Санкт-Петербургский государственный университет

Леонов Даниил Олегович

Выпускная квалификационная работа

Ромбовидные иерархические игры

Уровень образования: магистратура
Направление: 01.04.02 «Процессы управления»
Основная образовательная программа: ВМ.5504
«Исследование операций и системный анализ»

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор кафедры МТИСР
Петросян Леон Аганесович

Санкт-Петербург
2020

Содержание

Введение

Иерархические игры являются важнейшим подклассом многошаговых неантагонистических игр [9]. С помощью иерархических игр моделируют конфликтно-управляемые системы, имеющие сложную иерархическую структуру. Иерархическая игра задается последовательностью уровней, каждый из которых имеет определенный приоритет. Иерархические игры принято классифицировать по количеству уровней иерархии и характеру вертикальных связей.

В 1 главе работы рассматривается трехуровневая одношаговая иерархическая игра $n + m + k$ лиц. Эта игра является обобщением простой ромбовидной структуры управления. Для трехуровневой иерархической игры происходит построение двух различных ситуаций равновесия по Нэшу методом, обобщающим результаты, опубликованные ранее. Одна из ситуаций равновесия по Нэшу строится с условием введения стратегий «угроз» со стороны игроков нижнего уровня иерархии.

Во 2 главе работы описывается бесконечно повторяющаяся игра, этапными играми которой являются трехуровневые иерархические игры, рассмотренные в 1 главе работы. Для бесконечно повторяющейся игры построены различные ситуации равновесия по Нэшу, в том числе с условием введения стратегий «угроз» со стороны игроков нижних уровней и стратегий «наказаний» со стороны игроков верхних уровней.

В 3 главе работы описывается кооперативный вариант взаимодействия игроков в бесконечно повторяющейся игре, рассмотренной во 2 главе работы. Для такого варианта игры описывается процесс вычисления цены анархии и цены устойчивости.

Постановка задачи

Целью данной работы является анализ иерархических игр сложной ромбовидной структуры, которые являются важным подклассом неантагонистических игр.

Для достижения поставленной цели необходимо:

1. исследовать иерархические игры сложной ромбовидной структуры. В данном виде игры предполагается n игроков первого уровня, m игроков второго уровня и k игроков третьего уровня иерархии;
2. методом, обобщающим результаты, опубликованные ранее ([1], [8]), найти ситуацию равновесия в игре сложной ромбовидной структуры ([3]) и построить равновесие другого типа, которое основано на введении стратегий угроз со стороны игроков, находящихся на нижнем уровне иерархии [2], [4], [5];
3. рассмотреть бесконечно повторяющиеся игры, этапными играми которой будут

являться трехуровневые иерархические игры, и исследовать для них подобные вопросы;

4. для бесконечно повторяющейся игры найти другую ситуацию равновесия по Нэшу, основанную на введении стратегий наказаний со стороны игроков, находящихся на верхних уровнях иерархии;
5. для бесконечно повторяющейся игры построить наилучшее и наихудшее равновесия по Нэшу, то есть те, ситуации, которые будут давать максимально и минимально возможные выигрыши в рассматриваемой игре;
6. на основе найденных в предыдущем пункте ситуаций равновесия по Нэшу определить цену анархии и цену устойчивости [6], [7].

Обзор литературы

Иерархические игры являются важным подклассом неантагонистических игр. В связи с этим, в первую очередь, необходимо проанализировать классическую литературу по теории неантагонистических игр, такую как [1], [3], [6], [9].

Во второй главе работы рассматриваемая задача переходит в раздел бесконечно повторяющихся игр. Для того чтобы понять основные принципы таких игр, можно обратиться к книге Петросяна Л. А., Зенкевича Н. А. и Шевкопляс Е. В. [1], а также к источникам [2], [5].

Метод построения равновесия по Нэшу в иерархической игре вида «ромб» рассмотрен в [1], а также Петросяном Л. А. и Панкратовой Я. Б. в [8].

В ходе доказательства проигрыша игрока, желавшего получить больший выигрыш путем отклонения от приписанной ему стратегии, в бесконечно повторяющейся игре с применением стратегий наказания использована идея доказательства теоремы Фолька, которое можно найти в [4], [5].

Также, для определения цены анархии и устойчивости в кооперативном варианте бесконечно повторяющейся игры необходимо обратиться к работам [7], [8].

Глава 1. Иерархическая трехуровневая игра $\boldsymbol{n+m+k}$ лиц

В первой главе работы рассматривается трехуровневая иерархическая игра с $n+m+k$ игроками. Где игроки $A_1, \dots, A_n$ находятся на первом или верхнем уровне иерархии. На втором уровне иерархии расположены игроки $B_1, \dots, B_m$, а на нижнем (третьем) уровне иерархии — игроки $C_1, \dots, C_\text{k}$. Стоит отметить, что каждый из игроков первого или второго уровней иерархии оказывает управление на некоторых игроков следующего уровня. Структура рассматриваемой в дальнейшем игры представлена на рис. 1

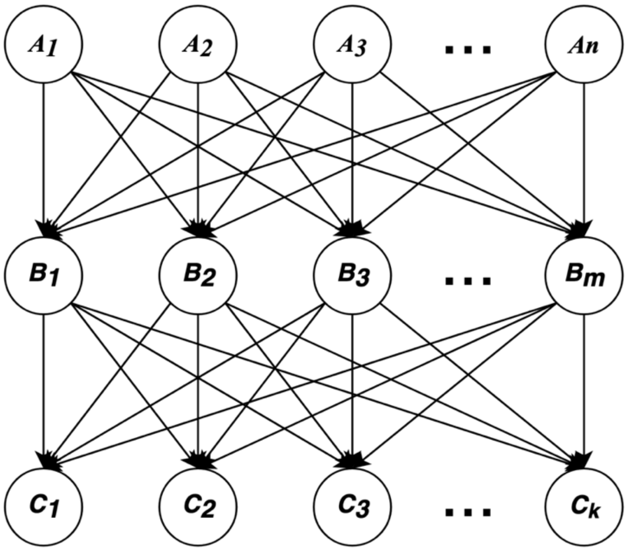

Рис. 1

Выбор управлений игроков второго уровня иерархии, то есть игроков $B_1, \dots, B_m$, зависит только от управлений игроков $A_1, \dots, A_n$ верхнего уровня. Управления игроков двойного подчинения, или игроков третьего уровня $C_1, \dots, C_{\mathrm{k}}$, зависит уже только от выбранных управлений игроков $B_1, \dots, B_m$ второго уровня.

Необходимо отметить, что на рис. 1 изображен частный случай такой игры. Каждый из игроков первого или второго уровней иерархии оказывает управление на игроков следующего уровня. На рис. 1 предполагается, что каждый игрок первых двух уровней оказывает управление на всех игроков нижнего для него уровня иерархии.

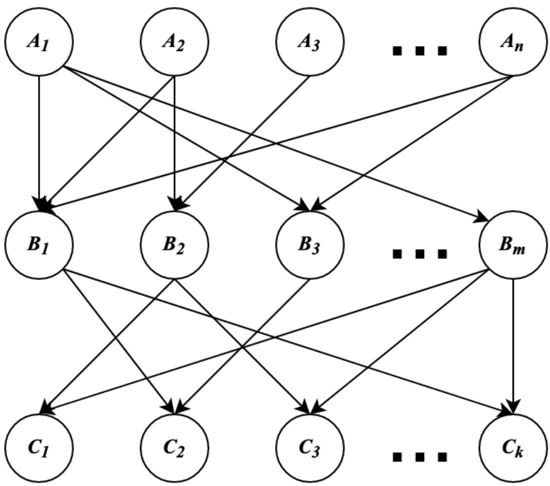

Рис. 2

Полученные в дальнейшем результаты также справедливы на случай выборочного управления. На рис. 2 приведен пример такого случая.

