Санкт-Петербургский государственный университет

Грунина Вера Николаевна

Выпускная квалификационная работа

Устойчивые вероятностные коалиционные разбиения в играх со специальными иерархическими структурами

Уровень образования: магистратура
Направление: 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
Основная образовательная программа: ВМ.5504 «Исследование операций и системный анализ»

Научный руководитель:
профессор кафедры МТИСР,
доктор физ.-мат. наук,
Парилина Е.М.

Рецензент: Аналитик ООО
«Эпам Системз»,
Староверова К.Ю.

Санкт-Петербург
2020 год

Содержание

Введение

В теории игр особое место занимает исследование коалиционных структур. Их изучение привлекает все больший интерес. Это связано прежде всего с тем, что коалиционные структуры являются неотъемлемой частью любого общества.

В современном мире, подверженном процессам глобализации, неуклонно растет число различных объединений. Любое объединение нескольких объектов (в роли объектов могут быть компании, сообщества, страны и др.), имеющее своей целью получение какой-либо выгоды, представляет собой коалицию. Примерами коалиций могут быть объединения политических партий, различные альянсы государств и организаций.

Поскольку каждый объект (далее игрок), вступая в ту или иную коалицию, преследует в ней свои интересы, то, естественно, возникает желание рассчитать вероятность их осуществления. В дальнейшем будем называть реализацию интересов как отдельного игрока, так и коалиции в целом, выигрышем. Очевидно, что выигрыш одного и того же игрока при участии в разных коалициях отличается.

Если у игроков имеется возможность переходить из одной коалиции в другую, меняя тем самым состав самих коалиций, то, зафиксировав игроков в конкретных коалициях, говорят о наличии определенной коалиционной структуры или коалиционном разбиении.

Несомненный интерес представляет поиск такой коалицинной структуры, в которой выигрыш будет оптимальным, что означает, что все игроки получат максимальный выигрыш, образуя именно эту коалиционную структуру, а не какую-либо другую. В этом случае коалиционное разбиение называется устойчивым.

Построение математических моделей позволяет изучать и сравнивать различные коалиционные структуры. В большинстве имеющихся к настоящему времени исследований исходят из того, что в кооперативной игре возможно только одно коалиционное разбиение, которое сформировано изначально. В реальных ситуациях оказывается возможным образование не одной, а нескольких коалиционных структур. Именно это обстоятельство было положено в основу представляемой работы.

Поскольку, как было отмечено выше, каждый игрок, предследуя свой интерес, может менять коалицию, то невозможно, как правило, заранее точно утверждать, какое конкретно коалиционное разбиение возникнет. Учитывая этот факт, в настоящей работе рассматривались коалиционные структуры, которые были заданы с некоторой вероятностью их возникновения. Целью работы являлось нахождение устойчивого коалиционного разбиения в игре с главным игроком.

1. Постановка задачи

Введем основные понятия и определения, необходимые для постановки задачи.

1.1. Вероятностная коалиционная структура и характеристическая функция

Пусть задана кооперативная игра (N, v), где N - конечное множество игроков, $v : 2^N \to R$ - характеристическая функция, значения которой определены для каждого множества $S \subseteq N$, называемого коалицией. Если все игроки входят в одну коалицию N, то суммарный выигрыш $v(N)$ делится между игроками в соответствии с некоторым кооперативным решением. Предположим, что свойство супераддитивности не выполнено в общем случае, т.е. может существовать по крайней мере две непересекающиеся коалиции $S, T \in N$ такие, что $v(S \cap T) < v(S) + v(T)$. Тогда некоторые игроки могут получить больший выигрыш в меньших коалициях при одном и том же кооперативном решении в качестве дележа выигрыша. Поэтому будем допускать образование некоторой коалиционной структуры помимо коалиции N простейшего вида, которая представляет собой объединение всех игроков.

Для моделирования вероятностной коалиционной структуры рассмотрим вероятностное распределение всех коалиционных структур $\mathcal{P}$ из N. [1] Множество всевозможных разбиений из N обозначается через $\mathbb{P}(N)$. Множество вероятностных распределений обозначается через:

$$\Delta(\mathbb{P}(N)) := \{p : \mathbb{P}(N) \to [0,1], \sum_{\mathcal{P} \in \mathbb{P}(N)} p(\mathcal{P}) = 1\}.$$

Определение 1.1.1 *Вероятностная коалиционная структура $\mathcal{P}$ есть разбиение $\{B_1, ..., B_m\}$ множества N, т.е. $B_1 \cup ... \cup B_m = N$, и $B_i \cap B_j = \emptyset$*

для всех $i, j = 1, ..., m, i \neq j$, *причем* $p(\mathcal{P}) \in \Delta(\mathbb{P}(N))$.

Определение 1.1.2 **[1]** *Для каждой функции* v *соответствующая вероятностная функция* v^p *определяется следующим образом:*

$$v^p(K) := \sum_{\mathcal{P} \in \mathbb{P}(N)} p(\mathcal{P}) \sum_{S \in \mathcal{P}|_k} v(S), \tag{1}$$

где

$$\mathcal{P}|_k := \{C \cap K | C \in \mathcal{P}\} \setminus \{\emptyset\}.$$

1.2. Вычисление $ES-$значения и вектора Аумана-Дрезе

В качестве решений кооперативной игры будем рассматривать вектор Аумана-Дрезе и ES-значение. В игре $(N, v, \mathcal{P})$ с коалиционной структурой $\mathcal{P} = \{B_1, ..., B_m\}$ компоненты вектора $ES - value \quad \psi = (\psi_1, ..., \psi_n)$ вычисляются по формуле:

$$\psi_i = v^p(\{i\}) + \frac{v^p(B(i)) - \sum\limits_{j \in B(j)} v^p(\{j\})}{|B(i)|}, \tag{2}$$

компоненты вектора Аумана-Дрезе $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n)$ вычисляются по формуле:

$$\mu_i = \sum_{S \subseteq B(i), i \in S} \frac{(|B(i)| - |S|)!(|S| - 1)!}{|B(i)|!} [v^p(S) - v^p(S \setminus \{i\})] \tag{3}$$

для всех $i \in N$.

1.3. Устойчивые коалиционые структуры

Определение устойчивой коалиционной структуры возьмем из работы [2].

Пусть π - коалиционная структура. И пусть $\pi_{-B_i} = \pi \setminus B_i \subset \pi$ и $B(i) \in \pi$ - коалиция, содержащая игрока $i \in N$.

Определение 1.3.1 [2] *Коалиционная структура* $\pi = \{B_1, ..., B_m\}$ *называется устойчивой относительно одноточечного кооперативного решения, если для любого игрока* $i \in N$ *справедливо неравенство* $x_i^{\pi} \geq x_i^{\pi'}$ *для всех* $\pi' = \{B(i)\backslash\{i\}, B_j \cup \{i\}, \pi_{-B(i)\cup B_j}\}$, *где* $B_j \in \pi \cup \emptyset, B_j \neq B(i)$, *и* x^{π} *и* $x^{\pi'}$ *- распределения выигрышей, рассчитанные в соответствии с выбранным кооперативным решением для игр* (N, v, π) *и* (N, v, π') *с коалиционными структурами* π, π' *соответственно.*

В статье [2] устойчивая коалиционная структура определяется с учетом выигрышей игроков, являющихся членами соответствующих коалиций. Игрок сравнивает выигрыш в текущей коалиционной структуре и при индивидуальном отклонении. Индивидуальным отклонением называется выход игрока из данной коалиции и присоединение его к какой-либо другой коалиции или игра в одиночку. При этом, если, отклоняясь, ни один игрок не может увеличить свой выигрыш, то данная коалиционная структура называется устойчивой.

1.4. Игра с главным игроком

Игра, в которой среди N игроков один назначается «главным», называется игрой с главным игроком. Функцию выигрыша для такой игры возьмем из статьи [3]

$$v(s) = \begin{cases} 0, & if \quad S = \{i\}, i \in N \setminus \{1\}, \\ \gamma s, & if \quad s > 1, 1 \notin S, \\ \alpha(s-1) + \frac{\beta}{s}, & if \quad s \geq 1, 1 \in S, \end{cases}$$

где $s = |S|$ количество игроков в коалиции S, и α, β, γ положительные параметры, удовлетворяющие условию $\gamma \leq \alpha \leq \beta$. Выпишем все значения функции выигрыша для конкретных коалиций

$v(\{1\}) = \beta,$

$v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,$

$v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = \alpha + \frac{\beta}{2},$

$v(\{2,3\}) = 2\gamma,$

$v(\{1,2,3\}) = 2\alpha + \frac{1}{3}\beta.$

Заметим, что игра с главным игроком является симметричной относительно главного игрока, поскольку если игроки 2 и 3 поменяются местами, выигрыш коалиций, в которые они входят, не изменится.

1.5. Постановка задачи

Рассмотреть игру трех игроков и найти устойчивые коалиционные структуры в игре с главным игроком относительно $ES-$значения и вектора Ауман-Дрезе при равномерном вероятностном распределении:

$\mathcal{P}_1 = (\{1,2,3\}) = \frac{1}{5},$

$\mathcal{P}_2 = (\{1,2\},\{3\}) = \frac{1}{5},$

$\mathcal{P}_3 = (\{1,3\},\{2\}) = \frac{1}{5},$

$\mathcal{P}_4 = (\{1\},\{2,3\}) = \frac{1}{5},$

$\mathcal{P}_5 = (\{1\},\{2\},\{3\}) = \frac{1}{5}.$

и при вероятностном распределении $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{9}$:

$\mathcal{P}_1 = (\{1,2,3\}) = \frac{1}{3},$

$\mathcal{P}_2 = (\{1,2\},\{3\}) = \frac{1}{9},$

$\mathcal{P}_3 = (\{1,3\},\{2\}) = \frac{1}{9},$

$\mathcal{P}_4 = (\{1\},\{2,3\}) = \frac{1}{9},$

$\mathcal{P}_5 = (\{1\},\{2\},\{3\}) = \frac{1}{3}.$

Сравнить полученные результаты для указанных кооперативных решений.

Обзор литературы

Вопрос нахождения устойчивых коалиционных структур изучался во многих работах ([5], [6], [7], [4], [2]). При этом, несмотря на то, что в разных работах определение устойчивости коалиционных структур дается по-разному, в большинстве работ понятие устойчивости связано с выигрышем игроков. В работах [5] и [6] выигрыши игроков определяются с помощью заданной специальным образом функции полезности, которая, в свою очередь, учитывает коалицию, в которую входит игрок. В работе [7] сравнение выигрышей игроков проводится на основе заданных отношений предпочтений. В статье находят условия на отношения предпочтений, при которых существует устойчивая коалиционная структура.

В работе [4] вводится понятие индивидуально устойчивой коалиционной структуры - структура, при которой игроки, состоящие в ней, могут блокировать присоединение к ним нового игрока, если выигрыш этих игроков из рассматриваемой коалиционной структуры уменьшится при присоединении нового игрока. В работе доказано существование индивидуально устойчивой коалиционной структуры в случае игры трех лиц, а также получено соответствие между множествами устойчивых и индивидуально устойчивых коалиционных структур.

В работе [2] под устойчивостью коалиционной структуры понимается то, что каждому игроку не выгодно отклоняться от выбранной коалиции и становиться индивидуальным игроком или переходить в другую коалицию. Именно такое определение используется и в настоящей работе. Кроме того, в работе [2] доказано, что в игре трех лиц всегда существует устойчивая коалиционная структура относительно вектора Шепли и, по крайней мере, одна устойчивая коалиционная структура относительно $ES-$значения.

В ряде работ моделируются кооперативные игры, в которых задаются какие-либо ограничения некоторым ограничивающим графом, называемым сетью ([8], [9], [3]). Так, например, в работе [3], где исследуются условия устойчивости коалиционных структур в игре с главным игроком, на общение между игроками накладывается ограничение ненаправленным графом. Смысл ограничения заключается в том, что все игроки могут коммуницировать только с «главным» игроком и не могут общаться между собой. Ограничение на коммуникации игроков учитывается в том, что характеристическая функция строится специальным образом.

Подобный подход используется в настоящей работе, где в характеристическую функцию закладывается вероятность возникновения коалиционных структур. Принципиальным отличием данной работы является то, что образование коалиционных структур задается вероятностным распределением. Для учета такой неопределенности в формировании структур в предлагаемой модели игры используется вероятностная характеристическая функция, в которую и заложена вероятность образования коалиционных структур. Понятие вероятностной характеристической функции впервые вводится в работе [1]. В статье проверяются аксиомы аддитивности, эффективности, симметричности и нулевого игрока для этой функции. Вероятностная характеристическая функция используется для нахождения компонент векторов $ES-$значения и Аумана-Дрезе, с помощью которых описывается рассматриваемая в настоящей работе игра.

