}] - \sum_{l\in S\setminus\{i\}} [b(e_l^{\gamma,S\setminus\{i\}} + \sum_{k\in N_l} e_k^{\gamma,S\setminus\{i\}}) - ce_l^{\gamma,S\setminus\{i\}}]). \tag{34}$$

Полученный вид формулы отличается от (11) лишь тем, что усилия соседей игрока i, не входящих в коалицию S, определяются с учетом формулы (32), а не полагаются равными нулю, как в случае для α-характеристической функции.

5.3. Построение τ-вектора

Для построения τ-вектора для игры с γ-характеристической функцией нам необходимо определить вид верхнего вектора игры и функции разрыва.

Утверждение 7. *Для рассматриваемой модели распределения общественных благ компоненты верхнего вектора q_i игры, определенной с помощью γ-характеристической функции определяются как:*

$$q_i = \sum_{i\in N}[b(e_i^{\gamma,N} + \sum_{j\in N_i} e_j^{\gamma,N}) - ce_i^{\gamma,N}] - \sum_{k\in N\setminus\{i\}} [b(e_k^{\gamma,N\setminus\{i\}} + \sum_{m\in N_k} e_m^{\gamma,N\setminus\{i\}}) - ce_k^{\gamma,N\setminus\{i\}}]. \tag{35}$$

Утверждение 8. *Функция разрыва коалиции S для игры распределения* *общественных благ, определенной с помощью γ-характеристической функции примет следующий вид:*

$$
\begin{aligned}
f(S) = \sum_{l \in S} \Bigg\{ \sum_{i \in N} [b(e_i^{\gamma,N} + \sum_{j \in N_i} e_j^{\gamma,N}) - ce_i^{\gamma,N}]) - \\
\sum_{k \in N \setminus \{i\}} [b(e_k^{\gamma,N \setminus \{i\}} + \sum_{m \in N_k} e_m^{\gamma,N \setminus \{i\}}) - ce_l^{\gamma,N \setminus \{i\}}] \Bigg\} - \\
\sum_{i \in S} [b(e_i^{\gamma,S} + \sum_{j \in N_i} e_j^{\gamma,S}) - ce_i^{\gamma,S}].
\end{aligned} \tag{36}
$$

С помощью определенных в (35) и (36) вспомогательных вектора и функции, для функции V_γ может быть вычислен τ-вектор, аналогично (16).

5.4. Примеры построения характеристической функции

В данном параграфе будет рассмотрены примеры, аналогичные рассмотренным в предыдущей главе. Условия: граф g, представленный на Рис 1, функция b имеет вид, аналогичный виду в предыдущей главе: $\ln(e+1)$.

Пример 3. *Рассмотрим двухэлементную коалицию {1,3} на графе g (Рис. 1).*

Распишем выигрыш для каждого игрока:

$$
\begin{aligned}
U_1(e,g) &= \ln(e_1 + e_2 + e_5 + 1) - ce_1, \\
U_2(e,g) &= \ln(e_2 + e_1 + e_3 + 1) - ce_2, \\
U_3(e,g) &= \ln(e_3 + e_2 + e_4 + 1) - ce_3, \\
U_4(e,g) &= \ln(e_4 + e_3 + e_5 + 1) - ce_4, \\
U_5(e,g) &= \ln(e_5 + e_1 + e_4 + 1) - ce_5.
\end{aligned} \tag{37}
$$

С учетом утверждения 4, значение γ-характеристической функции для данной коалиции на рассматриваемом графе примет следующий вид:

$$V_\gamma(\{1,3\},g) = \sum_{i\in S}[U_1(e^{\gamma,S},g) + U_3(e^{\gamma,S},g)], \tag{38}$$

$$\begin{cases} e_{\{1,3\}}^{\gamma,\{1,3\}} = \arg\max\limits_{e_{\{1,3\}}} \left[U_1\big((e_{\{1,3\}}, e_{\{2,4,5\}}^{\gamma,\{1,3\}}), g\big) + U_3\big((e_{\{1,3\}}, e_{\{2,4,5\}}^{\gamma,\{1,3\}}), g\big)\right] \\ e_2^{\gamma,\{1,3\}} = \arg\max\limits_{e_2} U_2\big((e_2, e_{\{1,3,4,5\}}^{\gamma,\{1,3\}}), g\big) \\ e_4^{\gamma,\{1,3\}} = \arg\max\limits_{e_4} U_4\big((e_4, e_{\{1,2,3,5\}}^{\gamma,\{1,3\}}), g\big) \\ e_5^{\gamma,\{1,3\}} = \arg\max\limits_{e_5} U_5\big((e_5, e_{\{1,2,3,4\}}^{\gamma,\{1,3\}}), g\big) \end{cases} \tag{39}$$

Для нахождения точек максимума функции, найдем частные производные от выражения (39) по усилиям соответствующего игрока и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{e_1+e_2+e_5+1} - c = 0 \\ \dfrac{1}{e_2+e_1+e_3+1} - c = 0 \\ \dfrac{1}{e_3+e_2+e_4+1} - c = 0 \\ \dfrac{1}{e_4+e_3+e_5+1} - c = 0 \\ \dfrac{1}{e_5+e_1+e_4+1} - c = 0 \end{cases} \tag{40}$$

Можно заметить, что все игроки находятся в равных условиях и их усилия будут равны между собой:

$$e_1^{\gamma,\{1,3\}} = e_2^{\gamma,\{1,3\}} = e_3^{\gamma,\{1,3\}} = e_4^{\gamma,\{1,3\}} = e_5^{\gamma,\{1,3\}} = \frac{1-c}{3c}. \tag{41}$$

Подставим полученные усилия в характеристическую функцию:

$$V_\gamma(\{1,3\},g) = \ln(\frac{1}{c^2}) - \frac{2-2c}{3}. \tag{42}$$

Задав $c = 0.3$, получим численный выигрыш коалиции $\{1,3\}$:

$$V_\gamma(\{1,3\}, g) \approx 1.941. \tag{43}$$

Пример 4. *Рассмотрим коалицию состоящую из 3-х игроков {1,2,3} на графе g (Рис. 1).*

Индивидуальный выигрыш каждого игрока будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} U_1(e,g) &= \ln(e_1 + e_2 + e_5 + 1) - ce_1, \\ U_2(e,g) &= \ln(e_2 + e_1 + e_3 + 1) - ce_2, \\ U_3(e,g) &= \ln(e_3 + e_2 + e_4 + 1) - ce_3, \\ U_4(e,g) &= \ln(e_4 + e_3 + e_5 + 1) - ce_4, \\ U_5(e,g) &= \ln(e_5 + e_1 + e_4 + 1) - ce_5. \end{aligned} \tag{44}$$