1.1 Описание хода игры

1 шаг. На первом шаге игры одновременно и независимо друг от друга ходят n игроков первого уровня. Каждый из них выбирает элемент (стратегию) из своего множества стратегий U_i:

$$u_i = (u_{i1}, \dots, u_{im}), \qquad u_i \in U_i, \qquad i = 1, \dots, n$$

Элементы u_{ij}, где $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$ ограничивают возможности выборов игроков второго уровня иерархии. Другими словами, множества стратегий игроков второго уровня зависят от выборов игроков первого. Также на первом шаге игры формируются множества стратегий игроков второго уровня. Обозначим множество стратегий игрока второго уровня как $B_j\left(u_{1j}, u_{2j}, \dots, u_{nj}\right)$, $j = 1, \dots, m$.

2 шаг. На следующем шаге игры одновременно и независимо друг от друга уже ходят m игроков второго уровня. Каждый из них выбирает элемент управления игроками третьего уровня. Элемент или стратегию игрок второго уровня выбирает из сформированного

множества стратегий на 1 шаге игры игроками $A_1, \dots, A_n$. Обозначим элементы этого множества следующим образом:

$$w_j = \left(w_{j1}, w_{j2}, \dots, w_{jk}\right) \in B_j\left(u_{1j}, u_{2j}, \dots, u_{nj}\right) j = 1, \dots, m$$

Элементы множеств $w_j \in B_j\left(u_{1j}, u_{2j}, \dots, u_{nj}\right),\ j = 1, \dots, m$ представляет собой k –мерный вектор, каждый элемент которого показывает выбранную стратегию управления над игроком третьего уровня и задает ограничения на множество выборов игрокам нижнего уровня.

Также на этом шаге формируется множество стратегий собственного управления для каждого из игроков третьего уровня, которое будет обозначаться как: $C_l(w_{1l}, w_{2l}, \dots, w_{ml}),\ l = 1, \dots, k$.

3 шаг. На последнем шаге игроки $C_1, \dots, C_\mathrm{k}$ выбирают стратегии собственного управления исходя из управлений, выбранных игроками второго уровня. Таким образом, для каждого игрока третьего уровня $C_l,\ l = 1, \dots, k$, множество его управлений есть функция от параметров $w_{1l}, w_{2l}, \dots, w_{ml}$, которые уже сформировались на 2 шаге игры. Таким образом, игрок C_l выбирает следующую стратегию:

$$v_l \in C_l(w_{1l}, w_{2l}, \dots, w_{ml}),\ l = 1, \dots, k.$$

После описания хода игры необходимо задать функции выигрышей для всех игроков. Сначала определим функции выигрышей для игроков первых двух уровней. В игре предполагается, что функции их выигрышей зависят только от выбора стратегий собственного управления всех игроков третьего уровня. Обозначим выигрыши игроков первых двух уровней следующим образом:

$$l_p(v_1, v_2, \dots, v_m), \text{где } l_p(v_1, v_2, \dots, v_m) \geq 0,$$

$$p = 1, \dots, m + n.$$

В свою очередь, выигрыши игроков нижнего уровня зависят только от их выбранной стратегии собственного управления. Тогда их выигрыши выглядят следующим образом:

$$l_p(v_l), \qquad \text{где } l_p(v_l) \geq 0,$$

$$l = 1, \dots, k, p = m + n + 1, \dots, m + n + k.$$

Такую иерархическую трехуровневую игру можно представить, как бескоалиционную игру $m + n + k$ лиц в нормальной форме.

Будем считать, что:

- элементы $u_i = (u_{i1}, \dots, u_{im})$, $u_i \in U_i$, $i = 1, \dots, n$ — стратегии игрока A_i, то есть игроков первого уровня иерархии;
- элементы $w_j = (w_{j1}, w_{j2}, w_{j3} \dots, w_{jk}) \in B_j(u_{1j}, u_{2j}, \dots, u_{nj}), j = 1, \dots, m$ — стратегии игрока B_j, то есть игроков второго уровня иерархии;
- элементы $v_l \in C_l(w_{1l}, w_{2l}, \dots, w_{ml})$, $l = 1, \dots, k$ — стратегии игрока C_l, то есть игроков нижнего уровня иерархии.

Для корректного поиска ситуаций равновесия по Нэшу необходимо выдвинуть два дополнительных условия к рассматриваемой игре:

<u>Условие 1.</u> Любой игрок третьего уровня иерархии может выбрать управление, которое дает нулевой выигрыш игрокам предыдущих уровней. Так, например, зафиксируем игрока C_i, $i = 1, \dots, k$ третьего уровня. Тогда для любого вектора управлений игроков второго уровня $(w_{1i}, w_{2i}, w_{3i} \dots, w_{mi})$, $w_{ji} \in B_j(u_{1j}, u_{2j}, \dots, u_{nj})$, $j = 1, \dots, m$ существует стратегия ${v_i}^0$ игрока $C_i, i = 1, \dots, k$ такая что:

$$l_p(v_1, \dots, v_i{}^0, \dots, v_k) = 0,\ p = 1, \dots, n + m,$$

и при этом: $l_p(v_i{}^0) = 0, p = n + m + i.$

Аналогичное условие выдвигается и для всех остальных игроков третьего уровня.

Условие 2. Игроки верхнего уровня могут выбирать такие управления, которые сузят множество возможных управлений игроков нижнего уровня до единственного элемента (стратегии), дающего верхним игрокам нулевой выигрыш. Другими словами, для всех возможных векторов управлений $u_i = (u_{i1}, \dots, u_{im}),\ u_i \in U_i,\ i = 1, \dots, n$ игроков $A_1, \dots, A_n$ и для всех игроков $B_1, \dots, B_m$ второго уровня существует стратегия $w_j{}^0(u_{1j}, u_{2j}, \dots, u_{nj}), j = 1, \dots, m$, такая что множество стратегий каждого из игроков $C_1, \dots, C_\mathrm{k}$ третьего уровня будет состоять лишь из одной стратегии $v_i{}^0$ игрока $C_i, i = 1, \dots, k$. Аналогичное условие выдвигается и для множества игроков с первого и второго уровней, то есть существует такое управление $u_1{}^0, \dots, u_n{}^0$, что множества $B_j(u_{1j}{}^0, \dots, u_{nj}{}^0)$ будут содержать только один элемент $w_j{}^0, j = 1, \dots, m.$

Далее, полагая выигрыши игроков следующими:

для $i = 1, \dots, n + m$:

$$K_i\big(u_1, \dots, u_n, w_1(\cdot), \dots, w_m(\cdot), v_1(\cdot), \dots, v_k(\cdot)\big) =$$
$$= l_i\Big(v_1\big(w_{11}(u_{11}, \dots, u_{n1}), \dots, w_{m1}(u_{1m}, \dots, u_{nm})\big), \dots, v_k(w_{1k}, \dots, w_{mk})\Big)$$

для $i = n + m + 1, \dots, n + m + k$:

$$K_i\big(u_1, \dots, u_n, w_1(\cdot), \dots, w_m(\cdot), v_i(\cdot)\big) =$$

$$= l_i(v_i(w_{1i}(u_{11}, \dots, u_{n1}), \dots, w_{mi}(u_{1m}, \dots, u_{nm})))$$

можно получить нормальную форму трехуровневой иерархической игры Г:

$$\Gamma\ = \{n + m + k; U_1, \dots, U_n, B_1, \dots, B_m, C_1, \dots, C_k;\ K_i\},$$

где $i = 1, \dots, n + m + k$

Следующим важным этапом является поиск ситуации равновесия по Нэшу в игре Г. Для этого необходимо выполнить ряд дополнительных построений. Поиск ситуации равновесия будет происходить в несколько этапов.