2. Основные результаты

2.1. Вычисление вероятностной характеристической функции

Рассмотрим игру трех игроков. Перечислим все возможные варианты коалиционных структур

$\mathcal{P}_1 = (\{1,2,3\})$,

$\mathcal{P}_2 = (\{1,2\},\{3\})$,

$\mathcal{P}_3 = (\{1,3\},\{2\})$,

$\mathcal{P}_4 = (\{1\},\{2,3\})$,

$\mathcal{P}_5 = (\{1\},\{2\},\{3\})$.

Используя формулу (1), запишем вероятностные значения функции выигрыша для всевозможных коалиций.
В случае одноэлементных коалиций. Для $K = \{1\}$:

$$v^p(\{1\}) = p(\mathcal{P}_1)v(\{1\}) + p(\mathcal{P}_2)v(\{1\}) + p(\mathcal{P}_3)v(\{1\}) + p(\mathcal{P}_4)v(\{1\}) \\ +p(\mathcal{P}_5)v(\{1\}).$$

Для других одноэлементных коалиций функция выигрыша запишется аналогично.
Для коалиций состоящих из двух игроков получаем:
При $K = \{1,2\}$:

$$v^p(\{1,2\}) = p(\mathcal{P}_1)v(\{1,2\}) + p(\mathcal{P}_2)v(\{1,2\}) + p(\mathcal{P}_3)(v(\{1\}) + v(\{2\})) \\ +p(\mathcal{P}_4)(v(\{1\}) + v(\{2\})) + p(\mathcal{P}_5)(v(\{1\}) + v(\{2\})).$$

При $K = \{1,3\}$:

$$v^p(\{1,3\}) = p(\mathcal{P}_1)v(\{1,3\}) + p(\mathcal{P}_2)(v(\{1\}) + v(\{3\})) + p(\mathcal{P}_3)v(\{1,3\}) \\ +p(\mathcal{P}_4)(v(\{1\}) + v(\{3\})) + p(\mathcal{P}_5)(v(\{1\}) + v(\{2\})).$$

При $K = \{2,3\}$:

$$v^p(\{2,3\}) = p(\mathcal{P}_1)v(\{2,3\}) + p(\mathcal{P}_2)(v(\{2\}) + v(\{3\})) + p(\mathcal{P}_3)(v(\{2\}\\ + v(\{3\})) + p(\mathcal{P}_4)v(\{2,3\}) + p(\mathcal{P}_5)(v(\{2\}) + v(\{3\})).$$

Когда все игроки входят в одну коалицию в случае $K = \{1,2,3\}$:

$$\begin{aligned} v^p(\{1,2,3\}) = {} & p(\mathcal{P}_1)v(\{1,2,3\}) \\ & + p(\mathcal{P}_2)(v(\{1,2\}) + v(\{3\})) \\ & + p(\mathcal{P}_3)(v(\{1,3\}) + v(\{2\})) \\ & + p(\mathcal{P}_4)(v(\{1\}) + v(\{2,3\})) \\ & + p(\mathcal{P}_5)(v(\{1\}) + v(\{2\}) + v(\{3\})). \end{aligned}$$

2.2. Вычисление $ES-$значения и вектора Аумана-Дрезе для вероятностных коалиционных структур

Используя формулу (2) запишем $ES-value$ для каждого игрока, если образовалась коалиционная структура $\mathcal{P}_2 = (\{1,2\},\{3\})$:

$$\begin{aligned} &\psi_1 = v^p(\{1\}) + \tfrac{v^p(\{1,2\}) - v^p(\{2\})}{2} = p(\mathcal{P}_2)(v(\{1\}) + \tfrac{(v(\{1,2\}) - v(\{2\}))}{2}), \\ &\psi_2 = v^p(\{2\}) + \tfrac{v^p(\{1,2\}) - v^p(\{1\})}{2} = p(\mathcal{P}_2)(v(\{2\}) + \tfrac{(v(\{1,2\}) - v(\{1\}))}{2}), \\ &\psi_3 = 2p(\mathcal{P}_2)v(\{3\}). \end{aligned}$$

Запишем $ES - value$ для первого игрока в коалиционной структуре $\mathcal{P}_1 = \{1,2,3\}$:

$$\begin{aligned} \psi_1 = v^p(\{1\}) + \frac{v^p(\{1,2,3\}) - v^p(\{2\}) - v^p(\{3\})}{3} = \\ = p(\mathcal{P}_1)(v(\{1\}) + \tfrac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{2\}) - v(\{3\}))). \end{aligned}$$

Формулы для $ES - value$ будут находиться аналогично и для других игроков коалиции $\mathcal{P}_1 = \{1,2,3\}$.

Представим найденные выражения для $ES - value$ в виде таблицы:

Coalition/player	ψ_1	ψ_2	ψ_3
$\mathcal{P}_1 = (\{1,2,3\})$	$p(\mathcal{P}_1)(v(\{1\}) + \frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{2\}) - v(\{3\})))$	$p(\mathcal{P}_1)(v(\{2\}) + \frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{1\}) - v(\{3\})))$	$p(\mathcal{P}_1)(v(\{3\}) + \frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{1\}) - v(\{2\})))$
$\mathcal{P}_2 = (\{1,2\},\{3\})$	$p(\mathcal{P}_2)(v(\{1\}) + \frac{1}{2}(v(\{1,2\}) - v(\{2\})))$	$p(\mathcal{P}_2)(v(\{2\}) + \frac{1}{2}(v(\{1,2\}) - v(\{1\})))$	$2p(\mathcal{P}_2)v(\{3\})$
$\mathcal{P}_3 = (\{1,3\},\{2\})$	$p(\mathcal{P}_3)(v(\{1\}) + \frac{1}{2}(v(\{1,3\}) - v(\{3\})))$	$2p(\mathcal{P}_3)v(\{2\})$	$p(\mathcal{P}_3)(v(\{3\}) + \frac{1}{2}(v(\{1,3\}) - v(\{1\})))$
$\mathcal{P}_4 = (\{1\},\{2,3\})$	$2p(\mathcal{P}_4)v(\{1\})$	$p(\mathcal{P}_4)(v(\{2\}) + \frac{1}{2}(v(\{2,3\}) - v(\{3\})))$	$p(\mathcal{P}_4)(v(\{3\}) + \frac{1}{2}(v(\{2,3\}) - v(\{2\})))$
$\mathcal{P}_5 = (\{1\},\{2\},\{3\})$	$2p(\mathcal{P}_5)v(\{1\})$	$2p(\mathcal{P}_5)v(\{2\})$	$2p(\mathcal{P}_5)v(\{3\})$

Таблица 1. Общая таблица $ES - value$

Далее запишем $ES - value$ для коалиционных структур, возникновение которых задано с некоторой вероятностью.

При разбиении, когда вероятности возникновения коалиций будут следующими:

$\mathcal{P}_1 = (\{1,2,3\}) = \frac{1}{5}$,
$\mathcal{P}_2 = (\{1,2\},\{3\}) = \frac{1}{5}$,
$\mathcal{P}_3 = (\{1,3\},\{2\}) = \frac{1}{5}$,
$\mathcal{P}_4 = (\{1\},\{2,3\}) = \frac{1}{5}$,

$\mathcal{P}_5 = (\{1\},\{2\},\{3\}) = \frac{1}{5}$.

Таблица для $ES - value$ будет выглядеть следующим образом:

Coalition/player	ψ_1	ψ_2	ψ_3
$\mathcal{P}_1 = (\{1,2,3\})$	$\frac{1}{5}(v(\{1\}) + \frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{2\}) - v(\{3\})))$	$\frac{1}{5}(v(\{2\}) + \frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{1\}) - v(\{3\})))$	$\frac{1}{5}(v(\{3\}) + \frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{1\}) - v(\{2\})))$
$\mathcal{P}_2 = (\{1,2\},\{3\})$	$\frac{1}{5}(v(\{1\}) + \frac{1}{2}(v(\{1,2\}) - v(\{2\})))$	$\frac{1}{5}(v(\{2\}) + \frac{1}{2}(v(\{1,2\}) - v(\{1\})))$	$\frac{2}{5}v(\{3\})$
$\mathcal{P}_3 = (\{1,3\},\{2\})$	$\frac{1}{5}(v(\{1\}) + \frac{1}{2}(v(\{1,3\}) - v(\{3\})))$	$\frac{2}{5}v(\{2\})$	$\frac{1}{5}(v(\{3\}) + \frac{1}{2}(v(\{1,3\}) - v(\{1\})))$
$\mathcal{P}_4 = (\{1\},\{2,3\})$	$\frac{2}{5}v(\{1\})$	$\frac{1}{5}(v(\{2\}) + \frac{1}{2}(v(\{2,3\}) - v(\{3\})))$	$\frac{1}{5}(v(\{3\}) + \frac{1}{2}(v(\{2,3\}) - v(\{2\})))$
$\mathcal{P}_5 = (\{1\},\{2\},\{3\})$	$\frac{2}{5}v(\{1\})$	$\frac{2}{5}v(\{2\})$	$\frac{2}{5}v(\{3\})$

Таблица 2. Таблица $ES - value$ при равномерном распределении

При разбиении:

$\mathcal{P}_1 = (\{1,2,3\}) = \frac{1}{3}$,

$\mathcal{P}_2 = (\{1,2\},\{3\}) = \frac{1}{9}$,

$\mathcal{P}_3 = (\{1,3\},\{2\}) = \frac{1}{9}$,

$\mathcal{P}_4 = (\{1\},\{2,3\}) = \frac{1}{9}$,

$\mathcal{P}_5 = (\{1\},\{2\},\{3\}) = \frac{1}{3}$.

получается следующая таблица для $ES - value$:

Coalition/player	ψ_1	ψ_2	ψ_3
$\mathcal{P}_1 = (\{1,2,3\})$	$\frac{1}{3}(v(\{1\}) + \frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{2\}) - v(\{3\})))$	$\frac{1}{3}(v(\{2\}) + \frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{1\}) - v(\{3\})))$	$\frac{1}{3}(v(\{3\}) + \frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{1\}) - v(\{2\})))$
$\mathcal{P}_2 = (\{1,2\},\{3\})$	$\frac{1}{9}(v(\{1\}) + \frac{1}{2}(v(\{1,2\}) - v(\{2\})))$	$\frac{1}{9}(v(\{2\}) + \frac{1}{2}(v(\{1,2\}) - v(\{1\})))$	$\frac{2}{9}v(\{3\})$
$\mathcal{P}_3 = (\{1,3\},\{2\})$	$\frac{1}{9}(v(\{1\}) + \frac{1}{2}(v(\{1,3\}) - v(\{3\})))$	$\frac{2}{9}v(\{2\})$	$\frac{1}{9}(v(\{3\}) + \frac{1}{2}(v(\{1,3\}) - v(\{1\})))$
$\mathcal{P}_4 = (\{1\},\{2,3\})$	$\frac{2}{9}v(\{1\})$	$\frac{1}{9}(v(\{2\}) + \frac{1}{2}(v(\{2,3\}) - v(\{3\})))$	$\frac{1}{9}(v(\{3\}) + \frac{1}{2}(v(\{2,3\}) - v(\{2\})))$
$\mathcal{P}_5 = (\{1\},\{2\},\{3\})$	$\frac{2}{3}v(\{1\})$	$\frac{2}{3}v(\{2\})$	$\frac{2}{3}v(\{3\})$

Таблица 3. Таблица $ES - value$ при распределении $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{9}$

Перейдем к нахождению компонент вектора Аумана-Дрезе используя формулу (3).

Для коалиционной структуры $\mathcal{P}_5 = (\{1\},\{2\},\{3\})$ получим:

$\mu_1 = \frac{(1-1)!(1-1)!}{1!}(v^p(\{1\}) - v^p(\{\emptyset\})) = p(\mathcal{P}_5)(v(\{1\}))$.

Аналогично находятся: $\mu_2 = p(\mathcal{P}_5)(v(\{2\}))$, $\mu_3 = p(\mathcal{P}_5)(v(\{3\}))$.

