

Санкт-Петербургский государственный университет

КОЧЕТОВА Елена Николаевна

Выпускная квалификационная работа

***Методы удовлетворения граничных условий
в задаче деформирования плоского прямоугольника***

Уровень образования: бакалавриат

Направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Основная образовательная программа СВ.5005.* «Прикладная математика,
фундаментальная информатика и программирование»

Профиль 02 «Математическое и программное обеспечение
вычислительных машин»

Научный руководитель:

профессор кафедры информационных систем,
доктор физико-математических наук, доцент
Матросов Александр Васильевич

Рецензент:

зав. каф. высшей математики Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича, доктор технических наук, профессор
Голоскоков Дмитрий Петрович

Санкт-Петербург
2020

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|----|
| Введение | 3 |
| Постановка задачи..... | 4 |
| Обзор литературы..... | 6 |
| Глава 1. Алгоритм аналитического решения плоских изотропных задач теории упругости методом суперпозиции | 8 |
| 1.1 Метод начальных функций | 8 |
| 1.2 Метод суперпозиции | 15 |
| Глава 2. Реализация метода суперпозиции на примере расчета тонких изотропных прямоугольных пластин | 17 |
| 2.1 Исследование значений переменной $Digits$ | 17 |
| 2.2 Метод коллокаций | 19 |
| 2.3 Метод наименьших квадратов | 27 |
| Выводы | 37 |
| Заключение | 39 |
| Список литературы | 40 |

Введение

Требования, предъявляемые к повышению надежности на стадии проектирования облегченных строительных конструкций, объектов авиации и машиностроения, делают актуальной задачу совершенствования методов расчета прочности и жесткости несущих конструкций при наименьших затратах материалов.

В настоящее время в расчетной и исследовательской практике при решении задач теории упругости широко применяются методы численного моделирования (метод конечных элементов, конечно-элементный анализ с использованием ANSYS и другие). Этот подход подтвердил свою эффективность, но у него имеется ряд недостатков, например, неточное удовлетворение граничным условиям на гранях рассчитываемых тел, несоответствующее экспериментам распределение касательных напряжений в заделанных гранях и др. Поэтому построение аналитических, даже и приближенных, решений теории упругости при соблюдении граничных условий является актуальной задачей.

Особое значение придается аналитическим методам, ориентированным на применение вычислительной техники. В данной работе используется система аналитических вычислений Maple.

Целью работы является исследование аналитического метода расчета – метода суперпозиции на основе двух решений метода начальных функций для изотропного прямоугольника с различными граничными условиями (с двумя защемленными вертикальными сторонами и одной защемленной вертикальной стороной) при удовлетворении граничных условий разными методами: метод коллокации и метод наименьших квадратов.

Практическая значимость работы заключается в возможности использования реализованного в Maple алгоритма аналитического решения плоских изотропных задач в практике проектно-конструкторских организаций.

Постановка задачи

Постановка задачи

Рассматривается задача деформирования изотропного упругого прямоугольника, находящегося в условиях плоской деформации.

Требуется исследовать поведение на границе решения *метода суперпозиции* с использованием двух решений, полученных *методом начальных функций* [19, 20] для изотропного прямоугольника в зависимости от способа удовлетворения граничным условиям.

В работе [19] граничные условия удовлетворялись с помощью разложения их в ряды Фурье, а получение разрешающей СЛАУ выполнялось приравниванием коэффициентов при одинаковых гармониках в рядах граничных условий и рядах решения, вычисленных на соответствующих сторонах прямоугольника.

В данной ВКР были выбраны два метода: *метод коллокации* [25] и *метод наименьших квадратов* [22, 25], при применении которых нет необходимости в разложении в ряды Фурье граничных условий и самого решения на границе.

Требования к ожидаемому решению

Задача № 1. Определение в методе коллокаций на границе прямоугольника количества узлов, достаточного для получения удовлетворительных результатов (проведение эксперимента для 15, 31, 61 узлов, проверка сходимости по перемещению u , нормальному напряжению σ_x в горизонтальных сечениях, исследование значения переменной Maple Digits для определения области устойчивых расчетов).

Задача № 2. Фиксация количества членов в рядах Фурье решения 15, 31, 61, определение для каждого варианта улучшения решения методом наименьших квадратов при увеличении количества узлов T на сторонах прямоугольника, исследование значения переменной Digits.

Для проведения эксперимента используются два типа пластин ($h \times a$) с различными граничными условиями на сторонах прямоугольника (рис.1) и с равномерно распределенной нагрузкой на верхней грани.

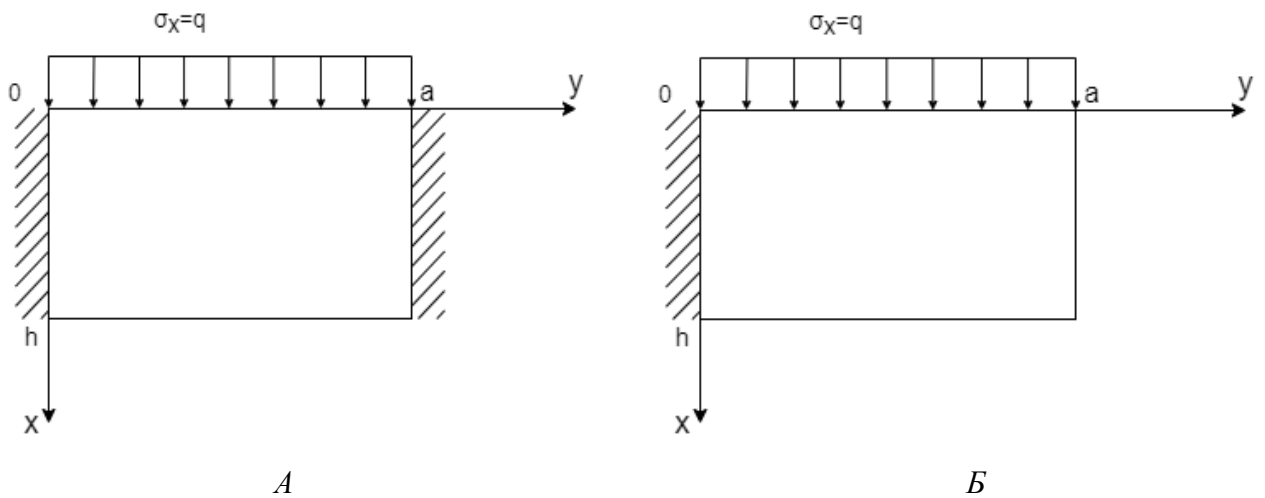


Рисунок 1 — Два типа пластин (А – с двумя защемленными вертикальными сторонами, Б – с одной защемленной вертикальной стороной)

Пластина А – граничные условия:

- На вертикальных защемленных сторонах $y = 0, a$ перемещения $u, v = 0$.
- На горизонтальной стороне $x = 0$ напряжения $\sigma_x = q, \tau_{xy} = 0$.
- На горизонтальной стороне $x = h$ напряжения $\sigma_x = 0, \tau_{xy} = 0$.

Пластина Б – граничные условия:

- Одна защемленная вертикальная сторона $y = 0$ (консольная пластина).
- На вертикальной защемленной стороне $y = 0$ перемещения $u, v = 0$.
- На горизонтальной стороне $x = 0$ напряжения $\sigma_x = q, \tau_{xy} = 0$.
- На горизонтальной стороне $x = h$ напряжения $\sigma_x = 0, \tau_{xy} = 0$.
- На вертикальной стороне $y = a$ напряжения $\sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0$.

Для каждого расчета (эксперимента) требуется представить результаты в виде графиков в разных сечениях:

- u, σ_x в горизонтальных сечениях,
- u, σ_y, τ_{xy} в вертикальных сечениях.

Обзор литературы

Метод Фурье, или разделения переменных, достаточно широко применяется для построения приближенного аналитического решения уравнений математической физики, позволяющих разделить переменные. Его идея проста: представить, решение в виде произведения функций, каждая из которых зависит только от одной неизвестной переменной, и свести решение задачи к решению ряда краевых или начальных для обыкновенных дифференциальных уравнений, которым подчиняются функции в произведении. Это классический метод, достаточно хорошо освещенный в литературе. С его помощью решены задачи колебания струны, теплопроводности и другие [12, 15, 23, 24].

Для решения задач математической физики большой популярностью пользуются вариационные методы [22]. Эти подходы сводят решение краевой задачи к равносильной задаче нахождения функции, сообщающей минимум некоторому функционалу. Эту последнюю задачу с помощью так называемых прямых методов сводят к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Одним из таких методов является метод Вальтера Ритца [8, 9]. В нем искомое решение ищется в виде разложения по заранее выбранным (координатным) функциям, удовлетворяющим заданным граничным условиям задачи. Подстановка решения в минимизируемый функционал, приравнивание нулю производных по неизвестным коэффициентам разложения искомой функции приводит к СЛАУ бесконечной размерности. Сохраняя в решении конечное число членов, можно получать приближения к решению с произвольной точностью.

Разновидностью метода Ритца можно считать метод Бубнова-Галёркина [11, 25]. В нем искомая функция также представляется в виде разложения по определенной системе координатных функций, но СЛАУ строится не из минимизации некоторого функционала, а из условий ортогональности полученного решения координатным функциям.

Оба этих прямых метода прекрасно работают, если найдена подходящая система координатных функций, которые удовлетворяют граничным условиям решаемой задачи.

Для решения задач теории упругости в прямоугольной области применяется метод суперпозиции, предложенный еще в 19 веке Габриэлем Ламе [3]. Суть его заключается в том, что если есть два решения, каждое из которых позволяет удовлетворить граничным условиям на двух противоположных сторонах прямоугольника, то их сумма позволит удовлетворить граничным условиям на всех четырех сторонах прямоугольника. Этот подход также приводит к СЛАУ бесконечной размерности относительно неизвестных коэффициентов в двух решениях, если они представлены, например, рядами Фурье [4, 6, 7, 13, 14].

Для нахождения двух решений в методе суперпозиции оказался эффективным метод начальных функций (МНФ), предложенный А.И. Лурье [16, 17], В.З. Власовым [10] и А.С. Малиевым [18]. Его идея проста: представить решение задачи через начальные функции, заданные на начальной линии, являющейся одной из сторон прямоугольника. Две начальные функции будут известны из граничных условий на этой стороне, а две другие могут быть найдены из двух граничных условий, определенных на противоположной стороне прямоугольника. Два таких решения с начальными линиями на двух смежных сторонах прямоугольника позволят удовлетворить граничным условиям на всех его четырех сторонах. Этот метод имеет и самостоятельное значение в случае представления начальных функций тригонометрическими рядами. С его помощью решено много интересных задач теории упругости [1, 2, 5, 19, 21].

Глава 1. Алгоритм аналитического решения плоских изотропных задач теории упругости методом суперпозиции

1.1 Метод начальных функций

Рассмотрим в рамках плоской задачи теории упругости изотропную полосу толщиной a , ограниченную двумя линиями $x = 0$ и $x = h$ с заданными на них граничными условиями – такими, что слой находится в равновесии.

Описание решения для случая задания начальных функций по направлению x на нулевой координатной линии $x = 0$.

Будем считать, что на грани $x = 0$ заданы начальные функции

$$\bar{U}_0 = \{u_0, v_0, \sigma_x^0, \tau_{xy}^0\},$$

являющиеся компонентами напряженно-деформированного состояния, как функции переменной y

$$u_0 = u_0(y) \text{ – перемещение по оси } x,$$

$$v_0 = v_0(y) \text{ – перемещение по оси } y,$$

$$\sigma_x^0 = \sigma_x^0(y) \text{ – нормальное напряжение,}$$

$$\tau_{xy}^0 = \tau_{xy}^0(y) \text{ – касательное напряжение.}$$

Решение в произвольной точке упругого слоя в соответствии с методом начальных функций [4, 10, 19] может быть получено как

$$\bar{U} = \bar{L}\bar{U}_0,$$

где $\bar{U} = \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{\sigma}_x, \bar{\tau}_{xy}, \bar{\sigma}_y\}$ – вектор-столбец компонентов напряженно-деформированного состояния (НДС),

$$\bar{U}_0 = \{\bar{u}_0, \bar{v}_0, \bar{\sigma}_x^0, \bar{\tau}_{xy}^0\} \text{ – вектор-столбец начальных функций,}$$

\bar{L} – матрица размерности 5×4 операторов МНФ, зависящих от физико-механических характеристик материала (модуль Юнга E и коэффициент

Пуассона ν), независимой переменной x и оператора дифференцирования ∂_y по переменной y .