Аналогично примеру 3 определим значение γ-характеристической функции для коалиции $\{1,2,3\}$ и графа g:

$$V_\gamma(\{1,2,3\}, g) = \sum_{i \in S} [U_1(e,g) + U_2(e,g) + U_3(e,g)], \tag{45}$$

$$\begin{cases} e_{\{1,2,3\}}^{\gamma,\{1,2,3\}} = \arg\max\limits_{e_{\{1,2,3\}}} \big[U_1\big((e_{\{1,2,3\}}, e_{\{4,5\}}^{\gamma,\{1,2,3\}}), g\big) + \\ \qquad\qquad + U_2\big((e_{\{1,2,3\}}, e_{\{4,5\}}^{\gamma,\{1,2,3\}}), g\big) + U_3\big((e_{\{1,2,3\}}, e_{\{4,5\}}^{\gamma,\{1,2,3\}}), g\big)\big] \\ e_4^{\gamma,\{1,3\}} = \arg\max\limits_{e_4} U_4\big((e_4, e_{\{1,2,3,5\}}^{\gamma,\{1,3\}}), g\big) \\ e_5^{\gamma,\{1,3\}} = \arg\max\limits_{e_5} U_5\big((e_5, e_{\{1,2,3,4\}}^{\gamma,\{1,3\}}), g\big) \end{cases} \tag{46}$$

Составим условия Куна-Таккера:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+e_1+e_2+e_5}+\dfrac{1}{1+e_1+e_2+e_3}-c+\lambda_1=0 \\ \dfrac{1}{1+e_1+e_2+e_5}+\dfrac{1}{1+e_1+e_2+e_3}+\dfrac{1}{1+e_3+e_2+e_4}-c+\lambda_2=0 \\ \dfrac{1}{1+e_1+e_2+e_3}+\dfrac{1}{1+e_3+e_2+e_4}-c+\lambda_3=0 \\ \dfrac{1}{1+e_4+e_3+e_5}-c+\lambda_4=0 \\ \dfrac{1}{1+e_5+e_4+e_1}-c+\lambda_5=0 \\ \lambda_1 e_1=0 \\ \lambda_2 e_2=0 \\ \lambda_3 e_3=0 \\ \lambda_4 e_4=0 \\ \lambda_5 e_5=0 \end{cases} \tag{47}$$

Задав $c = 0.3$, получим решение:

$$\begin{gathered} e_1^{\alpha,\{1,2,3\}} = e_3^{\alpha,\{1,2,3\}} = 0, \\ e_4^{\alpha,\{1,2,3\}} = e_5^{\alpha,\{1,2,3\}} \approx 1.571, \\ e_2^{\alpha,\{1,2,3\}} \approx 5.828, \\ \lambda_1 = \lambda_3 \approx 0.035, \\ \lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0. \end{gathered} \tag{48}$$

Подставим получившиеся значения в формулу γ-характеристической функции получим выигрыш коалиции:

$$V_\gamma(\{1,2,3\}, g) \approx 4.429. \tag{49}$$

6. Сравнительный анализ

6.1. Пример на фиксированном графе

В этом параграфе будет рассмотрен фиксированный граф, для него будет вычислены вектора τ и Шепли для каждого из вариантов построения характеристической функции, для того, чтобы численно сравнить выигрыши каждого игрока для построенного графа. На конкретном примере будет рассмотрено, как будут меняться выигрыши игроков после процедуры построения дележа для γ-характеристической функции в сравнении с α-характеристической функцией. В главе нумерация игроков будет начинаться с нуля, а получаемые величины дележей будут приведены с точностью до второго знака после запятой.

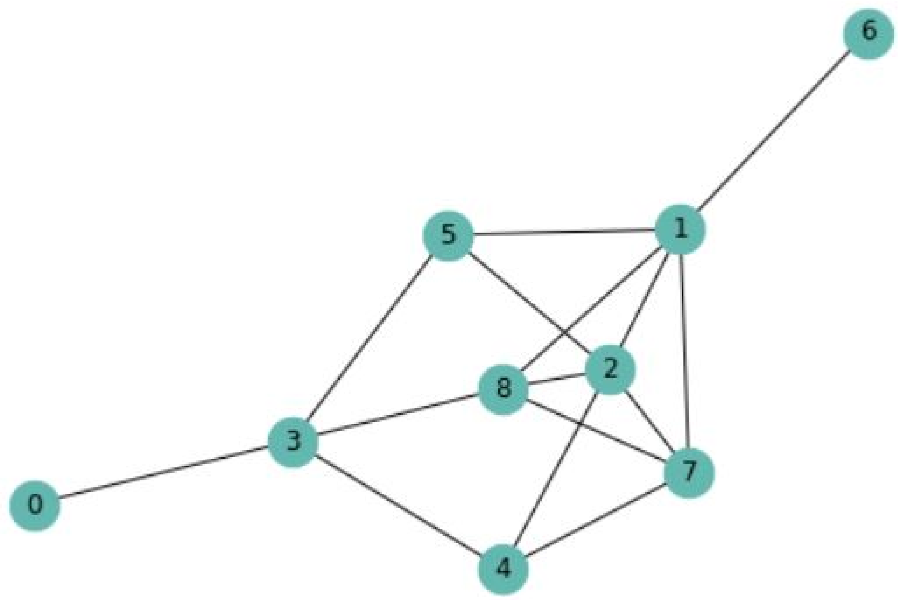

Рис. 2. Граф g.

Рассмотрим граф g (Рис. 2) со следующими параметрами построения:

- $|N| = 9$
- $p = 0.5$
- $c = 0.3$

Для данного графа были вычислены значения α-характеристических функции для всех возможных коалиций, и с их помощью найдены значения вектора Шепли и τ-вектора.

Построим дележи для α-характеристической функции: выигрыш гранд-коалиции равный 17.39 будет распределятся между игроками.

$$V_\alpha(N, g) = V_\alpha(\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, g) \approx 17.39,$$
$$e^{\alpha,N} = (0, 13.976, 2.719, 11.106, 0, 0, 0, 0, 0).$$

Игрок	$Sh_i(V_\alpha)$	$\tau_i(V_\alpha)$
0	1.19	1.52
1	2.65	2.73
2	2.21	1.86
3	2.08	1.91
4	1.76	1.65
5	2.05	2.18
6	1.23	1.39
7	2	1.92
8	2.22	2.23

Из полученной таблицы значений видно, что игроки, имеющие наименьшее количество связей (игроки 0 и 6 с одной связью), получили в обоих дележах наименьшие выигрыши при распределении. Это объясняется их меньшим в общий суммарный выигрыш, а вот с игроками имеющие наибольшее число связей однозначные выводы строить сложнее. Игроки 1 и 2 имеют по 5 соседей каждый, однако, согласно τ-вектору выигрыш игрока 2 ниже, чем, например, игроков 5 и 8, имеющих 3 и 4 соседа соответственно. Такой исход дележа – следствие того, что игроки 5 и 8 имеют среди своих соседей игроков 1, 2 и 3, тех самых игроков, прилагающих свои усилия, тогда как сами 5 и 8 имеют нулевые усилия, и соответственно, удельные издержки равные нулю, поэтому их вступление в коалицию приносит довольно большой вклад в выигрыш всей коалиции.