Для коалиционной структуры $\mathcal{P}_2 = (\{1,2\},\{3\})$:

$$\mu_1 = \frac{(2-2)!(2-1)!}{2!}(v^p(\{1,2\}) - v^p(\{2\})) + \frac{(2-1)!(1-1)!}{2!}(v^p(\{1\}) - v^p(\{\emptyset\})) =$$

$$= \frac{1}{2}(v^p(\{1,2\}) - v^p(\{2\}) + v^p(\{1\})) = \frac{1}{2}p(\mathcal{P}_2)(v(\{1,2\}) - v(\{2\})$$

$+v(\{1\}))$.

$$\mu_2 = \tfrac{(2-2)!(2-1)!}{2!}(v^p(\{1,2\}) - v^p(\{1\})) + \tfrac{(2-1)!(1-1)!}{2!}(v^p(\{2\}) - v^p(\{\emptyset\})) =$$

$= \frac{1}{2}(v^p(\{1,2\}) - v^p(\{1\}) + v^p(\{2\})) = \frac{1}{2}p(\mathcal{P}_2)(v(\{1,2\}) - v(\{1\})$
$+v(\{2\}))$.

$$\mu_3 = \tfrac{(1-1)!(1-0)!}{1!}(v^p(\{3\}) - v^p(\{\emptyset\})) + v^p(\{3\}) = v^p(\{3\}) = p(\mathcal{P}_2)v(\{3\}).$$

Для коалициионной структуры $\mathcal{P}_1 = (\{1,2,3\})$:

$$\begin{aligned}\mu_1 = {} & \tfrac{(3-3)!(3-1)!}{3!}(v^p(\{1,2,3\}) - v^p(\{2,3\})) \\ & +\tfrac{(3-2)!(2-1)!}{3!}(v^p(\{1,2\}) - v^p(\{2\})) \\ & +\tfrac{(3-2)!(2-1)!}{3!}(v^p(\{1,3\}) - v^p(\{3\})) + \tfrac{(3-1)!(1-1)!}{3!}(v^p(\{1\})) = \\ & \tfrac{1}{3}(v^p(\{1,2,3\}) - v^p(\{2,3\})) + \tfrac{1}{6}(v^p(\{1,2\}) - v^p(\{2\})) \\ & +\tfrac{1}{6}(v^p(\{1,3\}) - v^p(\{3\})) + \tfrac{1}{3}v^p(\{1\}) = \\ & p(\mathcal{P}_1)(\tfrac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\})) + \tfrac{1}{6}(v(\{1,2\}) - v(\{2\})) \\ & +\tfrac{1}{6}(v(\{1,3\}) - v(\{3\})) + \tfrac{1}{3}v(\{1\})).\end{aligned}$$

Соберем формулы для компонент векторов Аумана-Дрезе для рассматриваемых в работе коалиционных структур в общую таблицу:

Далее приведем таблицы Аумана-Дрезе для различных разбиений При разбиении, когда вероятность возникновения коалиционных структур будет:

$\mathcal{P}_1 = (\{1,2,3\}) = \frac{1}{5}$,
$\mathcal{P}_2 = (\{1,2\},\{3\}) = \frac{1}{5}$,
$\mathcal{P}_3 = (\{1,3\},\{2\}) = \frac{1}{5}$,
$\mathcal{P}_4 = (\{1\},\{2,3\}) = \frac{1}{5}$,

Coalition/player	μ_1	μ_2	μ_3
$\mathcal{P}_1 = (\{1,2,3\})$	$p(\mathcal{P}_1)(\frac{1}{3}(v(\{1,2,3\})-v(\{2,3\}))+\frac{1}{6}(v(\{1,2\})-v(\{2\}))+\frac{1}{6}(v(\{1,3\})-v(\{3\}))+\frac{1}{3}v(\{1\}))$	$p(\mathcal{P}_1)(\frac{1}{3}(v(\{1,2,3\})-v(\{1,3\}))+\frac{1}{6}(v(\{1,2\})-v(\{1\}))+\frac{1}{6}(v(\{2,3\})-v(\{3\}))+\frac{1}{3}v(\{2\}))$	$p(\mathcal{P}_1)(\frac{1}{3}(v(\{1,2,3\})-v(\{1,2\}))+\frac{1}{6}(v(\{1,3\})-v(\{1\}))+\frac{1}{6}(v(\{2,3\})-v(\{2\}))+\frac{1}{3}v(\{3\}))$
$\mathcal{P}_2 = (\{1,2\},\{3\})$	$\frac{1}{2}p(\mathcal{P}_2)(v(\{1,2\})-v(\{2\})+v(\{1\}))$	$\frac{1}{2}p(\mathcal{P}_2)(v(\{1,2\})-v(\{1\})+v(\{2\}))$	$p(\mathcal{P}_2)v(\{3\})$
$\mathcal{P}_3 = (\{1,3\},\{2\})$	$\frac{1}{2}p(\mathcal{P}_3)(v(\{1,3\})-v(\{3\})+v(\{1\}))$	$p(\mathcal{P}_3)v(\{2\})$	$\frac{1}{2}p(\mathcal{P}_3)(v(\{1,3\})-v(\{1\})+v(\{3\}))$
$\mathcal{P}_4 = (\{1\},\{2,3\})$	$p(\mathcal{P}_4)v(\{1\})$	$\frac{1}{2}p(\mathcal{P}_4)(v(\{2,3\})-v(\{3\})+v(\{2\}))$	$\frac{1}{2}p(\mathcal{P}_4)(v(\{2,3\})-v(\{2\})+v(\{3\}))$
$\mathcal{P}_5 = (\{1\},\{2\},\{3\})$	$p(\mathcal{P}_5)v(\{1\})$	$p(\mathcal{P}_5)v(\{2\})$	$p(\mathcal{P}_5)v(\{3\})$

Таблица 4. Общая таблица вектора Аумана-Дрезе

$\mathcal{P}_5 = (\{1\},\{2\},\{3\}) = \frac{1}{5}$.

получается следующая таблица для компонентов вектора Аумана-Дрезе :

При разбиении:

$\mathcal{P}_1 = (\{1,2,3\}) = \frac{1}{3}$,

$\mathcal{P}_2 = (\{1,2\},\{3\}) = \frac{1}{9}$,

$\mathcal{P}_3 = (\{1,3\},\{2\}) = \frac{1}{9}$,

$\mathcal{P}_4 = (\{1\},\{2,3\}) = \frac{1}{9}$,

$\mathcal{P}_5 = (\{1\},\{2\},\{3\}) = \frac{1}{3}$.

получается следующая таблица для компонентов вектора Аумана-Дрезе :

Coalition/player	μ_1	μ_2	μ_3
$\mathcal{P}_1 = (\{1,2,3\})$	$\frac{1}{5}(\frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\})) + \frac{1}{6}(v(\{1,2\}) - v(\{2\})) + \frac{1}{6}(v(\{1,3\}) - v(\{3\})) + \frac{1}{3}v(\{1\}))$	$\frac{1}{5}(\frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{1,3\})) + \frac{1}{6}(v(\{1,2\}) - v(\{1\})) + \frac{1}{6}(v(\{2,3\}) - v(\{3\})) + \frac{1}{3}v(\{2\}))$	$\frac{1}{5}(\frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\})) + \frac{1}{6}(v(\{1,3\}) - v(\{1\})) + \frac{1}{6}(v(\{2,3\}) - v(\{2\})) + \frac{1}{3}v(\{3\}))$
$\mathcal{P}_2 = (\{1,2\},\{3\})$	$\frac{1}{10}(v(\{1,2\}) - v(\{2\}) + v(\{1\}))$	$\frac{1}{10}(v(\{1,2\}) - v(\{1\}) + v(\{2\}))$	$\frac{1}{5}v(\{3\})$
$\mathcal{P}_3 = (\{1,3\},\{2\})$	$\frac{1}{10}(v(\{1,3\}) - v(\{3\}) + v(\{1\}))$	$\frac{1}{5}v(\{2\})$	$\frac{1}{10}(v(\{1,3\}) - v(\{1\}) + v(\{3\}))$
$\mathcal{P}_4 = (\{1\},\{2,3\})$	$\frac{1}{5}v(\{1\})$	$\frac{1}{10}(v(\{2,3\}) - v(\{3\}) + v(\{2\}))$	$\frac{1}{10}(v(\{2,3\}) - v(\{2\}) + v(\{3\}))$
$\mathcal{P}_5 = (\{1\},\{2\},\{3\})$	$\frac{1}{5}v(\{1\})$	$\frac{1}{5}v(\{2\})$	$\frac{1}{5}v(\{3\})$

Таблица 5. Таблица Аумана-Дрезе при равномерном распределении

2.3. Устойчивые коалиционные структуры в игре трех игроков

Для исследования устойчивости коалиционной структуры при различных вероятностных распределениях рассмотрим в качестве решений кооперативной игры вектор Аумана-Дрезе и $ES-$значение.

Опираясь на определение 1.3.1, выпишем условия устойчивости коалиций относительно $ES-$значений для различных коалиционных структур.

В коалиционной структуре $\mathcal{P}_1 = (\{1,2,3\})$ существует единственно возможное отклонение любого игрока - покинуть коалицию $\{1,2,3\}$, став индивидуальным игроком. При этом коалиционная структура $\mathcal{P}_1$ будет

Coalition/player	μ_1	μ_2	μ_3
$\mathcal{P}_1 = (\{1,2,3\})$	$\frac{1}{3}(\frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\})) + \frac{1}{6}(v(\{1,2\}) - v(\{2\})) + \frac{1}{6}(v(\{1,3\}) - v(\{3\})) + \frac{1}{3}v(\{1\}))$	$\frac{1}{3}(\frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{1,3\})) + \frac{1}{6}(v(\{1,2\}) - v(\{1\})) + \frac{1}{6}(v(\{2,3\}) - v(\{3\})) + \frac{1}{3}v(\{2\}))$	$\frac{1}{3}(\frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\})) + \frac{1}{6}(v(\{1,3\}) - v(\{1\})) + \frac{1}{6}(v(\{2,3\}) - v(\{2\})) + \frac{1}{3}v(\{3\}))$
$\mathcal{P}_2 = (\{1,2\},\{3\})$	$\frac{1}{18}(v(\{1,2\}) - v(\{2\}) + v(\{1\}))$	$\frac{1}{18}(v(\{1,2\}) - v(\{1\}) + v(\{2\}))$	$\frac{1}{9}v(\{3\})$
$\mathcal{P}_3 = (\{1,3\},\{2\})$	$\frac{1}{18}(v(\{1,3\}) - v(\{3\}) + v(\{1\}))$	$\frac{1}{9}v(\{2\})$	$\frac{1}{18}(v(\{1,3\}) - v(\{1\}) + v(\{3\}))$
$\mathcal{P}_4 = (\{1\},\{2,3\})$	$\frac{1}{9}v(\{1\})$	$\frac{1}{18}(v(\{2,3\}) - v(\{3\}) + v(\{2\}))$	$\frac{1}{18}(v(\{2,3\}) - v(\{2\}) + v(\{3\}))$
$\mathcal{P}_5 = (\{1\},\{2\},\{3\})$	$\frac{1}{3}v(\{1\})$	$\frac{1}{3}v(\{2\})$	$\frac{1}{3}v(\{3\})$

Таблица 6. Таблица Аумана-Дрезе при распределении $\frac{1}{3}$and $\frac{1}{9}$

устойчива тогда и только тогда, когда система неравенств

$$\begin{cases} \psi_1(\mathcal{P}_1) \geq \psi_1(\mathcal{P}_4) \\ \psi_2(\mathcal{P}_1) \geq \psi_2(\mathcal{P}_3) \\ \psi_3(\mathcal{P}_1) \geq \psi_3(\mathcal{P}_2) \end{cases}$$

имеет решение.

Теперь рассмотрим коалионную структуру $\mathcal{P}_2 = (\{1,2\},\{3\})$. Первый игрок может стать либо индивидуальным игроком, и тогда образуется коалиционная структура $\mathcal{P}_5 = (\{1\},\{2\},\{3\})$, либо создать коалицию с третьим игроком $\{1,3\}$, в этом случае получится коалиционная структура $\mathcal{P}_3 = (\{1,3\},\{2\})$. Второй игрок может аналогично стать либо индивидуальным игроком, и тогда образуется коалиционная структура $\mathcal{P}_5 =$

$(\{1\},\{2\},\{3\})$, либо создать коалицию с третьим игроком $\{2,3\}$, и в этом случае коалиционная структура приобретет вид $\mathcal{P}_4 = (\{1\},\{2,3\})$. Третий игрок имеет единственную возможность - присоединиться к двум другим игрокам и образовать коалиционную структуру $\mathcal{P}_1 = (\{1,2,3\})$. Система уравнений для устойчивости коалиционной структуры $\mathcal{P}_2$ будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \psi_1(\mathcal{P}_2) \geq \psi_1(\mathcal{P}_3) \\ \psi_1(\mathcal{P}_2) \geq \psi_1(\mathcal{P}_5) \\ \psi_2(\mathcal{P}_2) \geq \psi_2(\mathcal{P}_4) \\ \psi_2(\mathcal{P}_2) \geq \psi_2(\mathcal{P}_5) \\ \psi_3(\mathcal{P}_2) \geq \psi_3(\mathcal{P}_1) \end{cases}$$

Аналогичные рассуждения можно провести и для других коалиционных структур. В результате получим следующую таблицу условий устойчивости коалиций:

Полученные условия устойчивости коалиционных структур и найденные в параграфе 2.2 значения $ES-value$ позволяют сформулировать следующие теоремы и утверждения.

