Санкт-Петербургский государственный университет

Лебедев Олег Викторович

Магистерская диссертация

Теоретико-игровые модели процессов инвестирования в задачах размещения при неполноте информации и множественных интересов участвующих агентов

Направление 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
Основная образовательная программа ВМ.5759.2018 «Цифровая экономика»

Научный руководитель:
Зав. кафедрой МСЭС,
д-р физ.-мат. наук,
профессор
Малафеев О.А.

Рецензент:
д-р физ.-мат. наук,
профессор
Пичугин Ю. А.

Санкт-Петербург
2020

Содержание

Введение

Большое количество факторов влияет на эффективность деятельности различных предприятий малого и среднего бизнеса. Например, такими предприятиями могут являться автозаправочные станции, магазины, рестораны и кафе, автосервисы и так далее. В данной работе рассматривается фактор территориального размещения. Правильное месторасположение производства может уменьшить транспортные расходы, сделать предприятия более доступными для клиентов, а также улучшить работу с поставщиками ресурсов, услуг и товаров.

Решение задачи территориального размещения - это очень важный процесс, так как от него зависит возможная прибыль предприятия, а также затраты на размещение. Размещение пунктов производства и предприятий - это активно развивающееся направление в области задач оптимизации на графах и сетях. Такие задачи являются актуальными, так как имеют важное прикладное значение в самых различных отраслях деятельности: при нахождении наилучшего расположения оборудования в цехах, при проектировании системы логистики предприятий, при управлении вычислительными ресурсами в вычислительных средах.

Территориальное размещение предприятий является сложной задачей из-за того, что постановка задачи по оптимальному размещению может принимать разный вид в зависимости от того, какой критерий оптимальности выбран, а также какие ограничения являются значимыми. Для каждой фирмы или предприятия имеется свой определенный оптимизационный критерий, например: минимальное время пути до пункта производства, минимальное расстояние от поставщиков, максимальная доступность для покупателя. В зависимости от того, какой критерий выбран, выбирается и метод решения. Кроме того, прибыль предприятий может изменяться и при их взаимодействии, а также при объединении в коалиции. В настоящее время во многих предприятиях задача размещения пунктов производства или магазинов рассматривается как задача оценки некоторого инвестиционного проекта.

Задача размещения, рассматриваемая вкупе с прокладкой транспортных сетей при различных усложняющих условиях, является также нетривиальной задачей, для которой требуется формализованный подход к решению. При построении допустимой транспортной сети следует учитывать экономическую, географическую, экологическую, геополитическую обстановки. Особенности местности, через которую проходит сеть, взаимоотношения государств, стоимость возведения транспортной сети могут накладывать различные ограничения на построение этой сети.

Постановка задачи

Неформальная постановка задачи

В данной работе ставится следующая задача. Дана некоторая транспортная сеть. В этой сети известно расположение источников сырья, пунктов производства и покупателей. Кроме того, на множестве ребер задаётся функция транспортно-коррупционных издержек, означающих затраты на перемещение по определенному ребру. Для продавцов и покупателей задаются собственные функции издержек. Рассматриваемый граф является связным, то есть из любой вершины сети можно попасть в любую другую вершину. Более того, на некоторых участках сети затраты на перемещение будут зависеть от количества перевозимого товара.

Покупатель будет выбирать такого продавца, где сумма затрат, складывающихся из транспортно-коррупционных издержек и денег, потраченных на покупку товара, является минимальной. Выигрыш продавца составляет стоимость проданного товара с вычетом транспортно-коррупционных издержек. Стоимость товара в источниках сырья неизвестна, вместо этого задаются вероятности того, какая именно будет цена. Также стоит отметить, что продавцы могут объединяться в коалиции, что может повлиять на конечный выигрыш каждого игрока.

Необходимо расположить пункты распределения продукта в сети в соответствии с выбранным принципом оптимальности. При этом необходимо учесть, что продавцы могут объединяться в коалиции. Поэтому в данной работе рассматриваемыми принципами оптимальности являются компромиссное решение, равновесие Нэша и вектор Шепли.

Формальная постановка задачи

Пусть дан граф $G=(V,E)$, где V – конечное множество вершин, E – конечное множество ребер. Каждое ребро $(u,\ v)\in E$ имеет неотрицательный вес. В нескольких вершинах находятся источники сырья $(i_1,...,i_k)$, где k – количество источников сырья, каждый $i_k \in V$. Кроме того в некоторых узлах располагаются пункты производства $(b_1,...,b_m)$, где m – количество пунктов производства, каждый $b_m \in V$. В данных источниках сырья добываются ресурсы, которые доставляются в пункты производства, в которых продавцы закупают свои товары. Цена продукции задается дискретным вероятностным распределением, то есть задано множество цен A и для каждого $a_i \in A$ известна вероятность появления $P(a_i)=p_i$. Причем $p_i \geq 0$ и $\sum\limits_i p_i = 1$. В некоторых вершинах $K=(k_1,...,k_s)$, где $k_s \in V$, находятся покупатели, желающие приобрести этот товар.

Для каждого ребра $(u,\ v)\in E$ известно значение издержек на перевозку товара $C_a(u,v)$ для пунктов производства:

$$C_a(u,v) = C'_a(u,v) + \gamma_a(u,v),$$

где $C'_a(u,v)$ - транспортные затраты, $\gamma_a(u,v)$ - коррупционные затраты на соответствующем ребре.

Более того, для всех ребер сети $(u,\ v)\in E$ известно значение издержек на перевозку товара $C_b(u,v)$ для пунктов производства:

$$C_b(u,v) = C'_b(u,v) + \gamma_b(u,v),$$

где $C'_b(u,v)$- транспортные затраты, $\gamma_b(u,v)$ - коррупционные затраты на соответствующем ребре.

Затраты на некоторых участках сети будут зависеть от количества перевозимой продукции n. В этом случае для каждого ребра из этого участка сети будет задана зависимость значения издержек от количества. Необходимо будет рассчитать среднее значение издержек при перемещении по этому участку.

Также в некоторых вершинах существует возможность расположить h продавцов $S = (s_1, ..., s_h)$, где $s_h \in V$. Во все возможные пункты распределения закупается товар. Цена продукции c в этих точках для покупателей принимает значение

$$P_h = l_h + T_h,$$

где l_h - цена товара в пункте производства, T_h - наценка продавца.

Суммарная прибыль каждого продавца определяется следующей формулой:

$$D_h = P_h \times k_{s_h} - C_h,$$

где k_{s_h} - количество покупателей у продавца h, C_h - транспортные издержки. Покупатель выбирает такого покупателя, до которого транспортно-коррупционные издержки являются минимальными. Более того, продавцы могут объединяться в коалиции, что снижает общие транспортно-коррупционные издержки, что возможно увеличивает выигрыш каждого игрока и влияет на возможно оптимальное расположение. Цель каждого продавца расположить магазины так, чтобы получить максимальную прибыль от продажи товара.