Построим аналогичные дележи для γ-характеристической функции, выигрыш гранд-коалиции, разделяемый между игроками, равен 17.39.

$$V_\gamma(N, g) = V_\gamma(\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, g) \approx 17.39,$$
$$e^{\gamma,N} = (0, 13.976, 2.719, 11.106, 0, 0, 0, 0, 0).$$

Игрок	$Sh_i(V_\gamma)$	$\tau_i(V_\gamma)$
0	0.96	1.17
1	2.53	2.7
2	2.19	2.08
3	2.32	1.83
4	1.70	1.43
5	2.08	2.21
6	1.00	1.01
7	2.19	2.08
8	2.4	2.85

Как и в случае с α-характеристической функцией, игроки с наименьшим числом соседей (0 и 6), в обоих дележах получают наименьшие выигрыши, а игроки 5 и 8, имеющие нулевые усилия и являющиеся соседями всем трем игрокам эти усилия затрачивающим, получают довольно крупную долю в дележе, но по сравнению с α-характеристической функцией, их доля больше в обоих рассматриваемых видах построения дележа.

6.2. Переход к вероятностной модели

В этом параграфе будет описана модель построения случайного графа, и определено математическое ожидание выигрыша коалиции на случайном графе.

Модель построения случайного графа Эрдёша – Реньи **G(n,p)** описывает механизм формирования графа как серию независимых испытаний, где каждое ребро независимо от других создается в графе с n вершинами с вероятностью p [8].

Исходя из предположений выше, графы с одинаковым числом ребер являются равновероятными, и вероятность получения графа с m ребрами и определенным набором связей подчиняется биномиальному закону распределения и равна:

$$p^m(1-p)^{M-m},$$
$$M = C_N^2.$$

Среднее число ребер из одной вершины определяется как [12]:

$$k = (n-1)p. \tag{50}$$

Утверждение 9. *Математическое ожидание выигрыша для коалиции S на случайном графе:*

$$E(V(S,g),p) = \sum_{m=0}^{M} \left[p^m(1-p)^{M-m} \sum_{g \in G_m} (V(S,g)) \right], \tag{51}$$

где:

- *p – вероятность появления ребра (связи),*
- *m – количество ребер в графе,*
- *$M = C_N^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ – максимальное число ребер графа для количества игроков $|N|$,*
- *G_m – все графы, которые содержат m ребер,*
- *$V(S,g)$ – V_α или V_γ-характеристические функции.*

Рассмотрим формулу (51) более подробно. Исследуем получившийся полином на монотонность по аргументу p:

$$\frac{d(E(V(S,g)),p)}{dp} = \frac{d(\sum\limits_{m=0}^{M}\left[p^m(1-p)^{M-m}\sum\limits_{g\in G_m}(V(S,g))\right],p)}{dp}. \tag{52}$$

Обозначим

$$\sum_{g\in G_m}(V(S,g)) = A_m.$$

$$\frac{d(E(V(S,g)),p)}{dp} = \sum_{m=0}^{M} A_m\left[mp^{m-1}(1-p)^{M-m} - (M-m)(1-p)^{M-m-1}p^m\right]. \tag{53}$$

С учетом неотрицательности A_m и сложности оценки его значения, первым шагом попытаемся доказать неотрицательность выражения:

$$\sum_{m=0}^{M}\left[mp^{m-1}(1-p)^{M-m} - (M-m)(1-p)^{M-m-1}p^m\right] \geqslant 0. \tag{54}$$

Упростив выражение, получим:

$$\frac{(1-p)^M - p^M + M(-1+2p)\left((1-p)^n + p^n\right)}{(1-2p)^2} \geqslant 0. \tag{55}$$

Исследуем данную дробь на промежутке $p \in [0,1]$:

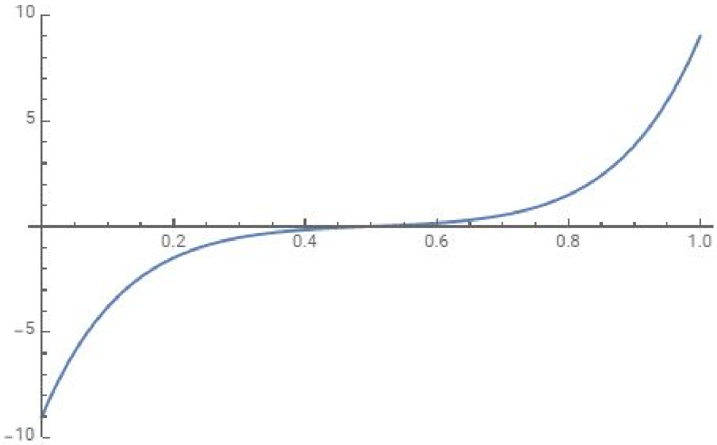

Рис. 3. (55) на промежутке $p \in [0,1]$.

Рассмотрев полученный рисунок 3, можно заметить, что выражение (54) не выполняется на заданном промежутке, и нельзя утверждать о монотонности математического ожидания выигрыша коалиции по вероятности создания ребра.

Однако, учитывая неявную зависимость A_m от p, данный результат не говорит нам об отсутствии монотонности выражения (53). Но, стохастический подход к построению графа, а также нелинейность функции полезности b усложняют возможное построение оценки для A_m.

Интуитивно можно предположить, что в следствие того, что с увеличением вероятности создания связи p, будет увеличиваться вероятность создания графа с бóльшим числом связей m, что, по методу построения обеих характеристических функций, влечет за собой рост значения $V(S,g)$.

С учетом отсутствия формального аналитического доказательства монотонности $E(V(S,g))$ по p, в работе будет приведен численный анализ для эмпирического подтверждения или опровержения выдвинутой гипотезы.

6.3. Численный эксперимент

Рассмотрим ситуацию, когда граф не задан до начала игры, т.е. игроки не знают все существующие связи между всеми игроками, а известно только количество игроков в графе и вероятность создания ребра в графе (связи двух игроков).

Целями данного численного эксперимента являются:

1. Исследование зависимости среднего выигрыша коалиции от размера коалиции.

2. Исследование зависимости среднего выигрыша коалиции от заданного уровня издержек.

3. Исследование зависимости среднего выигрыша коалиции от вероятности создания связи в графе.

4. Исследование среднего выигрыша игроков, полученных после дележа с помощью вектора Шепли.

5. Исследование среднего выигрыша игроков, полученных после дележа с помощью τ-вектора.

Для автоматизации процесса нахождения характеристических функций была написана программа на языке программирования Python, с помощью которой возможно произвести следующий анализ. На каждой итерации функция создает случайный граф с заданными параметрами (количество игроков, вероятность создания связи). После, алгоритм вычисляет выигрыш всех возможных коалиций на графе.