Теорема 1. *Устойчивость коалиционных структур при равномерном распределении и кооперативном решении с вектором $ES-value$ выражается соотношениями, представленными в таблице 8.*

Доказательство.

Для доказательства теоремы необходимо подставить найденные выражения $ES-value$ для вероятностных коалиционных структур (таблица 2) в системы неравенств устойчивости рассматриваемых коалиционных структур (таблица 7). Все вычисления приведены в приложении 4.1.

Stable for condition partition for $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$		
$\mathcal{P}_1 = (\{1,2,3\})$	$\mathcal{P}_2 = (\{1,2\},\{3\})$	$\mathcal{P}_3 = (\{1,3\},\{2\})$
$\begin{cases} \psi_1(\mathcal{P}_1) \geq \psi_1(\mathcal{P}_4) \\ \psi_2(\mathcal{P}_1) \geq \psi_2(\mathcal{P}_3) \\ \psi_3(\mathcal{P}_1) \geq \psi_3(\mathcal{P}_2) \end{cases}$	$\begin{cases} \psi_1(\mathcal{P}_2) \geq \psi_1(\mathcal{P}_3) \\ \psi_1(\mathcal{P}_2) \geq \psi_1(\mathcal{P}_5) \\ \psi_2(\mathcal{P}_2) \geq \psi_2(\mathcal{P}_4) \\ \psi_2(\mathcal{P}_2) \geq \psi_2(\mathcal{P}_5) \\ \psi_3(\mathcal{P}_2) \geq \psi_3(\mathcal{P}_1) \end{cases}$	$\begin{cases} \psi_1(\mathcal{P}_3) \geq \psi_1(\mathcal{P}_2) \\ \psi_1(\mathcal{P}_3) \geq \psi_1(\mathcal{P}_5) \\ \psi_2(\mathcal{P}_3) \geq \psi_2(\mathcal{P}_1) \\ \psi_3(\mathcal{P}_3) \geq \psi_3(\mathcal{P}_4) \\ \psi_3(\mathcal{P}_3) \geq \psi_3(\mathcal{P}_5) \end{cases}$
Stable condition for $\mathcal{P}_4, \mathcal{P}_5$		
$\mathcal{P}_4 = (\{1\},\{2,3\})$	$\mathcal{P}_5 = (\{1\},\{2\},\{3\})$	
$\begin{cases} \psi_1(\mathcal{P}_4) \geq \psi_1(\mathcal{P}_1) \\ \psi_2(\mathcal{P}_4) \geq \psi_2(\mathcal{P}_2) \\ \psi_2(\mathcal{P}_4) \geq \psi_2(\mathcal{P}_5) \\ \psi_3(\mathcal{P}_4) \geq \psi_3(\mathcal{P}_3) \\ \psi_3(\mathcal{P}_4) \geq \psi_3(\mathcal{P}_5) \end{cases}$	$\begin{cases} \psi_1(\mathcal{P}_5) \geq \psi_1(\mathcal{P}_2) \\ \psi_1(\mathcal{P}_5) \geq \psi_1(\mathcal{P}_3) \\ \psi_2(\mathcal{P}_5) \geq \psi_2(\mathcal{P}_2) \\ \psi_2(\mathcal{P}_5) \geq \psi_2(\mathcal{P}_4) \\ \psi_3(\mathcal{P}_5) \geq \psi_3(\mathcal{P}_3) \\ \psi_3(\mathcal{P}_5) \geq \psi_3(\mathcal{P}_4) \end{cases}$	

Таблица 7. Условия устойчивости коалиционных структур

Теорема 2. *Устойчивость коалиционных структур при равномерном распределении и кооперативном решении с вектором Аумана-Дрезе выражается соотношениями, представленными в таблице 9.*

Доказательство.

Для доказательства теоремы необходимо подставить найденные выражения Аумана-Дрезе для вероятностных коалиционных структур (таблица 5)

$\mathcal{P}_1 = (\{1,2,3\})$	
$\begin{cases} v(\{1,2,3\}) - v(\{2\}) - v(\{3\})) \geq 3v(\{1\}) \\ v(\{1,2,3\}) - v(\{1\}) - v(\{3\})) \geq 3v(\{2\}) \\ v(\{1,2,3\}) - v(\{1\}) - v(\{2\})) \geq 3v(\{3\}) \end{cases}$	
$\mathcal{P}_2 = (\{1,2\},\{3\})$	$\mathcal{P}_3 = (\{1,3\},\{2\})$
$\begin{cases} v(\{1,2\}) - v(\{2\}) \geq v(\{1,3\}) - v(\{3\}) \\ v(\{1,2\}) - v(\{2\}) \geq 2v(\{1\} \\ v(\{1,2\}) - v(\{1\}) \geq v(\{2,3\}) - v(\{3\}) \\ v(\{1,2\}) - v(\{1\}) \geq 2v(\{2\}) \\ 3v(\{3\}) \geq v(\{1,2,3\} - v(\{1\}) - v(\{2\}) \end{cases}$	$\begin{cases} v(\{1,3\}) - v(\{3\}) \geq v(\{1,2\}) - \\ -v(\{2\}) \\ v(\{1,3\}) - v(\{3\}) \geq 2v(\{1\}) \\ 3v(\{2\}) \geq v(\{1,2,3\}) - \\ -v(\{1\}) - v(\{3\}) \\ v(\{1,3\}) - v(\{1\}) \geq v(\{2,3\}) - \\ -v(\{2\}) \\ v(\{1,3\}) - v(\{1\}) \geq 2v(\{3\}) \end{cases}$
$\mathcal{P}_4 = (\{1\},\{2,3\})$	$\mathcal{P}_5 = (\{1\},\{2\},\{3\})$
$\begin{cases} 3v(\{1\}) \geq v(\{1,2,3\}) - v(\{2\}) - \\ -v(\{3\}))) \\ v(\{2,3\}) - v(\{3\}) \geq v(\{1,2\}) - v(\{1\}) \\ v(\{2,3\}) - v(\{3\}) \geq 2v(\{2\}) \\ v(\{2,3\}) - v(\{2\}) \geq v(\{1,3\}) - v(\{1\}) \\ v(\{2,3\}) - v(\{2\}) \geq 2v(\{3\}) \end{cases}$	$\begin{cases} 2v(\{1\}) \geq v(\{1,2\}) - v(\{2\}) \\ 2v(\{1\}) \geq v(\{1,3\}) - v(\{3\}) \\ 2v(\{2\}) \geq v(\{1,2\}) - v(\{1\}) \\ 2v(\{2\}) \geq v(\{2,3\}) - v(\{3\})) \\ 2v(\{3\}) \geq v(\{1,3\}) - v(\{1\})) \\ 2v(\{3\}) \geq v(\{2,3\}) - v(\{2\})) \end{cases}$

Таблица 8. Устойчивость коалиционных структур при равномерном распределении и кооперативном решении с вектором $ES - value$

в системы неравенств устойчивости рассматриваемых коалиционных структур (таблица 7). Все вычисления приведены в приложении 4.3.

Теорема 3. *Устойчивость коалиционных структур при распределении*

$\mathcal{P}_1 = (\{1, 2, 3\}) = \frac{1}{3}$,
$\mathcal{P}_2 = (\{1, 2\}, \{3\}) = \frac{1}{9}$,
$\mathcal{P}_3 = (\{1, 3\}, \{2\}) = \frac{1}{9}$,
$\mathcal{P}_4 = (\{1\}, \{2, 3\}) = \frac{1}{9}$,
$\mathcal{P}_5 = (\{1\}, \{2\}, \{3\}) = \frac{1}{3}$.

и кооперативном решении с вектором $ES - value$ выражается соотношениями, представленными в таблице 10.

Доказательство.

Для доказательства теоремы необходимо подставить найденные выражения $ES - value$ для вероятностных коалиционных структур (таблица 3) в системы неравенств устойчивости рассматриваемых коалиционных структур (таблица 7). Все вычисления приведены в приложении 4.2.

Теорема 4. *Устойчивость коалиционных структур при распределении*

$\mathcal{P}_1 = (\{1, 2, 3\}) = \frac{1}{3}$,
$\mathcal{P}_2 = (\{1, 2\}, \{3\}) = \frac{1}{9}$,
$\mathcal{P}_3 = (\{1, 3\}, \{2\}) = \frac{1}{9}$,
$\mathcal{P}_4 = (\{1\}, \{2, 3\}) = \frac{1}{9}$,
$\mathcal{P}_5 = (\{1\}, \{2\}, \{3\}) = \frac{1}{3}$.

и кооперативном решении с вектором Аумана-Дрезе выражается соотношениями, представленными в таблице 11.

Доказательство.

Для доказательства теоремы необходимо подставить найденные выраже-

<table>
<tr><td colspan="2">$\mathcal{P}_1 = (\{1,2,3\})$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\begin{cases} 2v(\{1,2,3\}) - 2v(\{2,3\}) + v(\{1,2\}) + v(\{1,3\}) \geq 4v(\{1\}) + v(\{2\}) + v(\{3\}) \\ 2v(\{1,2,3\}) - 2v(\{1,3\}) + v(\{1,2\}) + v(\{2,3\} \geq 4v(\{2\}) + v(\{1\}) + v(\{3\}) \\ 2v(\{1,2,3\}) - 2v(\{1,2\}) + v(\{1,3\}) + v(\{2,3\}) \geq 4v(\{3\}) + v(\{1\}) + v(\{2\}) \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>$\mathcal{P}_2 = (\{1,2\},\{3\})$</td><td>$\mathcal{P}_3 = (\{1,3\},\{2\})$</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} v(\{1,2\}) - v(\{2\}) \geq v(\{1,3\}) - v(\{3\}) \\ v(\{1,2\}) - v(\{2\}) \geq v(\{1\}) \\ v(\{1,2\}) - v(\{1\}) \geq v(\{2,3\}) - v(\{3\}) \\ v(\{1,2\}) - v(\{1\}) \geq v(\{2\}) \\ 4v(\{3\}) \geq 2v(\{1,2,3\}) - 2v(\{1,2\}) + \\ +v(\{1,3\}) - v(\{1\}) + v(\{2,3\}) - v(\{2\}) \end{cases}$</td><td>$\begin{cases} v(\{1,3\}) - v(\{3\}) \geq v(\{1,2\}) - v(\{2\}) \\ v(\{1,3\}) - v(\{3\}) \geq v(\{1\}) \\ 4v(\{2\}) \geq 2v(\{1,2,3\}) - 2v(\{1,3\}) + \\ +v(\{1,2\}) - v(\{1\}) + v(\{2,3\}) - v(\{3\}) \\ v(\{1,3\}) - v(\{1\}) \geq v(\{2,3\}) - v(\{2\}) \\ v(\{1,3\}) - v(\{1\}) \geq v(\{3\}) \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>$\mathcal{P}_4 = (\{1\},\{2,3\})$</td><td>$\mathcal{P}_5 = (\{1\},\{2\},\{3\})$</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} 4v(\{1\}) \geq 2v(\{1,2,3\}) - 2v(\{2,3\}) + \\ +v(\{1,2\}) - v(\{2\}) + v(\{1,3\}) - v(\{3\}) \\ v(\{1\}) \geq v(\{1,2\}) - v(\{2\}) \\ v(\{2,3\}) - v(\{3\}) \geq v(\{2\}) \\ v(\{2,3\}) - v(\{2\}) \geq v(\{1,3\}) - v(\{1\}) \\ v(\{2,3\}) - v(\{2\}) \geq v(\{3\}) \end{cases}$</td><td>$\begin{cases} v(\{1\}) \geq v(\{1,2\}) - v(\{2\}) \\ v(\{1\}) \geq v(\{1,3\}) - v(\{3\}) \\ v(\{2\}) \geq v(\{1,2\}) - v(\{1\}) \\ v(\{2\}) \geq v(\{2,3\}) - v(\{3\}) \\ v(\{3\}) \geq v(\{1,3\}) - v(\{1\}) \\ v(\{3\}) \geq v(\{2,3\}) - v(\{2\}) \end{cases}$</td></tr>
</table>

Таблица 9. Устойчивость коалиционных структур при равномерном распределении и кооперативном решении с вектором Аумана-Дрезе