Компоненты матрицы операторов МНФ представлены ниже:

$$\bar{L}_{11} = \bar{L}_{33} = \frac{-x\partial_y \sin(x\partial_y) + 2(\nu - 1) \cos(x\partial_y)}{2(\nu - 1)}$$

$$\bar{L}_{12} = \bar{L}_{43} = \frac{2(\nu - 1) \sin(x\partial_y) + x\partial_y \cos(x\partial_y)}{2(\nu - 1)}$$

$$\bar{L}_{13} = -\frac{(4\nu - 3) \sin(x\partial_y) + x\partial_y \cos(x\partial_y)}{2(\nu - 1)^2 E \partial_y}$$

$$\bar{L}_{14} = \bar{L}_{23} = \frac{x \sin(x\partial_y)}{2(\nu - 1)^2 E}$$

$$\bar{L}_{21} = \bar{L}_{34} = \frac{-2(\nu - 1) \sin(x\partial_y) + x\partial_y \cos(x\partial_y)}{2(\nu - 1)}$$

$$\bar{L}_{22} = \bar{L}_{44} = \frac{x\partial_y \sin(x\partial_y) + 2(\nu - 1) \cos(x\partial_y)}{2(\nu - 1)}$$

$$\bar{L}_{24} = \frac{-(4\nu - 3) \sin(x\partial_y) + x\partial_y \cos(x\partial_y)}{2(\nu - 1)^2 E \partial_y}$$

$$\bar{L}_{31} = \frac{E \partial_y (\sin(x\partial_y) - x\partial_y \cos(x\partial_y))}{2}$$

$$\bar{L}_{32} = \bar{L}_{41} = \frac{E \partial_y^2 x \sin(x\partial_y)}{2}$$

$$\bar{L}_{42} = \bar{L}_{51} = \frac{E \partial_y (\sin(x\partial_y) + x\partial_y \cos(x\partial_y))}{2}$$

$$\bar{L}_{52} = \frac{E \partial_y (x\partial_y \sin(x\partial_y) - 2 \cos(x\partial_y))}{2}$$

$$\bar{L}_{53} = \frac{x\partial_y \sin(x\partial_y) - 2\nu \cos(x\partial_y)}{2(\nu - 1)}$$

$$\bar{L}_{54} = \frac{(2\nu - 3) \sin(x\partial_y) - x\partial_y \cos(x\partial_y)}{2(\nu - 1)}$$

Если начальные функции заданы тригонометрическими функциями вида

$$\bar{\bar{U}}_0 \equiv \bar{\bar{U}}_0^s = \left\{ g_1^{s,n} s_n^a, g_2^{s,n} c_n^a, g_3^{s,n} s_n^a, g_4^{s,n} c_n^a \right\},$$

где $c_n^a = \cos(\beta_n y)$,

$s_n^a = \sin(\beta_n y)$,

$$\beta_n = \frac{n\pi}{a}$$

а $g_j^{s,n}$ ($j = 1, \dots, 4$) – некоторые произвольные постоянные, которые

определяются из решения конкретных краевых задач,

то в этом случае вектор компонентов напряженного-деформированного состояния (НДС) представляется в виде

$$\bar{U} \equiv \bar{U}^{s,n} = \left\{ \bar{L}_1^{s,n} s_n^a, \bar{L}_2^{s,n} c_n^a, \bar{L}_3^{s,n} s_n^a, \bar{L}_4^{s,n} c_n^a, \bar{L}_5^{s,n} s_n^a \right\},$$

где $\bar{L}_i^{s,n} = \sum_{j=1}^4 \bar{\bar{L}}_{ij}^{s,n} g_j^{s,n}$.

Здесь $\bar{\bar{L}}_{ij}^{s,n}$ – это результат воздействия оператора \bar{L}_{ij}

на соответствующую тригонометрическую функцию.

Результаты воздействия операторов МНФ (значения операторов) на тригонометрические функции вычисляются через их представление в виде степенных рядов с учетом разложения в степенные ряды тригонометрических функций:

$$\begin{aligned} \sin(x\partial_y) \begin{bmatrix} \sin(\beta_n y) \\ \cos(\beta_n y) \end{bmatrix} &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i+1} \partial_y^{2i+1}}{(2i+1)!} \begin{bmatrix} \sin(\beta_n y) \\ \cos(\beta_n y) \end{bmatrix} = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\beta_n^{2i+1} x^{2i+1}}{(2i+1)!} \begin{bmatrix} \cos(\beta_n y) \\ -\sin(\beta_n y) \end{bmatrix} = \operatorname{sh}(\beta_n x) \begin{bmatrix} \cos(\beta_n y) \\ -\sin(\beta_n y) \end{bmatrix}, \\ \cos(x\partial_y) \begin{bmatrix} \sin(\beta_n y) \\ \cos(\beta_n y) \end{bmatrix} &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i} \partial_y^{2i}}{(2i)!} \begin{bmatrix} \sin(\beta_n y) \\ \cos(\beta_n y) \end{bmatrix} = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\beta_n^{2i} x^{2i}}{(2i+1)!} \begin{bmatrix} \sin(\beta_n y) \\ \cos(\beta_n y) \end{bmatrix} = \operatorname{ch}(\beta_n x) \begin{bmatrix} \sin(\beta_n y) \\ \cos(\beta_n y) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

В этих формулах для суммирования рядов, получаемых после выполнения операций дифференцирования, использованы степенные ряды гиперболических функций

$$sh(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

$$ch(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i}}{(2i)!}$$

Так, $\bar{L}_{11} = \frac{-x\partial_y \sin(x\partial_y) + 2(\nu-1) \cos(x\partial_y)}{2(\nu-1)}$, воздействующий на начальную

функцию $s_n^a = \sin(\beta_n y)$, принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{-x\partial_y \sin(x\partial_y) + 2(\nu-1) \cos(x\partial_y)}{2(\nu-1)} \right] \sin(\beta_n y) = \\ & = \frac{\beta_n x sh(\beta_n x) + 2(\nu-1) ch(\beta_n x)}{2(\nu-1)} \sin(\beta_n y) \end{aligned}$$

Остальные члены матрицы $\bar{L}^{\cong s,n}$ получаются аналогично.

Значения операторов в замкнутой форме для плоско-деформированного состояния изотропного тела получены в виде [20]:

$$\bar{L}_{11}^{\cong s,n} = \bar{L}_{33}^{\cong s,n} = \frac{\beta_n x sh(\beta_n x) + 2(\nu-1) ch(\beta_n x)}{2(\nu-1)}$$

$$\bar{L}_{12}^{\cong s,n} = \bar{L}_{43}^{\cong s,n} = \frac{(2\nu-1) sh(\beta_n x) + \beta_n x ch(\beta_n x)}{2(\nu-1)}$$

$$\bar{L}_{13}^{\cong s,n} = \frac{(4\nu-3) sh(\beta_n x) + \beta_n x ch(\beta_n x)}{2(\nu-1)^2 E \beta_n}$$

$$\bar{L}_{14}^{\cong s,n} = -\bar{L}_{23}^{\cong s,n} \frac{x sh(\beta_n x)}{2(\nu-1)^2 E}$$

$$\bar{L}_{21}^{\cong s,n} = \bar{L}_{34}^{\cong s,n} = \frac{(2\nu-1) sh(\beta_n x) - \beta_n x ch(\beta_n x)}{2(\nu-1)}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{L}}_{22}^{s,n} &= \bar{\bar{L}}_{44}^{s,n} = \frac{-\beta_n x sh(\beta_n x) + 2(\nu - 1)ch(\beta_n x)}{2(\nu - 1)} \\
\bar{\bar{L}}_{24}^{s,n} &= -\frac{(4\nu - 3)sh(\beta_n x) - \beta_n xch(\beta_n x)}{2(\nu - 1)^2 E\beta_n} \\
\bar{\bar{L}}_{31}^{s,n} &= \frac{E\beta_n (sh(\beta_n x) - \beta_n xch(\beta_n x))}{2} \\
\bar{\bar{L}}_{32}^{s,n} &= -\bar{\bar{L}}_{41}^{s,n} = \frac{E\beta_n^2 xsh(\beta_n x)}{2} \\
\bar{\bar{L}}_{42}^{s,n} &= \frac{E\beta_n (sh(\beta_n x) + \beta_n xch(\beta_n x))}{2} \\
\bar{\bar{L}}_{51}^{s,n} &= \frac{E\beta_n (sh(\beta_n x) + \beta_n xch(\beta_n x))}{2} \\
\bar{\bar{L}}_{52}^{s,n} &= -\frac{E\beta_n (\beta_n xsh(\beta_n x) + 2ch(\beta_n x))}{2} \\
\bar{\bar{L}}_{53}^{s,n} &= -\frac{\beta_n xsh(\beta_n x) + 2\nu ch(\beta_n x)}{2(\nu - 1)} \\
\bar{\bar{L}}_{54}^{s,n} &= -\frac{(2\nu - 3)sh(\beta_n x) - \beta_n xch(\beta_n x)}{2(\nu - 1)}
\end{aligned}$$

Полученное выше решение является решением для периодически нагруженного бесконечного слоя. Если из него вырезать прямоугольник линиями $y = 0, a$, то это решение будет решением для прямоугольника со следующими граничными условиями на вертикальных сторонах $y = 0, a$: $\bar{u} = 0, \bar{\sigma}_y = 0$.

Можно построить второе решение МНФ для случая задания начальных функций на координатной линии $y = 0$:

$$\bar{U} = \bar{L}\bar{U}_0,$$

где $\bar{U}_0 = \{\bar{u}_0(x), \bar{v}_0(x), \bar{\sigma}_y^0(x), \bar{\tau}_{xy}^0(x)\}$ – вектор-столбец начальных функций, а \bar{L} – матрица размерности 5×4 операторов МНФ со следующими компонентами:

$$\begin{aligned}
\bar{L}_{11} = \bar{L}_{44} &= \frac{y\partial_x \sin(y\partial_x) + 2(\nu - 1) \cos(y\partial_x)}{2(\nu - 1)} \\
\bar{L}_{12} = \bar{L}_{34} &= -\frac{(2\nu - 1) \sin(y\partial_x) - y\partial_x \cos(y\partial_x)}{2(\nu - 1)} \\
\bar{L}_{13} = \bar{L}_{24} &= \frac{y \sin(y\partial_x)}{2(\nu - 1)^2 E} \\
\bar{L}_{14} &= -\frac{(4\nu - 3) \sin(y\partial_x) - y\partial_x \cos(y\partial_x)}{2(\nu - 1)^2 E \partial_x} \\
\bar{L}_{21} = \bar{L}_{43} &= \frac{2(\nu - 1) \sin(y\partial_x) + y\partial_x \cos(y\partial_x)}{2(\nu - 1)} \\
\bar{L}_{22} = \bar{L}_{33} &= -\frac{y\partial_x \sin(y\partial_x) - 2(\nu - 1) \cos(y\partial_x)}{2(\nu - 1)} \\
\bar{L}_{23} &= -\frac{(4\nu - 3) \sin(y\partial_x) - y\partial_x \cos(y\partial_x)}{2(\nu - 1)^2 E \partial_x} \\
\bar{L}_{31} = \bar{L}_{42} &= \frac{y\partial_x^2 E \sin(y\partial_x)}{2} \\
\bar{L}_{32} &= -\frac{E \partial_x (\sin(y\partial_x) - y\partial_x \cos(y\partial_x))}{2} \\
\bar{L}_{41} &= -\frac{E \partial_x (\sin(y\partial_x) + y\partial_x \cos(y\partial_x))}{2} \\
\bar{L}_{51} &= -\frac{E \partial_x (y\partial_x \sin(y\partial_x) - 2 \cos(y\partial_x))}{2} \\
\bar{L}_{52} &= -\frac{E \partial_x (\sin(y\partial_x) + y\partial_x \cos(y\partial_x))}{2} \\
\bar{L}_{53} &= \frac{y\partial_x \sin(y\partial_x) - 2\nu \cos(y\partial_x)}{2(\nu - 1)} \\
\bar{L}_{21} = \bar{L}_{43} &= \frac{(2\nu - 3) \sin(y\partial_x) - y\partial_x \cos(y\partial_x)}{2(\nu - 1)}
\end{aligned}$$

Представим начальные функции в виде тригонометрических функций:

$$\bar{U}_0 \equiv \bar{U}_0^s = \left\{ h_1^{s,m} c_m^h, h_2^{s,m} s_m^h, h_3^{s,m} s_m^h, h_4^{s,m} c_m^h \right\}$$

где $c_m^h = \cos(\alpha_m x)$,

$s_m^h = \sin(\alpha_m x)$,

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{h},$$

а $h_j^{s,m}$ ($j = 1, \dots, 4$) – некоторые произвольные постоянные, которые определяются из решения конкретных краевых задач,

Значения $\tilde{L}^{s,m}$ операторов метода начальных функций на тригонометрических функциях для плоского деформированного состояния изотропного тела получены в виде:

$$\tilde{L}_{11}^{s,m} = \tilde{L}_{44}^{s,m} = \frac{-y\alpha_m sh(\alpha_m y) + 2(\nu - 1)ch(\alpha_m y)}{2(\nu - 1)}$$

$$\tilde{L}_{12}^{s,m} = -\tilde{L}_{34}^{s,m} = \frac{(2\nu - 1)sh(\alpha_m y) - \alpha_m ych(\alpha_m y)}{2(\nu - 1)}$$

$$\tilde{L}_{13}^{s,m} = -\tilde{L}_{24}^{s,m} = -\frac{y sh(\alpha_m y)}{2(\nu - 1)^2 E}$$

$$\tilde{L}_{14}^{s,m} = \frac{(4\nu - 3)sh(\alpha_m y) - \alpha_m ych(\alpha_m y)}{2(\nu - 1)^2 E \alpha_m}$$

$$\tilde{L}_{21}^{s,m} = -\tilde{L}_{43}^{s,m} = \frac{(2\nu - 1)sh(\alpha_m y) + \alpha_m ych(\alpha_m y)}{2(\nu - 1)}$$

$$\tilde{L}_{22}^{s,m} = \tilde{L}_{33}^{s,m} = \frac{\alpha_m y sh(\alpha_m y) + 2(\nu - 1)ch(\alpha_m y)}{2(\nu - 1)}$$

$$\tilde{L}_{23}^{s,m} = \frac{(4\nu - 3)sh(\alpha_m y) + \alpha_m ych(\alpha_m y)}{2(\nu - 1)^2 E \alpha_m}$$

$$\tilde{L}_{31}^{s,m} = -\tilde{L}_{42}^{s,m} = \frac{\alpha_m^2 y E sh(\alpha_m y)}{2}$$

$$\tilde{L}_{32}^{s,m} = \frac{E \alpha_m (sh(\alpha_m y) - \alpha_m ych(\alpha_m y))}{2}$$

$$\tilde{L}_{41}^{s,m} = \frac{E \alpha_m (sh(\alpha_m y) + \alpha_m ych(\alpha_m y))}{2}$$

$$\tilde{L}_{51}^{s,m} = \frac{E \alpha_m (\alpha_m y sh(\alpha_m y) + 2ch(\alpha_m y))}{2}$$

$$\tilde{L}_{52}^{s,m} = \frac{E\alpha_m (sh(\alpha_m y) + \alpha_m y ch(\alpha_m y))}{2}$$

$$\tilde{L}_{53}^{s,m} = -\frac{\alpha_m y sh(\alpha_m y) + 2\nu ch(\alpha_m y)}{2(\nu - 1)}$$

$$\tilde{L}_{54}^{s,m} = -\frac{(2\nu - 3)sh(\alpha_m y) - \alpha_m y ch(\alpha_m y)}{2(\nu - 1)}$$