Для исследования зависимости среднего выигрыша от размера коалиции, проведем моделирование со следующими параметрами:

- $|N| = 10$
- $p = 0.5$
- $c = 0.3$
- $b(\cdot) = \ln(e + 1)$
- Число построенных случайных графов $= 50$

Рассмотрим гистограмму значений для фиксированных коалиций, состоящих из пяти и семи игроков соответственно для α-характеристической функции (Рис. 5, 7) и для γ-характеристической функции (Рис. 4, 6).

Среднее значение выигрыша для коалиций с различным числом игроков для α и γ-характеристических функций представлено в таблице:

Количество игроков	$V_\gamma(S,g)$	$V_\alpha(S,g)$
$\lvert S\rvert = 1$	1.07	0.5
$\lvert S\rvert = 2$	2.48	1.54
$\lvert S\rvert = 3$	4.18	3.22
$\lvert S\rvert = 4$	6.12	5.30
$\lvert S\rvert = 5$	8.20	7.62
$\lvert S\rvert = 6$	10.33	10.12
$\lvert S\rvert = 7$	12.78	12.50
$\lvert S\rvert = 8$	15.56	14.75
$\lvert S\rvert = 9$	18.45	17.37
$\lvert S\rvert = 10$	21.42	21.42

Исходя из вида гистограмм и средних значений выигрышей коалиций, можно заметить, что для обеих характеристических функций, средние значения выигрышей выше в коалициях с бóльшим числом игроков. Также можно заметить, что для всех размеров коалиций, кроме максимальной, для γ-характеристической функции средние значения выигрыша коалиций выше, чем для α-характеристической, что можно объяснить способом их построения, так как, при α-характеристической функции игроки, не входящие в коалицию играют против коалиции, а при γ-характеристической функции, находится равновесная ситуация между коалицией и игроками, не входящими в нее, действующими самостоятельно.

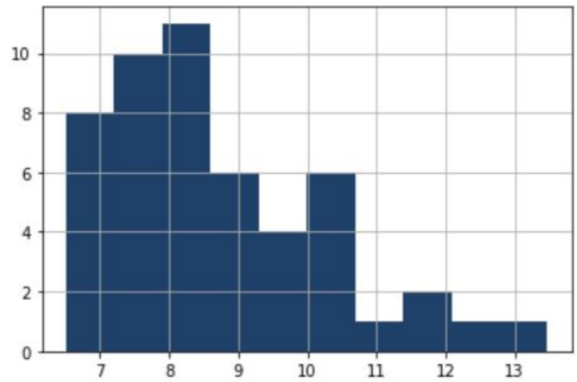

Рис. 4. Гистограмма частот выигрышей для γ-характеристической функции для коалиции $\{0,2,3,6,9\}$.

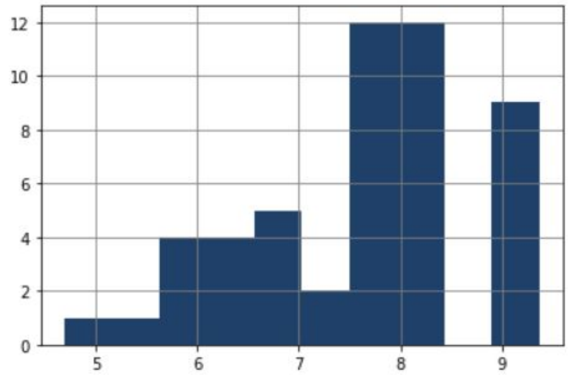

Рис. 5. Гистограмма частот выигрышей для α-характеристической функции для коалиции $\{0,2,3,6,9\}$.

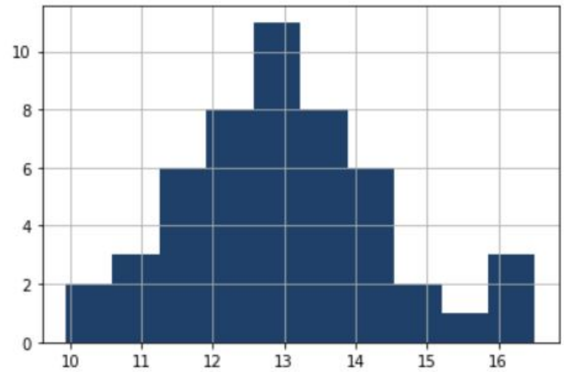

Рис. 6. Гистограмма частот выигрышей для γ-характеристической функции для коалиции $\{0,2,3,4,5,6,9\}$.

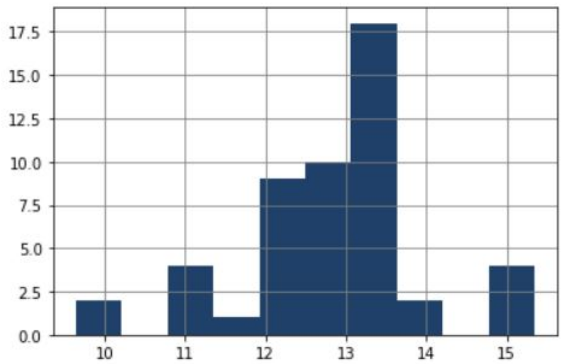

Рис. 7. Гистограмма частот выигрышей для α-характеристической функции для коалиции $\{0,2,3,4,5,6,9\}$.

Для более подробного анализа зависимости среднего выигрыша коалиции, в зависимости от количества в ней игроков, рассмотрим boxplot графики – графики показывающие медиану, первый и третий квартили, и межквартильный размах (Рис. 8, 9). Для построения графика вычислялись значения выигрыша коалиции для всех возможных коалиций соответствующих размеров.

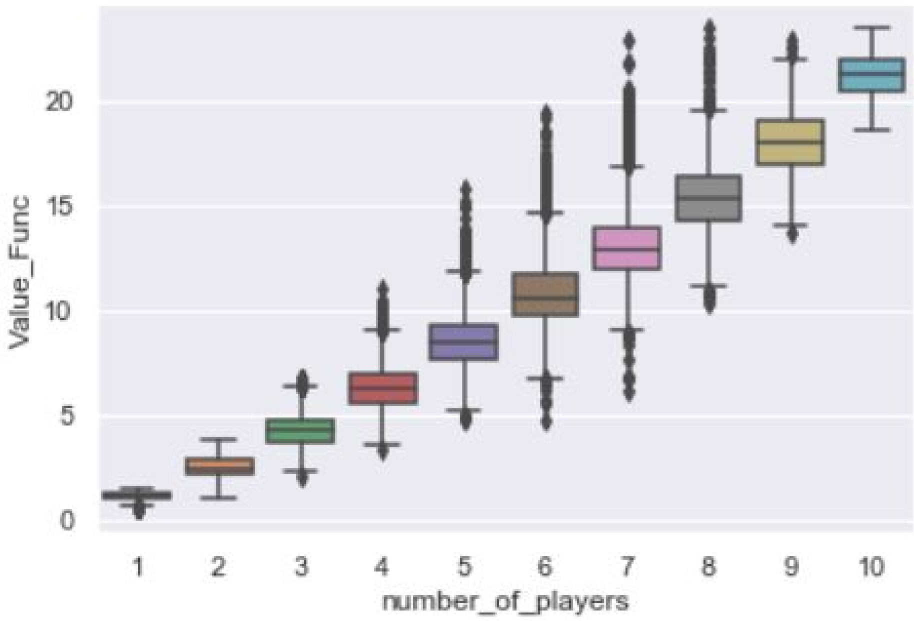

Рис. 8. Boxplot среднего выигрыша в зависимости от количества игроков в коалиции для γ-характеристической функции.