1.2 Поиск ситуации равновесия по Нэшу

1 этап. Зафиксируем игрока C_1 третьего уровня иерархии. Далее, для всех возможных совокупностей управлений игроков второго уровня $(w_{11}, w_{21}, \dots, w_{m1})$,

которые оказывают управление на игрока C_1, необходимо найти решение параметрической экстремальной задачи:

$$\max_{v_1 \in C_1(w_{11}, w_{21}, \dots, w_{m1})} l_{n+m+1}(v_1) = \\ = l_{n+m+1}\big(v_1{}^*(w_{11}, w_{21}, \dots, w_{m1})\big) \tag{1.1}$$

Таким образом для всех возможных совокупностей управлений игроков второго уровня $(w_{11}, w_{21}, \dots, w_{m1})$ игрок C_1 будет выбирать стратегию собственного управления $v_1{}^*$, которое является решением параметрической экстремальной задачи (1.1).

Теперь необходимо решить аналогичные параметрические экстремальные задачи для всех игроков третьего уровня. Для произвольного игрока C_t, $t = n + m, \dots, n + m + k$ она выглядит следующим образом:

$$\max_{v_t \in C_t(w_{1t}, w_{2t}, \dots, w_{mt})} l_{n+m+t}(v_t) = \\ = l_{n+m+t}\big(v_t{}^*(w_{1t}, w_{2t}, \dots, w_{mt})\big) \tag{1.2}$$

Таким образом для всех возможных совокупностей управлений игроков второго уровня $(w_{1t}, w_{2t}, \dots, w_{mt})$

игрок C_t будет выбирать стратегию собственного управления v_t^*, которое является решением параметрической экстремальной задачи (2.1). Использовав именно эту стратегию, игрок C_t получает максимальный выигрыш.

В результате 1 этапа поиска ситуации равновесия по Нэшу была получена совокупность выбираемых стратегий собственного управления игроками третьего уровня иерархии для всех возможных стратегий (управлений) игроков второго уровня:

$$v_1^*(\cdot), v_2^*(\cdot), \dots, v_k^*(\cdot)$$

<u>2 этап.</u> Следующим этапом необходимо построить вспомогательную параметрическую (с n параметрами) неантагонистическую игру Γ'. Параметрами в данной игре являются стратегии игроков верхнего уровня иерархии, то есть:

$$u_1(u_{11}, \dots, u_{1m}), u_2(u_{21}, \dots, u_{2m}), \dots, u_n(u_{n1}, \dots, u_{nm})$$

Таким образом, нормальная форма построенной вспомогательной игры выглядит следующим образом:

$$\Gamma'(u_1, \dots, u_n) =$$

$$= \{m; B_1(u_{11}, \dots, u_{n1}), \dots, B_m(u_{1m}, \dots, u_{nm}); l_i\}$$

где $l_i =$

$$= l_i\big(v_1{}^*(w_{11}, \dots, w_{m1}), \dots, v_k{}^*(w_{1k}, w_{2k}, \dots, w_{mk})\big),$$

$$i = n+1, \dots, n+m$$

Необходимо отметить, что $v_1{}^*(\cdot), v_2{}^*(\cdot), \dots, v_k{}^*(\cdot)$ — стратегии собственного управления игроков $C_1, \dots, C_{\text{k}}$, найденные на 1 этапе.

Стратегии игрока B_i в $\Gamma'(u_1, \dots, u_n)$ — элементы $w_i(w_{i1}, \dots, w_{ik}) \in B_i(u_{1i}, \dots, u_{ni})$, $i = n+1, \dots, n+m$.

Далее, предположим, что во вспомогательной игре $\Gamma'(u_1, \dots, u_n)$ существует ситуация равновесия по Нэшу в чистых стратегиях, которую будем обозначать:

$$(w_1{}^*(u_{11}, \dots, u_{n1}), w_2{}^*(u_{12}, \dots, u_{n2}), \dots, w_m{}^*(u_{1m}, \dots, u_{nm}))$$

Заметим, что элементы $w_i{}^*(\cdot) \in B_i(u_{1i}, \dots, u_{ni})$ являются функцией параметров $(u_{1i}, \dots, u_{ni}), i = n + 1, \dots, n+m$.

<u>3 этап.</u> Перейдем к последнему этапу поиска ситуации равновесия по Нэшу в игре Г. Рассмотрим вспомогательную непараметрическую игру n-лиц, игроками которой выступают $A_1, \dots, A_n$ со следующими множествами стратегий $U_1, U_2, \dots, U_n$ соответственно.

Функции выигрышей игроков будут определяться следующим образом:

$$l_i =$$

$$= l_i \Big({v_1}^*\big({w_{11}}^*(u_{11}, \dots, u_{n1}), \dots, {w_{m1}}^*(u_{1m}, \dots, u_{nm})\big), \dots ,$$

$$\dots, {v_k}^*({w_{1k}}^*(u_{11}, \dots, u_{n1}), \dots, {w_{mk}}^*(u_{1m}, \dots, u_{nm}))\Big),$$

$$i = 1, \dots, n$$

Теперь можно получить нормальную форму игры Γ'':

$$\Gamma''\{n; U_1, U_2, \dots, U_n; l_i\},\ \ i = 1, \dots, n \quad (1.3)$$

Далее, как и на предыдущем этапе поиска предположим, что в игре Γ'' существует ситуация равновесия по Нэшу, которую будем обозначать:

$$({u_1}^*(u_{11}, \dots, u_{1m}), \dots, {u_n}^*(u_{n1}, \dots, u_{nm}))$$

<u>Вывод.</u> В результате проделанных этапов мы получили следующую совокупность:

$$\big({u_1}^*, \dots, {u_n}^*, {w_1}^*(\cdot), \dots, {w_m}^*(\cdot), {v_1}^*(\cdot), \dots, {v_k}^*(\cdot)\big)$$

Далее необходимо доказать, что она действительно является ситуацией равновесия в игре Г.

Лемма 1. Полученная совокупность:

$$\left(u_1^*, \dots, u_n^*, w_1^*(\cdot), \dots, w_m^*(\cdot), v_1^*(\cdot), \dots, v_k^*(\cdot)\right)$$

является ситуацией равновесия по Нэшу в игре Г.

Доказательство. Процесс доказательства заключается в последовательном рассмотрении игроков трех уровней иерархии. Для этих игроков, используя определение ситуации равновесия по Нэшу, доказывается, что выбранная игроками совокупность стратегий является ситуацией равновесия по Нэшу.

Совокупность $u_1^*(u_{11}^*, \dots, u_{1m}^*), \dots, u_n^*(u_{n1}^*, \dots, u_{nm}^*)$, образует ситуацию равновесия по Нэшу во вспомогательной игре Γ''. Зафиксируем игрока A_1 первого уровня. Для любой стратегии u_1 и $u_1^* \in U_1$ этого игрока выполняются соотношения:

$$K_1\left(u_1^*, \dots, u_n^*, w_1^*(\cdot), \dots, w_m^*(\cdot)\,, v_1^*(\cdot), \dots, v_k^*(\cdot)\right) =$$

$$= l_1(v_1^*\left(w_{11}^*(u_{11}^*, \dots, u_{n1}^*), \dots, w_{m1}^*(u_{1m}^*, \dots, u_{nm}^*)\right), \dots,$$

$$, \dots, v_k^*(w_{1k}^*(u_{11}^*, \dots, u_{n1}^*), \dots, w_{mk}^*(u_{1m}^*, \dots, u_{nm}^*))) \geq$$

$$\geq l_1(v_1^*(w_{11}^*(u_{11}, \dots, u_{n1}^*), \dots, w_{m1}^*(u_{1m}, \dots, u_{nm}^*)), \dots,$$

$$, \dots, v_k^*(w_{1k}^*, \dots, w_{mk}^*))) =$$

$$= K_1\big(u_1, u_2^*, \dots, u_n^*, w_1^*(\cdot), \dots, w_m^*(\cdot), v_1^*(\cdot), \dots, v_k^*(\cdot)\big)$$

Аналогичное неравенство выполняется для любого игрока первого уровня, то есть для $i = 2, \dots, n$.