1.2 Метод суперпозиции

Общим решением задачи для прямоугольной пластины в соответствии с подходом Ламе [3] будет сумма двух решений, первое из которых позволяет удовлетворить граничным условиям на гранях $y = 0, a$, а второе – на гранях $x = 0, h$.

$$U = U_1 + U_2,$$

где $U \equiv \{u(x, y), v(x, y), \sigma_x(x, y), \tau_{xy}(x, y), \sigma_y(x, y)\}$,

U_1 – решение, позволяющее удовлетворить граничным условиям на гранях $x = 0, h$

U_2 – решение, позволяющее удовлетворить граничным условиям на гранях $y = 0, a$

В качестве первого решения берем решение МНФ с начальной линией $x = 0$ в виде тригонометрического ряда

$$\bar{U}_1 \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \bar{U}_0^{s,m} = \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \bar{L}_1^{s,m} c_m^h, \sum_{m=1}^{\infty} \bar{L}_2^{s,m} s_m^h, \sum_{m=1}^{\infty} \bar{L}_3^{s,m} s_m^h, \sum_{m=0}^{\infty} \bar{L}_4^{s,m} c_m^h, \sum_{m=1}^{\infty} \bar{L}_5^{s,m} s_m^h \right\}$$

В этом решении присутствуют неизвестные константы

$$g_2^{s,0}, g_4^{s,0}, g_j^{s,m}, j = 1, \dots, 4, m = 1..M.$$

Второе решение – это решение МНФ с начальной линией $y = 0$

$$U_2 \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \bar{U}_0^{s,n} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \bar{L}_1^{s,n} s_n^a, \sum_{m=1}^{\infty} \bar{L}_2^{s,n} c_n^a, \sum_{m=1}^{\infty} \bar{L}_3^{s,n} s_n^a, \sum_{m=0}^{\infty} \bar{L}_4^{s,n} c_n^a, \sum_{m=1}^{\infty} \bar{L}_5^{s,n} s_n^a \right\}.$$

В этом решении присутствуют неизвестные константы

$$h_1^{s,0}, h_4^{s,0}, h_j^{s,n}, j = 1, \dots, 4, n = 1..N.$$

Таким образом, построено общее решение U , позволяющее удовлетворить ГУ на границах $x = 0, h$ и $y = 0, a$.

Нахождение неизвестных постоянных в общем решении осуществляется из системы уравнений, которые получаются при удовлетворении заданным ГУ задачи. В главе 2 данной работы рассмотрены два метода составления системы уравнений – метод коллокаций и метод наименьших квадратов.

Полученные решения плоской задачи теории упругости можно использовать для решения краевых задач прямоугольной области $(0, h) \times (0, a)$ в декартовой системе координат.

Таким образом, аналитическое решение в виде гиперболо-тригонометрических рядов можно записать как:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{p=1}^4 \sum_{m=0}^N \tilde{L}_{1p}^{s,m}(y) h_p^m \cos(\alpha_m x) + \sum_{p=1}^4 \sum_{n=1}^N \tilde{\tilde{L}}_{1p}^{s,n}(x) g_p^n \sin(\beta_n y), \\ v(x, y) &= \sum_{p=1}^4 \sum_{m=1}^N \tilde{L}_{2p}^{s,m}(y) h_p^m \sin(\alpha_m x) + \sum_{p=1}^4 \sum_{n=0}^N \tilde{\tilde{L}}_{2p}^{s,n}(x) g_p^n \cos(\beta_n y), \\ \sigma_x(x, y) &= \sum_{p=1}^4 \sum_{m=1}^N \tilde{L}_{5p}^{s,m}(y) h_p^m \sin(\alpha_m x) + \sum_{p=1}^4 \sum_{n=1}^N \tilde{\tilde{L}}_{3p}^{s,n}(x) g_p^n \sin(\beta_n y), \\ \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{p=1}^4 \sum_{m=0}^N \tilde{L}_{4p}^{s,m}(y) h_p^m \cos(\alpha_m x) + \sum_{p=1}^4 \sum_{n=0}^N \tilde{\tilde{L}}_{4p}^{s,n}(x) g_p^n \cos(\beta_n y), \\ \sigma_y(x, y) &= \sum_{p=1}^4 \sum_{m=1}^N \tilde{L}_{3p}^{s,m}(y) h_p^m \sin(\alpha_m x) + \sum_{p=1}^4 \sum_{n=1}^N \tilde{\tilde{L}}_{5p}^{s,n}(x) g_p^n \sin(\beta_n y). \end{aligned}$$

Глава 2. Реализация метода суперпозиции на примере расчета тонких изотропных прямоугольных пластин

В работе представлена реализация метода суперпозиции для плоских изотропных задач теории упругости на основе двух решений метода начальных функций (МНФ) для расчета деформирования плоского изотропного упругого прямоугольника конечного размера.

Расчеты производились для пластин с двумя защемленными вертикальными сторонами и с одной защемленной вертикальной стороной (консоль) под равномерно распределенной нагрузкой $q = 10 \text{ Н/м}^2$ на верхней грани и свойствами:

- размер $a = 10 \text{ м}$ (по оси y) и $h = 5 \text{ м}$ (по оси x),
- модуль упругости (модуль Юнга) $E = 200000 \text{ МПа}$,
- коэффициент Пуассона $\nu = 1/3$.

Для обеспечения вычислительной устойчивости численного алгоритма метода начальных функций все вычисления были проведены в системе аналитических вычислений Maple, которая дает возможность произвольно задавать длину мантииссы через переменную Digits.

Для удовлетворения граничным условиям использовались метод коллокаций [25] и метод наименьших квадратов [22, 25], так как они не требуют разложения в ряды Фурье граничных условий и решения на границе.

2.1 Исследование значений переменной Digits

Система аналитических вычислений Maple дает возможность задавать длину мантииссы через переменную Digits.

Для определения оптимального значения Digits проведены эксперименты для пластины с двумя защемленными вертикальными сторонами с использованием метода коллокации и метода наименьших квадратов для различных значений N (различных значений членов в рядах Фурье).

Исследуемые значения Digits: 10, 20, 30, 40, 50, 100, 200, 400. Результаты были представлены в виде графиков u , σ_x , v , σ_y , τ_{xy} в горизонтальном и в вертикальном сечениях.

На рисунке 2 приведены примеры графиков σ_x в горизонтальном сечении для Digits 30, 40, 50 при использовании метода коллокации. На рисунке 3 – примеры графиков σ_x в горизонтальном сечении для Digits 20, 30, 50 при использовании метода наименьших квадратов.

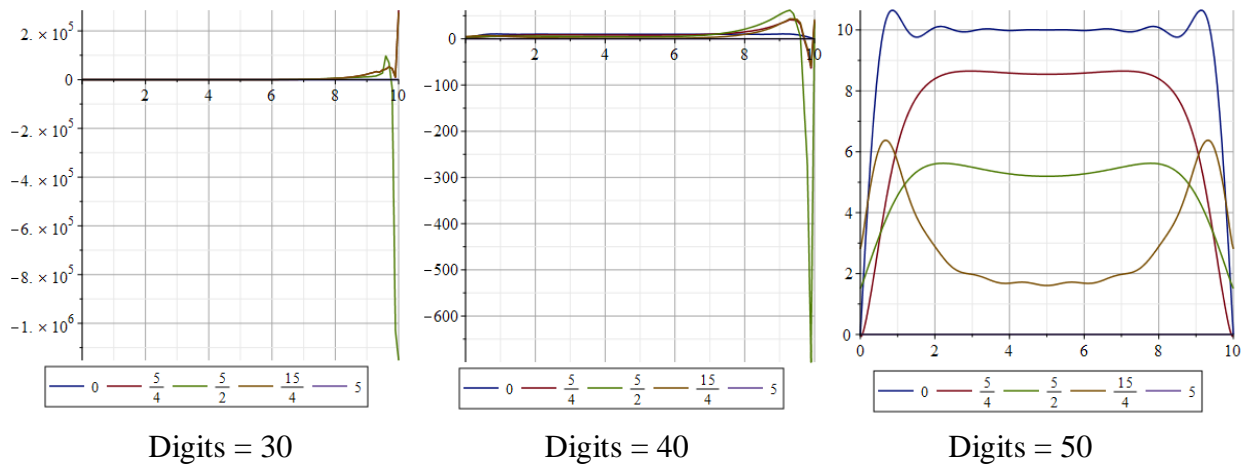


Рисунок 2 – Графики σ_x в горизонтальном сечении при разных значениях Digits для пластины с двумя заземленными вертикальными сторонами (метод коллокации для 15 членов в рядах Фурье)

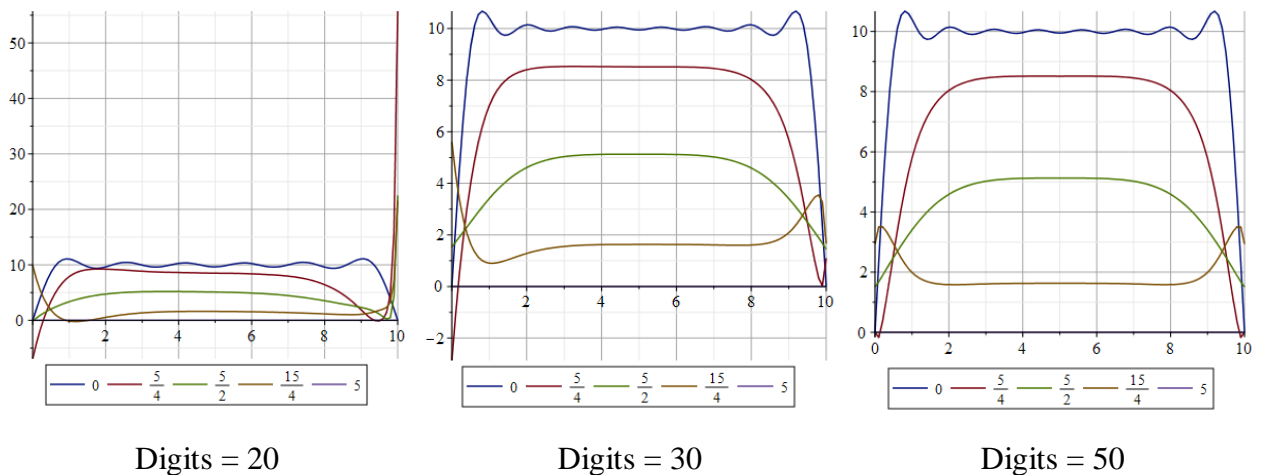


Рисунок 3 – Графики σ_x в горизонтальном сечении при разных значениях Digits для пластины с двумя заземленными вертикальными сторонами (метод наименьших квадратов для 15 членов в рядах Фурье и 16 узлов)

Результаты экспериментов показали, что для получения удовлетворительных результатов в методе коллокации при $N = 15$ минимальное значение переменной Digits равно 50. При меньших значениях мантиссы (40 и ниже) наблюдается вычислительная неустойчивость алгоритма.

Для метода наименьших квадратов получены сходные значения.

Оптимальные значения переменной Digits, полученные экспериментально для других значений N , приведены в таблице 1.

Таблица 1 - Минимальные значения переменной Digits, полученные экспериментально при разных значениях N , необходимые для получения удовлетворительных результатов

| N | Digits | |
|----|------------------|----------------------------|
| | Метод коллокации | Метод наименьших квадратов |
| 15 | 50 | 50 |
| 31 | 200 | 200 |
| 61 | 400 | 400 |

Таким образом, с увеличением числа членов в рядах Фурье для устойчивых расчетов требуется увеличение длины мантиссы (величины Digits в Maple). В то же время нужно иметь в виду, что большие значения Digits могут замедлять скорость обработки данных.

2.2 Метод коллокаций

Метод коллокаций позволяет найти приближенное решение исходной дифференциальной задачи. Численное решение должно минимизировать норму невязки, которая задается как

$$R = U(x) - U_0(x)$$

В методе коллокаций численное решение равно граничным условиям на некоторых заданных точках $\{\bar{X}_{col}\}$, которые мы будем называть точками коллокаций.

$$U(X_{col}^i) = U_0(X_{col}^i)$$

Как можно видеть из общего решения, неизвестные параметры ГН входят линейно, следовательно, условие нулевой невязки на точках коллокаций можно записать как СЛАУ. Число уравнений в СЛАУ точно равно количеству неизвестных $GH = \{g_2^0, g_4^0, h_1^0, h_4^0, g_p^n, h_p^m\}$, следовательно, выбираются $8N + 4$ точек коллокаций, лежащих на границах пластины.

Поскольку в общем виде решения присутствуют тригонометрические функции, на границах вид решения сокращается.