Необходимо найти оптимальное расположение продавцов на графе с учетом рассматриваемого принципа оптимальности. Это компромиссное решение, равновесие Нэша и вектор Шепли.

Обзор литературы

Различные математические модели принятия решения в условиях конфликта, рассмотрение основных понятий и классов теории игр, включая кооперативные игры, а также основные методы и принципы оптимальности описаны в [1, 2, 3]. Основные понятия теории графов и сетей, постановки и методы решения задач оптимизации на графах, включая задачи поиска кратчайших путей, представлены в книгах [4, 5, 6]. Основные понятия производственного менеджмента, а также теоретическое описание задачи размещение описаны в [7]. Кроме того, существует множество задач поиска оптимального положения на графах в самых различных сферах жизни, что также показывает актуальность данной проблемы. Например, решения некоторых таких задач можно найти в [8, 9, 10, 11].

Глава 1. Понятие графов

1.1 Определение графа

Теория графов - это один из разделов дискретной математики, который изучает свойства и особенности графов, которые можно представить в виде двух множеств, между которыми задано какое-то отображение. Графически это может быть представлено в виде точек или других фигур, соединенных друг с другом линиями. При этом точка будет представлять элемент множества, а линия - отношение между ними. Такой рисунок обычно называют графом, хотя рисунок - это лишь один из возможных вариантов представления графа.

Электрические цепи, связи между каждым отдельным человеком или различными группами людей, схемы разных коммуникаций - все это можно представить в виде графов. Графы используются при решении большого количества задач, связанных с дискретными процессами или объектами.

Термин «граф» был введен венгерским математиком Д. Кёнингом, который является автором одной из первых научных работ по теории графов.

Развитие математической логики, исследования операций, теории информации и других дисциплин, а также появление электронно-вычислительных машин стало причиной увеличения количества задач, в которых главными элементами являются анализ, построения и рассуждения дискретного характера. Вследствие чего, предмет теории графов стал принимать значимую роль в различных научных дисциплинах.

Граф - это конечное множество вершин и ребер. При этом каждому ребру будет соответствовать две вершины, которые будут являться концами этого ребра. Дадим формальное определение понятию граф.

Определение.: Неориентированным графом G называется тройка

$$G = (V,\ E,\ I),$$

состоящая из

(1) (конечного) множества вершин $V = V(G)$, например

$$V = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\},$$

(2) (конечного) множества ребер $E = E(G)$, например

$$E = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h\},$$

(3) и отображения $I : E \to V_2$, которое сопоставляет каждому ребру $e \in E$ неупорядоченную пару вершин $\{x,\ y\} \in V_2$, которую это ребро соединяет.

Кроме того, в определении графа необходимо обратить внимание на то, важен ли порядок расположения двух его вершин или нет. Если порядок не играет никакого значения, то соответствующие ребра являются неориентированными, в противном случае ориентированным. Тогда граф является неориентированным, когда каждое его ребро неориентировано. Аналогично определяется ориентированный граф. Ребро и вершина инцидентны в том случае, когда вершина является началом или концом ребра.

Ребра - кратны, когда они связывают одну и ту же пару вершин. Ребро, со совпадающим началом и концом, называют петлей. Петли и кратные ребра в некоторых задачах не представляют интереса, поэтому часто рассматриваются графы без петель и кратных ребер. Такие графы будут называться простыми. Граф, который не является простым, обычно называют мультиграфом.

1.2. Путь в графе

Последовательность ребер, на которой начало одного ребра является концом другого, называется путем. Путь начинается в вершине, являющейся началом первого ребра, а заканчивается в конце последнего ребра. Если начало и конец пути совпадают, то такой путь является циклом. Путь, проходящий через вершины графа максимум один раз, является простым путем. Аналогично определяется простой цикл. Дадим более формальное определение пути.

Определение. Маршрутом в G из x_0 в вершину x_k называется следующая чередующаяся последовательность

$$W:=x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, ..., x_{k-1}, e_k, x_k$$

вершин $x_i \in V$ и ребер $e_i \in E$, которые соединяют вершины x_{i-1} и x_i. Ребра и вершины в данной последовательности могут повторяться. Длиной этого маршрута будет являться количество ребер.

Определение. Если все ребра $e_1, ..., e_k$ в маршруте различны, то этот маршрут называется путем из вершины x_0 в вершину x_k. Если и все вершины в данном пути различны, то данный путь будет называться простым.

Если между двумя любыми вершинами графа существует путь, то такой граф является связным. Несвязный граф можно разбить на несколько частей или подграфов, каждый из которых будет являться связным. Эти части имеют название компоненты связности. Однако, стоит отметить, что некоторые компоненты связности могут состоять только из одной вершины.

1.3. Определение подграфа

Определение. Подграфом графа G называется такой граф H, для которого выполнены следующие условия:

(1) $V(H) \subseteq V(G)$

(2) $E(H) \subseteq E(G)$

(3) любое ребро $e \in E(H)$, соединяющее вершины x и y в H, должны соединять точно такую же пару вершин в графе G.

Граф G по отношению к графу H часто называют надграфом или суперграфом.

Часто в задачах необходимо рассматривать такие графы, в которых каждому ребру приписывается некоторая числовая характеристика или вес. Вес может означать издержки на проезд по рассматриваемому маршруту или, например, длину дороги. Такие графы будут называться взвешенными. Граф можно представить в виде матрицы смежности, где i-ым и j-ым элементом матрицы будет являться вес ребра из i в j.

Кроме того, если ребро отсутствует, то в матрице можно хранить специальное значение. Например, в некоторых задачах при отсутствии ребра удобно хранить достаточно большое число. В этом случае отсутствие ребра будет значить наличие ребра очень большой стоимости.

Глава 2. Задача размещения

2.1 Основные понятия

В последние годы задачи размещения привлекают все больше внимания. Из-за большого объема капиталовложений, имеющегося в любой реальной задачи такого типа, любое небольшое изменение в первоначальном плане, может привести к положительному эффекту. Пространственный фактор играет важную роль в задачах размещения, поэтому часто соответствующая модель представляется классической транспортной задачей.