<table>
<tr><td colspan="2">$\mathcal{P}_1 = (\{1,2,3\})$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\begin{cases} v(\{1,2,3\}) - v(\{2\}) - v(\{3\}) \geq -3v(\{1\}) \\ v(\{1,2,3\}) - v(\{1\}) - v(\{3\}) \geq -3v(\{2\}) \\ v(\{1,2,3\}) - v(\{1\}) - v(\{2\}) \geq -3v(\{3\}) \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>$\mathcal{P}_2 = (\{1,2\},\{3\})$</td><td>$\mathcal{P}_3 = (\{1,3\},\{2\})$</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} v(\{1,2\}) - v(\{2\}) \geq v(\{1,3\}) - v(\{3\}) \\ v(\{1,2\}) - v(\{2\}) \geq 10v(\{1\}) \\ v(\{1,2\}) - v(\{1\}) \geq v(\{2,3\}) - v(\{3\}) \\ v(\{1,2\}) - v(\{1\}) \geq 10v(\{2\}) \\ 0 \geq v(\{1,2,3\}) - v(\{1\}) - v(\{2\}) + \\ +v(\{3\}) \end{cases}$</td><td>$\begin{cases} v(\{1,3\}) - v(\{3\}) \geq v(\{1,2\}) - \\ -v(\{2\}) \\ v(\{1,3\}) - v(\{3\}) \geq 10v(\{1\}) \\ 0 \geq v(\{1,2,3\}) - v(\{1\}) - \\ -v(\{3\}) + v(\{2\}) \\ v(\{1,3\}) - v(\{1\}) \geq v(\{2,3\}) - \\ -v(\{2\}) \\ v(\{1,3\}) - v(\{1\}) \geq 10v(\{3\}) \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>$\mathcal{P}_4 = (\{1\},\{2,3\})$</td><td>$\mathcal{P}_5 = (\{1\},\{2\},\{3\})$</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} 0 \geq v(\{1,2,3\}) - v(\{2\}) - v(\{3\}) + \\ +v(\{1\}) \\ v(\{2,3\}) - v(\{3\}) \geq v(\{1,2\}) - v(\{1\}) \\ v(\{2,3\}) - v(\{3\}) \geq 10v(\{2\}) \\ v(\{2,3\}) - v(\{2\}) \geq v(\{1,3\}) - v(\{1\}) \\ v(\{2,3\}) - v(\{2\}) \geq 10v(\{3\}) \end{cases}$</td><td>$\begin{cases} 10v(\{1\}) \geq v(\{1,2\}) - v(\{2\}) \\ 10v(\{1\}) \geq v(\{1,3\}) - v(\{3\}) \\ 10v(\{2\}) \geq v(\{1,2\}) - v(\{1\}) \\ 10v(\{2\}) \geq v(\{2,3\}) - v(\{3\}) \\ 10v(\{3\}) \geq v(\{1,3\}) - v(\{1\}) \\ 10v(\{3\}) \geq v(\{2,3\}) - v(\{2\}) \end{cases}$</td></tr>
</table>

Таблица 10. Устойчивость коалиционных структур при вероятностном распределении $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{9}$ и кооперативном решении с вектором $ES - value$

ния Аумана-Дрезе для вероятностных коалиционных структур (таблица 6) в системы неравенств устойчивости рассматриваемых коалиционных структур (таблица 7). Все вычисления приведены в приложении 4 .4.

<table>
<tr><td colspan="2">$\mathcal{P}_1 = (\{1,2,3\})$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\begin{cases} 2v(\{1,2,3\}) - 2v(\{2,3\}) + v(\{1,2\}) - v(\{2\}) + v(\{1,3\}) - v(\{3\}) \geq 0 \\ 2v(\{1,2,3\}) - 2v(\{1,3\}) + v(\{1,2\}) - v(\{1\}) + v(\{2,3\}) - v(\{3\}) \geq 0 \\ 2v(\{1,2,3\}) - 2v(\{1,2\})) + v(\{1,3\}) - v(\{1\}) + v(\{2,3\}) - v(\{2\}) \geq 0 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>$\mathcal{P}_2 = (\{1,2\},\{3\})$</td><td>$\mathcal{P}_3 = (\{1,3\},\{2\})$</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} v(\{1,2\}) - v(\{2\}) \geq v(\{1,3\}) - v(\{3\}) \\ v(\{1,2\}) - v(\{2\}) \geq 5v(\{1\}) \\ v(\{1,2\}) - v(\{1\}) \geq v(\{2,3\}) - v(\{3\}) \\ v(\{1,2\}) - v(\{1\}) \geq 5v(\{2\}) \\ 0 \geq 2v(\{1,2,3\}) - 2v(\{1,2\}) + \\ +v(\{1,3\}) - v(\{1\}) + v(\{2,3\}) - v(\{2\})) \end{cases}$</td><td>$\begin{cases} v(\{1,3\}) - v(\{3\}) \geq v(\{1,2\}) - v(\{2\}) \\ v(\{1,3\}) - v(\{3\}) \geq 5v(\{1\}) \\ 0 \geq 2v(\{1,2,3\}) - 2v(\{1,3\}) + \\ +v(\{1,2\}) - v(\{1\}) + v(\{2,3\}) - v(\{3\}) \\ v(\{1,3\}) - v(\{1\}) \geq v(\{2,3\}) - v(\{2\}) \\ v(\{1,3\}) - v(\{1\}) \geq 5v(\{3\}) \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>$\mathcal{P}_4 = (\{1\},\{2,3\})$</td><td>$\mathcal{P}_5 = (\{1\},\{2\},\{3\})$</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} 0 \geq 2v(\{1,2,3\}) - 2v(\{2,3\}) + v(\{1,2\}) - \\ -v(\{2\}) + v(\{1,3\}) - v(\{3\}) \\ v(\{2,3\}) - v(\{3\}) \geq v(\{1,2\}) - v(\{1\}) \\ v(\{2,3\}) - v(\{3\}) \geq 5v(\{2\}) \\ v(\{2,3\}) - v(\{2\}) \geq v(\{1,3\}) - v(\{1\}) \\ v(\{2,3\}) - v(\{2\}) \geq 5v(\{3\}) \end{cases}$</td><td>$\begin{cases} 5v(\{1\}) \geq v(\{1,2\}) - v(\{2\}) \\ 5v(\{1\}) \geq v(\{1,3\}) - v(\{3\}) \\ 5v(\{2\}) \geq v(\{1,2\}) - v(\{1\}) \\ 5v(\{2\}) \geq v(\{2,3\}) - v(\{3\}) \\ 5v(\{3\}) \geq v(\{1,3\}) - v(\{1\}) \\ 5v(\{3\}) \geq v(\{2,3\}) - v(\{2\}) \end{cases}$</td></tr>
</table>

Таблица 11. Устойчивость коалиционных структур при вероятностном распределении $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{9}$ и кооперативном решении с вектором Аумана-Дрезе

2.4. Устойчивые коалиционные структуры при равномерном распределении

Утверждение 1. *При равномерном распределении в игре с главным игроком с характеристической функцией, определяемой формулой из параграфа 2.4, и при кооперативном решении с вектором $ES-value$, существует единственная устойчивая коалиционная структура $\mathcal{P}_4 = (\{1\}, \{2,3\})$ при следующих ограничениях: $2\alpha \geq \beta \geq \alpha \geq \gamma > 0$.*

Доказательство. Покажем, что для всех коалиций, кроме $\mathcal{P}_4$, системы неравенств устойчивости не совместны. Для этого подставим характеристическую функцию игры с главным игроком в теорему 1.

Получим следующие системы:

a) для коалиционной структуры $\mathcal{P}_1 = (\{1,2,3\})$:

$$\begin{cases} 2\alpha + \frac{1}{3}\beta \geq 3\beta \\ 2\alpha + \frac{1}{3}\beta - \beta \geq 0 \\ 2\alpha + \frac{1}{3}\beta - \beta \geq 0 \\ \alpha > 0 \\ \beta \geq \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta \leq \frac{3}{4}\alpha \\ \beta \leq 3\alpha \\ \alpha > 0 \\ \beta \geq \alpha \end{cases}$$

из первого и последнего неравенства видим, что система не совместна.

b) для коалиционной структуры $\mathcal{P}_2 = (\{1,2\}, \{3\})$ из первого ограничения системы $v(\{1,2\}) - v(\{2\}) \geq v(\{1,3\}) - v(\{3\})$ и из условия $\beta \geq \alpha$

(по определению игры) получаем:

$$\begin{cases} \alpha + \frac{1}{2}\beta \geq 2\beta \\ \beta \geq \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta \leq \frac{2}{3}\alpha \\ \beta \geq \alpha \end{cases}$$

очевидно, что система не совместна.

c) для коалиционной структуры $\mathcal{P}_3 = (\{1,3\},\{2\})$ получим такой же результат, как и в предыдущем пункте b), поскольку игра симметрична относительно главного игрока.

d) для коалиционной структуры $\mathcal{P}_4 = (\{1\},\{2,3\})$ система неравенств устойчивости будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} 3\beta \geq 2\alpha + \frac{1}{3}\beta \\ 2\gamma - 0 \geq \alpha + \frac{\beta}{2} - \beta \\ 2\gamma \geq 0 \\ 2\gamma \geq \alpha + \frac{\beta}{2} \\ 2\gamma \geq 0 \\ \beta \geq \alpha \geq \gamma > 0 \end{cases}$$

преобразуем и упростим систему

$$\begin{cases} \frac{8}{3}\beta \geq 2\alpha \\ 2\gamma \geq \alpha - \frac{1}{2}\beta \\ 2\gamma \geq \alpha + \frac{1}{2}\beta \\ \beta \geq \alpha \geq \gamma > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta \geq \frac{3}{4}\alpha \\ \gamma \geq \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\beta \\ \gamma \geq \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\beta \\ \beta \geq \alpha \geq \gamma > 0 \end{cases}$$

уберем лишнее неравенство

$$\begin{cases} \beta \geq \frac{3}{4}\alpha \\ \gamma \geq \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\beta \\ \beta \geq \alpha \geq \gamma > 0 \end{cases}$$

найдем верхнее ограничение для β. Для этого, подставим условие для γ из третьего неравенства во второе: $\alpha \geq \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\beta$, отсюда следует, что $2\alpha \geq \beta$. Таким образом, получаем, что коалиционная структура будет устойчива при выполнении ограничений: $2\alpha \geq \beta \geq \alpha \geq \gamma > 0$.

e) для коалиционной структуры $\mathcal{P}_5 = (\{1\}, \{2\}, \{3\})$ получаем систему:

$$\begin{cases} 2\beta \geq \alpha + \frac{\beta}{2} \\ 2\beta \geq \alpha + \frac{\beta}{2} \\ 0 \geq \alpha + \frac{\beta}{2} - \beta \\ 0 \geq 2\gamma \\ 0 \geq \alpha + \frac{\beta}{2} - \beta \\ 0 \geq 2\gamma \\ \beta \geq \alpha \geq \gamma > 0 \end{cases}$$

система имеет единственное решение при $\gamma = 0$, что противоречит рассматриваемой функции выигрыша в игре с главным игроком, где $\gamma > 0$.

Таким образом, мы показали, что только коалиционная структура $\mathcal{P}_4 = (\{1\},\{2,3\})$ является устойчивой при ограничениях: $2\alpha \geq \beta \geq \alpha \geq \gamma > 0$. Утверждение доказано.

Утверждение 2. *При равномерном распределении в игре с главным игроком с характеристической функцией, определяемой формулой из параграфа 2.4, и кооперативном решении с вектором Аумана-Дрезе коалиционные структуры $\mathcal{P}_1 = (\{1,2,3\})$ и $\mathcal{P}_4 = (\{1\},\{2,3\})$ устойчивы с соответствующими ограничениями:*

для $\mathcal{P}_1$:

$$\begin{cases} \alpha > 0 \\ \alpha \leq \beta \leq \frac{18}{7}\alpha \\ 0 \leq \gamma \leq \frac{1}{12}(18\alpha - 7\beta) \end{cases}$$

для $\mathcal{P}_4$: $$\left[\begin{array}{ccc} \alpha > 0, & \beta \geq \dfrac{18}{7}\alpha, & 0 < \gamma \leq \alpha \\ \alpha > 0, & 2\alpha \leq \beta < \dfrac{18}{7}\alpha, & \dfrac{1}{12}(18\alpha - 7\beta) \leq \gamma \leq \alpha \end{array}\right.$$

.

Доказательство. Покажем что для всех коалиций, кроме $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_4$, системы неравенств не имеют решения.