Часть СЛАУ на грани $y = 0$ принимает вид

$$\begin{aligned} u(x_{col}^i, 0) &= \sum_{p=1}^4 \sum_{m=0}^N \tilde{L}_{1p}^{s,m}(0) h_p^m \cos(\alpha_m x_{col}^i) + \sum_{p=1}^4 \sum_{n=1}^N \tilde{\tilde{L}}_{1p}^{s,n}(x_{col}^i) g_p^n \sin(\beta_n 0) = \\ &= \sum_{m=0}^N h_1^m \cos(\alpha_m x_{col}^i) = u_0, \\ v(x_{col}^i, 0) &= \sum_{p=1}^4 \sum_{m=1}^N \tilde{L}_{2p}^{s,m}(0) h_p^m \sin(\alpha_m x_{col}^i) + \sum_{p=1}^4 \sum_{n=0}^N \tilde{\tilde{L}}_{2p}^{s,n}(x_{col}^i) g_p^n \cos(\beta_n 0) = \\ &= \sum_{m=1}^N h_2^m \sin(\alpha_m x_{col}^i) + \sum_{p=1}^4 \sum_{n=0}^N \tilde{\tilde{L}}_{2p}^{s,n}(x_{col}^i) g_p^n = v_0 \end{aligned}$$

Часть СЛАУ на грани $y = a$ принимает вид

$$\begin{aligned} u(x_{col}^i, a) &= \sum_{p=1}^4 \sum_{m=0}^N \tilde{L}_{1p}^{s,m}(a) h_p^m \cos(\alpha_m x_{col}^i) + \sum_{p=1}^4 \sum_{n=1}^N \tilde{\tilde{L}}_{1p}^{s,n}(x_{col}^i) g_p^n \sin(\beta_n a) = \\ &= \sum_{p=1}^4 \sum_{m=0}^N \tilde{L}_{1p}^{s,m}(a) h_p^m \cos(\alpha_m x_{col}^i) = u_0, \\ v(x_{col}^i, a) &= \sum_{p=1}^4 \sum_{m=1}^N \tilde{L}_{2p}^{s,m}(a) h_p^m \sin(\alpha_m x_{col}^i) + \sum_{p=1}^4 \sum_{n=0}^N \tilde{\tilde{L}}_{2p}^{s,n}(x_{col}^i) g_p^n \cos(\beta_n a) = \\ &= \sum_{p=1}^4 \sum_{m=1}^N \tilde{L}_{2p}^{s,m}(a) h_p^m \sin(\alpha_m x_{col}^i) + \sum_{p=1}^4 \sum_{n=0}^N \tilde{\tilde{L}}_{2p}^{s,n}(x_{col}^i) g_p^n = v_0 \end{aligned}$$

Часть СЛАУ на грани $x = 0$ принимает вид

$$\begin{aligned}\sigma_x(0, y_{col}^i) &= \sum_{p=1}^4 \sum_{m=1}^N \tilde{L}_{5p}^{s,m}(y_{col}^i) h_p^m \sin(\alpha_m 0) + \sum_{p=1}^4 \sum_{n=1}^N \tilde{\tilde{L}}_{3p}^{s,n}(0) g_p^n \sin(\beta_n y_{col}^i) = \\ &= \sum_{p=1}^4 \sum_{n=1}^N g_p^n \sin(\beta_n y_{col}^i) = \sigma_x^0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy}(0, y_{col}^i) &= \sum_{p=1}^4 \sum_{m=0}^N \tilde{L}_{4p}^{s,m}(y_{col}^i) h_p^m \cos(\alpha_m 0) + \sum_{p=1}^4 \sum_{n=0}^N \tilde{\tilde{L}}_{4p}^{s,n}(0) g_p^n \cos(\beta_n y_{col}^i) \\ &= \sum_{p=1}^4 \sum_{m=0}^N \tilde{L}_{4p}^{s,m}(y_{col}^i) h_p^m + \sum_{n=0}^N g_p^n \cos(\beta_n y_{col}^i) = \tau_{xy}^0\end{aligned}$$

Часть СЛАУ на грани $x = h$ принимает вид

$$\begin{aligned}\sigma_x(h, y_{col}^i) &= \sum_{p=1}^4 \sum_{m=1}^N \tilde{L}_{5p}^{s,m}(y_{col}^i) h_p^m \sin(\alpha_m h) + \sum_{p=1}^4 \sum_{n=1}^N \tilde{\tilde{L}}_{3p}^{s,n}(h) g_p^n \sin(\beta_n y_{col}^i) = \\ &= \sum_{p=1}^4 \sum_{n=1}^N \tilde{\tilde{L}}_{3p}^{s,n}(h) g_p^n \sin(\beta_n y_{col}^i) = \sigma_x^0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy}(h, y_{col}^i) &= \sum_{p=1}^4 \sum_{m=0}^N \tilde{L}_{4p}^{s,m}(y_{col}^i) h_p^m \cos(\alpha_m h) + \sum_{p=1}^4 \sum_{n=0}^N \tilde{\tilde{L}}_{4p}^{s,n}(h) g_p^n \cos(\beta_n y_{col}^i) \\ &= \sum_{p=1}^4 \sum_{m=0}^N \tilde{L}_{4p}^{s,m}(y_{col}^i) h_p^m + \sum_{p=1}^4 \sum_{n=0}^N \tilde{\tilde{L}}_{4p}^{s,n}(h) g_p^n \cos(\beta_n y_{col}^i) = \tau_{xy}^0\end{aligned}$$

Также из представленных выше уравнений видно, что не следует брать точки коллокаций на углах пластины, поскольку часть уравнений принимает вид $0 = const$, и СЛАУ становится неразрешимой.

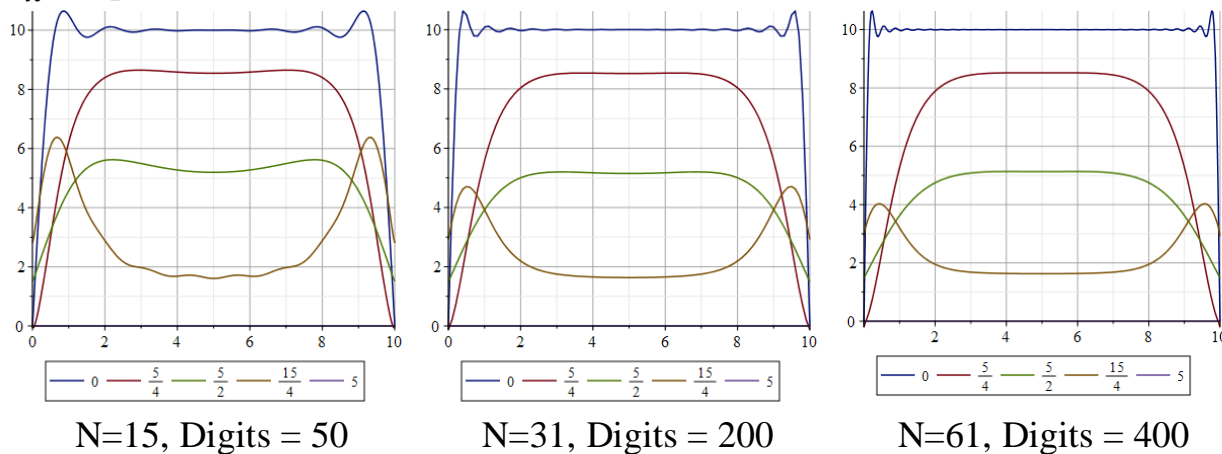
2.2.1 Решение задачи для пластины А методом коллокаций

Исходные данные: пластина с двумя защемленными вертикальными сторонами и равномерно распределенной нагрузкой $\sigma_x = 10$ на верхней грани.

Построены графики для различных N (число членов в рядах Фурье) и соответствующих им экспериментально определенных значений переменной $Digits$ (табл. 1).

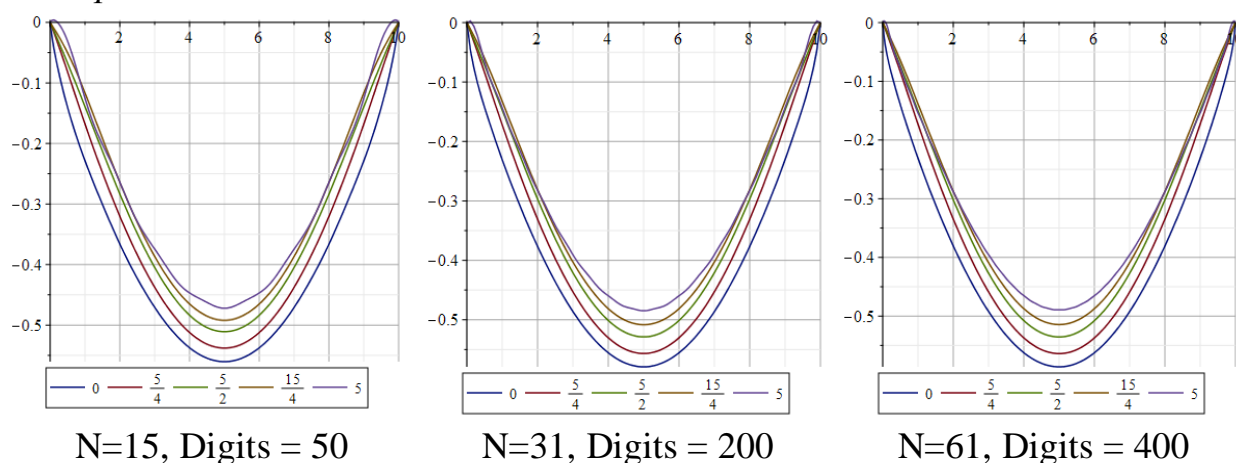
Проверка сходимости по перемещению u , нормальному напряжению σ_x в горизонтальных сечениях показывает, что увеличение сходимости результатов возрастает с увеличением N .

σ_x в горизонтальном сечении



Графики нормальных напряжений показывают, что на нижней стороне прямоугольника ГУ удовлетворяются хорошо, а на верхней стороне с увеличением точек коллокации (что равнозначно увеличению количества членов в рядах Фурье), нормальные напряжения становятся ближе к заданным ГУ. Во внутренних точках, начиная с $N=31$, нормальные напряжения не изменяются.

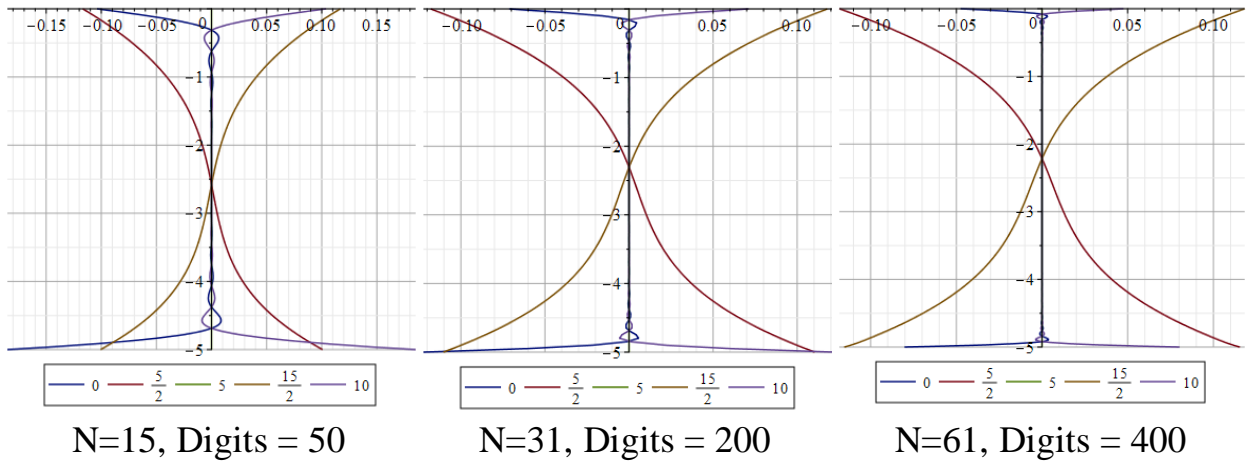
u в горизонтальном сечении



На графиках вертикальных перемещений для нижней стороны наблюдаются отклонения в окрестностях угловых точек. С увеличением числа точек коллокаций (при $N \geq 31$) исчезают всплески в окрестностях угловых точек и вид графиков не меняется. Результаты для внутренних срезов не

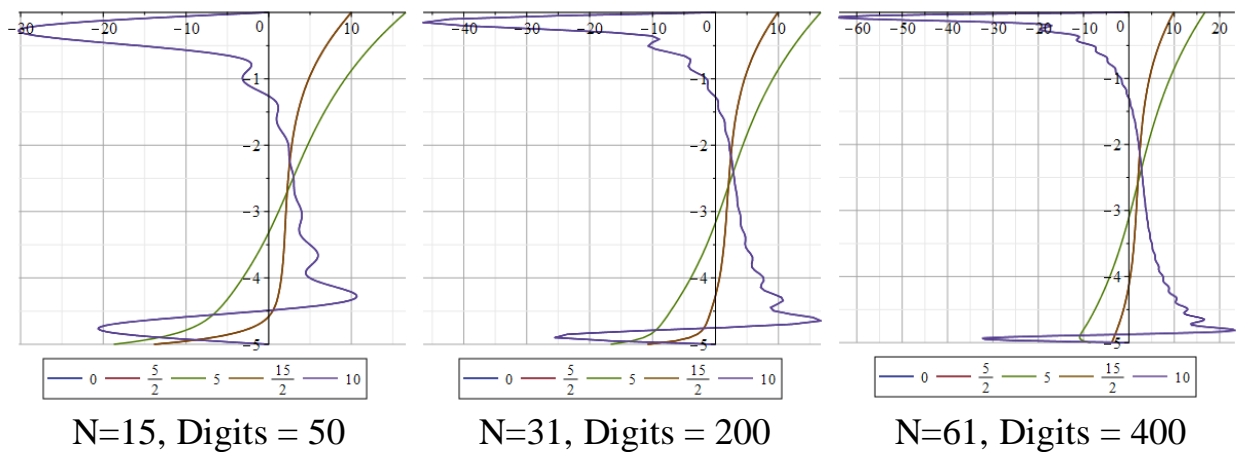
показывают видимых изменений при увеличении числа точек коллокаций, следовательно, значения в них можно считать удовлетворительными даже при небольших N .

v в вертикальном сечении



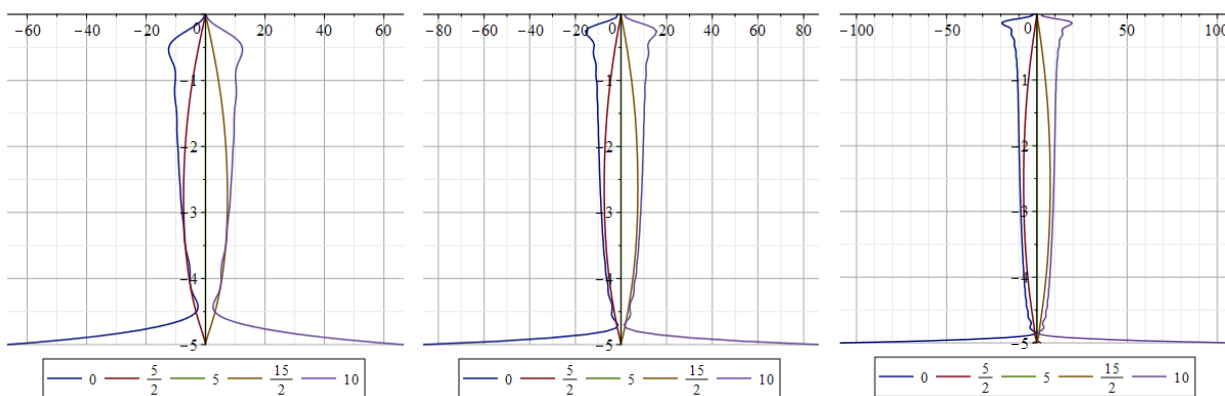
Графики перемещений по оси y показывают, что на вертикальных гранях $y = 0, a$ при увеличении N значения становятся ближе к ГУ. Также в окрестностях угловых точек (но не в самих угловых точках) перемещения постепенно приближаются ГУ.