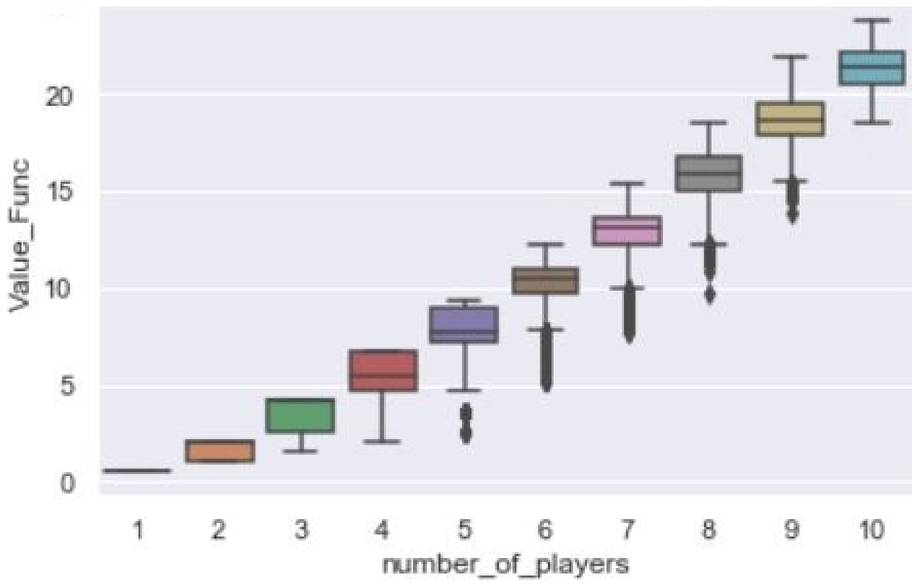

Рис. 9. Boxplot среднего выигрыша в зависимости от количества игроков в коалиции для α-характеристической функции.

Исходя из вида графиков (Рис. 8, 9) можно отметить, что медианное значение выигрыша строго возрастает при увеличении числа игроков в коалиции для обеих характеристических функций. Также, на графиках (Рис. 8, 9) для γ-характеристической функции наблюдается заметно бо́льший разброс значений выигрыша коалиции при размере коалиции от 5 до 9, что подтверждается и численно: в таблице ниже указаны значения стандартного отклонения для выигрыша коалиции с заданным числом игроков.

Количество игроков	$Sd(V_\gamma)$	$Sd(V_\alpha)$
$\lvert S\rvert = 1$	0.19	0
$\lvert S\rvert = 2$	0.53	0.54
$\lvert S\rvert = 3$	0.84	1.02
$\lvert S\rvert = 4$	1.15	1.26
$\lvert S\rvert = 5$	1.43	1.40
$\lvert S\rvert = 6$	1.68	1.52
$\lvert S\rvert = 7$	1.85	1.61
$\lvert S\rvert = 8$	1.94	1.72
$\lvert S\rvert = 9$	1.95	1.83
$\lvert S\rvert = 10$	1.90	1.90

По таблице можно заметить, что при размере коалиции от 2 до 4 значения стандартного отклонения выше у α-характеристической функции, это можно объяснить тем, что при малых размерах коалиции, при условии нулевых усилий игроков, не входящих в коалицию, вид графа играет бо́льшую роль. Однако при размерах коалиции от 5 и до 9 игроков разброс значений выигрыша коалиции для γ-характеристической функции становится больше. Можно заметить нулевое отклонение для α-характеристической функции при коалиции, состоящей из одного игрока, что следует из особенностей построения функции. На рисунке 10, построена графическая интерпретация значений стандартного отклонения выигрышей коалиций различных размеров. Красным цветом выделена линия, соответствующая γ-характеристической функции, синим – α. Интересно заметить, что полученные кривые дважды пересекаются, что является неочевидным результатом, однако исчерпывающее объяснение данного факта, в виду стохастического подхода найти затруднительно.

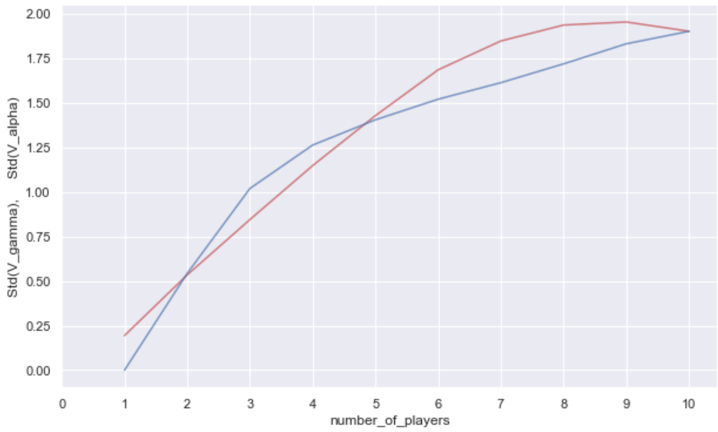

Рис. 10. Зависимость стандартного отклонения выигрыша коалиции от количества игроков в коалиции для γ и α-характеристических функций.

В предыдущем параграфе не удалось получить формального доказательства монотонного возрастания среднего выигрыша коалиции с увеличением вероятности создания связи в графе p. Для эмпирической проверки данной гипотезы построим модель со следующими параметрами:

- $|N| = 10$
- $c = 0.3$
- $b(\cdot) = \ln(e + 1)$
- $p \in [0.01, 1]$
- Шаг изменения $p = 0.05$
- Число построенных случайных графов для каждого шага вероятности $= 50$

На рисунке 11 показана зависимость среднего значения выигрыша фиксированной коалиции, состоящей из 5 игроков в зависимости от вероятности создания связи в графе. Средние значения выигрышей коалиции для γ-характеристической функции отмечены красными точками, α-характеристической – синими. Для обеих характеристических функций можно отметить как монотонное возрастание, так и нелинейную структуру зависимости. Также отметим, в целом ожидаемое превышение значений выигрыша коалиций γ-характеристической функции над α-характеристической для всех значений вероятности p, что объяснимо тем, что для γ-характеристической функции игроки не в коалиции также максимизируют свой выигрыш.