Далее зафиксируем игрока B_1 второго уровня. Поскольку совокупность:

$$(w_1^*(u_{11}^*, \dots, u_{n1}^*), w_2^*(u_{12}^*, \dots, u_{n2}^*), \dots, w_m^*(u_{1m}^*, \dots, u_{nm}^*))$$

образует ситуацию равновесия по Нэшу во вспомогательной игре $\Gamma'(u_1^*, \dots, u_n^*)$, то для любой функции $w_1(\cdot) \in B_1$, $w_1(u_{11}^*, \dots, u_{n1}^*) = \widetilde{w}_1 \in B_1(u_{11}^*, \dots, u_{n1}^*)$ выполняются соотношения:

$$K_{n+1}\big(u_1^*, \dots, u_n^*, w_1^*(\cdot), \dots, w_m^*(\cdot), v_1^*(\cdot), \dots, v_k^*(\cdot)\big) =$$

$$= l_{n+1}(v_1^*\big(w_{11}^*(u_{11}, \dots, u_{n1}), \dots, w_{m1}^*(u_{1m}, \dots, u_{nm})\big), \dots,$$

$$, \dots, v_k^*(w_{1k}^*(u_{11}, \dots, u_{n1}), \dots, w_{mk}^*(u_{1m}, \dots, u_{nm}))) \geq$$

$$\geq l_{n+1}(v_1^*(\widetilde{w}_{11}(u_{11}^*, \dots, u_{n1}^*), \dots, w_{m1}^*(u_{1m}^*, \dots, u_{nm}^*)), \dots,$$

$$, \dots, v_k^*(\widetilde{w}_{1k}, \dots, w_{mk}^*))) =$$

$$= K_{n+1}\big(u_1^*, \dots, u_n^*, w_1(\cdot), \dots, w_m^*(\cdot), v_1^*(\cdot), \dots, v_k^*(\cdot)\big)$$

Аналогичное неравенство будет справедливо для всех остальных игроков второго уровня $B_2, \dots, B_m$.

Функции $v_1^*, v_2^*, \dots, v_k^*$ определялись в игре Г следующим образом:

$$\max_{v_t \in C_t(w_{1t}, w_{2t}, \dots, w_{mt})} l_{n+m+t}(v_t) =$$

$$= l_{n+m+t}\left(v_t^*(w_{1t}, w_{2t}, \dots, w_{mt})\right)$$

$$\text{для } t = 1, \dots, k$$

Зафиксируем игрока C_1 третьего уровня иерархии и получим следующие неравенства:

$$K_{n+m+1}\left(u_1^*, \dots, u_n^*, w_1^*(\cdot), \dots, w_m^*(\cdot), v_1^*(\cdot)\right) =$$

$$= l_{n+m+1}\left(v_1^*\left(w_{11}^*(u_{11}^*, \dots, u_{n1}^*), \dots, w_{m1}^*(u_{1m}^*, \dots, u_{nm}^*)\right)\right) =$$

$$= \max_{v_1 \in C_1(w_{11}^*(u_{11}^*, \dots, u_{n1}^*), \dots, w_{m1}^*)} l_{n+m+1}(v_1) \geq l_{n+m+1}(\tilde{v}_1) \geq$$

$$\geq K_{n+m+1}\left(u_1^*, \dots, u_n^*, w_1^*(\cdot), \dots, w_m^*(\cdot), v_1(\cdot)\right)$$

для любой функции $v_1(\cdot) \in C_1$:

$$v_1\left(w_{11}^*(u_{11}^*, \dots, u_{n1}^*), \dots, w_{m1}^*(u_{1m}^*, \dots, u_{nm}^*)\right) =$$

$$= \tilde{v}_1 \in C_1(w_{11}^*(u_{11}^*, \dots, u_{n1}^*), \dots, w_{m1}^*(u_{1m}^*, \dots, u_{nm}^*))$$

Аналогичное неравенство будет справедливо для всех остальных игроков третьего уровня $C_2, \dots, C_k$.

Лемма доказана.

1.3 Построение другого равновесия по Нэшу

Далее описывается процесс построения равновесие по Нэшу другого типа в игре Г. Основано такое равновесие на введении стратегий угроз со стороны игроков, находящихся на нижнем уровне иерархии, то есть $C_1, \dots, C_k$. Зафиксируем игрока C_i, $i = 1, \dots, k$. Этот игрок третьего уровня может выбрать стратегию «угрозы», которая заключается в следующем: *Если один или несколько игроков второго уровня (то есть кто-то из $B_1, \dots, B_m$) отклоняются от определенной ранее стратегии то игрок C_i может выбрать альтернативную стратегию, которая даст нулевой выигрыш игрокам $B_1, \dots, B_m$ второго уровня.*

Пусть $\overline{w}_i = (\overline{w}_{1i}(u_{11}, \dots, u_{n1}), \dots, \overline{w}_{mi}(u_{1m}, \dots, u_{nm}))$ — фиксированный вектор выбранных управлений игроков второго уровня иерархии, оказываемые на игрока C_i. Тогда для игрока C_i справедливо следующее:

$$\bar{v}_i(w_i) = \begin{cases} {v_i}^*(\overline{w}_i), w_i = \overline{w}_i; \\ {v_i}^0, w_i \neq \overline{w}_i. \end{cases}$$

где ${v_i}^*(\overline{w}_i)$ является решением параметрической экстремальной задачи (1.1):

$$\max_{v_i \in C_i(w_{1i}, w_{2i}, \dots, w_{mi})} l_{n+m+i}(v_i) = l_{n+m+i}(v_i{}^*(\overline{w}_{1i}, \dots, \overline{w}_{mi}))$$

Игрок C_i в начале игры может объявить, что по ходу игры будет использовать стратегию $\bar{v}_i(w_i)$. Таким образом, с помощью некой «угрозы» игроки $B_1, \dots, B_m$ будут вынуждены использовать вектор $\overline{w}_i = (\overline{w}_{1i}(u_{11}, \dots, u_{n1}), \dots, \overline{w}_{mi}(u_{1m}, \dots, u_{nm}))$, потому что в другом случае они могут получить нулевой выигрыш.

<u>Лемма 2.</u> Набор стратегий

$$\left(u_1{}^*, \dots, u_n{}^*, \overline{w}_1, \dots, \overline{w}_m, \bar{v}_1(\overline{w}_{11}, \dots, \overline{w}_{m1}), \dots, \bar{v}_k(\overline{w}_{1k}, \dots, \overline{w}_{mk})\right)$$

в которой вектор $(u_1{}^*, \dots, u_n{}^*)$ является ситуацией равновесия по Нэшу во вспомогательной непараметрической игре Γ'' (1.3), является ситуацией равновесия по Нэшу в игре Г.

<u>*Доказательство.*</u> Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 1. Единственное отличие заключается в определении функции выигрышей игроков третьего $C_1, \dots, C_k$. Игрокам второго уровня необходимо придерживаться обговоренной ранее стратегии $\overline{w} = (\overline{w}_1(u_{11}, \dots, u_{n1}), \dots, \overline{w}_m(u_{1m}, \dots, u_{nm}))$. Тогда любой игрок третьего уровня будет выбирать

управление согласно решению параметрической экстремальной задачи (1.1), а именно $v_i^*(\bar{w}_i)$.

Лемма доказана.

Стоит отметить, что помимо игроков третьего уровня, использовать стратегии угроз могут и игроки $B_1, \dots, B_m$ по отношению к игрокам $A_1, \dots, A_n$ верхнего уровня иерархии. Пусть $\bar{u}_i = (\bar{u}_{1i}, \dots, \bar{u}_{ni})$ — фиксированный вектор выбранных управлений игроков второго уровня иерархии, оказываемые на игрока B_i. Тогда для B_i справедливо следующее:

$$\bar{w}_i(\bar{u}_{1i}, \dots, \bar{u}_{ni}) = \begin{cases} w_i^*(\bar{u}_{1i}, \dots, \bar{u}_{ni}), u_i = \bar{u}_i; \\ w_i^0, u_i \neq \bar{u}_i. \end{cases}$$

где $w_i^*(\bar{u}_{1i}, \dots, \bar{u}_{ni})$ является стратегией $i-$го игрока в ситуации равновесия по Нэшу во вспомогательной игре Γ'.