Решение различных проблем, касающихся поиска оптимального местоположения, относится к сфере стратегических решений. Одной из проблем размещения является вопрос об эффективной организации управления материальными потоками, относящимися к предприятиям. Решая данный вопрос, предприятие стремится к улучшению индикаторов, показывающих уровень экономического состояния. На выбор мест влияют различные факторы, например, долговременные капитальные расходы. Правильно выбранное местоположение дает различные преимущества для рассматриваемого объекта. Это может отразится и в виде дополнительной прибыли, получаемой за счет снижения цены перевозки товаров или уменьшение общих затрат на транспортировку. Решая вопрос выбора места для существующего объекта, рассматриваются следующие возможности:

1. Увеличение существующих мощностей, если имеются необходимые условия для увеличения масштабов производства
2. Создание новых мощностей с учетом сохранения старых
3. Перенос предприятия на другое место
4. Не меняя местоположения, расширить мощности с помощью четкого планирования расположения структурных подразделений

2.2 Алгоритм в общем виде

Главной проблемой, анализируемой при поиске оптимального местоположения, является подбор такого размещения, которое помогло бы добиться результата, покрывающего соответствующие расходы. Алгоритм поиска расположения производства в общем виде представляется следующим образом:

1. Выбирается по какому критерию будут оцениваться всевозможные размещения
2. Определяются самые важные факторы, которые влияют на результат размещения
3. Рассматриваются другие возможные варианты размещения
4. Производится оценка рассмотренных вариантов, далее выбирается самый лучший вариант с учетом выбранного в первом пункте критерия

Когда решаются задачи по размещению объектов из сферы производства, оптимальным критерием выбирается минимизация расходов на производство. В производственном менеджменте выбор расположения делится на два типа: ограниченный и свободный. Ограниченный используется в основном для производств из добывающей промышленности, тогда как для свободного подразумевается, что выбор оптимального места не зависит от используемых ресурсов.

Существует три разных вида решения задач о выборе оптимального мест:

1. международный уровень
2. региональный уровень
3. локальный уровень

Поиск оптимального расположения предприятия зависит от вида и способа его производства. Маленькие и только появившиеся производства часто используют неформальные способы поиска места. Очень часто, например, владелец небольшого предприятия пытается расположить свою фирму ближе к своему дому. В то время как владельцы больших предприятий рассматривают данный вопрос более глубоко, рассматривая более обширный список возможных географических мест. Решая задачу размещения, следует ответить на следующие вопросы:

1. В каком месте расположить производственные пункты
2. Где именно будет располагаться главный офис
3. Где будут располагаться склады предприятия
4. Расстояние от пунктов производства до поставщиков ресурсов
5. Расстояние от клиентов до пунктов производства

В зависимости от местоположения фирмы меняются не только постоянные расходы, но и также переменные. После выбора места для предприятия необходимо понять, насколько правильно было найдено размещение, используя либо экспертный, либо экономико-математический метод.

Вместе с проблемой поиска оптимального расположения необходимо прорабатывать и вопрос о создании наилучшей сети поставщиков. Например если предприятие имеет высокие затраты на сырье, то от того, какая будет сеть поставщиков ресурсов и степень минимизации транспортных издержек, будет зависеть эффективность фирмы в будущем. Создавая сеть поставщиков, нужно:

1. Определить перечень ресурсов, которые используются при производстве
2. Оценить сколько сырья необходимо на производство товара

3. Изучить рынок поставок

Обычно при анализе рынка цена играет главную роль, однако стоит отметить другие важные факторы. Например, выбирая поставщика сырья, критериями оптимальности могут быть соотношение цены и качества, надежность поставок, время их выполнения, существование скидок, расстояние до потребителя и многие другие. В итоге выбирается такой поставщик, чьи услуги подойдут потребителю по рассмотренным критериям.

Задачу поиска оптимального расположения можно решить либо экспертными, либо экономико-математическими методами. Под экспертными понимаются следующие методы:

1. Взвешивания факторов
2. Расстановки приоритетов

Экономико-математическими методами являются:

1. Метод критической точки, в котором множество всевозможных местоположений анализируется по расходам на производство
2. Методы линейного программирования
3. Метод центра тяжести

2.3 Экспертные методы

В методе с приоритетами оставляется экспертное мнение в форме сравнения, анализируется приоритетность по различным критериям и рассматриваются только наиболее значимые. Далее каждому объекту дается численное описание, при помощи которого ставятся приоритеты разных вариантов в расстановке предприятий.

При поиске оптимального размещения не всегда возможно учитывать каждое условие, которое влияет на производство товаров и значения расходов на производство. Тогда используется метод взвешивания, предполагающий построение некоторой системы факторов, которая влияет на принимаемые решения. Благодаря этому методу руководитель может повлиять на принятие решения с учетом дополнительной численной информации.

2.4 Экономико-математические методы

Используя алгоритм поиска критической точки, нужно вычислить постоянные, а также переменные расходы производства, учитывая различные варианты расположения фирмы. При данном объеме производства вычисляются общие расходы на производство для всех рассмотренных вариантов. Наилучшим будет являться вариант с самыми маленькими расходами на производство товаров. Данный алгоритм можно выполнять как графически, так и аналитически. Применяя аналитический способ этого метода, нужно:

1. Вычислить как и постоянные, так и переменные расходы для всех размещений
2. Оценить производственный объем необходимой продукции и вычислить суммарные расходы для данного объема по всем размещениям
3. Оптимальным размещением является размещение, имеющее самые маленькие расходы

В то время как графический способ подразумевает следующее:

1. Вычислить как и постоянные, так и переменные расходы для всех размещений
2. Проанализировать цену одной единицы товара на рынке
3. Построить график, который будет отражать, как общие затраты от производства будут меняться при изменении объема производства на каждом размещении

4. Проанализировать график и выбрать наилучшее размещение

Когда нет других вариантов поставки, и фирма отправляет товары в одно место, то расходы на транспорт можно отнести к переменным и рассчитать на одну единицу продукции. Тогда поиск оптимального расположения можно проводить методом критической точки. Но при существовании других возможных сетей поставщиков сырья необходимо анализировать затраты на транспортировку отдельно. В таком случае будет использоваться алгоритм решения транспортной задачи линейного программирования.

В методе центра тяжести учитывается не только дальность и расходы на доставку, но также и количество перевозимой продукции. Данный алгоритм основан на утверждении, что расходы на транспортировку товаров прямо пропорциональны количеству перевозимой продукции и дальности.

Глава 3. Алгоритмы и методы решения задачи размещения

Нахождение самого короткого пути на графах в настоящее время играет важную роль в решении различных задач, поэтому данные алгоритмы используется во многих сферах. Например, при поиске наименьшего расстояния в сети дорог, в GPS навигаторах, в системах автопилота, при распределении ресурсов сети связи. Поиск оптимального по расстоянию маршрута обычно проводят между определенными вершинами. После применения такого алгоритма на выходе будем иметь определенный маршрут и соответствующее расстояние. Изучим основные методы поиска наилучшего маршрута:

1. алгоритм Дейкстры
2. алгоритм Флойда
3. переборные алгоритмы

Рассмотренные методы эффективно работают, когда граф имеет небольшое множество вершин, но чем больше оно становится, тем сильнее увеличивается сложность задачи поиска.