σ_y в вертикальном сечении



Из графиков напряжения видно, что с увеличением числа членов в рядах Фурье значения изгибных напряжений к истинным значениям, хотя и очень медленно, — как на вертикальных сторонах, так и в окрестности нижней стороны.

τ_{xy} в вертикальном сечении



N=15, Digits = 50

N=31, Digits = 200

N=61, Digits = 400

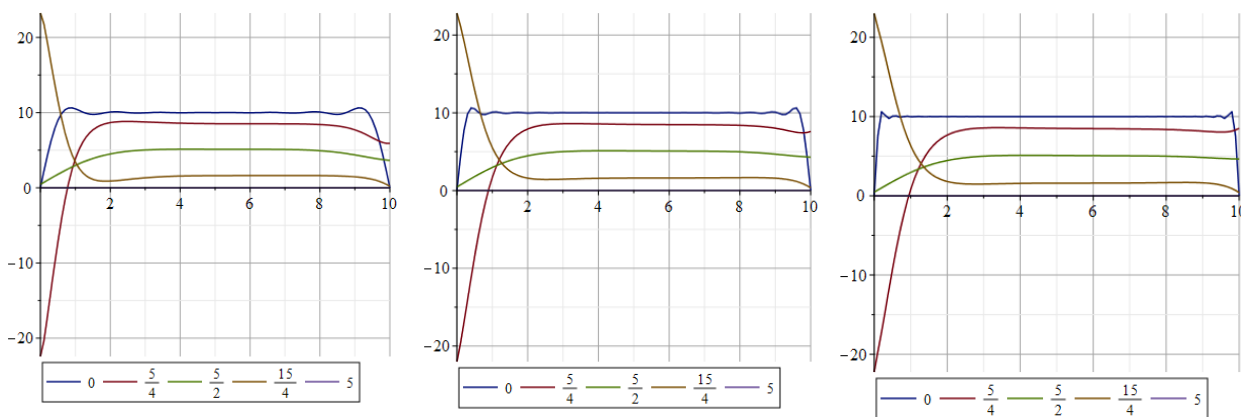
На графиках видно, что алгоритм метода коллокаций хорошо показывает себя на внутренних точках, сходится на боковых гранях. Но погрешности в окрестностях нижних угловых точек и на вертикальных сторонах остаются большими.

2.2.2 Решение задачи для пластины Б методом коллокации

Исходные данные: пластина с одной заземленной вертикальной стороной и равномерно распределенной нагрузкой $\sigma_x = 10$ на верхней грани.

Построены графики для различных N (число членов в рядах Фурье). Значения Digits выбирались из таблицы 1.

σ_x в горизонтальном сечении



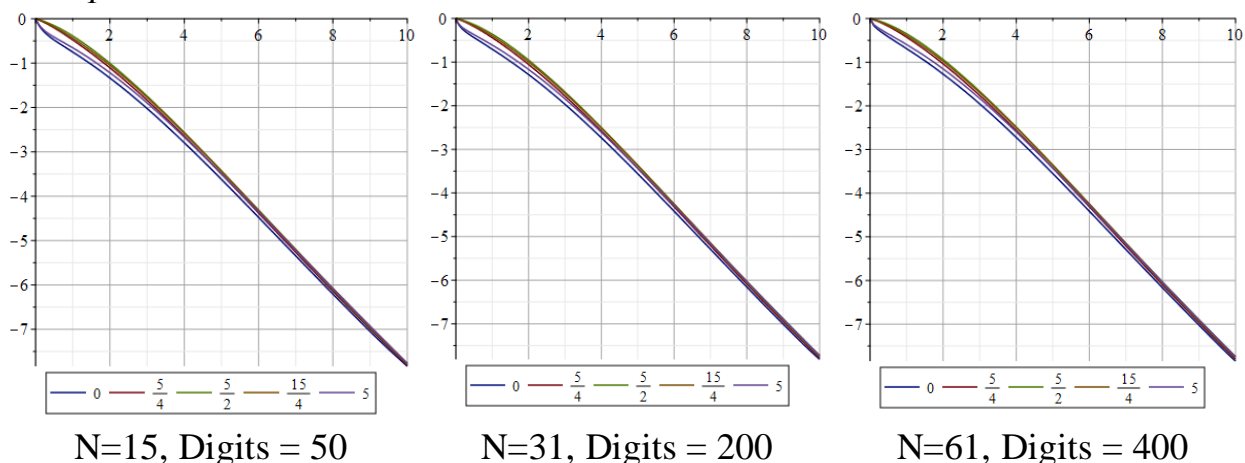
N=15, Digits = 50

N=31, Digits = 200

N=61, Digits = 400

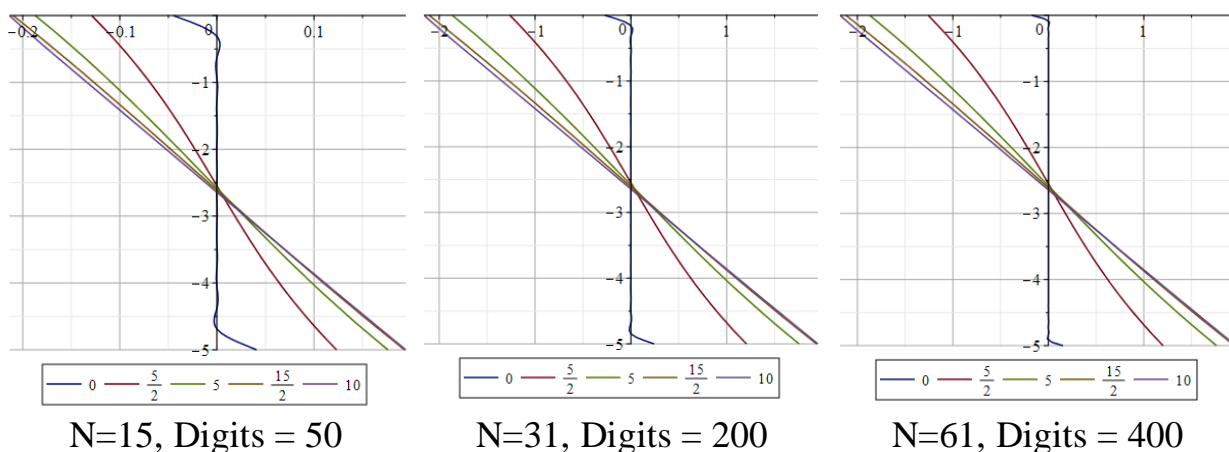
Алгоритм даже при малом числе N показывает хороший результат для значений нормальных напряжений как на верхней и нижней гранях, так и во внутренних точках. Однако в окрестностях угловых точек наблюдаются отклонения. Увеличение N позволяет приблизить результат к ГУ в окрестностях угловых точек на верхней грани.

и в горизонтальном сечении



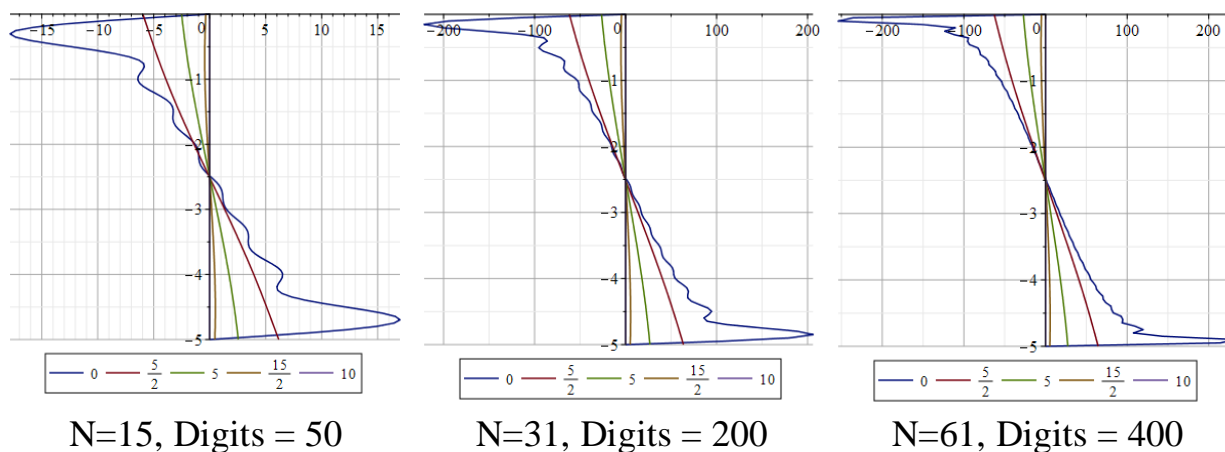
Для перемещений по оси u достигаются удовлетворительные результаты как на границах, так и во внутренних точках даже при малом числе точек коллокаций и не изменяются заметным образом при увеличении их числа.

v в вертикальном сечении



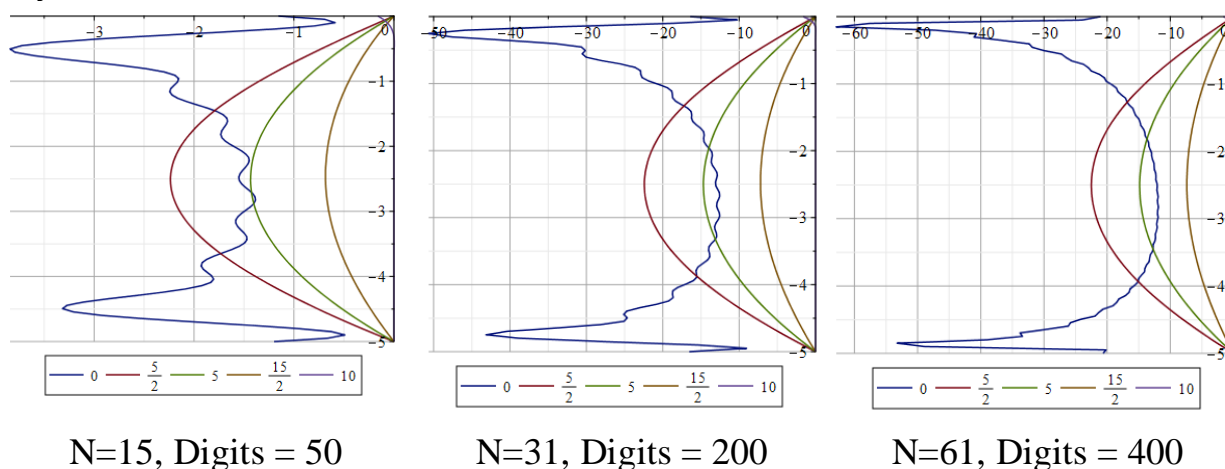
На графиках при увеличении N видно улучшение только на вертикальных сторонах в окрестностях угловых точек, а во внутренних сечениях сразу получен хороший результат.

σ_y в вертикальном сечении



На левой грани с увеличением числа N график значений нормальных напряжений, полученных методом коллокаций, становится более плавным, уменьшаются погрешности как в областях в окрестностях угловых точек, так и в области центра грани. На правой грани и на внутренних срезах значения при увеличении N не изменяются, причем на правой грани они сразу удовлетворяют ГУ.

τ_{xy} в вертикальном сечении



Графики напряжений на правой грани удовлетворяют граничным условиям даже при малом числе членов рядов Фурье за исключением незначительных возмущений в районе правого верхнего угла. На внутренних срезах значения напряжений сразу дают удовлетворительный результат и не изменяются при увеличении N . Число N является критичным для левой грани, где значения напряжения сходятся медленно и присутствует значительная погрешность в областях в окрестностях угловых точек.

Таким образом, для метода коллокаций при увеличении числа членов в рядах Фурье (N) компоненты НДС сходятся к истинному значению, на гранях решение сходится к ГУ, в том числе в окрестностях угловых точек. В то же время увеличение значений N и $Digits$ существенно замедляет скорость вычислений. Для получения удовлетворительных результатов значения $N=31$, $Digits = 200$ являются оптимальными и, как это видно на графиках, обеспечивают достаточную для приближенных вычислений точность.

2.3 Метод наименьших квадратов

В методе наименьших квадратов решение строится таким образом, чтобы отклонение от граничных условий было минимальным. На каждой грани выбираются K точек, причем $K > N$. Поскольку на гранях заданы по два параметра U_0 , мы получаем переопределенную систему из $8K$ линейных уравнений для $8N + 4$ неизвестных, для которой невозможно получить точное решение, но можно получить приближенное решение путем минимизации нормы невязки.

В методе наименьших квадратов норма невязки определяется как сумма квадратов невязки в выбранных точках

$$\|R\| = \sum (\bar{U}(X) - \bar{U}_0(X))^2$$

где $X = \{x, y\}$,

$$\bar{U}(X) = \bar{U}(x, y) \in U = \{u(x, y), v(x, y), \sigma_x(x, y), \tau_{xy}(x, y), \sigma_y(x, y)\}$$

Как можно видеть, задача сводится к нахождению таких параметров ГН, которые приводят норму невязки к минимуму.