Можно заметить, что если какой то из игроков $A_1, \dots, A_n$ отклонится от $\bar{u}_i = (\bar{u}_{1i}, \dots, \bar{u}_{ni})$, то игрок второго уровня тоже отклонится от обговоренного ранее собственного управления, что приведет к тому, что игроки третьего уровня будут также выбирать альтернативное управление $v_i = v_i^0$.

Глава 2. Повторяющаяся иерархическая игра $\boldsymbol{n+m+k}$ лиц

2.1 Бесконечно повторяющаяся игра

Далее рассматривается бесконечно повторяющаяся игра G с конечными играми Г на каждом этапе [2]. Игра Г — рассмотренная ранее иерархическая трехуровневая игра $n+m+k$ лиц.

На некотором этапе l бесконечной повторяющейся игры вектор стратегий игроков будет выглядеть следующим образом:

$$({u_1}^l, \dots, {u_n}^l, {w_1}^l({u_{11}}^l, \dots, {u_{n1}}^l), \dots, {w_m}^l({u_{1m}}^l, \dots, {u_{nm}}^l), \dots$$

$$\dots, {v_1}^l\Big({w_{11}}^l({u_{11}}^l, \dots, {u_{n1}}^l), \dots, {w_{m1}}^l({u_{1m}}^l, \dots, {u_{nm}}^l)\Big), \dots$$

$$\dots, {v_k}^l\Big({w_{1k}}^l({u_{11}}^l, \dots, {u_{n1}}^l), \dots, {w_{mk}}^l({u_{1m}}^l, \dots, {u_{nm}}^l)\Big))$$

Теперь необходимо определить выигрыши всех игроков для произвольного этапа игры. Для игроков первого уровня, то есть для $A_1, \dots, A_n$ они выглядят следующим образом:

$$H_i^{\infty} = \sum_{l=1}^{\infty} \delta^{l-1}\, l_i\big(v_1{}^l\big(w_{11}{}^l, \dots, w_{m1}{}^l\big), \dots, v_k{}^l(w_{1k}{}^l, \dots, w_{mk}{}^l)\big),$$

$$i = 1, \dots, n$$

Для игроков второго уровня, то есть для $B_1, \dots, B_m$ они выглядят так:

$$H_i^{\infty} = \sum_{l=1}^{\infty} \delta^{l-1}\, l_i\big(v_1{}^l\big(w_{11}{}^l, \dots, w_{m1}{}^l\big), \dots, v_k{}^l(w_{1k}{}^l, \dots, w_{mk}{}^l)\big),$$

$$i = n + 1, \dots, n + m$$

Выигрыши игроков нижнего уровня, то есть игроков $C_1, \dots, C_k$, немного отличаются. Так как функции их выигрыша зависят только от их собственного выбора, то они принимают следующий вид:

$$H_i^{\infty} = \sum_{l=1}^{\infty} \delta^{l-1}\, l_i(v_i{}^l(w_{1i}{}^l(u_{11}{}^l, \dots, u_{n1}{}^l), \dots, w_{mi}{}^l(u_{1m}{}^l, \dots, u_{nm}{}^l))),$$

$$i = n + m + 1, \dots, k$$

где $\delta^{l-1} \in (0; 1)$ — общий для всех игроков дисконтный множитель, который отражает стоимость на этапе $l - 1$ единицы выигрыша следующего этапа l.

Далее обозначим вектор $\bar{u}_i = \big(u_i^1, \dots, u_i^l, \dots\big)$, где $u_i^l = (u_{i1}{}^l, \dots, u_{im}{}^l)$ и $i = 1, \dots, n$, то есть $\bar{u}_i$ есть вектор выборов игрока u_i на каждом из этапов повторяющейся игры G. Аналогично определим и следующие векторы:

$$\bar{w}_j\left(\bar{u}_{1j},\dots,\bar{u}_{nj}\right) =$$

$$= \left(w_j^1\left(u_{1j}^1,\dots,u_{nj}^1\right),\dots,w_j^l\left(u_{ij}^l,\dots,u_{nj}^l\right),\dots\right),$$

$$j = 1,\dots,m$$

$$\bar{v}_f\left(\bar{w}_{1f},\dots,\bar{w}_{mf}\right) =$$

$$= \left({v_f}^1\left(w_{1f}^1,\dots,w_{mf}^1\right),\dots,{v_f}^l\left(w_{1f}^1,\dots,w_{mf}^1\right),\dots\right),$$

$$f = 1,\dots,k$$

Таким образом, мы обозначили стратегии всех игроков бесконечно повторяющейся игры G и теперь можем определить функции выигрышей для всех игроков первых двух уровней:

$$H_i^\infty = H_i^\infty(\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_n,\bar{w}_1(\bar{u}_{11},\dots,\bar{u}_{n1}),\dots,\bar{w}_m(\bar{u}_{1m},\dots,\bar{u}_{nm}),$$

$$,\bar{v}_1(\bar{w}_{11},\dots,\bar{w}_{m1}),\dots,\bar{v}_k(\bar{w}_{1k},\dots,\bar{w}_{mk}))$$

$$i = 1,\dots,n+m$$

И для игроков нижнего уровня:

$$H_i^{\infty} = H_i^{\infty}(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n, \bar{w}_1(\bar{u}_{11}, \dots, \bar{u}_{n1}), \dots, \bar{w}_m(\bar{u}_{1m}, \dots, \bar{u}_{nm}),$$

$$, \bar{v}_i(\bar{w}_{11}, \dots, \bar{w}_{m1}))$$

$$i = n + m + 1, \dots, n + m + k$$

2.2 Равновесие по Нэшу в бесконечно повторяющейся игре

В бесконечно повторяющихся играх G существует разнообразие ситуаций равновесия по Нэшу [2], [3]. Одно возможное из них это повторение ситуации равновесия по Нэшу этапной игры Г, найденное ранее:

$$\left(u_1{}^*, \dots, u_n{}^*, w_1{}^*(\cdot), \dots, w_m{}^*(\cdot)\, , v_1{}^*(\cdot), \dots, v_k{}^*(\cdot)\right)$$

Обозначим эту ситуацию равновесия по Нэшу за NE_1.

2.3 Равновесие по Нэшу введением стратегий угроз

Также существует равновесие, основанное на стратегиях угроз со стороны игроков третьего уровня, то есть $C_1, \dots, C_{\mathrm{k}}$. В бесконечно повторяющейся игре G оно аналогично этапной игре Г, выглядит следующим образом и будет обозначаться NE_2:

$$\left(u_1{}^*, \dots, u_n{}^*, \bar{\bar{w}}_1, \dots, \bar{\bar{w}}_m, \bar{\bar{v}}_1(\bar{\bar{w}}_{11}, \dots, \bar{\bar{w}}_{m1}), \dots, \bar{\bar{v}}_k(\bar{\bar{w}}_{1k}, \dots, \bar{\bar{w}}_{mk})\right),$$

где для фиксированного вектора $\bar{\bar{w}}_i = (\bar{\bar{w}}_{1i}(u_{11}, \dots, u_{n1}), \dots, \bar{\bar{w}}_{mi}(u_{1m}, \dots, u_{nm}))$ выбранной стратегией игрока v_i является:

$$\bar{\bar{v}}_i(w_i) = \begin{cases} v_i{}^*(\bar{\bar{w}}_i), w_i = \bar{\bar{w}}_i; \\ v_i{}^0, w_i \neq \bar{\bar{w}}_i. \end{cases}$$