а) для коалиционной структуры $\mathcal{P}_1 = (\{1,2,3\})$ система будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} 2(2\alpha + \frac{1}{3}\beta) - 4\gamma + 2(\alpha + \frac{\beta}{2}) \geq 4\beta \\ 4\alpha + \frac{2}{3}\beta - 2\alpha - \beta + \alpha + \frac{\beta}{2} + 2\gamma \geq \beta \\ 4\alpha + \frac{2}{3}\beta - 2\alpha - \beta + \alpha + \frac{\beta}{2} + 2\gamma \geq \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\alpha + \frac{2}{3}\beta - 4\gamma + 2\alpha + \beta \geq 4\beta \\ 3\alpha + \frac{7}{6}\beta - 2\beta + 2\gamma \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6\alpha + \frac{2}{3}\beta - 4\beta - 4\gamma \geq 0 \\ 3\alpha - \frac{5}{6}\beta + 2\gamma \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 18\alpha - 7\beta - 12\gamma \geq 0 \\ 18\alpha - 5\beta + 12\gamma \geq 0 \end{cases}$$

Учитывая условия накладываемые на характеристическую функцию с главным игроком (п.1.4),получаем следующую систему неравенств.

$$\begin{cases} \alpha > 0 \\ \alpha \leq \beta \leq \frac{18}{7}\alpha \\ 0 \leq \gamma \leq \frac{1}{12}(18\alpha - 7\beta) \end{cases}$$

Графическое решение этой системы представлено на Рис.1.

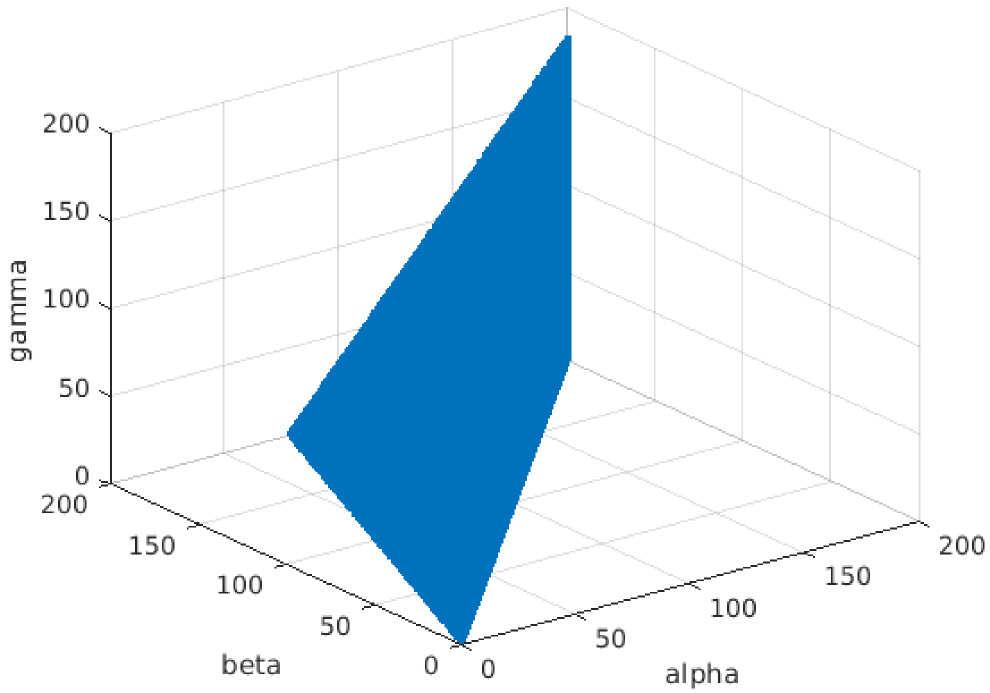

Рис. 1. Решение системы неравенств Аумана-Дрезе для к.с. $\mathcal{P}_1 = (\{1, 2, 3\})$ при равномерном распределении

b) для коалиционной структуры $\mathcal{P}_2 = (\{1, 2\}, \{3\})$ из третьего ограничения системы $v(\{1, 2\}) - v(\{1\}) \geq v(\{2, 3\}) - v(\{3\})$ при подстановке значения характеристической функции получаем $-\beta \geq 0$, что противоречит рассматриваемой функции выигрыша в игре с главным игроком, где $\beta > 0$.

c) для коалиционной структуры $\mathcal{P}_3 = (\{1, 3\}, \{2\})$ получим такой же результат, как и в предыдущем пункте b), поскольку игра симметрична относительно главного игрока.

d) для коалиционной структуры $\mathcal{P}_4 = (\{1\}, \{2, 3\})$ система неравенств устойчивости будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} 4\beta \geq 4\alpha + \frac{2}{3}\beta - 4\gamma + \alpha + \frac{\beta}{2} + \alpha + \frac{\beta}{2} \\ \beta \geq \alpha + \frac{\beta}{2} \\ 2\gamma \geq 0 \\ 2\gamma \geq \alpha + \frac{\beta}{2} - \beta \\ 2\gamma \geq 0 \end{cases}$$

уберем лишние неравенства, домножим первое неравенство на 3 и упростим выражения

$$\begin{cases} 12\gamma \geq 18\alpha - 7\beta \\ \alpha \leq \frac{\beta}{2} \\ \gamma \geq \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{4} \end{cases}$$

Решение системы неравенств с учетом условий, накладываемых нахарактеристической функции с главным игроком(п.1.4), приводит к следующей совокупности неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \alpha > 0, \qquad \beta \geq \dfrac{18}{7}\alpha, \qquad 0 < \gamma \leq \alpha \\ \alpha > 0, \qquad 2\alpha \leq \beta < \dfrac{18}{7}\alpha, \qquad \dfrac{1}{12}(18\alpha - 7\beta) \leq \gamma \leq \alpha \end{array}\right.$$

графическое решение которой представлено на Рис.2.

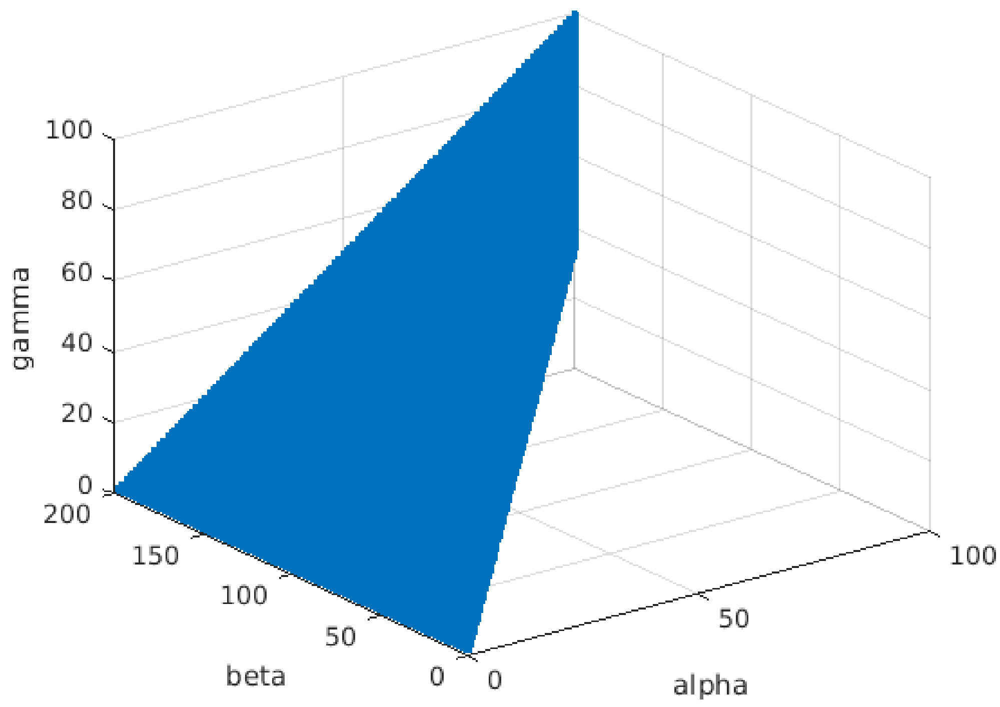

Рис. 2. Решение системы неравенств Аумана-Дрезе для к.с. $\mathcal{P}_4 = (\{1\}, \{2, 3\})$ при равномерном распределении

е) для коалиционной структуры $\mathcal{P}_5 = (\{1\}, \{2\}, \{3\})$ из четвертого неравенства системы $v(\{2\}) \geq v(\{2, 3\}) - v(\{3\})$ получаем, что $0 \geq 2\gamma$, что противоречит рассматриваемой функции выигрыша в игре с главным игроком, где $\gamma > 0$.

Таким образом, получили что коалиционные структуры $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_4$ будут устойчивыми при соответствующих ограничениях на параметры.

Сравнение устойчивости коалиционных структур при их равномерном вероятностном распределении с использованием в качестве кооперативного решения $ES-$значения и вектора Аумана-Дрезе, показывает, что математическая модель с $ES-$значением обнаруживает существование только одной устойчивой коалиционной структуры ($\mathcal{P}_4$), в то время как расчеты с вектором Аумана-Дрезе приводят к возможности существования двух устойчивых коалиционных структур ($\mathcal{P}_4$ и $\mathcal{P}_1$).

2.5. Устойчивые коалиционные структуры при распределении $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{9}$

Утверждение 3. *При вероятностном распределении*

$\mathcal{P}_1 = (\{1, 2, 3\}) = \frac{1}{3}$,
$\mathcal{P}_2 = (\{1, 2\}, \{3\}) = \frac{1}{9}$,
$\mathcal{P}_3 = (\{1, 3\}, \{2\}) = \frac{1}{9}$,
$\mathcal{P}_4 = (\{1\}, \{2, 3\}) = \frac{1}{9}$,
$\mathcal{P}_5 = (\{1\}, \{2\}, \{3\}) = \frac{1}{3}$.

в игре с главным игроком с характеристической функцией, определяемой формулой из параграфа 2.4, и кооперативном решении с вектором $ES - value$, *существует единственная устойчивая коалиционная структура* $\mathcal{P}_1 = (\{1, 2, 3\})$ *при этом параметры игры должны удовлетворять условиям:*

$$\begin{cases} \beta > 0 \\ \frac{1}{3}\beta \leq \alpha \leq \beta \end{cases}$$

Доказательство. Покажем, что для всех коалиционных структур, кроме первой, системы неравенств устойчивости не совместны. Подставляя игру с главным игроком в теорему 2, получим следующие системы неравенств для параметров:

a) для коалиционной структуры $\mathcal{P}_1 = (\{1, 2, 3\})$

$$\begin{cases} 2\alpha + \frac{1}{3}\beta \geq -3\beta \\ 2\alpha + \frac{1}{3}\beta - \beta \geq 0 \\ \beta \geq \alpha > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha \geq -\frac{10}{3}\beta \\ 2\alpha \geq \frac{2}{3}\beta \\ \beta \geq \alpha > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha \geq -\frac{5}{3}\beta \\ \alpha \geq \frac{1}{3}\beta \\ \beta \geq \alpha > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta > 0 \\ \frac{1}{3}\beta \leq \alpha \leq \beta \end{cases}$$

Очевидно, что система совместна.

b) для коалиционной структуры $\mathcal{P}_2 = (\{1, 2\}, \{3\})$:

$$\begin{cases} \alpha + \frac{1}{2}\beta \geq 10\beta \\ -\beta \geq 2\gamma \\ \alpha + \frac{1}{2}\beta - \beta \geq 0 \\ 0 \geq 2\alpha + \frac{1}{3}\beta - \beta \\ \beta \geq \alpha \geq \gamma > 0 \end{cases}$$

второе и последнее условия противоречат друг другу, отсюда следует несовместность системы.

c) для коалиционной структуры $\mathcal{P}_3 = (\{1,3\},\{2\})$ получим результат тот же, как и в предыдущем пункте b), поскольку игра симметрична относительно главного игрока.

d) для коалиционной структуры $\mathcal{P}_4 = (\{1\},\{2,3\})$ достаточно записать первое уравнение системы и условия на параметры в игре

$$\begin{cases} 0 \geq 2\alpha + \frac{1}{3}\beta + \beta \\ \beta \geq \alpha \geq \gamma > 0 \end{cases}$$

очевидно, что система не совместна.

e) для коалиционной структуры $\mathcal{P}_5 = (\{1\},\{2\},\{3\})$ третье неравенство из системы теоремы 2 упростится до $0 \geq 2\gamma$, поскольку параметр игры γ должен быть положительным, то данная система является не совместной.

Таким образом, получили что только коалиционная структура $\mathcal{P}_1$ будет устойчива при соответствующих ограничениях на параметры.

Утверждение 4. *При вероятностном распределении*

$\mathcal{P}_1 = (\{1,2,3\}) = \frac{1}{3}$,
$\mathcal{P}_2 = (\{1,2\},\{3\}) = \frac{1}{9}$,
$\mathcal{P}_3 = (\{1,3\},\{2\}) = \frac{1}{9}$,
$\mathcal{P}_4 = (\{1\},\{2,3\}) = \frac{1}{9}$,
$\mathcal{P}_5 = (\{1\},\{2\},\{3\}) = \frac{1}{3}$.