В данной работе это делается с помощью вычисления производных по элементам ГН:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \|R\|}{\partial h_1^0} = 0 \\ \frac{\partial \|R\|}{\partial h_4^0} = 0 \\ \frac{\partial \|R\|}{\partial g_2^0} = 0 \\ \frac{\partial \|R\|}{\partial g_4^0} = 0 \\ \frac{\partial \|R\|}{\partial h_p^m} = 0 \\ \frac{\partial \|R\|}{\partial g_p^n} = 0 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} n = 1..N \\ m = 1..N \\ p = 1..4 \end{array} \right.$$

Так, для пластины А берем по T точек на каждой стороне (не включая угловые точки), координаты которых $(0, y_i), i = 1..T$ на верхней грани, $(h, y_i), i = 1..T$ нижней грани, $(x_i, 0), i = 1..T$ на левой грани и $(x_i, h), i = 1..T$ на правой грани, и вычисляем общие решения в них. Задача сводится к вычислению минимума следующего функционала:

$$\begin{aligned} \|R\| = & \sum_{i=1}^T (\sigma_x(0, y_i) - q)^2 + \sum_{i=1}^T (\tau_{xy}(0, y_i))^2 + \sum_{i=1}^T (\sigma_x(h, y_i))^2 + \sum_{i=1}^T (\tau_{xy}(h, y_i))^2 + \\ & + \sum_{i=1}^T (u(x_i, 0))^2 + \sum_{i=1}^T (v(x_i, 0))^2 + \sum_{i=1}^T (u(x_i, h))^2 + \sum_{i=1}^T (v(x_i, h))^2 = \\ = & \sum_{i=1}^T \left(\sum_{p=1}^4 \sum_{m=1}^N \bar{L}_{5p}^{s,m}(y) h_p^m \sin(\alpha_m 0) + \sum_{p=1}^4 \sum_{n=1}^N \bar{L}_{3p}^{s,n}(0) g_p^n \sin(\beta_n y) - q \right)^2 + \\ & + \sum_{i=1}^T \left(\sum_{p=1}^4 \sum_{m=0}^N \bar{L}_{4p}^{s,m}(y_i) h_p^m \cos(\alpha_m 0) \sum_{p=1}^4 \sum_{n=0}^N \bar{L}_{4p}^{s,n}(0) g_p^n \cos(\beta_n y_i) \right)^2 + \\ & + \sum_{i=1}^T \left(\sum_{p=1}^4 \sum_{m=1}^N \bar{L}_{5p}^{s,m}(y_i) h_p^m \sin(\alpha_m h) + \sum_{p=1}^4 \sum_{n=1}^N \bar{L}_{3p}^{s,n}(h) g_p^n \sin(\beta_n y_i) \right)^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^T \left(\sum_{p=1}^4 \sum_{m=0}^N \tilde{L}_{4p}^{s,m}(y_i) h_p^m \cos(\alpha_m h) + \sum_{p=1}^4 \sum_{n=0}^N \tilde{L}_{4p}^{s,n}(h) g_p^n \cos(\beta_n y_i) \right)^2 + \\
& + \sum_{i=1}^T \left(\sum_{p=1}^4 \sum_{m=0}^N \tilde{L}_{1p}^{s,m}(0) h_p^m \cos(\alpha_m x_i) + \sum_{p=1}^4 \sum_{n=1}^N \tilde{L}_{1p}^{s,n}(x_i) g_p^n \sin(\beta_n 0) \right)^2 + \\
& + \sum_{i=1}^T \left(\sum_{p=1}^4 \sum_{m=1}^N \tilde{L}_{2p}^{s,m}(0) h_p^m \sin(\alpha_m x_i) + \sum_{p=1}^4 \sum_{n=0}^N \tilde{L}_{2p}^{s,n}(x_i) g_p^n \cos(\beta_n 0) \right)^2 + \\
& + \sum_{i=1}^T \left(\sum_{p=1}^4 \sum_{m=0}^N \tilde{L}_{1p}^{s,m}(a) h_p^m \cos(\alpha_m x_i) + \sum_{p=1}^4 \sum_{n=1}^N \tilde{L}_{1p}^{s,n}(x_i) g_p^n \sin(\beta_n a) \right)^2 + \\
& + \sum_{i=1}^T \left(\sum_{p=1}^4 \sum_{m=1}^N \tilde{L}_{2p}^{s,m}(a) h_p^m \sin(\alpha_m x_i) + \sum_{p=1}^4 \sum_{n=0}^N \tilde{L}_{2p}^{s,n}(x_i) g_p^n \cos(\beta_n a) \right)^2 \rightarrow \min
\end{aligned}$$

Минимум можно найти путем вычисления частных производных по переменным h_p^m и g_p^n . Так, из производной $\|R\|$ по h_1^1 получается следующее уравнение:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^T 2\tilde{L}_{51}^{s,1}(y_i) \sin(\alpha_1 0) (\sigma_x(0, y_i) - q) + \sum_{i=1}^T 2\tilde{L}_{41}^{s,1}(y_i) \cos(\alpha_1 0) (\tau_{xy}(0, y_i)) + \\
& + \sum_{i=1}^T 2\tilde{L}_{51}^{s,1}(y_i) \sin(\alpha_1 h) (\sigma_x(h, y_i)) + \sum_{i=1}^T 2\tilde{L}_{41}^{s,1}(y_i) \cos(\alpha_1 h) (\tau_{xy}(h, y_i)) + \\
& + \sum_{i=1}^T 2\tilde{L}_{11}^{s,1}(0) \cos(\alpha_1 x_i) (u(x_i, 0)) + \sum_{i=1}^T 2\tilde{L}_{21}^{s,1}(0) \sin(\alpha_1 x_i) (v(x_i, 0)) + \\
& + \sum_{i=1}^T 2\tilde{L}_{11}^{s,1}(a) \cos(\alpha_1 x_i) (u(x_i, a)) + \sum_{i=1}^T 2\tilde{L}_{2p}^{s,m}(a) \sin(\alpha_m x_i) (v(x_i, a)) = 0
\end{aligned}$$

Уравнения для производных по остальным членам находятся аналогично и в результате получается уже СЛАУ из $8N + 4$ уравнений.

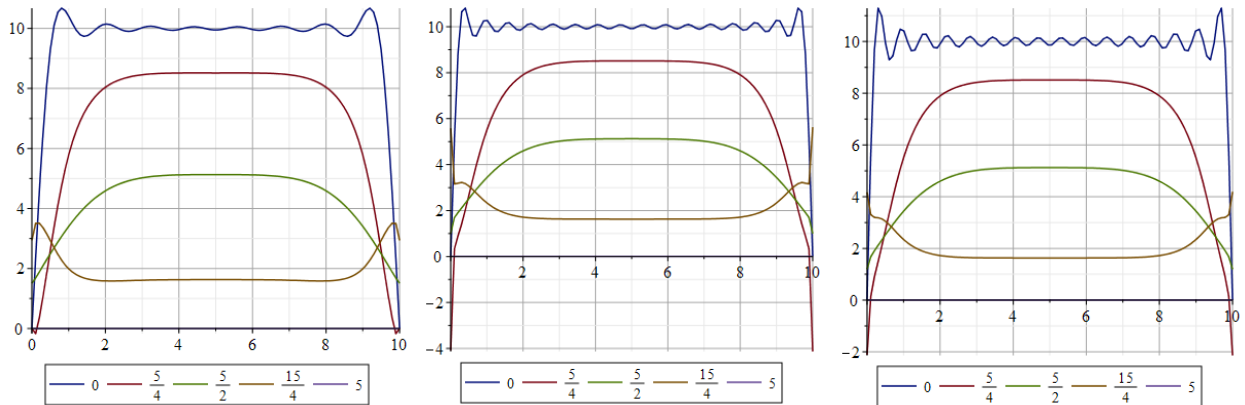
2.3.1 Решение задачи для пластины А методом наименьших квадратов

Исходные данные: пластина с двумя защемленными вертикальными сторонами и равномерно распределенной нагрузкой $\sigma_x = 10$ на верхней грани.

Построены графики для метода наименьших квадратов при различных N (число членов в рядах Фурье) и соответствующих им Digits (табл. 1).

Проверка сходимости по перемещению u , нормальному напряжению σ_x в горизонтальных сечениях – решения задачи при разных N :

σ_x в горизонтальном сечении



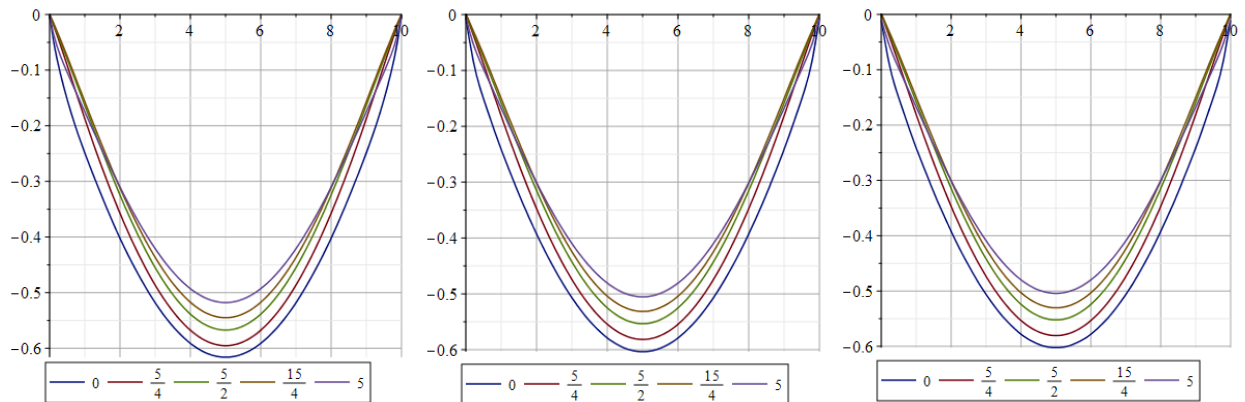
$N=15, T=16, \text{Digits} = 50$

$N=31, T=40, \text{Digits} = 200$

$N=61, T=62, \text{Digits} = 400$

При увеличении N на верхней грани наблюдается улучшение в окрестности угловых точек, на внутренних срезах – улучшение в окрестностях вертикальных сторон.

u в горизонтальном сечении



$N=15, T=16, \text{Digits} = 50$

$N=31, T=40, \text{Digits} = 200$

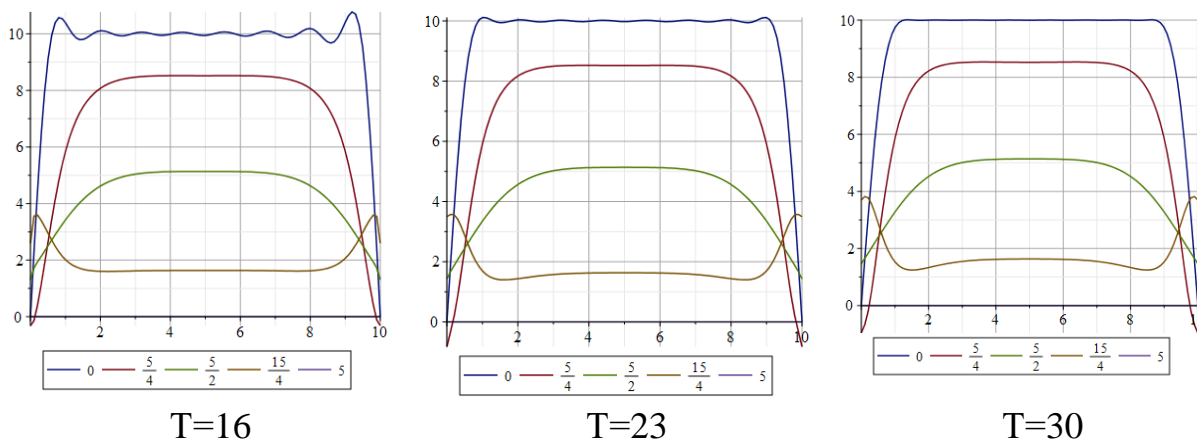
$N=61, T=62, \text{Digits} = 400$

Метод наименьших квадратов показывает хорошие результаты даже при малом количестве членов рядов Фурье, и результаты не изменяются заметных образом при увеличении N ,

Также исследованы улучшения решения методом наименьших квадратов при увеличении количества узлов T на сторонах прямоугольника.

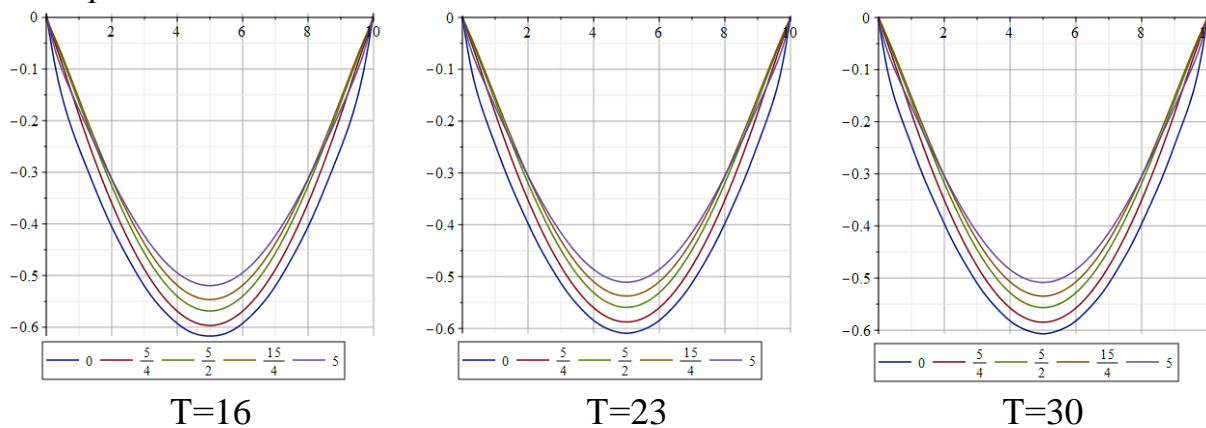
Ниже представлены графики при $N = 15$, $\text{Digits} = 50$ и разных значениях T (16, 23, 30).