2.4 Равновесие по Нэшу введением стратегий наказания

Рассмотрим бесконечно повторяющуюся игру G игру Γ^l, которая разыгрывается на этапе l игры G. На этом этапе выбранные стратегии всех игроков выглядит следующим образом:

$$(\tilde{u}_1{}^l, \dots, \tilde{u}_n{}^l, \tilde{w}_1{}^l(\tilde{u}_{11}{}^l, \dots, \tilde{u}_{n1}{}^l), \dots, \tilde{w}_m{}^l(\tilde{u}_{1m}{}^l, \dots, \tilde{u}_{nm}{}^l), \dots$$

$$\dots, \tilde{v}_1{}^l\left(\tilde{w}_{11}{}^l(\tilde{u}_{11}{}^l, \dots, \tilde{u}_{n1}{}^l), \dots, \tilde{w}_{m1}{}^l(\tilde{u}_{1m}{}^l, \dots, \tilde{u}_{nm}{}^l)\right), \dots$$

$$\dots, \tilde{v}_k{}^l\left(\tilde{w}_{1k}{}^l(\tilde{u}_{11}{}^l, \dots, \tilde{u}_{n1}{}^l), \dots, \tilde{w}_{mk}{}^l(\tilde{u}_{1m}{}^l, \dots, \tilde{u}_{nm}{}^l)\right))$$

Такое произвольное поведение игроков на самом деле может дать ситуацию равновесия по Нэшу. Очевидно, что на некотором этапе $l-1$ игры G, после ходов игроков второго уровня, то есть $B_1, \dots, B_m$, некоторый игрок третьего уровня C_i вместо предписанных ему инструкций игроками верхних уровней (*выбирать стратегию:*

$$\tilde{v}_i{}^l\left(\tilde{w}_{1i}{}^l\left(\tilde{u}_{11}{}^l,\dots,\tilde{u}_{n1}{}^l\right),\dots,\tilde{w}_{mi}{}^l\left(\tilde{u}_{1m}{}^l,\dots,\tilde{u}_{nm}{}^l\right)\right))$$

захочет улучшить свой выигрыш и выбрать альтернативную предписанной ранее стратегии следующее:

$$\tilde{\tilde{v}}_i{}^l\left(\tilde{w}_{1i}{}^l\left(\tilde{u}_{11}{}^l,\dots,\tilde{u}_{n1}{}^l\right),\dots,\tilde{w}_{mi}{}^l\left(\tilde{u}_{1m}{}^l,\dots,\tilde{u}_{nm}{}^l\right)\right),$$

такую что:

$$\hat{H}_{n+m+i} =$$

$$= \max_{v_i^l \in C_i\left(\tilde{w}_{1i}{}^l,\dots,\tilde{w}_{mi}{}^l\right)} H_{n+m+i}\,(\tilde{u}_1{}^l,\dots,\tilde{u}_n{}^l,\tilde{w}_{1i}{}^l\left(\tilde{u}_{11}{}^l,\dots,\tilde{u}_{n1}{}^l\right),\dots$$

$$\dots,\tilde{w}_{mi}{}^l\left(\tilde{u}_{1m}{}^l,\dots,\tilde{u}_{nm}{}^l\right),v_i{}^l\left(\tilde{w}_{11}{}^l,\dots,\tilde{w}_{m1}{}^l\right)) =$$

$$= H_{n+m+i}(\tilde{u}_1{}^l,\dots,\tilde{u}_n{}^l,\tilde{w}_{1i}{}^l\left(\tilde{u}_{11}{}^l,\dots,\tilde{u}_{n1}{}^l\right),\dots$$

$$\dots,\tilde{w}_{mi}{}^l\left(\tilde{u}_{1m}{}^l,\dots,\tilde{u}_{nm}{}^l\right),\tilde{\tilde{v}}_i{}^l\left(\tilde{w}_{11}{}^l,\dots,\tilde{w}_{m1}{}^l\right)) \geq$$

$$\geq H_{n+m+i}(\tilde{u}_1{}^l,\dots,\tilde{u}_n{}^l,\tilde{w}_{1i}{}^l\left(\tilde{u}_{11}{}^l,\dots,\tilde{u}_{n1}{}^l\right),\dots$$

$$\dots,\tilde{w}_{mi}{}^l\left(\tilde{u}_{1m}{}^l,\dots,\tilde{u}_{nm}{}^l\right),\tilde{v}_i{}^l\left(\tilde{w}_{11}{}^l,\dots,\tilde{w}_{m1}{}^l\right)) = H_{n+m+i}$$

Аналогичным образом может поступить и любой другой игрок нижнего уровня, то есть $C_1,\dots,C_{i-1},C_{i+1},\dots,C_k$. Но так как рассматриваемая игра является бесконечно повторяющейся, то на следующем и каждом последующем этапе игры $B_1, \dots, B_m$ могут наказать игроков, отклонившихся от предписанной им стратегии поведения, выбрав вектор-стратегию $(\widetilde{w}_{1i}{}^{0}, \dots, \widetilde{w}_{mi}{}^{0})$.

Далее необходимо доказать, *что всегда существует такая константа $\bar{\delta}$, что для $\delta \in (\bar{\delta}, 1)$ игроки третьего уровня, отклонившиеся от предписанной им стратегии поведения, проиграют в бесконечно повторяющейся игре* G. Ниже представлено доказательство данного факта в виде последовательных преобразований неравенств. Доказательство рассматривается для случая отклонения только одного игрока третьего уровня C_1. Для всех остальных игроков третьего уровня преобразования аналогичны.

Игрок C_1, отклонившись от определенной стратегии $\tilde{\tilde{v}}_1{}^{l}$ на этапе l игры G, максимально сможет получить $\widehat{H}_{n+m+1}$. Однако на всех последующих этапах, игрок C_1 будет наказан игроками второго уровня $B_1, \dots, B_m$и будет получать вектор-управлений $(w_{11}, \dots, w_{m1}) = 0$, который и является стратегией наказания.

Если бы игрок C_1 не отклонялся от предписанной ему стратегии поведения, то он бы получил следующий выигрыш:

$$H_{n+m+1}^{\infty} =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \delta^{l-1}\, l_{n+m+1}\left(\tilde{v}_1{}^l\left(\widetilde{w}_{11}{}^l(\tilde{u}_{11}{}^l, \dots, \tilde{u}_{n1}{}^l), \dots, \widetilde{w}_{m1}{}^l(\tilde{u}_{1m}{}^l, \dots, \tilde{u}_{nm}{}^l)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{1-\delta}\, l_{n+m+1}\left(\tilde{v}_1{}^l\left(\widetilde{w}_{11}{}^l(\tilde{u}_{11}{}^l, \dots, \tilde{u}_{n1}{}^l), \dots, \widetilde{w}_{m1}{}^l(\tilde{u}_{1m}{}^l, \dots, \tilde{u}_{nm}{}^l)\right)\right)$$

Очевидно, что $H_{n+m+1}^{\infty} =$

$$= \sum_{t=1}^{l-1} \delta^{t-1}\, l_{n+m+1}\left(\tilde{v}_1{}^l\left(\widetilde{w}_{11}{}^l(\tilde{u}_{11}{}^l, \dots, \tilde{u}_{n1}{}^l), \dots, \widetilde{w}_{m1}{}^l(\tilde{u}_{1m}{}^l, \dots, \tilde{u}_{nm}{}^l)\right)\right) +$$

$$+ \sum_{t=l}^{\infty} \delta^{t-1}\, l_{n+m+1}\left(\tilde{v}_1{}^l\left(\widetilde{w}_{11}{}^l(\tilde{u}_{11}{}^l, \dots, \tilde{u}_{n1}{}^l), \dots, \widetilde{w}_{m1}{}^l(\tilde{u}_{1m}{}^l, \dots, \tilde{u}_{nm}{}^l)\right)\right)$$