в игре с главным игроком с характеристической функцией, определяемой формулой из параграфа 2.4, и кооперативном решении с вектором Аумана-Дрезе, существует единственная устойчивая коалиционная структура $\mathcal{P}_1 = \{1,2,3\}$ *с ограничениями:*

$$\left[\begin{array}{lll} \alpha > 0, & \alpha \leq \beta \leq \dfrac{18}{5}\alpha, & 0 < \gamma \leq \alpha \\ \alpha > 0, & \dfrac{18}{5}\alpha < \beta \leq 6\alpha, & \dfrac{1}{12}(5\beta - 18\alpha) \leq \gamma \leq \alpha \end{array}\right.$$

Доказательство.

a) для коалиционной структуры $\mathcal{P}_1 = (\{1,2,3\})$ система неравенств устойчивости будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} 4\alpha + \frac{2}{3}\beta - 4\gamma + 2\alpha + \beta \geq 0 \\ 4\alpha + \frac{2}{3}\beta - 2\alpha - \beta + \alpha + \frac{\beta}{2} - \beta + 2\gamma \geq 0 \\ 4\alpha + \frac{2}{3}\beta - 2\alpha - \beta + \alpha + \frac{\beta}{2} - \beta + 2\gamma \geq 0 \end{cases}$$

уберем лишнее неравенство и упростим выражения

$$\begin{cases} 6\alpha - 4\gamma + \frac{5}{3}\beta \geq 0 \\ 3\alpha + 2\gamma - \frac{5}{6}\beta \geq 0 \end{cases}$$

Решение системы неравенств с учетом условий, накладываемых на характеристическую функцию с главным игроком (п.1.4), приводит к следующей совокупности неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \alpha > 0, \qquad \alpha \leq \beta \leq \dfrac{18}{5}\alpha, \qquad 0 < \gamma \leq \alpha \\ \alpha > 0, \qquad \dfrac{18}{5}\alpha < \beta \leq 6\alpha, \qquad \dfrac{1}{12}(5\beta - 18\alpha) \leq \gamma \leq \alpha \end{array}\right.$$

графическое решение которой представлено на Рис.3

b) для коалиционной структуры $\mathcal{P}_2 = (\{1,2\},\{3\})$: из второго неравенства системы получим: $\alpha + \frac{\beta}{2} \geq 5\beta$, отсюда $\alpha \geq \frac{9}{2}\beta$, что противоречит условию на параметры в игре.

c) для коалиционной структуры $\mathcal{P}_3 = (\{1,3\},\{2\})$ получим результат тот же, как и в предыдущем пункте b) поскольку игра симметрична относительно главного игрока.

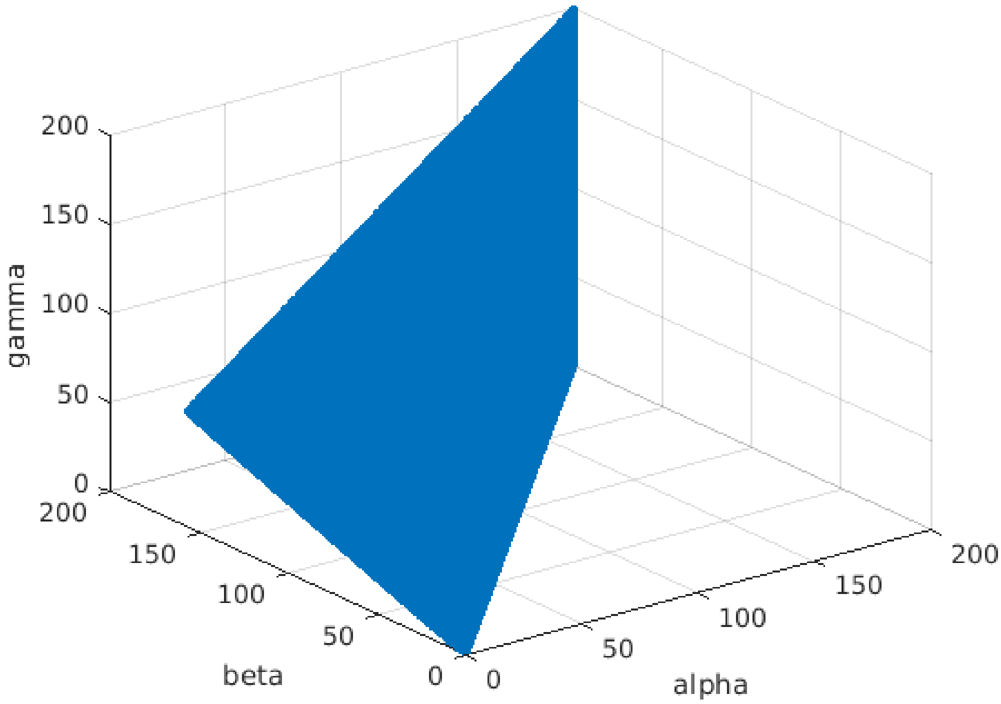

Рис. 3. Решение системы неравенств Аумана-Дрезе для к.с. $\mathcal{P}_1 = (\{1,2,3\})$ при распределении $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{9}$.

d) для коалиционной структуры $\mathcal{P}_4 = (\{1\},\{2,3\})$ получим следующую систему:

$$\begin{cases} 0 \geq 4\alpha + \frac{2}{3}\beta - 4\gamma + 2\alpha + \beta \\ 2\gamma \geq \alpha + \frac{\beta}{2} - \beta \\ 2\gamma \geq 0 \\ 2\gamma \geq \alpha + \frac{\beta}{2} - \beta \\ 2\gamma \geq 0 \end{cases}$$

упростим и уберем лишнее неравенство

$$\begin{cases} 0 \geq 6\alpha - 4\gamma + \frac{5}{3}\beta \\ 2\gamma \geq \alpha - \frac{\beta}{2} \end{cases}$$

данная система с учетом условий, накладываемых на характеристическую функцию с главным игроком (п.1.4), оказывается несовместной.

е) для коалиционной структуры $\mathcal{P}_5 = (\{1\}, \{2\}, \{3\})$ четвертое уравнение системы теоремы 2 упростится до $0 \geq 2\gamma$, поскольку параметр игры γ положительный, то данная система будет не совместна.

Таким образом, получили что только коалиционная структура $\mathcal{P}_1$ будет устойчива при соответствующих ограничениях на параметры.

В последних двух утверждениях было установлено существование единственной коалиционной структуры. Рассмотрим подробнее полученные в этих утверждениях отношения между параметрами α и β в условиях ограничения подобно тому, как это сделано в работе [3]. При кооперативном решении с $ES-$значением (утв.3) для α имеем неравенство: $\frac{1}{3}\beta \geq \alpha \geq \beta$. При кооперативном решении с вектором Аумана-Дрезе (утв.4) ограничения выражаются совокупностью неравенств. Выпишем отношения между α и β: $\left[\begin{array}{l} \alpha \leq \beta \leq \dfrac{18}{5}\alpha \\ \dfrac{18}{5}\alpha < \beta \leq 6\alpha \end{array}\right.$

решая неравенства относительно параметра α получим следующую совокупность: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \alpha < \frac{5}{18}\beta \\ \alpha > \frac{1}{6}\beta \end{cases} \\ \begin{cases} \alpha \geq \beta \\ \alpha \leq \frac{5}{18}\beta \end{cases} \end{array}\right.$

из которой следуют ограничения: $\frac{1}{6}\beta < \alpha \geq \beta$.

Таким образом, мы получили, что множество значений параметра α, задаваемое ограничениями при решении с $ES-$значения, является подмножеством значений α, определяемых условиями решения с вектором Аумана-Дрезе. Отсюда можно предположить, что если коалиционная структура устойчива по $ES-$значению, то она будет устойчивой и по вектору Аумана-Дрезе.

3. Заключение

В результате исследования условий устойчивости коалиционных разбиений в игре трех лиц с первым главным игроком были получены следующие результаты.

Найдены соотношения между вероятностными характеристическими функциями для различных коалиционных структур, которые определяют их устойчивость при равномерном вероятностном распределении как относительно вектора $ES-$значения, так и относительно вектора Аумана-Дрезе.

Получены соотношения между вероятностными характеристическими функциями для различных коалиционных структур, которые определяют их устойчивость при вероятностном распределении $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{9}$ и кооперативном решении как с вектором $ES-$значения, так и с вектором Аумана-Дрезе.

Установлено, что если при равномерном распределении вероятности возникновения коалиционных структур и кооперативном решении с вектором $ES-$значения существует только одна устойчивая коалиционная структура $\mathcal{P}_4 = \{1\}, \{2, 3\}$, то при кооперативном решении с вектором

Аумана-Дрезе устойчивыми являются две коалиционные структуры: $\mathcal{P}_1 = \{1,2,3\}$ и $\mathcal{P}_4 = \{1\},\{2,3\}$.

Продемонстрировано, что при вероятностном распределении возникновения коалиционных структур $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{9}$, и кооперативном решении как с вектором $ES-$значения, так и с вектором Аумана-Дрезе существует единственная устойчивая коалиционная структура $\mathcal{P}_1 = \{1,2,3\}$ с соответствующими для каждого вектора условиями на параметры.

На основании полученных в настоящей работе результатов можно высказать ряд интересных предположений.

При равномерном вероятностном распределении коалиционных структур для главного игрока выгоднее либо состоять в объединенной коалиционной структуре $\mathcal{P}_1 = \{1,2,3\}$, либо играть в одиночку, при условии объединения двух оставшихся игроков ($\mathcal{P}_4$). Присоединение главного игрока к любому другому игроку ($\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$) или игра в коалиционной структуре, где каждый играет сам за себя ($\mathcal{P}_5$), являются для него невыгодными вариантами.

При вероятностном распределении образования к.с. $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{9}$ выигрышной для главного игрока является исключительно объединенная к.с. $\mathcal{P}_1$, т.е. несмотря на одинаковую достаточно большую вероятность образования двух коалиционных структур ($\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_5$), одно коалиционное разбиение оказывается более выгодным, чем другое.

Сравнение ограничений для параметров характеристической функции устойчивых коалиционных структур, с их вероятностным распределением $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{9}$ при использовании кооперативного решения $ES-$значения и вектора Аумана-Дрезе, позволяет высказать предположение, что если коалиционная структура является устойчивой относительно $ES-$значения, то она будет устойчивой и относительно вектора Аумана-Дрезе.

Список литературы

1. Belau U. Outside options in probabilistic coalition situations // International Game Theory ReviewVol. 13. No. 04. P. 417-442 (2011)

2. Sedakov A., Parilina E., Volobuev Yu., Klimuk D. Existence of Stable Coalition Structures in Three-person Games // Contributions to Game Theory and Management. 2013. Vol. 6. P. 407–422.

3. Parilina E., Sedakov A. Stable cooperation in graph-restricted games //Contributions to Game Theory and Management, 2014, том 7, P. 271–281.

4. Сунь Ф., Парилина Е., Гао Х. Индивидуальная устойчивость коалиционных структур в играх трех лиц //Математическая Теория Игр и ее Приложения, т.11, в.1.2019, С.73-95.

5. Greenberg J. Pure and local public goods: A game-theoretic approach // In: Public Finance, A.Sandmo (ed.) Lexington, MA, Heath and Co, 1977.

6. Dreze J., Greenberg J. Hedonic Coalitions: Optimality and Stability // Econometrica. 1980. Vol.48. No. 4. P. 987–1003.

7. Bogomolnaia A., Jackson M.O The Stability of Hedonic Coalition Structures // Games and Economic Behavior. 2002. Vol. 38. P. 201-230.

8. Myerson R., (1977). Graphs and cooperation in games // Mathematics of Operations Research, 2, P. 225-229.

9. Vázquez-Brage M., García-Jurado I. and Carreras F. (1996) The Owen value applied to games with graph-restricted communication // Games and Economic Behavior, 12, P. 42-53.