3.1 Алгоритмы поиска кратчайшего пути

Алгоритм Дейкстры ищет минимальный маршрут от заданной вершины ко всем оставшимся в графе вершинам. Применим для таких графов, где ребра не имеют отрицательных весов. Его суть заключается в следующем. Каждая вершина имеет вес, который принимает значение расстояния от изначальной заданной вершины до данной. Кроме того, в этом алгоритме можно выделить любую вершину. Выделение значит, что расстояние от этой вершины до самой первой вершины является наименьшим, иначе такой маршрут будет называться временным. Обходя весь граф, данный метод подсчитывает расстояние до каждой вершины. Если путь является наименьшим, то соответствующая вершина выделяется. Тогда весом этой вершины станет вес маршрута. Далее подсчитывается вес каждой соседней вершины с условием, что они не выделяются. Алгоритм останавливается, когда доходит до последней вершины. Она будет иметь вес, равный самому короткому пути.

Алгоритм с переборами - это такие методы нахождения оптимального решения, в которых решения строятся постепенно. Они основаны на методах обхода графа, поэтому рассматривается два переборных алгоритма:

1. На основе поиска в глубину
2. На основе поиска в ширину

Первый перебор производится опытным путем. Во время выполнения этого алгоритма текущий маршрут хранится в дереве. Второй алгоритм состоит из следующих шагов.

1. распространение волны
2. обратный ход

На первом этапе вершины маркируются значением шага, на котором они посещаются. После, с самой последней вершины, происходит второй этап, на котором восстанавливается путь, по которому эту вершину достигли. Делается это с помощью включения в данный маршрут вершин с самой маленькой по значению пометкой. Необходимо отметить, что восстановительный этап всегда происходит с конца. Так как клетка посещается всего один раз, волновой алгоритм работает эффективнее чем переборный.

Алгоритм Флойда-Уоршелла - это алгоритм поиска кратчайших расстояний между всеми вершинами взвешенного графа. Его основная мысль состоит в следующем. В графе с ребрами положительного веса любой нетривиальный наименьший маршрут можно разложить на другие кратчайшие пути. Этот алгоритм использует матрицу $A_{n\times n}$. Матрица A хранит минимальные расстояния между вершинами. Значение $A[i,j]$ означает длину пути от i-ой до j-ой вершины при условии, что ребро между i и j существует. При отсутствии ребра расстояние в матрице A между этими ребрами принимает значение бесконечности. Главная суть этого метода заключается в следующем. Рассматриваются вершины i, j, k. Также известны расстояния между ними. Если следующее неравенство верно

$$A[i,\ k]\ +\ A[k,\ j]\ < A[i,\ j]\,,$$

то необходимо маршрут $i \to j$ изменить на маршрут $i \to k \to j$. Алгоритм заканчивает свою работу за n шагов. На i-ом шаге A содержит кратчайшие расстояния между различными вершинами с учетом того, что данные пути будут содержать вершины с первой по i-ую. На каждой новой итерации перебирается каждая пара из множества вершин. Маршрут между этими вершинами будет сокращаться за счет i-й вершины. В данной задаче будет использоваться именно этот алгоритм, так как он ищет минимальные расстояния между двумя любыми вершинами графа, что в условиях поставленной задачи является более подходящим способом.

3.2 Компромиссное решение

В каждой игре игрок стремится к тому, чтобы была достигнута такая ситуация, в которой функция его выигрыша является максимальной. Но функция выигрыша зависит также и от выбранных стратегий других игроков, поэтому ситуации, которые дают большой выигрыш одному игроку, не обязательно дают большой выигрыш для других. Поэтому стремление каждого игрока получить наибольший выигрыш носит конфликтный характер, и в целом вопрос о том, какая именно ситуация является оптимальной, является проблематичной. Рассмотрим некоторые возможные подходы далее.

В данной работе одним из принципов оптимальности при решении задачи размещения является компромиссное решение. Рассмотрим подробнее этот алгоритм. Для удобства построения компромиссного решения необходимо построить матрицу доходов. Пусть в этой матрице каждой строке соответствует возможная ситуация φ_G^s, а столбцам соответствуют агенты.

1. Необходимо построить идеальный вектор $M = \left[M_{x1}, ..., M_{xn}\right]$, где $M_x = max_s(H_x(\varphi_G^s))$ - это максимальное значение функции дохода агента x на множестве φ_G^s всех ситуаций.

2. Для каждой ситуации из множества всевозможных ситуаций $\left\{\varphi_G^s\right\} \in \Phi_G$, а также для всех агентов $x \in X$, необходимо вычислить следующие разности: $M_x - H_x(\varphi_G^s)$, которые являются отклонениями от максимумов M_x.

3. На построенных отклонениях $M_x - H_x(\varphi_G^s),\ x = 1, ..., n$ необходимо найти максимальную разность $max_x(M_x - H_x(\varphi_G^s))$.

4. Далее из максимальных отклонениях нужно выбрать минимальные по множеству всех ситуаций: $min_{\varphi_G \in \Phi_G} max_x(M_x - H_x(\varphi_G^s))$.

Та ситуация, на которой будет достигаться минимум, и является компромиссным решением игры.

3.3 Равновесие Нэша

Следующим критерием оптимальности является равновесие Нэша. Равновесие по Нэшу — это такая ситуация, в которой у всех игроков отсутствует желание изменять свою стратегию при выбранной стратегии другого игрока или фирмы. Определение равновесия по Нэшу и его существование определяется следующим образом. Пусть $x = (x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)$ - это какая-то произвольная ситуация в игре. x_i - некоторая стратегия i-ого игрока. Построим теперь такую ситуацию, в которой стратегия i-ого игрока заменена на другую стратегию x_i'. В итоге получается ситуация $(x_1, ..., x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, ..., x_n)$, которая обозначается как $(x||x_i')$. Тогда ситуация $x^* = (x_1^*, ..., x_i^*, ..., x_n^*)$ будет называться ситуацией равновесия по Нэшу, если для каждого агента $x_i \in X_i$ и $i = 1, ..., n$ выполняется следующее неравенство:

$$H_i(x^*) \geq H_i(x^*||x_i)$$

3.4 Вектор Шепли

Далее допустим, что агенты могут объединяться в коалиции. В таком случае получается кооперативная игра, где игроки делят некоторый выигрыш между собой по какому-либо принципу оптимальности. В данной работе - это вектор Шепли.

Рассмотрим множество A, содержащее номера игроков. Тогда подмножества $K \subseteq A$ будут называться коалициями. Характеристической функцией является такая функция, которая сопоставляет каждой коалиции K ее доход $u(K)$. Кооперативной игрой называется пара $Ko = (A, u)$. Дележом игры будет называться такой вектор $y = (y^a,\ a \in A)$, который удовлетворяет следующим условиям:

$$\sum_{a \in A} y^a = u(A),\ y^a \geq u(a),\ a \in A\ .$$

В теории кооперативных игр нет одного единственного понятия разумного дележа. Кроме того, различные критерии оптимальности приводят к различным множествам дележей. Рассмотрим вектор Шепли.