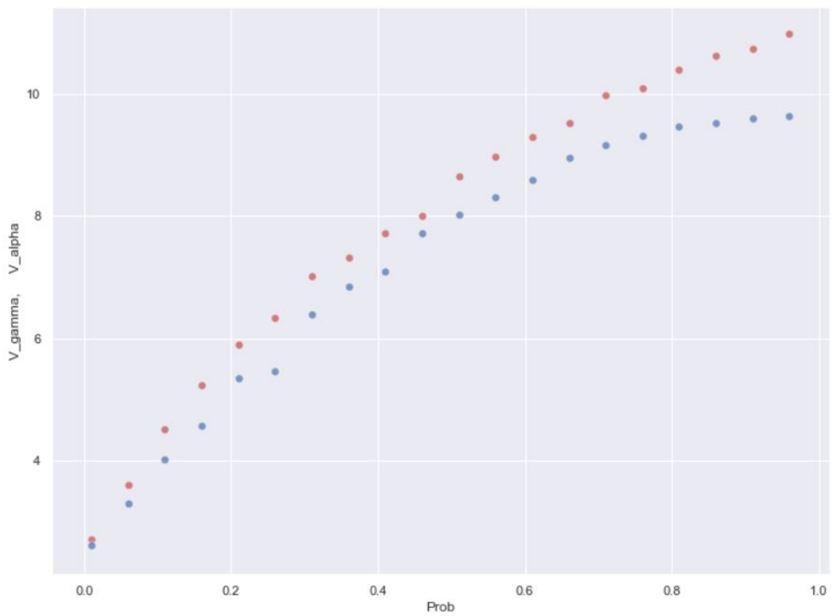

Рис. 11. Средний выигрыш коалиции {1,3,4,6,9} в зависимости от вероятности создания связи для γ и α-характеристических функций.

Рассмотрим зависимость среднего выигрыша коалиции от уровня издержек c. Построим эксперимент со следующими параметрами:

- $|N| = 5$

- $p = 0.5$
- $b(\cdot) = \ln(e + 1)$
- $c \in [0.01, 2.5]$
- Шаг изменения $c = 0.01$
- Число построенных случайных графов для каждого шага уровня издержек = 50

На рисунке 12 показана зависимость среднего выигрыша коалиции из 4 игроков в зависимости от уровня издержек для рассматриваемых характеристических функций. Средние значения выигрышей коалиции для γ-характеристической функции отмечены красными точками, α-характеристической – синими. Можем отметить монотонность и нелинейную зависимость среднего выигрыша коалиции, состоящей из 4 игроков $\{0, 1, 2, 4\}$ от уровня издержек для обеих характеристических функций. Существенного различия в поведении средних значений выигрышей для двух рассматриваемых характеристических функций не наблюдается.

Исследуем зависимость среднего выигрыша фиксированного игрока от вероятности создания связи в графе, для этого проведем моделирование со следующими параметрами:

- $|N| = 10$
- $c = 0.3$
- $p \in [0.1, 0.96]$
- $b(\cdot) = \ln(e + 1)$

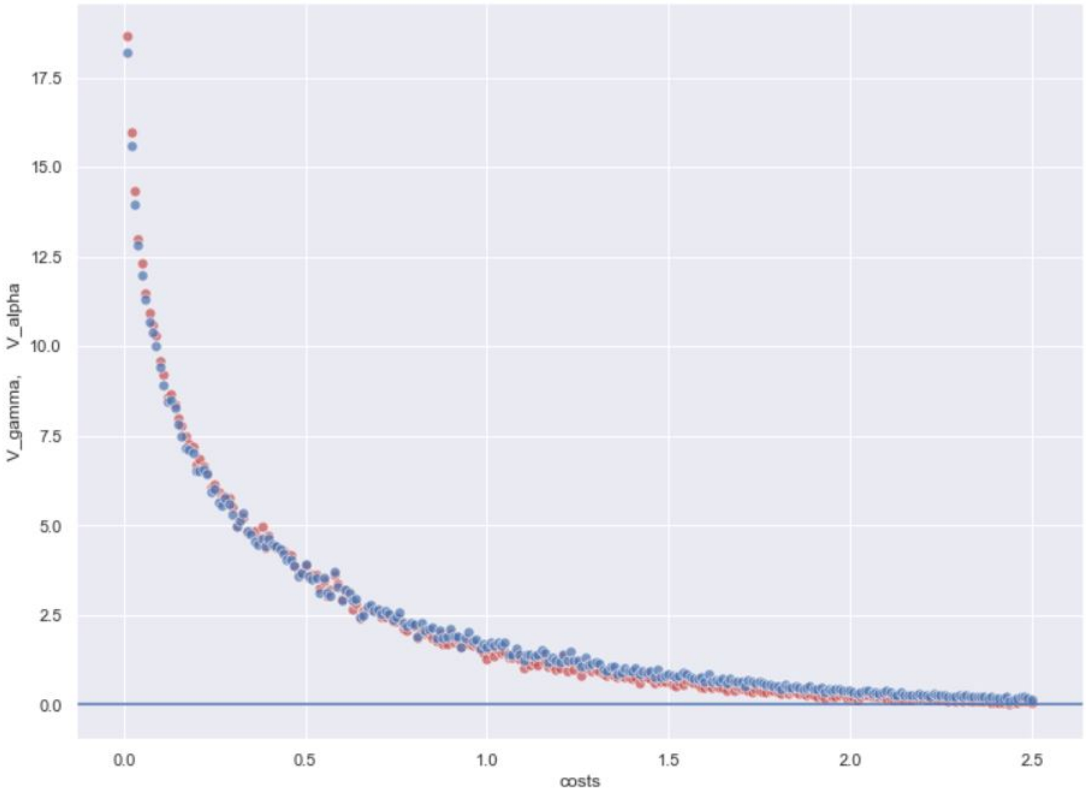

Рис. 12. Зависимость среднего выигрыша коалиции {0,1,2,4} от уровня издержек для α и γ-характеристических функций.

- Шаг изменения $p = 0.05$
- Число построенных случайных графов для каждого шага вероятности $= 50$

На рисунке 13 изображена зависимость среднего выигрыша игрока 7 для α-характеристической функции и построении дележа с помощью вектора Шепли (красный) и τ-вектора (синий). Построенные дележи для фиксированного игрока очень схожи – однозначно выбрать тот или иной дележ в данной ситуации нельзя.