В случает отклонения на этапе l игры G игрок C_1 максимум получит:

$$\sum_{t=1}^{l-1} \delta^{t-1}\, l_{n+m+1}\left(\tilde{v}_1{}^l\left(\widetilde{w}_{11}{}^l(\tilde{u}_{11}{}^l, \dots, \tilde{u}_{n1}{}^l), \dots, \widetilde{w}_{m1}{}^l(\tilde{u}_{1m}{}^l, \dots, \tilde{u}_{nm}{}^l)\right)\right) +$$

$$+ \delta^l \widehat{H}_{n+m+1} = \widehat{H}_{n+m+1}^{\infty}$$

Чтобы доказать, что $\widehat{H}_{n+m+1}^{\infty} \leq H_{n+m+1}^{\infty}$, необходимо просто показать следующее:

$$\delta^{l} \widehat{H}_{n+m+1} \leq$$

$$\leq \delta^{l-1} \sum_{t=l}^{\infty} \delta^{t-1}\, l_{n+m+1} \left(\tilde{v}_1{}^{l} \left(\widetilde{w}_{11}{}^{l} \big(\tilde{u}_{11}{}^{l}, \dots, \tilde{u}_{n1}{}^{l} \big), \dots, \widetilde{w}_{m1}{}^{l} \big(\tilde{u}_{1m}{}^{l}, \dots, \tilde{u}_{nm}{}^{l} \big) \right) \right)$$

В то время как:

$$\delta^{l-1} \sum_{t=l}^{\infty} \delta^{t-1}\, l_{n+m+1} \left(\tilde{v}_1{}^{l} \left(\widetilde{w}_{11}{}^{l} \big(\tilde{u}_{11}{}^{l}, \dots, \tilde{u}_{n1}{}^{l} \big), \dots, \widetilde{w}_{m1}{}^{l} \big(\tilde{u}_{1m}{}^{l}, \dots, \tilde{u}_{nm}{}^{l} \big) \right) \right) =$$

$$= \delta^{l-1} H_{n+m+1}^{\infty}$$

Путем сокращения получается следующее итоговое неравенство, которое выполняется для некоторого $\delta \in (0,1)$:

$$\delta \widehat{H}_{n+m+1}^{\infty} \leq H_{n+m+1}^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{1-\delta}\, l_{n+m+1} \left(\tilde{v}_1{}^{l} \left(\widetilde{w}_{11}{}^{l} \big(\tilde{u}_{11}{}^{l}, \dots, \tilde{u}_{n1}{}^{l} \big), \dots, \widetilde{w}_{m1}{}^{l} \big(\tilde{u}_{1m}{}^{l}, \dots, \tilde{u}_{nm}{}^{l} \big) \right) \right)$$

Таким образом, можно сформулировать лемму 3:

Лемма 3. В бесконечно повторяющейся игре G, этапными играми которой являются Γ^l, существует $\bar{\delta}$: что для всех $\delta \in (\bar{\delta}, 1)$ при произвольно выбранных стратегиях:

$$(\tilde{u}_1{}^l, \dots, \tilde{u}_n{}^l, \widetilde{w}_1{}^l(\tilde{u}_{11}{}^l, \dots, \tilde{u}_{n1}{}^l), \dots, \widetilde{w}_m{}^l(\tilde{u}_{1m}{}^l, \dots, \tilde{u}_{nm}{}^l), \dots$$

$$\dots, \tilde{v}_1{}^l\left(\widetilde{w}_{11}{}^l(\tilde{u}_{11}{}^l, \dots, \tilde{u}_{n1}{}^l), \dots, \widetilde{w}_{m1}{}^l(\tilde{u}_{1m}{}^l, \dots, \tilde{u}_{nm}{}^l)\right), \dots$$

$$\dots, \tilde{v}_k{}^l\left(\widetilde{w}_{1k}{}^l(\tilde{u}_{11}{}^l, \dots, \tilde{u}_{n1}{}^l), \dots, \widetilde{w}_{mk}{}^l(\tilde{u}_{1m}{}^l, \dots, \tilde{u}_{nm}{}^l)\right))$$

существует ситуация равновесия по Нэшу с любым возможным вектором выигрышей игроков.

Глава 3. Кооперация в бесконечно повторяющейся игре

Следующим этапом работы является рассмотрение кооперативного варианта поведения игроков в бесконечно повторяющейся игре G, этапными играми которой являются рассмотренные ранее трехуровневые иерархические игры Г. Предполагается, что игроки решат сотрудничать друг с другом с целью максимизации собственных выигрышей в G. Стоит отметить, что максимизация выигрышей игроков $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m, C_1, \dots, C_k$ в G эквивалентна максимизации их совместного выигрыша на каждом этапе Г. Соответствующий профиль стратегий игроков на этапе l обозначим следующим образом:

$$(\tilde{\tilde{u}}_1{}^l, \dots, \tilde{\tilde{u}}_n{}^l, \tilde{\tilde{w}}_1{}^l\left(\tilde{\tilde{u}}_{11}{}^l, \dots, \tilde{\tilde{u}}_{n1}{}^l\right), \dots, \tilde{\tilde{w}}_m{}^l\left(\tilde{\tilde{u}}_{1m}{}^l, \dots, \tilde{\tilde{u}}_{nm}{}^l\right), \dots$$

$$\dots, \tilde{\tilde{v}}_1{}^l\left(\tilde{\tilde{w}}_{11}{}^l\left(\tilde{\tilde{u}}_{11}{}^l, \dots, \tilde{\tilde{u}}_{n1}{}^l\right), \dots, \tilde{\tilde{w}}_{m1}{}^l\left(\tilde{\tilde{u}}_{1m}{}^l, \dots, \tilde{\tilde{u}}_{nm}{}^l\right)\right), \dots$$

$$\dots, \tilde{\tilde{v}}_k{}^l\left(\tilde{\tilde{w}}_{1k}{}^l\left(\tilde{\tilde{u}}_{11}{}^l, \dots, \tilde{\tilde{u}}_{n1}{}^l\right), \dots, \tilde{\tilde{w}}_{mk}{}^l\left(\tilde{\tilde{u}}_{1m}{}^l, \dots, \tilde{\tilde{u}}_{nm}{}^l\right)\right))$$

Таким образом, в одношаговой трехуровневой иерархической игре общий максимальный выигрыш игроков получается следующим:

$$\max_{\substack{u\in\prod_{i=1}^{n} U_i \\ w(u)\in\prod_{i=1}^{m} B_i(u) \\ v(w(u))\in\prod_{i=1}^{k} C_i(w(u))}} \qquad l_{n+m+t}(v_t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+m+k} l_i\,(u_1, \dots, u_n, w_1(u_{11}, \dots, u_{n1}), \dots, w_m(u_{1m}, \dots, u_{nm}), \dots$$

$$\dots, v_1\big(w_{11}(u_{11}, \dots, u_{n1}), \dots, w_{m1}(u_{1m}, \dots, u_{nm})\big), \dots$$

$$\dots, v_k\big(w_{1k}(u_{11}, \dots, u_{n1}), \dots, w_{mk}(u_{1m}, \dots, u_{nm})\big)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+m+k} l_i\,(\tilde{\tilde{u}}_1, \dots, \tilde{\tilde{u}}_1, \tilde{\tilde{w}}_1\big(\tilde{\tilde{u}}_{11}, \dots, \tilde{\tilde{u}}_{n1}\big), \dots, \tilde{\tilde{w}}_m\big(\tilde{\tilde{u}}_{1m}, \dots, \tilde{\tilde{u}}_{nm}\big), \dots$$

$$\dots, \tilde{\tilde{v}}_1\left(\tilde{\tilde{w}}_{11}\big(\tilde{\tilde{u}}_{11}, \dots, \tilde{\tilde{u}}_{n1}\big), \dots, \tilde{\tilde{w}}_{m1}\big(\tilde{\tilde{u}}_{1m}, \dots, \tilde{\tilde{u}}_{nm}\big)\right), \dots$$

$$\dots, \tilde{\tilde{v}}_k\left(\tilde{\tilde{w}}_{1k}\big(\tilde{\tilde{u}}_{11}, \dots, \tilde{\tilde{u}}_{n1}\big), \dots, \tilde{\tilde{w}}_{mk}\big(\tilde{\tilde{u}}_{1m}, \dots, \tilde{\tilde{u}}_{nm}\big)\right))$$