Преимущество этого критерия оптимальности заключается в следующем. Такой дележ всегда существует. Он представляет некоторое распределение, где выигрыш каждого агента принимает значение его среднего вклада в выигрыш общей коалиции. Более формально, вектор Шепли - это такой дележ, в котором каждый игрок игры получает выигрыш равный математическому ожиданию собственного вклада в рассматриваемую коалицию с учетом того, что упорядочения равновероятны:

$$\Phi(u) = \frac{1}{n!} \sum_{t \in T} x_t ,$$

n - число игроков, x_t - распределение выигрыша, T - множество упорядочений игроков.

Глава 4. Решение задачи размещения на примере

4.1 Условия задачи

Рассмотрим сеть N - рисунок 4.1, состоящую из 42-х вершин $x_0, \ldots x_{41}$ и 70-и ребер. На ребрах сети задаются значения функций транспортно-коррупционных издержек. Для клиентов и продавцов они различны. В вершинах x_{10} и x_7 находятся источники сырья, на схеме ниже они выделены оранжевым цветом. В вершинах x_0 и x_{12} находятся пункты производства, на схеме они выделены красным цветом. Стоимость единицы продукта для продавцов в этих вершинах неизвестно. Вместо этого заданы вероятности той или мной цены. В сети выделено четыре вершины x_5, x_{21}, x_{37}, x_{39}, в которых продавцы могут расположить свои пункты распределения, на схеме они выделены зеленым цветом. Пункты распределения не могут располагаться в одной вершине. Наценка продавца составляет 100% от суммы издержек продавца на покупку товара, а также зависит от издержек на перевозку товара вдоль пути из источника сырья в пункт распределения. В вершинах x_8, x_9, x_{18}, x_{20}, x_{33}, x_{41} сети N располагаются клиенты, покупающие товар. На схеме они выделены желтым цветом.

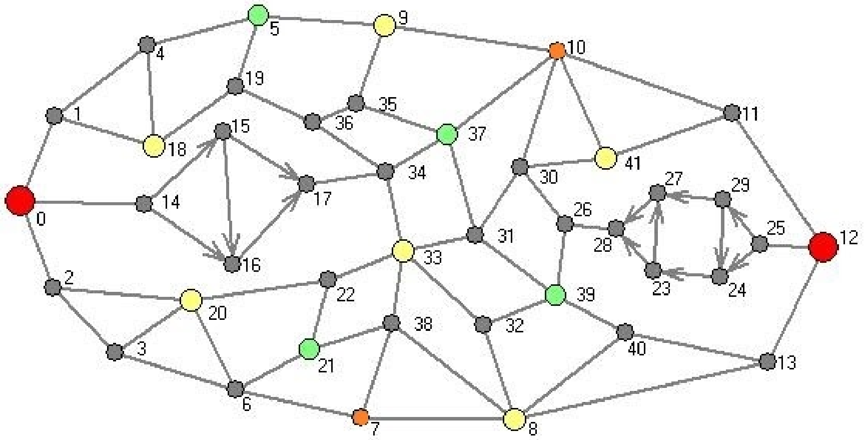

Рис.4.1 *Схема транспортной сети*

На двух участках этого графа издержки на перевозку товара зависят от числа продукции n, которое нужно перевезти по ребру. Они задаются следующим образом: $4n$ для участков (14,15), (16,17), (25,29) и (27,28), $12+n$ для (15,17) и (14,16), $4+n$ для участков (15,16), (25,24) и (23,28), $2+n$ для (29,27) и (24,23) и n для (29,24) и (27,23).

Оценим издержки на участке (14,17), изображенной на рисунке 1.2, который состоит из 7 ребер. Допустим, что по этому участку перевозят 2 единицы товара. Рассмотрим три различных маршрута, по которым могут перевозиться товары и построим систему уравнений. Для этого пронумеруем каждый возможный маршрут и запишем номера ребер, входящих в этот путь.

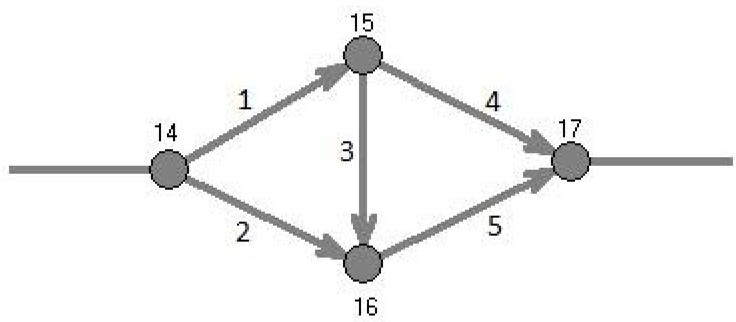

Рис. 4.2 *Часть рассматриваемой сети*

№ маршрута	ребра, входящие в маршрут
1	1-4
2	1-3-5
3	2-5

Табл. 4.1 *Рассматриваемые маршруты*

Затраты на преодоление каждого пути зависят от числа перевозимых по этому маршруту товаров. Обозначим x_1, x_2, x_3 как число товаров, перевозимых по маршруту с соответствующим номером. Расходы на каждый маршрут можно записать следующим образом:

1. $4(x_1 + x_2) + 12 + x_1$ - первый маршрут
2. $4(x_1 + x_2) + 4 + x_2 + 4(x_2 + x_3)$ - второй маршрут
3. $12 + x_3 + 4(x_2 + x_3)$ - третий маршрут

Данная система приводится к следующему виду:

1. $5x_1 + 4x_2 + 12$
2. $4x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 4$
3. $4x_2 + 5x_3 + 12$

Для равновесия по Нэшу необходимо приравнять полученные выражения, что приводит к следующей системе:

$$5x_1 + 4x_2 + 12 = 4x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 4 = 4x_2 + 5x_3 + 12$$

Кроме того, известно, что $x_1 + x_2 + x_3 = 2$, тогда получаем следующую систему:

$$x_1 - 5x_2 - 4x_3 + 8 = 0$$

$$-4x_1 - 5x_2 + x_3 + 8 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

Решением данной системы будет:

$$x_1 = \tfrac{2}{7}$$

$$x_2 = \tfrac{10}{7}$$

$$x_3 = \tfrac{2}{7}$$

Подставляя это решение в первоначальную систему, находим общие затраты на участке (14,17). Они принимают значение $19\frac{1}{7}$.

Теперь оценим издержки на участке (25,28), изображенной на рисунке 4.3, который состоит из 8 ребер. Также считаем, что по этому участку перевозят 2 единицы товара. Рассмотрим четыре различных маршрута, по которым могут перевозиться товары и построим систему уравнений. Для этого пронумеруем каждый возможный маршрут и запишем номера ребер, входящих в этот путь.