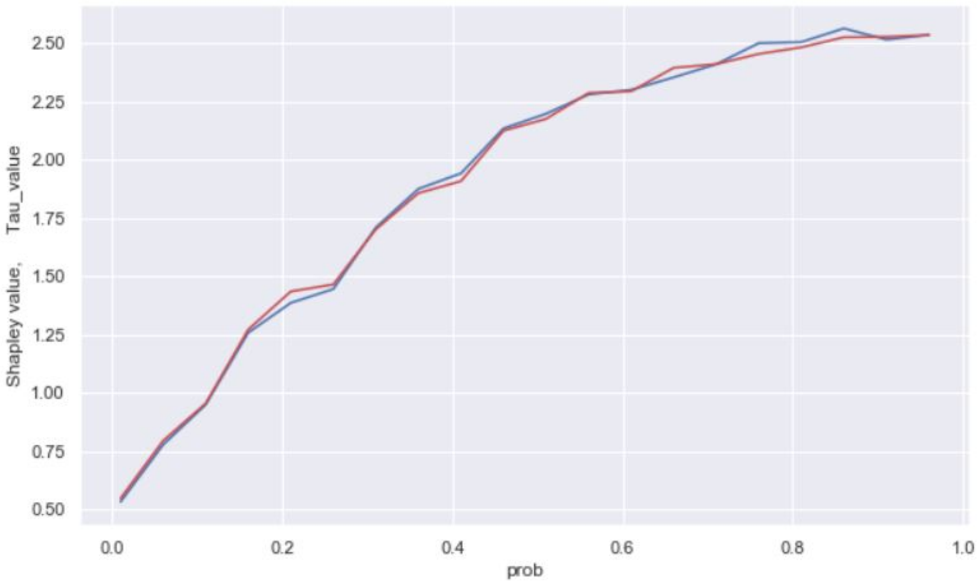

Рис. 13. Зависимость среднего выигрыша игрока 7 от вероятности создания связи в графе для α-характеристической функции при построении дележей: вектор Шепли и τ-вектор.

На графике (Рис. 14) изображена зависимость среднего выигрыша игрока 7 для γ-характеристической функции и построении дележа с помощью вектора Шепли (красный) и τ-вектора (синий). Для этой характеристической функции отличия намного более заметны, можно заметить, что построение дележа с помощью τ-вектора в целом имеет больший разброс, особенно это заметно при вероятности создания связи более 0.6.

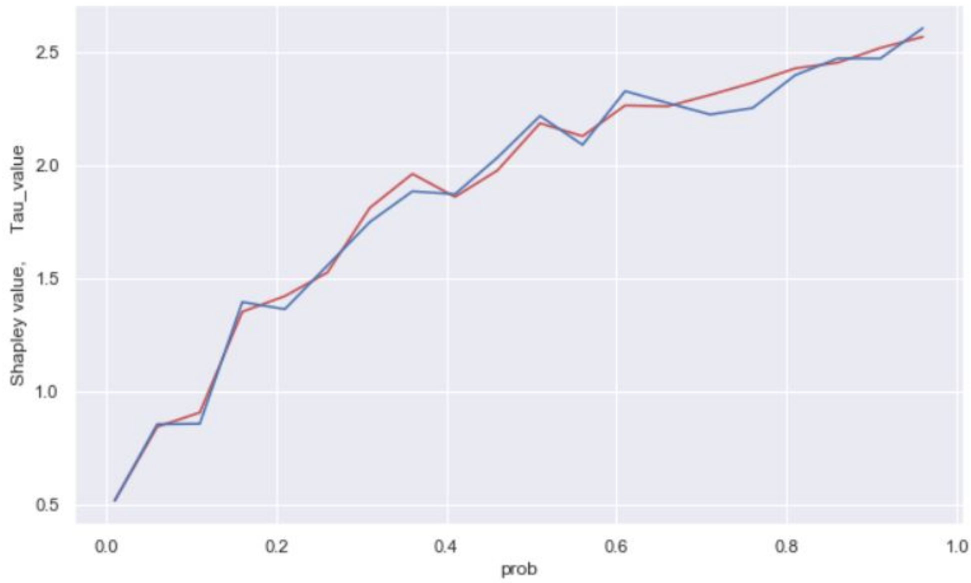

Рис. 14. Зависимость среднего выигрыша игрока 7 от вероятности создания связи в графе для γ-характеристической функции при построении дележей: вектор Шепли и τ-вектор.

Исследуем выигрыш фиксированного игрока для разного числа его соседей при фиксированных вероятности создания связи и уровне издержек. Сначала для каждого графа вычисляем V_α и V_γ для всех возможных коалиций, строим дележи вектор Шепли и τ-вектор. Далее фиксируем первого игрока, и рассматриваем его выигрыш полученный после процедуры дележа в зависимости от количества у него соседей в графе. Моделирование выполнялось со следующими параметрами:

- $|N| = 10$
- $c = 0.3$
- $p = 0.5$

- $b(\cdot) = \ln(e+1)$
- Число построенных случайных графов $= 50$

Для начала рассмотрим получившейся график для α-характеристической функции, где средние значение выигрыша игрока 1 при векторе Шепли изображено красным, а τ – синим (Рис. 15). Из-за параметров моделирования графов, а именно, вероятности создания связи $= 0.5$, среди 50 случайных графов не нашлось таких, в которых игрок 1 был бы изолирован, или имел бы меньше трех соседей. Можно заметить точки, в которых увеличение числа соседей уменьшает средний выигрыш игрока, хоть в целом с увеличением числа соседей, игрок может ожидать больший выигрыш (особенно стабильно выглядит в обоих дележах отрезок от 4 до 7 соседей), существуют и исключения, например для τ-вектора значение ожидаемого выигрыша упало при росте игроков с 3 до 4. Интересно заметить, что построенный дележ с помощью вектора Шепли дает больший средний выигрыш игроку 1 при любом количестве соседей, кроме случая с тремя соседями.

Для γ-характеристической функции получили следующий график (Рис. 16), где средние значения выигрыша игрока 1 при дележе вектором Шепли изображены красным, а при τ – синим. Результат получился иной: τ-вектор дает не меньший средний выигрыш для первого игрока при любом числе соседей, кроме случая 9 соседей. Отметим также, что для обеих характеристических функций и для обоих методов построения дележа, при крайних значениях числа соседей дележи ведут себя менее стабильно, тогда как при наиболее вероятных случаях числа соседей (согласно формуле (50)), дележи почти совпадают.

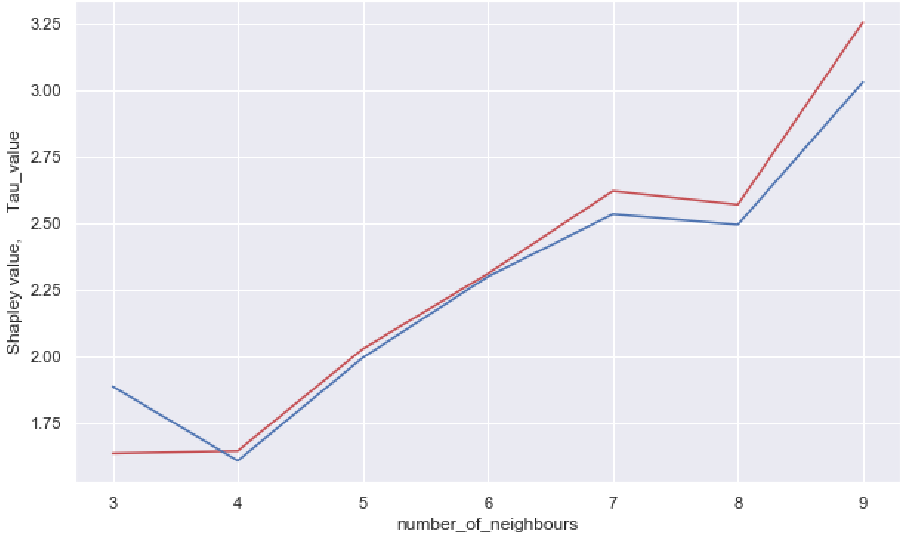

Рис. 15. Зависимость среднего выигрыша первого игрока от количества соседей для α-характеристической функции при построении дележей: вектор Шепли и τ-вектор.