σ_x в горизонтальном сечении



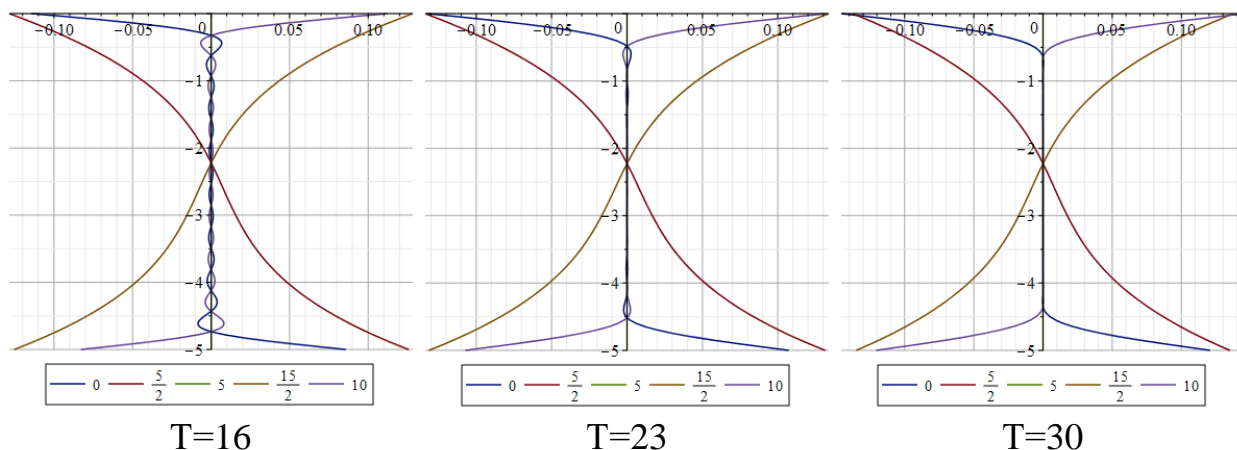
На графиках видно, что с увеличением числа точек при сохранении числа членов в рядах Фурье уменьшаются погрешности значений нормальных напряжений на верхней грани в точках, удаленных от окрестностей угловых точек. Значения в окрестностях угловых точек не улучшаются. На внутренних срезах (за исключением точек, близких к боковым сторонам) значения нормальных напряжений изменяются незначительно.

u в горизонтальном сечении



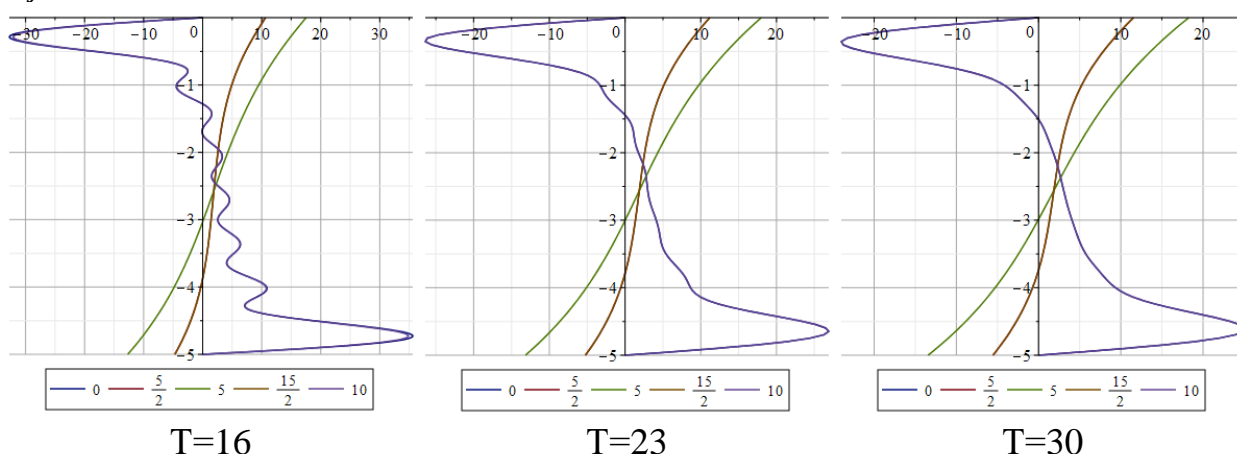
Графики u в горизонтальном сечении мало изменяются при увеличении числа точек на гранях пластины T .

v в вертикальном сечении



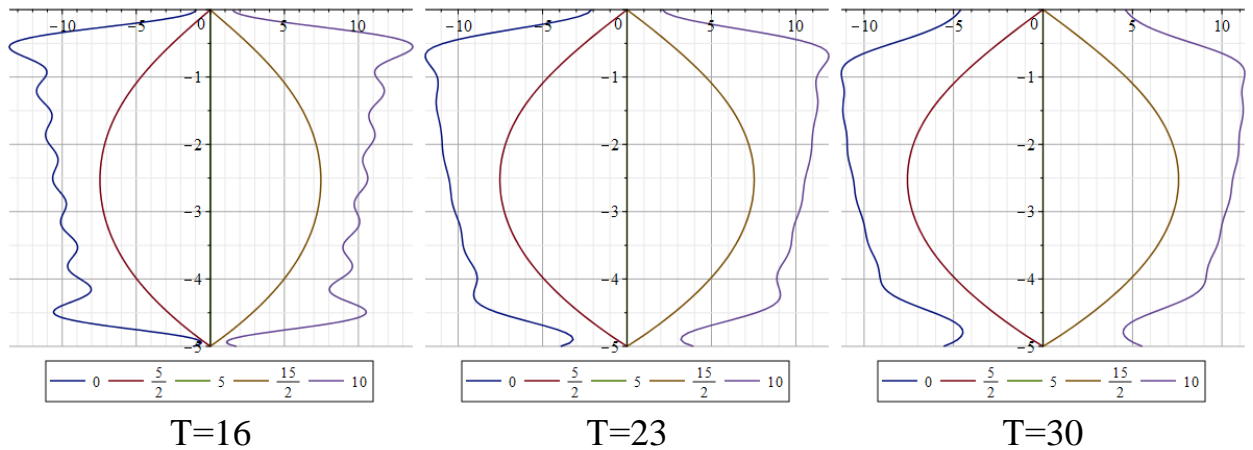
Значения смещения по оси y , полученные методом наименьших квадратов, при увеличении числа точек T и сохранении числа членов в рядах Фурье N становятся ближе к ГУ. Однако в областях на окрестностях угловых точек погрешности все еще велики, и увеличение числа точек не уменьшает область, где значения не удовлетворяют ГУ.

σ_y в вертикальном сечении



При увеличении числа точек улучшаются графики значений нормальных напряжений на боковых гранях, за исключением областей в окрестностях угловых точек. На внутренних срезах значения заметным образом не изменяются при увеличении числа точек.

τ_{xy} в вертикальном сечении



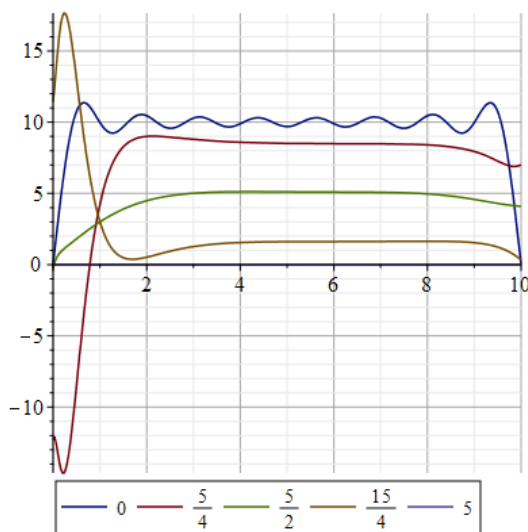
При увеличении T улучшаются значения на боковых гранях, за исключением окрестностей угловых точек.

2.3.2 Решение задачи для пластины Б методом наименьших квадратов

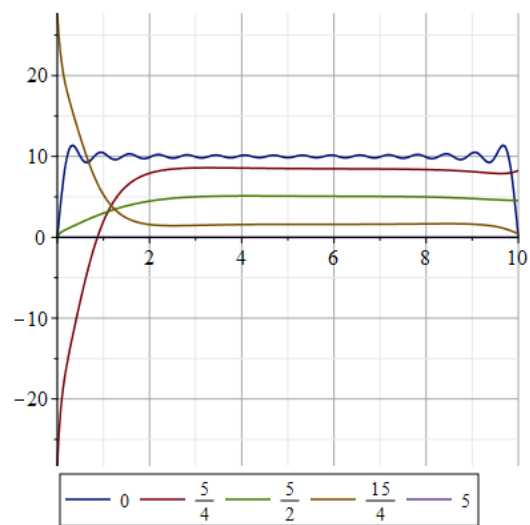
Исходные данные: пластина с одной заземленной вертикальной стороной и равномерно распределенной нагрузкой $\sigma_x = 10$ на верхней грани.

Для проверки сходимости по перемещению u , нормальному напряжению σ_x в горизонтальных сечениях построены графики для различных N (различном числе членов в рядах Фурье), соответствующим им значениям переменной $Digits$ и значениям T , превышающем N .

σ_x в горизонтальном сечении



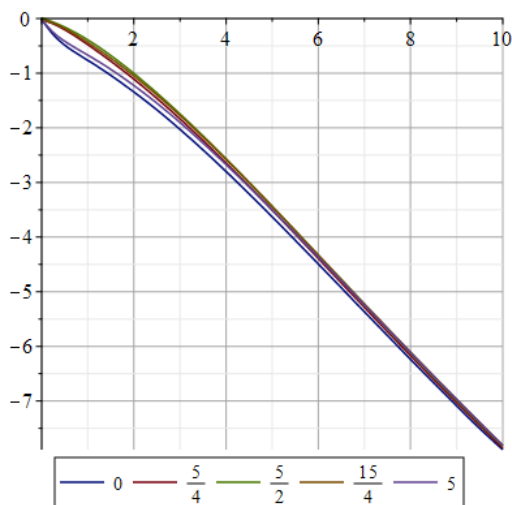
$N=15, T=16, Digits = 50$



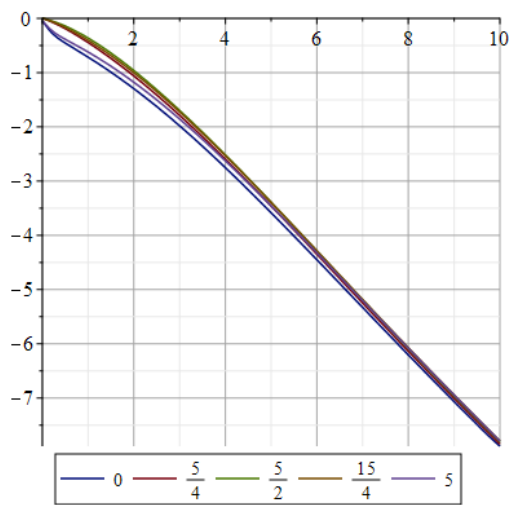
$N=31, T=40, Digits = 200$

Для σ_x в горизонтальном сечении при увеличении числа N улучшаются значения на верхней грани, в том числе в областях угловых точек.

u в горизонтальном сечении



$N=15, T=16, \text{Digits} = 50$

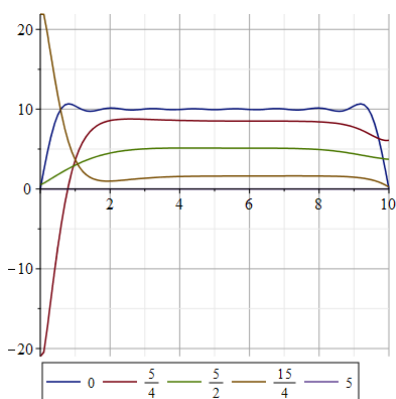


$N=31, T=40, \text{Digits} = 200$

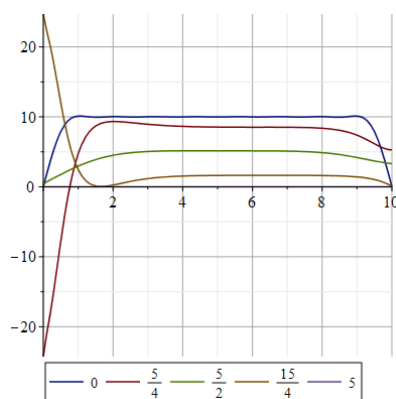
На графике u в горизонтальном сечении значения не изменяются при увеличении N .