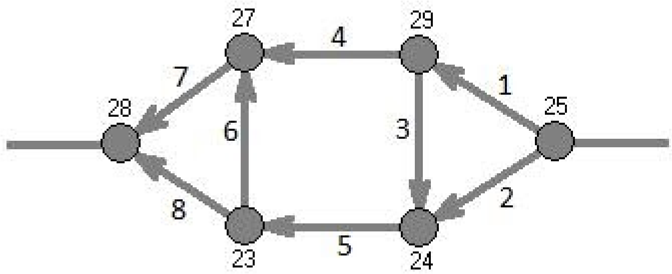

Рис. 4.3 *Часть рассматриваемой сети*

№ маршрута	ребра, входящие в маршрут
1	1-4-7
2	1-3-5-6-7
3	2-5-6-7
4	2-5-8

Табл. 4.2 *Рассматриваемые маршруты*

Затраты на преодоление каждого пути зависят от числа перевозимых по этому маршруту товаров. Обозначим x_1, x_2, x_3, x_4 как число товаров, перевозимых по маршруту с соответствующим номером. Расходы на каждый маршрут можно записать следующим образом:

1. $4(x_1 + x_2) + 2 + x_1 + 4(x_1 + x_2 + x_3)$ - первый маршрут

2. $4(x_1 + x_2) + x_2 + 2 + (x_2 + x_3 + x_4) + x_2 + x_3 + 4(x_1 + x_2 + x_3)$ - второй маршрут

3. $4 + (x_3 + x_4) + 2 + (x_2 + x_3 + x_4) + x_2 + x_3 + 4(x_1 + x_2 + x_3)$ - третий маршрут

4. $4 + (x_3 + x_4) + 3 + (x_2 + x_3 + x_4) + 4 + x_4$ - четвертый маршрут

Данная система приводится к следующему виду:

1. $9x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 2$
2. $8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + x_4 + 2$
3. $4x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 2x_4 + 6$
4. $x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 11$

Для равновесия по Нэшу необходимо приравнять полученные выражения, что приводит к следующей системе:

$$9x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 2 = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + x_4 + 2 =$$
$$= 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 2x_4 + 6 = x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 11$$

Кроме того, известно что $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$, тогда получаем следующую систему:

$$9x_1 + 7x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 9 = 0$$
$$8x_1 + 10x_2 + 4x_3 - 2x_4 - 9 = 0$$
$$4x_1 + 5x_2 + 5x_3 - x_4 - 5 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$$

Решением данной системы будет:

$$x_1 = \frac{25}{22}$$

$$x_2 = \frac{7}{132}$$

$$x_3 = \frac{1}{6}$$

$$x_4 = \frac{85}{132}$$

Подставляя это решение в первоначальную систему, находим общие затраты на участке (12,26). Они принимают значение $13\frac{7}{22}$.

Далее рассмотрим издержки на перевозку товара, заданные следующей таблицей 4.3, как для продавцов, так и для покупателей.

(x,y)	$C_a'(x,y)$	$\gamma_a(x,y)$	$C_b'(x,y)$	$\gamma_b(x,y)$	$C_a(x,y)$	$C_b(x,y)$
(0,1)	9	5	9	5	14	14
(1,4)	4	4	4	3	8	7
(4,5)	3	0	3	0	3	3
(5,9)	10	2	2	3	12	5
(9,10)	1	6	1	2	7	3
(10,11)	6	4	6	3	10	8
(11,12)	4	5	11	5	9	16
(12,13)	11	5	6	6	16	12
(13,8)	3	1	5	3	4	8
(8,7)	4	5	6	5	9	11
(7,6)	8	0	2	2	8	4
(6,3)	8	3	1	4	11	5
(3,2)	10	1	3	1	11	3
(2,0)	6	5	8	7	11	15
(1,18)	3	3	3	4	6	7
(4,18)	5	2	6	3	7	9

(5,19)	7	3	3	2	10	5
(9,35)	3	1	3	3	4	6
(10,37)	8	3	3	1	11	4
(10,30)	10	4	6	2	14	8
(10,41)	8	3	5	0	11	5
(11,41)	3	1	7	3	4	10
(13,40)	4	4	2	0	8	2
(8,40)	9	5	4	3	14	7
(8,32)	10	5	4	3	15	7
(8,38)	6	2	6	5	8	11
(7,38)	10	4	3	4	14	7
(6,21)	5	1	4	2	6	6
(6,20)	5	3	7	3	8	10
(3,20)	4	2	4	1	6	5
(2,20)	1	3	2	3	4	5
(20,22)	4	5	3	1	9	4
(22,21)	10	0	2	2	10	4
(21,38)	1	7	5	3	8	8
(38,33)	6	3	4	2	9	6
(22,33)	3	4	1	4	7	5
(33,31)	9	0	1	5	9	6
(18,19)	9	2	4	3	11	7
(19,36)	9	3	3	0	12	3
(36,35)	7	3	5	3	10	8
(35,37)	6	5	3	3	11	6
(37,34)	4	4	5	3	8	8
(34,36)	3	4	3	1	7	4
(34,33)	9	5	2	4	14	6

(31,37)	11	4	1	3	15	4
(33,32)	3	5	3	5	8	8
(32,39)	2	7	6	2	9	8
(39,31)	2	6	2	4	8	6
(39,40)	9	3	4	2	12	6
(39,26)	3	0	5	3	3	8
(26,30)	4	4	1	3	8	4
(41,30)	5	3	3	1	8	4
(30,31)	10	0	2	0	10	2
(0,14)	8	1	4	2	9	6
(17,34)	7	5	5	2	12	7
(12,25)	4	4	3	0	8	3
(26,28)	9	1	4	3	10	7

Табл. 4.3 *Транспортно-коррупционные издержки*

Вычислим транспортно-коррупционные издержки при доставке сырья из источников сырья в пункты производства с помощью алгоритма Флойда.

	x_0	x_{12}
x_7	31	29
x_{10}	44	19

Табл. 4.4 *Транспортно-коррупционные издержки*

Пусть цена в пункте производства x_0 задана следующим образом:

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
30	35	40

Табл. 4.5 *Дискретное распределение цен в пункте* x_0

Аналогично для пункта производства x_{12} :

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
25	30	35

Табл. 4.6 *Дискретное распределение цен в пункте* x_{12}

Тогда цена покупки товара в пункте производства x_0 равна:

$A_{x_0} = \frac{1}{4} \times 30 + \frac{1}{4} \times 35 + \frac{1}{2} \times 40 = 36.25$, в данном случае это значение можно округлить до 36.