Исходя из кооперативного выигрыша в одношаговой игре Г можно получить общий выигрыш всех игроков $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m, C_1, \dots, C_k$ в бесконечно повторяющейся игре G:

$$\sum_{l=1}^{\infty} \delta^{l-1} \left[\sum_{i=1}^{n+m+k} l_i\,(\tilde{\tilde{u}}_1{}^l, \dots, \tilde{\tilde{u}}_n{}^l, \tilde{\tilde{w}}_1{}^l\left(\tilde{\tilde{u}}_{11}{}^l, \dots, \tilde{\tilde{u}}_{n1}{}^l\right), \dots, \tilde{\tilde{w}}_m{}^l\left(\tilde{\tilde{u}}_{1m}{}^l, \dots, \tilde{\tilde{u}}_{nm}{}^l\right), \dots\right.$$

$$\dots, \tilde{\tilde{v}}_1{}^l\left(\tilde{\tilde{w}}_{11}{}^l\left(\tilde{\tilde{u}}_{11}{}^l, \dots, \tilde{\tilde{u}}_{n1}{}^l\right), \dots, \tilde{\tilde{w}}_{m1}{}^l\left(\tilde{\tilde{u}}_{1m}{}^l, \dots, \tilde{\tilde{u}}_{nm}{}^l\right)\right), \dots$$

$$\dots, \tilde{\tilde{v}}_k{}^l \left(\tilde{\tilde{w}}_{1k}{}^l \left(\tilde{\tilde{u}}_{11}{}^l, \dots, \tilde{\tilde{u}}_{n1}{}^l \right), \dots, \tilde{\tilde{w}}_{mk}{}^l \left(\tilde{\tilde{u}}_{1m}{}^l, \dots, \tilde{\tilde{u}}_{nm}{}^l \right) \right) \Big] =$$

$$= \frac{1}{1-\delta} \sum_{i=1}^{n+m+k} l_i \, (\tilde{\tilde{u}}_1{}^l, \dots, \tilde{\tilde{u}}_n{}^l, \tilde{\tilde{w}}_1{}^l \left(\tilde{\tilde{u}}_{11}{}^l, \dots, \tilde{\tilde{u}}_{n1}{}^l \right), \dots, \tilde{\tilde{w}}_m{}^l \left(\tilde{\tilde{u}}_{1m}{}^l, \dots, \tilde{\tilde{u}}_{nm}{}^l \right), \dots$$

$$\dots, \tilde{\tilde{v}}_1{}^l \left(\tilde{\tilde{w}}_{11}{}^l \left(\tilde{\tilde{u}}_{11}{}^l, \dots, \tilde{\tilde{u}}_{n1}{}^l \right), \dots, \tilde{\tilde{w}}_{m1}{}^l \left(\tilde{\tilde{u}}_{1m}{}^l, \dots, \tilde{\tilde{u}}_{nm}{}^l \right) \right), \dots$$

$$\dots, \tilde{\tilde{v}}_k{}^l \left(\tilde{\tilde{w}}_{1k}{}^l \left(\tilde{\tilde{u}}_{11}{}^l, \dots, \tilde{\tilde{u}}_{n1}{}^l \right), \dots, \tilde{\tilde{w}}_{mk}{}^l \left(\tilde{\tilde{u}}_{1m}{}^l, \dots, \tilde{\tilde{u}}_{nm}{}^l \right) \right) =$$

$$= V(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m, C_1, \dots, C_k)$$

$V(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m, C_1, \dots, C_k)$ – максимально возможный общий выигрыш игроков $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m, C_1, \dots, C_k$ в бесконечно повторяющейся игре G.

Далее определим $W(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m, C_1, \dots, C_k)$ как минимальный возможный выигрыш игроков $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m, C_1, \dots, C_k$ в ситуации наихудшего равновесия по Нэшу в бесконечно повторяющейся игре G. Выигрыши игроков в такой ситуации равняются нулю, так как игроки второго уровня отклонятся от обговоренных ранее стратегий, и игроки третьего уровня выбирают альтернативную стратегию:

$$\bar{\bar{v}}_i(w_i) = \begin{cases} v_i^{\;*}(\bar{\bar{w}}_i), w_i = \bar{\bar{w}}_i; \\ v_i^{\;0}, w_i \neq \bar{\bar{w}}_i. \end{cases} \text{для } i = 1, \dots, k$$

Определение 1. Цена анархии в бесконечно повторяющейся игре G определяется следующим соотношением:

$$A = \frac{V(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m, C_1, \dots, C_k)}{W(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m, C_1, \dots, C_k)}$$

В бесконечно повторяющейся игре G цена анархии $A = \infty$, так как $V(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m, C_1, \dots, C_k)$ – некоторое конечное число, а $W(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m, C_1, \dots, C_k) = 0$.

Определение 2. Цена устойчивости в бесконечно повторяющейся игре G определяется следующим соотношением:

$$S = \frac{\bar{W}(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m, C_1, \dots, C_k)}{V(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m, C_1, \dots, C_k)},$$

где $V(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m, C_1, \dots, C_k)$ – максимально возможный общий выигрыш в бесконечно повторяющейся игре G, а $\bar{W}(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m, C_1, \dots, C_k)$ – общий выигрыш игроков в ситуации наилучшего равновесия по Нэшу.

Согласно рассмотренной ранее лемме 3 существует ситуация наилучшего равновесия по Нэшу с максимально возможным общим выигрышем игроков $V(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m, C_1, \dots, C_k)$. Из чего можно сделать вывод, что в бесконечно повторяющейся игре G цена устойчивости $S = 1$.

Заключение

В ходе выполнения данной исследованы иерархические игры сложной ромбовидной структуры.

В первую очередь была рассмотрена одношаговая трехуровневая иерархическая игра, имеющая n игроков на первом уровне, m игроков на втором уровне и k игроков на третьем уровне иерархии. В данной игре было найдено несколько ситуаций равновесия по Нэшу, одно из которых строится на основе введения стратегий угроз со стороны игроков, находящихся на нижнем уровне иерархии.

Далее была исследована бесконечно повторяющиеся игра, этапными играми которой являлись трехуровневые иерархические игры, рассмотренные в главе 1. Для бесконечно повторяющейся игры получилось построить три различных ситуации равновесия по Нэшу, одна из которых была основана на введении стратегий наказаний со стороны игроков, находящихся на верхних уровнях иерархии. Другая же ситуация была основана на стратегиях угроз со стороны игроков, находящихся на нижнем уровне иерархии.

Также для кооперативного варианта бесконечно повторяющейся игры построены наилучшее и наихудшее равновесия по Нэшу и определены:

- цена анархии $A = \infty$;
- цена устойчивости $S = 1$.

Список цитируемой литературы

1. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Громова Е.В. Теория игр. М.: Физматлит, 2012.
2. Aumann R. J., Maschler M., Stearns R. E. Repeated games with incomplete information. – MIT press, 1995.
3. Nash J. Non-cooperative games //Annals of mathematics. – 1951. – С. 286-295.
4. Fudenberg D., Maskin E. The folk theorem in repeated games with discounting or with incomplete information //A Long-Run Collaboration On Long-Run Games. – 2009. – С. 209-230.
5. Maschler M., Solan E., Zamir S. Game Theory (Translated from the Hebrew by Ziv Hellman and edited by Mike Borns) //Cambridge University Press, Cambridge, pp. xxvi. – 2013. – Т. 979. – С. 4.
6. Mazalov V. Mathematical game theory and applications. – John Wiley & Sons, 2014.
7. Christodoulou G., Koutsoupias E. On the price of anarchy and stability of correlated equilibria of linear congestion games //European Symposium on Algorithms. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2005. – С. 59-70.

8. Petrosyan L., Pankratova Y. Equilibrium and Cooperation in Repeated Hierarchical Games //International Conference on Mathematical Optimization Theory and Operations Research. – Springer, Cham, 2019. – С. 685-696.
9. Morgenstern O., Von Neumann J. Theory of games and economic behavior. – Princeton university press, 1953.