Для исследования улучшений решения методом наименьших квадратов при увеличении количества узлов на сторонах прямоугольника построены графики решения для $N=15, \text{Digits} = 50$ при различных T (16, 23, 30):

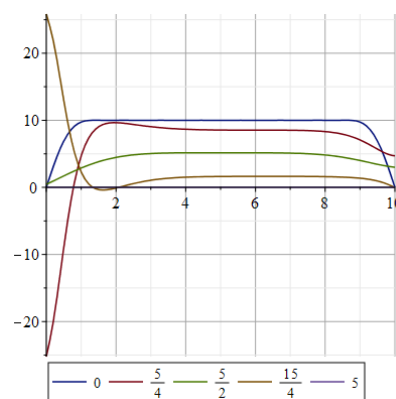
σ_x в горизонтальном сечении



$T=16$



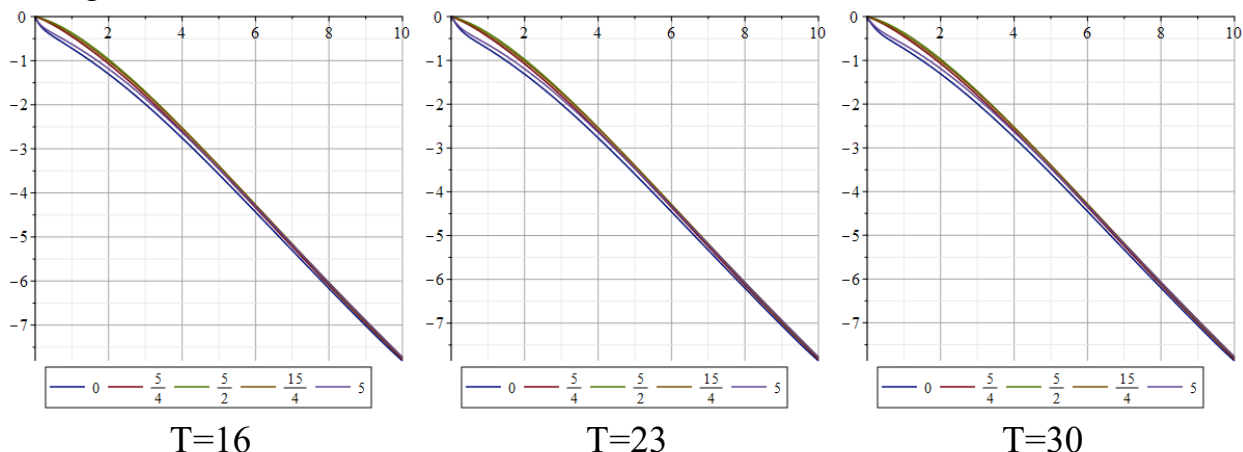
$T=23$



$T=30$

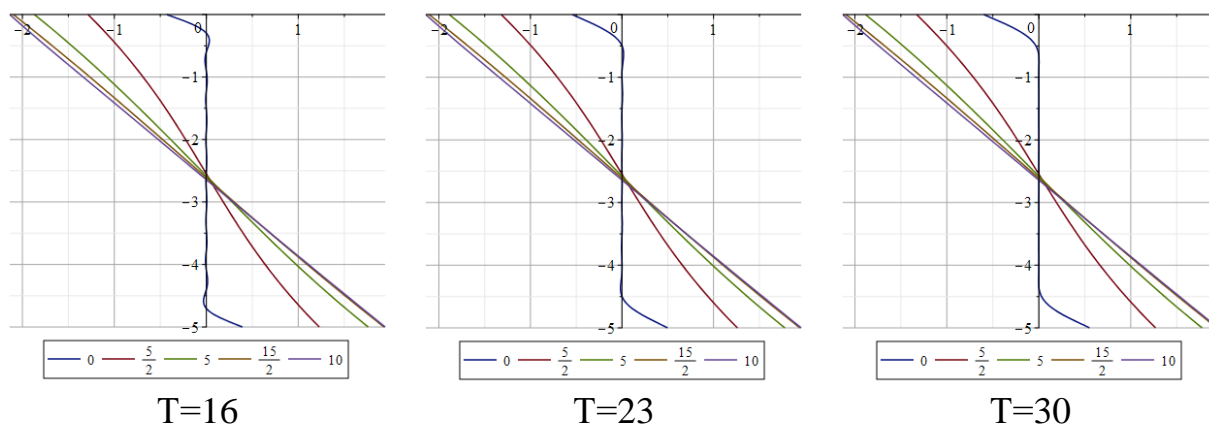
Как и в случае пластины A , значения, полученные методом наименьших квадратов, сходятся к ГУ на верхней грани за исключением областей в окрестностях угловых точек.

и в горизонтальном сечении



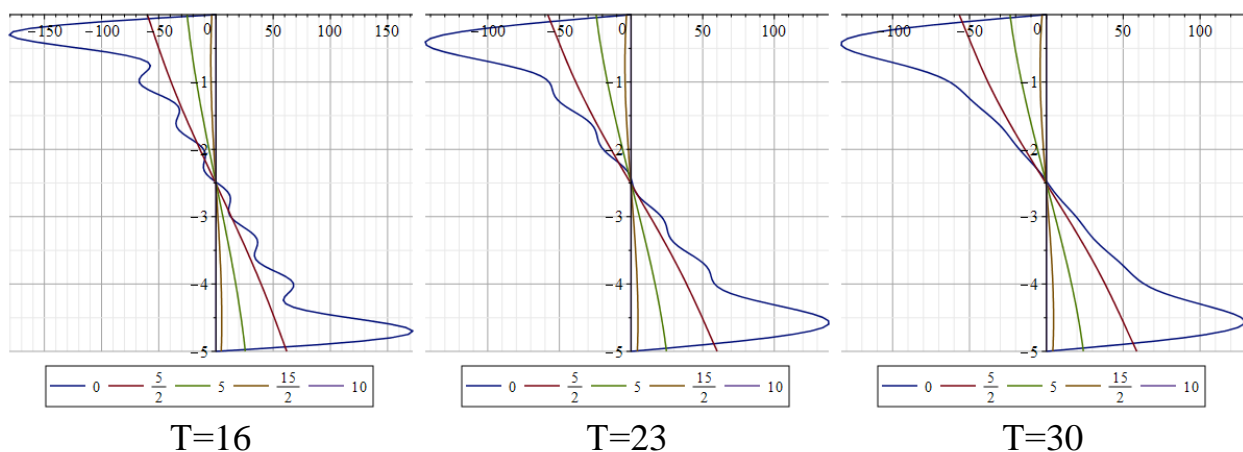
Значения сдвигов как на верхней и нижней гранях, так и на внутренних срезях, включая области в окрестностях угловых точек, не изменяются при увеличении числа точек T .

v в вертикальном сечении



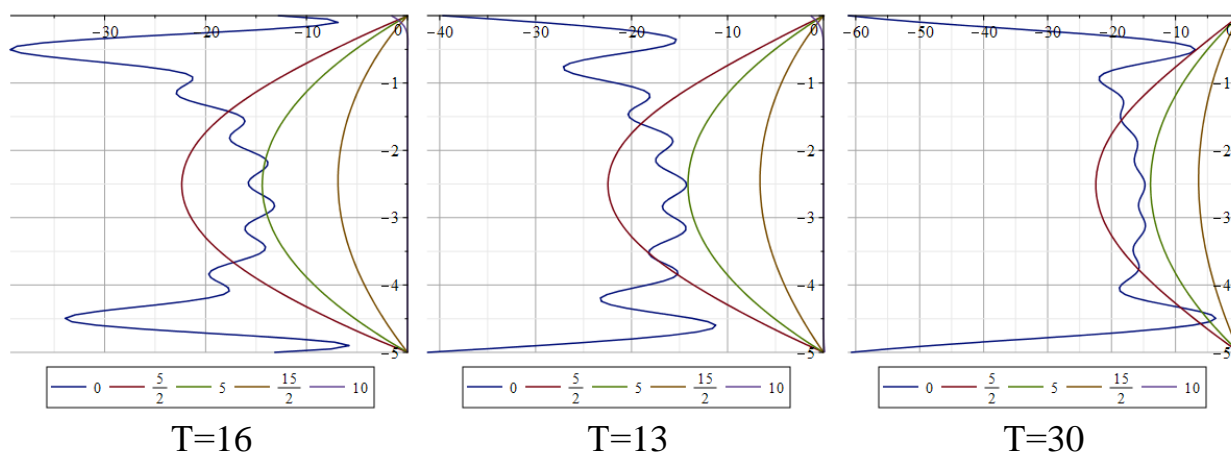
На левой грани значения смещения, полученные методом наименьших квадратов, сходятся к ГУ при увеличении числа точек. На внутренних срезях значения не изменяются.

σ_y в вертикальном сечении



На правой грани значения нормальных напряжений, полученные методом наименьших квадратов, удовлетворяют ГУ при любых значениях числа точек. На левой грани при увеличении числа точек значения сходятся к истинным значениям, за исключением областей в окрестностях угловых точек. Значения на внутренних срезах не изменяются.

τ_{xy} в вертикальном сечении



На левой грани при увеличении числа точек значения улучшаются при увеличении числа точек за исключением областей в окрестностях угловых точек.

Таким образом, для метода наименьших квадратов при увеличении числа узлов T на каждой стороне и неизменном N компоненты НДС сходятся к истинному значению, на гранях решение сходится к ГУ, за исключением окрестностей угловых точек.

Выводы

Реализован метод суперпозиции для решения задачи деформирования изотропного упругого прямоугольника в условиях плоской деформации. Все вычисления проведены в системе аналитических вычислений Maple, которая дает возможность произвольно устанавливать длину мантиссы через переменную Digits.

Для реализации поставленной задачи написан программный код на языке процедурного программирования Maple .

Исследовано поведение на границе решения метода суперпозиции с использованием двух решений, полученных методом начальных функций, для изотропного прямоугольника в зависимости от выбранного способа удовлетворения граничным условиям.

Из анализа графиков значений компонент напряженно-деформированного состояния, вычисленных методами коллокаций и наименьших квадратов, видно, что увеличение числа членов в рядах Фурье N как в методе коллокаций, так и в методе наименьших квадратов улучшают точность вычисления компонент НДС. При этом значения на границах сходятся к ГУ, в том числе и в окрестностях угловых точек.

Однако, основные вычисления приходятся на решение СЛАУ, результатом которой являются компоненты ГН. С увеличением числа N значительно возрастает и время, необходимое для вычисления. Следовательно, если не критичны значения НДС в окрестностях угловых точек, то будет предпочтительным использование метода наименьших квадратов с небольшим числом членов рядов Фурье N и с большим числом узлов T на гранях, так как в этом методе решение на гранях сходится к ГУ при увеличении T , за исключением областей в окрестности угловых точек.

Для расчета значений в окрестностях угловых точек будет предпочтительным использование метода наименьших квадратов с небольшим числом членов рядов Фурье N .

Показано, что представленное в работе решение граничной задачи для упругого прямоугольника позволяет с достаточной для приближенных вычислений точностью выполнять расчеты прямоугольных изотропных пластин с произвольными граничными условиями. При этом необходимо учитывать, что для достижения высокой сходимости на границах прямоугольника требуется производить расчеты с большим количеством удерживаемых в тригонометрических рядах членов.

Заключение

Точное решение в аналитической форме уравнений теории упругости при соблюдении граничных условий (краевая задача) возможно лишь в некоторых частных случаях нагружения тел и условий их закрепления. Для инженерной практики имеют важное значение приближенные, но достаточно общие методы решения задач прикладной теории упругости.

Существуют автоматизированные информационные системы и комплексы программ, позволяющие рассчитывать достаточно сложные конструкции с применением приближенно-аналитических методов решения.

В данной работе в системе аналитических вычислений Maple представлена программная реализация алгоритма аналитического решения плоской изотропной задачи теории упругости методом суперпозиции на примере расчета тонких изотропных прямоугольных пластин и исследовано поведение на границе решения для изотропного прямоугольника в зависимости от способа удовлетворения граничным условиям.

Список литературы

1. Galileev, S.M., Matrosov, A.V. Method of initial functions in the computation of sandwich plates // *International Applied Mechanics*. 1995. 31(6), с. 469-476
2. Goloskokov, D.P., Matrosov, A.V. Approximate analytical solutions in the analysis of elastic structures of complex geometry // *AIP Conference Proceedings* 1959,070013. 2018.
3. Lamé, G. Leçon sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides / G. Lamé. — Paris: Bachelier, 1852. — 335 p.
4. Matrosov, A.V. A numerical-analytical decomposition method in analyses of complex structures // 2014 International conference on computer technologies in physical and engineering applications (ICCTPEA). 2014. P. 104-105.
5. Matrosov, A.V. A superposition method in analysis of plane construction // 2015 International Conference on "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov, SCP 2015 - Proceedings 7342156. 2015, с. 414-416
6. Meleshko, V. V. Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem // *Applied Mechanics Review*. — 2003. — Vol. 56, № 1. — P. 33–85.
7. Meleshko, V. V. Superposition method in thermal-stress problems for rectangular plates // *International Applied Mechanics*. — 2005. — Vol. 41. — No. 9. — P. 1043–1058.
8. Ritz, W. Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Randwertaufgaben / W. Ritz // *Nachr. Ges. Wiss. Goettingen, Math.-Phys. Kl.* (Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse. Continues in part K. Continued by S.) 1908. P. 236–248.
9. Ritz, W. Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik / W. Ritz // *J Reine Angew. Math.* (Journal für die Reine und Angewandte Mathematik). 1908. Vol. 135. P. 1–61.

10. Власов, В. З. Метод начальных функций в задачах теории упругости // Изв. АН СССР. Серия ОТН. — 1955. — № 7. — С. 49–69.
11. Галёркин Б.Г. Стержни и пластинки. Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия стержней и пластинок. // Вестник инженеров. 1915. Т. 1. С. 897—908.
12. Голоскоков Д.П. Курс математической физики с использованием пакета Maple. 2-е изд., испр. СПб.: Издательство «Лань», 2015. 576 с.
13. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев: Наук. думка, 1978. 264 с.
14. Гринченко В. Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.
15. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Метод разделения переменных в математической физике. СПб., 2009. 92 с.
16. Лурье А. И. К теории систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // Труды ленинградского индустриального института. —1937. — № 6. — С. 31–36.
17. Лурье А. И. К теории толстых плит // Прикл. мат. мех. — 1942. — № 6. — С. 151–168.
18. Малиев, А. С. О выборе функций в общих решениях задачи равновесия изотропного упругого тела // Труды ЛЭТИИЖТа. — М. : Трансжелдориздат, 1952. — Вып. 4. — С.180–244.
19. Матросов, А. В. Численно-аналитическое решение граничной задачи деформирования линейно-упругого анизотропного прямоугольника // Вестник СПбГУ. Серия 10. Прикладная математика и информатика. — 2007. — Вып. 2. — С. 55-65.
20. Матросов, А. В. Замкнутая форма операторов метода начальных функций для плоской задачи теории упругости ортотропного тела // Вестник Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета. 2010. № 4 (22). С. 56-62.

21. Матросов, А. В. Расчет гидротехнических сооружений численно-аналитическим методом // Журнал университета водных коммуникаций. — 2010. — Вып. IV(VIII) . — С. 8-14.
22. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. 2-е изд. М.: Наука, 1970. 512 с.
23. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 444 с.
24. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. 5-е изд. М.: Наука, 1977. 736 с.
25. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галёркина. М.: Мир, 1988. 352 с.