Аналогично для пункта производства x_{12} :

$A_{x_{12}} = \frac{1}{4} \times 25 + \frac{1}{2} \times 30 + \frac{1}{4} \times 35 = 30$

Далее найдем издержки перевозки товаров во все возможные точки расположения пунктов продаж из пунктов производства с помощью алгоритма Флойда-Уоршелла.

	x_5	x_{21}	x_{37}	x_{39}
x_0	25	29	48	48
x_{12}	38	36	30	32

Табл. 4.7 *Транспортные издержки*

Стоимость продукции в каждом пункте продажи с учетом надбавок будет равна:

	x_5	x_{21}	x_{37}	x_{39}
x_0	97	101	120	120
x_{12}	104	102	96	98

Табл. 4.8 *Цена продукции в разных пунктах*

Теперь для каждого покупателя найдем наименьшие веса путей до каждого вероятного места продажи:

	x_5	x_{21}	x_{37}	x_{39}
x_8	33	19	23	13
x_9	5	26	7	17
x_{18}	12	29	22	32
x_{20}	27	8	19	21
x_{33}	18	9	10	12
x_{41}	13	21	9	12

Табл. 4.9 *Кратчайшие расстояния до продавцов*

Найдем возможные доходы всех пунктов продаж R_i в зависимости от выбранного месторасположения без вычета транспортных издержек. В итоге имеется четыре ситуации:

	(5,21,37)	(5,21,39)	(5,37,39)	(21,37,39)
1	194	194	194	101
2	101	202	288	384
3	288	196	98	98

Табл. 4.10 *Допустимые ситуации*

4.2 Компромиссное решение и равновесие Нэша

Рассмотрим множество Z допустимых решений, где решение $z_s = ((p_1^{i_1} m_1^{j_1}), (p_2^{i_2} m_2^{j_2}), (p_3^{i_3} m_3^{j_3})),\ i_1,\ i_2, i_3 = 1, 2, 3;\ j_1, j_2, j_3 = 5,\ 21,\ 37,\ 39$ – вероятные точки расположения пунктов продаж. Найдем идеальный вектор M: $M = [M_1, M_2, M_3] = (max_s R_1(z_s),\ max_s R_2(z_s),\ max_s R_3(z_s))$ – наибольшие доходы j-ого продавца. В рассматриваемом примере $M = (194,\ 384,\ 288)$. Построим матрицу невязок $A^* = (M_1 - R_1(z_s), M_2 - R_2(z_s)\,, M_3 - R_3(z_s)) =$ $(\alpha_s, \beta_s, \gamma_s)$ для каждого допустимого решения.

0	283	0
0	182	92
0	96	190
93	0	190

В полученной матрице в каждой строке выбираем наибольшее значение $\delta_s = max_s\{\alpha_s, \beta_s, \gamma_s\}$. Далее выбирается наименьшее из этих максимальных значений $min_s\delta_s = (0,\ 182,\ 92)$. Таким образом, компромиссным решением является (194, 202, 196). Выигрыш продавцов с учетом вычета транспортных издержек (169, 173, 164). Следовательно, продавцов нужно поместить в точках $x_5,\ x_{21},\ x_{39}$.

Стоит отметить, что в данной задаче решение (194, 288, 98) является равновесием по Нэшу. Так ни одному магазину не выгодно отклоняться от данной стратегии, когда другие магазины выбирают именно эту стратегию при условии, что если игрок выбирает расположение, отличное от выбора других игроков, он не получает никакого выигрыша. То есть, когда два первых игрока выбирают местоположение (5, 37, 39), третий игрок имеет выигрыш 98, что на первый взгляд кажется не самым наилучшим выбором для третьего игрока. Но если третий игрок отклонится от этого выбора, то он получит нулевой выигрыш из-за того, что другие игроки выбирают другое расположение. Поэтому третий игрок вынужден согласиться. Тогда расположение $x_5,\ x_{37},\ x_{39}$ соответствует равновесному решению, что отличается от предыдущего оптимального расположения. Выигрыш продавцов в данном случае (169, 258, 66).

4.3 Вектор Шепли

Теперь рассмотрим ситуацию, когда магазины могут объединяться в коалиции по два или три агента и построим вектор Шепли для каждого возможного случая расположения магазинов. Найдем кратчайшие расстояния от каждого пункта магазина к любому другому с помощью алгоритма Флойда.

	x_5	x_{21}	x_{37}	x_{39}
x_5	0	54	27	45
x_{21}	54	0	39	34
x_{37}	37	39	0	23
x_{39}	45	34	23	0

Табл. 4.11 *Кратчайшие расстояние между магазинами*

Далее для каждой ситуации найдем новые функции выигрыша магазинов, учитывая, что объединяясь в коалиции, продавцы имеют меньшие транспортно-коррупционные издержки, и построим вектор Шепли для каждого случая. Предположим, объединившись в коалицию, магазины тратят на 30% меньше от общей суммы транспортно-коррупционных издержек.

Рассмотрим ситуацию, когда магазины находятся в пунктах x_5, x_{21}, x_{37}. Пусть первый магазин будет обозначаться как A, второй как B, третий как C. Тогда получим: $\mu(A)$ = 194, $\mu(B)$ = 101, $\mu(C)$ = 288 – выигрыши коалиции размером один; $\mu(AB)$ = 309, $\mu(BC)$ = 406, $\mu(AC)$ = 499 – выигрыши коалиции размером два; $\mu(ABC)$ = 609 – выигрыш коалиции размером три.

	A	B	C
ABC	194	115	300
BAC	208	101	300
ACB	194	110	305
BCA	203	101	305
CAB	211	110	288
CBA	203	118	288
сумма	1213	655	1786

Табл. 4.12 *Вклады игроков в ситуации* x_5, x_{21}, x_{37} *при различных упорядочиваниях*

Тогда вектор Шепли в данном случае расположения магазинов (202, 109, 297).

Рассмотрим ситуацию, когда магазины находятся в пунктах x_5, x_{21}, x_{39}. Пусть первый магазин будет обозначаться как A, второй как B, третий как C. Тогда получим: $\mu(A)$ = 194, $\mu(B)$ = 202, $\mu(C)$ = 196 – выигрыши коалиции размером один; $\mu(AB)$ = 413, $\mu(BC)$ = 417, $\mu(AC)$ = 408 – выигрыши коалиции размером два; $\mu(ABC)$ = 618 – выигрыш коалиции размером три.

	A	B	C
ABC	194	219	205
BAC	211	202	205
ACB	194	210	214
BCA	201	202	215
CAB	212	210	196
CBA	201	221	196
сумма	1213	1264	1231

Табл. 4.13 *Вклады игроков в ситуации* x_5, x_{21}, x_{39} *при различных упорядочиваниях*

Тогда вектор Шепли в данном случае расположения магазинов (202, 211, 205).

Рассмотрим ситуацию, когда магазины находятся в пунктах $x_5,\ x_{37},\ x_{39}$. Пусть первый магазин будет обозначаться как A, второй как B, третий как C. Тогда получим: $\mu(A)$ = 194, $\mu(B)$ = 288, $\mu(C)$ = 98 – выигрыши коалиции размером один; $\mu(AB)$ = 499, $\mu(BC)$ = 411, $\mu(AC)$ = 310 – выигрыши коалиции размером два; $\mu(ABC)$ = 603 – выигрыш коалиции размером три.