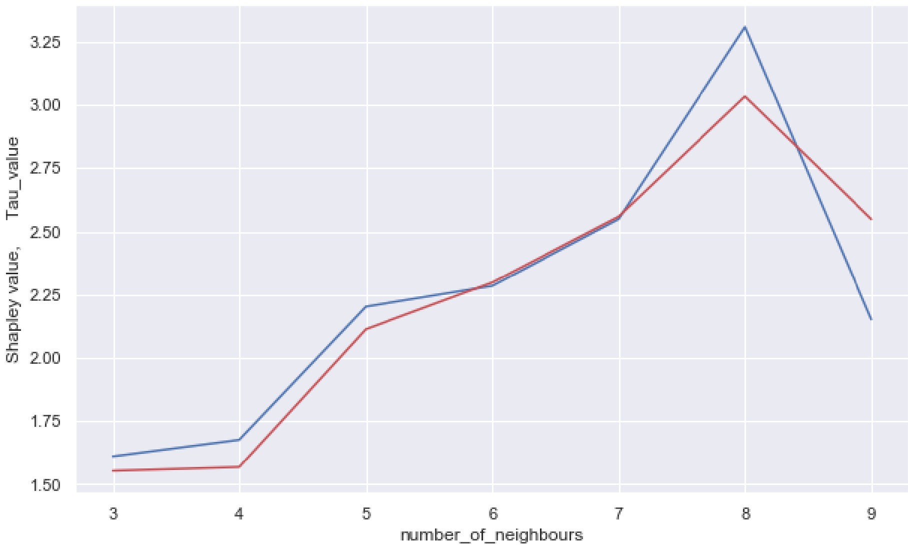

Рис. 16. Зависимость среднего выигрыша первого игрока от количества соседей для γ-характеристической функции при построении дележей: вектор Шепли и τ-вектор.

7. Заключение

В работе были исследованы два способа построения характеристической функции для модели распределения общественных благ. Для каждой из них были рассмотрены два способа построения дележа: вектор Шепли и τ-вектор.

При рассмотрении примера на фиксированном графе с числом игроков равным девяти, были замечены следующие, неочевидные результаты: некоторые игроки, сами не затрачивающие какие-либо усилия в гранд-коалиции, но являющиеся соседями нескольким игрокам, эти усилия прилагающими, получают довольно крупную долю в построенных дележах. Таких игроков можно представить как посредников, получающих общественные блага из разных источников. Как пример из реальной жизни можно представить таких игроков-посредников, как редакцию научного журнала, куда учёные (в данном случае, игроки, прилагающие усилия в гранд-коалиции) присылают свои работы, и хоть сами редакторы научного журнала не прилагали усилия для написания работ, сам факт их участия в коалиции приносит большую пользу коалиции и увеличивает её выигрыш.

Была исследована и применена модель построения случайного графа Эрдёша – Реньи $G(n, p)$. Был произведен численный анализ для исследования разных зависимостей среднего значения выигрыша коалиции и игроков при разных параметрах. Эмпирическим путем была показана монотонность среднего выигрыша коалиции по вероятности создания связи в графе. Меняя уровень издержек, также удалось наблюдать монотонность по этому параметру для среднего выигрыша коалиции при обеих характеристических функциях. Была показана монотонность среднего и медианы выигрышей коалиции относительно размера коалиции для двух рассмотренных способов построения характеристической функции. Также был изучен средний выигрыш игрока после дележа методами вектора Шепли и τ-вектора в зависимости от вероятности создания связи в графе и количества соседей игрока.

При сравнении стандартного отклонения выигрыша коалиции в зависимости от её размера для α-характеристической функции и γ-характеристической функции, было обнаружено, что при малом числе игроков в коалиции (в рассмотренном примере игры десяти игроков, при размере коалиции меньше пяти игроков) стандартное отклонение α-характеристической функции выше, чем для γ-характеристической функции, но для коалиций, размером 5 и больше, ситуация противоположная.

Список литературы

1. Громова Е. В., Петросян Л. А. Об одном способе построения характеристической функции в кооперативных дифференциальных играх // Математическая Теория Игр и ее Приложения, т. 7, в. 4, с. 19–39.

2. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е. В. Теория игр: учебник — 2-е изд., перераб. и доп. — СПБ.:БХВ-Петербург, 2012 — 432 с.

3. Татт У. Теория графов. – Рипол Классик, 1988.

4. Bramoullé Y, Kranton R Public goods in networks // Journal of Economic Theory 135 P. 478–494, 2007.

5. Chander P., Tulkens H. The Core of an Economy with Multilateral Environmental Externalities P. 153-175, 2006.

6. Colin B., Shubhayan S. Triggers for cooperative behavior in the thermodynamic limit: A case study in Public goods game // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, v-29 n-5, 2019.

7. Driessen TS., Tijs S., The τ-Value, The Core and Semiconvex Games // International Journal of Game Theory Vol. 14 lssue 4 P. 229-248.

8. Erdös P., Rényi A. On random graphs // Publicationes mathematicae, 6(26), 290-297, 1959.

9. Jackson, M. Social and Economic Networks. // Princeton: Princeton University Press, 2008.

10. Li Y., Sun H., Han W., Xiong W. Evolutionary public goods game on the birandom geometric graph // Physical Review E. T. 101. N. 4. 2020.

11. Neumann Von J., Morgenstern O. Theory of games and economic behavior //Princeton University Prress, Princeton. – 1944.

12. Newman M. Networks // Oxford University Press, 2018.

13. Petrosyan L. A., Zaccour G. Cooperative Differential Games with Transferable Payoffs // Handbook of Dynamic Game Theory 2018 P. 595-632.

14. Petrosjan L. A., Zaccour G. Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction // Journal of Economic Dynamics and Control. 2003. Vol. 27. N. 3. P. 381–398.

15. Rajan R. Endogenous Coalition Formation in Cooperative Oligopolies // International Economic Review. 1989. Vol. 30. N. 4. P. 863–876.

16. Shapley L. S. A value for n-person games // Contributions to the Theory of Games, II. Princeton University Press. 1953. P. 307–317.