	A	B	C
ABC	194	305	104
BAC	211	288	104
ACB	194	293	116
BCA	192	288	123
CAB	212	293	98
CBA	192	313	98
сумма	1195	1780	643

Табл. 4.14 *Вклады игроков в ситуации* $x_5,\ x_{37},\ x_{39}$ *при различных упорядочиваниях*

Тогда вектор Шепли в данном случае расположения магазинов (199, 297, 107).

Рассмотрим ситуацию, когда магазины находятся в пунктах $x_{21},\ x_{37},\ x_{39}$. Пусть первый магазин будет обозначаться как A, второй как B, третий как C. Тогда получим: $\mu(A)$ = 101, $\mu(B)$ = 384, $\mu(C)$ = 98 – выигрыши коалиции размером один; $\mu(AB)$ = 503, $\mu(BC)$ = 507, $\mu(AC)$ = 218 – выигрыши коалиции размером два; $\mu(ABC)$ = 617 – выигрыш коалиции размером три.

	A	B	C
ABC	101	402	114
BAC	119	384	114
ACB	101	399	117
BCA	110	384	123
CAB	120	399	98
CBA	110	409	98
сумма	661	2377	664

Табл. 4.15 *Вклады игроков в ситуации* x_{21}, x_{37}, x_{39} *при различных упорядочиваниях*

Тогда вектор Шепли в данном случае расположения магазинов (110, 396, 111).

В итоге получается 4 ситуации:

	(5,21,37)	(5,21,39)	(5,37,39)	(21,37,39)
1	202	202	199	110
2	109	211	297	396
3	297	205	107	111

Табл. 4.16 *Допустимые ситуации для коалиций*

Рассмотрим множество Z допустимых решений, где решение $z_s = ((p_1^{i_1} m_1^{j_1}), (p_2^{i_2} m_2^{j_2}), (p_3^{i_3} m_3^{j_3})),\ i_1,\ i_2, i_3 = 1, 2, 3;\ j_1, j_2, j_3 = 5,\ 21,\ 37,\ 39$ –вероятные точки расположения пунктов продаж. Найдем идеальный вектор M: $M = [M_1, M_2, M_3] = (max_s R_1(z_s),\ max_s R_2(z_s),\ max_s R_3(z_s))$ – наибольшие доходы j-ого продавца. В рассматриваемом примере $M = (202,\ 396,\ 297)$. Построим матрицу невязок $A^* = (M_1 - R_1(z_s), M_2 - R_2(z_s), M_3 - R_3(z_s)) =$ $(\alpha_s, \beta_s, \gamma_s)$ для каждого допустимого решения.

0	287	0
0	186	92
3	99	190
92	0	186

В полученной матрице в каждой строке выбираем наибольшее значение $\delta_s = max_s\{\alpha_s, \beta_s, \gamma_s\}$. Далее выбирается наименьшее из этих максимальных значений $min_s\delta_s = (0,\ 186,\ 92)$. Таким образом, компромиссным решением является (202, 211, 205) для расположения $x_5,\ x_{21},\ x_{39}$ и (110, 396, 111) для расположения $x_{21},\ x_{37},\ x_{39}$. Таким образом, при формировании коалиции у игроков появился дополнительный вариант расположения, но так как дележ Шепли носит только рекомендательный характер, то коалиции предстоит выбор, какое именно из двух оптимальных расположений выбрать. Тогда продавцов, состоящих в коалиции из трех агентов, можно расположить либо в точках $x_{21},\ x_{37},\ x_{39}$, либо в $x_5,\ x_{21},\ x_{39}$.

Выводы

Поставленная задача была решена в полном объеме. Рассмотрена модель сети, на примере которой был показан алгоритм нахождения оптимального расположения продавцов, способных объединяться в коалиции, с помощью компромиссного решения, равновесия Нэша и вектора Шепли. Кроме того, в зависимости от выбора критерия оптимальности, может поменяться и оптимальное расположение агентов. В рассмотренном примере равновесие Нэша дало другой вариант размещения в отличии от остальных критериев, а дележ Шепли дал два варианта возможного размещения, один из которых совпадает с компромиссным решением. Следовательно объединение в коалиции может влиять на оптимальное расположение в сети.

Заключение

В данной работе была поставлена задача исследования поиска оптимального размещения продавцов в сети при известном расположении покупателей, пунктов производства товаров, источников сырья, а также при известных транспортно-коррупционных издержек и при неполноте информации о ценах. Кроме того, рассматривалась ситуация, когда продавцы могут объединяться в коалиции. Для решения этих задач были рассмотрены алгоритм Флойда-Уоршелла поиска кратчайшего пути в графе, а также следующие принципы оптимальности: компромиссное решение, равновесие Нэша и вектор Шепли. Была смоделирована сеть, на которой был продемонстрирован процесс нахождения оптимального расположения с учетом заданных условий для каждого принципа оптимальности. Кроме того, было показано, что объединение в коалиции может не только увеличить выигрыш каждого игрока, но и повлиять на выбор оптимального расположения продавца.

Список литературы

1. Петросян, Л.А.; Зенкевич, Н.А.; Шевкопляс, Е.В. *Теория игр*. / БХВ-Петербург, 2012. 424 стр.
2. Малафеев, О.А.; Колокольцев, В.Н. *Введение в математический анализ многоагентных систем конкуренции и кооперации (теория игр для всех). (монография)*. / Санкт-Петербургский государственный университет сервиса и экономики, 2007.
3. *Шагин, В. Л. Теория игр*. / Москва : Юрайт, 2019. — 223 с.
4. Алексеев, В.Е.; Таланов, В.А. *Графы. Модели вычислений. Структуры данных.* / Нижегородского гос. университета, 2005. — 307 стр.
5. Галкина В.А. *Дискретная математика. Комбинаторная оптимизация на графах.* / Москва: Издательство "Гелиос АРВ", 2003. — 232 стр.
6. Ключарев, А.А.; Матьяш, В.А.; Щекин, С.В. *Структуры и алгоритмы обработки данных*. / СПб : ГУАП, 2003. - 172 с.
7. Миронова, Г.В. *Производственный менеджмент. / М: МГУП, 2007. 119 с*
8. Елизаров, Д.Э.; Бурковский, В.Л. *Алгоритм решения задачи оптимального размещения узлов обслуживания в условиях развивающихся мультисервисных сетей*. / Вестник ВГТУ. 2016. №3
9. Елизаров, Д.Э. *Алгоритмизация решения задачи о размещении на основе модификации метода ветвей и границ*. / Вестник ВГТУ. 2016. №5.
10. Манилов, А.Н. *Итеративный алгоритм решения производственно-транспортных задач размещения с нелинейной функцией затрат на производство*. / Известия СПбГАУ. 2017. №4 (49)
11. Зайцева, И.В.; Токарева, Г.В.; Ермакова, А.Н.; Резеньков, Д.Н.; Шлаев, Д.В. *Исследование территориального размещения трудовых ресурсов*

экономико-математическими методами. / Вестник ПНИПУ. Социально-экономические науки. 2018. №4