4. Приложение

4.1. Условия устойчивости при равномерном распределении и кооперативном решении $ES-$значения

Для коалиционного разбиения $\mathcal{P}_1 = (\{1,2,3\})$

$$\begin{cases} \frac{1}{5}(v(\{1\}) + \frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{2\}) - v(\{3\}))) \geq \frac{2}{5}v(\{1\}) \\ \frac{1}{5}(v(\{2\}) + \frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{1\}) - v(\{3\}))) \geq \frac{2}{5}v(\{2\}) \\ \frac{1}{5}(v(\{3\}) + \frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{1\}) - v(\{2\})))) \geq \frac{2}{5}v(\{3\}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v(\{1,2,3\}) - v(\{2\}) - v(\{3\})) \geq 3v(\{1\}) \\ v(\{1,2,3\}) - v(\{1\}) - v(\{3\})) \geq 3v(\{2\}) \\ v(\{1,2,3\}) - v(\{1\}) - v(\{2\})) \geq 3v(\{3\}) \end{cases}$$

Для коалиционного разбиения $\mathcal{P}_2 = (\{1,2\},\{3\})$

$$\begin{cases} \frac{1}{5}(v(\{1\}) + \frac{1}{2}(v(\{1,2\}) - v(\{2\}))) \geq \frac{1}{5}(v(\{1\}) + \frac{1}{2}(v(\{1,3\}) - v(\{3\}))) \\ \frac{1}{5}(v(\{1\}) + \frac{1}{2}(v(\{1,2\}) - v(\{2\}))) \geq \frac{2}{5}v(\{1\} \\ \frac{1}{5}(v(\{2\}) + \frac{1}{2}v(\{1,2\}) - v(\{1\})) \geq \frac{1}{5}(v(\{2\}) + \frac{1}{2}(v(\{2,3\}) - v(\{3\}))) \\ \frac{1}{5}(v(\{2\}) + \frac{1}{2}v(\{1,2\}) - v(\{1\})) \geq \frac{2}{5}v(\{2\}) \\ \frac{2}{5}v(\{3\}) \geq \frac{1}{5}(v(\{3\}) + \frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{1\}) - v(\{2\}))) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v(\{1,2\}) - v(\{2\}) \geq v(\{1,3\}) - v(\{3\}) \\ v(\{1,2\}) - v(\{2\}) \geq 2v(\{1\} \\ v(\{1,2\}) - v(\{1\}) \geq v(\{2,3\}) - v(\{3\}) \\ v(\{1,2\}) - v(\{1\}) \geq 2v(\{2\}) \\ 3v(\{3\}) \geq v(\{1,2,3\} - v(\{1\}) - v(\{2\}) \end{cases}$$

Для коалиционного разбиения $\mathcal{P}_4 = (\{1\}, \{2,3\})$

$$\begin{cases} \frac{2}{5}v(\{1\}) \geq \frac{1}{5}(v(\{1\}) + \frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{2\}) - v(\{3\}))) \\ \frac{1}{5}(v(\{2\}) + \frac{1}{2}(v(\{2,3\}) - v(\{3\}))) \geq \frac{1}{5}(v(\{2\}) + \frac{1}{2}(v(\{1,2\}) - v(\{1\}))) \\ \frac{1}{5}(v(\{2\}) + \frac{1}{2}(v(\{2,3\}) - v(\{3\}))) \geq \frac{2}{5}v(\{2\}) \\ \frac{1}{5}(v(\{3\}) + \frac{1}{2}(v(\{2,3\}) - v(\{2\}))) \geq \frac{1}{5}(v(\{3\}) + \frac{1}{2}(v(\{1,3\}) - v(\{1\}))) \\ \frac{1}{5}(v(\{3\}) + \frac{1}{2}(v(\{2,3\}) - v(\{2\}))) \geq \frac{2}{5}v(\{3\}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3v(\{1\}) \geq v(\{1,2,3\}) - v(\{2\}) - v(\{3\}))) \\ v(\{2,3\}) - v(\{3\}) \geq v(\{1,2\}) - v(\{1\}) \\ v(\{2,3\}) - v(\{3\}) \geq 2v(\{2\}) \\ v(\{2,3\}) - v(\{2\}) \geq v(\{1,3\}) - v(\{1\}) \\ v(\{2,3\}) - v(\{2\}) \geq 2v(\{3\}) \end{cases}$$

Для коалиционного разбиения $\mathcal{P}_5 = (\{1\}, \{2\}, \{3\})$

$$\begin{cases} \frac{2}{5}v(\{1\}) \geq \frac{1}{5}(v(\{1\}) + \frac{1}{2}(v(\{1,2\}) - v(\{2\}))) \\ \frac{2}{5}v(\{1\}) \geq \frac{1}{5}(v(\{1\}) + \frac{1}{2}(v(\{1,3\}) - v(\{3\}))) \\ \frac{2}{5}v(\{2\}) \geq \frac{1}{5}(v(\{2\}) + \frac{1}{2}v(\{1,2\}) - v(\{1\})) \\ \frac{2}{5}v(\{2\}) \geq \frac{1}{5}(v(\{2\}) + \frac{1}{2}(v(\{2,3\}) - v(\{3\}))) \\ \frac{2}{5}v(\{3\}) \geq \frac{1}{5}(v(\{3\}) + \frac{1}{2}(v(\{1,3\}) - v(\{1\}))) \\ \frac{2}{5}v(\{3\}) \geq \frac{1}{5}(v(\{3\}) + \frac{1}{2}(v(\{2,3\}) - v(\{2\}))) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2v(\{1\}) \geq v(\{1,2\}) - v(\{2\}) \\ 2v(\{1\}) \geq v(\{1,3\}) - v(\{3\}) \\ 2v(\{2\}) \geq v(\{1,2\}) - v(\{1\}) \\ 2v(\{2\}) \geq v(\{2,3\}) - v(\{3\})) \\ 2v(\{3\}) \geq v(\{1,3\}) - v(\{1\})) \\ 2v(\{3\}) \geq v(\{2,3\}) - v(\{2\})) \end{cases}$$

4.2. Условия устойчивости при 1/3 и 1/9 вероятностях и кооперативном решении $ES-$значения

для коалиции $\mathcal{P}_1 = \{1, 2, 3\}$

$$\begin{cases} \psi_1(\mathcal{P}_1) \geq \psi_1(\mathcal{P}_4) \\ \psi_2(\mathcal{P}_1) \geq \psi_2(\mathcal{P}_3) \\ \psi_3(\mathcal{P}_1) \geq \psi_3(\mathcal{P}_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(v(\{1\}) + \frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{2\}) - v(\{3\}))) \geq \frac{2}{9}v(\{1\}) \\ \frac{1}{3}(v(\{2\}) + \frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{1\}) - v(\{3\}))) \geq \frac{2}{9}v(\{2\}) \\ \frac{1}{3}(v(\{3\}) + \frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{1\}) - v(\{2\}))) \geq \frac{2}{9}v(\{3\}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v(\{1,2,3\}) - v(\{2\}) - v(\{3\}) \geq -3v(\{1\}) \\ v(\{1,2,3\}) - v(\{1\}) - v(\{3\}) \geq -3v(\{2\}) \\ v(\{1,2,3\}) - v(\{1\}) - v(\{2\}) \geq -3v(\{3\}) \end{cases}$$

для коалиции $\mathcal{P}_2 = \{1, 2\}, \{3\}$

$$
\begin{cases}
\psi_1(\mathcal{P}_2) \geq \psi_1(\mathcal{P}_3) \\
\psi_1(\mathcal{P}_2) \geq \psi_1(\mathcal{P}_5) \\
\psi_2(\mathcal{P}_2) \geq \psi_2(\mathcal{P}_4) \\
\psi_2(\mathcal{P}_2) \geq \psi_2(\mathcal{P}_5) \\
\psi_3(\mathcal{P}_2) \geq \psi_3(\mathcal{P}_1)
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\frac{1}{9}(v(\{1\}) + \frac{1}{2}(v(\{1,2\}) - v(\{2\}))) \geq \frac{1}{9}(v(\{1\}) + \frac{1}{2}(v(\{1,3\}) - v(\{3\}))) \\
\frac{1}{9}(v(\{1\}) + \frac{1}{2}(v(\{1,2\}) - v(\{2\}))) \geq \frac{2}{3}v(\{1\}) \\
\frac{1}{9}(v(\{2\}) + \frac{1}{2}v(\{1,2\}) - v(\{1\})) \geq \frac{1}{9}(v(\{2\}) + \frac{1}{2}(v(\{2,3\}) - v(\{3\}))) \\
\frac{1}{9}(v(\{2\}) + \frac{1}{2}v(\{1,2\}) - v(\{1\})) \geq \frac{2}{3}v(\{2\}) \\
\frac{2}{9}v(\{3\}) \geq \frac{1}{3}(v(\{3\}) + \frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{1\}) - v(\{2\})))
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
v(\{1,2\}) - v(\{2\}) \geq v(\{1,3\}) - v(\{3\}) \\
v(\{1,2\}) - v(\{2\}) \geq 10v(\{1\}) \\
v(\{1,2\}) - v(\{1\}) \geq v(\{2,3\}) - v(\{3\}) \\
v(\{1,2\}) - v(\{1\}) \geq 10v(\{2\}) \\
-v(\{3\}) \geq v(\{1,2,3\}) - v(\{1\}) - v(\{2\})
\end{cases}
$$

для коалиции $\mathcal{P}_3 = \{1,3\}, \{2\}$

$$\begin{cases} \psi_1(\mathcal{P}_3) \geq \psi_1(\mathcal{P}_2) \\ \psi_1(\mathcal{P}_3) \geq \psi_1(\mathcal{P}_5) \\ \psi_2(\mathcal{P}_3) \geq \psi_2(\mathcal{P}_1) \\ \psi_3(\mathcal{P}_3) \geq \psi_3(\mathcal{P}_4) \\ \psi_3(\mathcal{P}_3) \geq \psi_3(\mathcal{P}_5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{9}(v(\{1\}) + \frac{1}{2}(v(\{1,3\}) - v(\{3\}))) \geq \frac{1}{9}(v(\{1\}) + \frac{1}{2}(v(\{1,2\}) - v(\{2\}))) \\ \frac{1}{9}(v(\{1\}) + \frac{1}{2}(v(\{1,3\}) - v(\{3\}))) \geq \frac{2}{3}v(\{1\}) \\ \frac{2}{9}v(\{2\}) \geq \frac{1}{3}(v(\{2\}) + \frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{1\}) - v(\{3\}))) \\ \frac{1}{9}(v(\{3\}) + \frac{1}{2}(v(\{1,3\}) - v(\{1\}))) \geq \frac{1}{9}(v(\{3\}) + \frac{1}{2}(v(\{2,3\}) - v(\{2\}))) \\ \frac{1}{9}(v(\{3\}) + \frac{1}{2}(v(\{1,3\}) - v(\{1\})))) \geq \frac{2}{3}v(\{3\}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v(\{1,3\}) - v(\{3\}) \geq v(\{1,2\}) - v(\{2\}) \\ v(\{1,3\}) - v(\{3\}) \geq 10v(\{1\}) \\ -v(\{2\}) \geq v(\{1,2,3\}) - v(\{1\}) - v(\{3\}) \\ v(\{1,3\}) - v(\{1\}) \geq v(\{2,3\}) - v(\{2\}) \\ v(\{1,3\}) - v(\{1\}) \geq 10v(\{3\}) \end{cases}$$

для коалиции $\mathcal{P}_4 = \{1\}, \{2,3\}$

$$\begin{cases} \psi_1(\mathcal{P}_4) \geq \psi_1(\mathcal{P}_1) \\ \psi_2(\mathcal{P}_4) \geq \psi_2(\mathcal{P}_2) \\ \psi_2(\mathcal{P}_4) \geq \psi_2(\mathcal{P}_5) \\ \psi_3(\mathcal{P}_4) \geq \psi_3(\mathcal{P}_3) \\ \psi_3(\mathcal{P}_4) \geq \psi_3(\mathcal{P}_5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{9}v(\{1\}) \geq \frac{1}{3}(v(\{1\}) + \frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{2\}) - v(\{3\}))) \\ \frac{1}{9}(v(\{2\}) + \frac{1}{2}(v(\{2,3\}) - v(\{3\}))) \geq \frac{1}{9}(v(\{2\}) + \frac{1}{2}(v(\{1,2\}) - v(\{1\}))) \\ \frac{1}{9}(v(\{2\}) + \frac{1}{2}(v(\{2,3\}) - v(\{3\}))) \geq \frac{2}{3}v(\{2\}) \\ \frac{1}{9}(v(\{3\}) + \frac{1}{2}(v(\{2,3\}) - v(\{2\}))) \geq \frac{1}{9}(v(\{3\}) + \frac{1}{2}(v(\{1,3\}) - v(\{1\}))) \\ \frac{1}{9}(v(\{3\}) + \frac{1}{2}(v(\{2,3\}) - v(\{2\}))) \geq \frac{2}{3}v(\{3\}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -v(\{1\}) \geq v(\{1,2,3\}) - v(\{2\}) - v(\{3\}) \\ v(\{2,3\}) - v(\{3\}) \geq v(\{1,2\}) - v(\{1\}) \\ v(\{2,3\}) - v(\{3\}) \geq 10v(\{2\}) \\ v(\{2,3\}) - v(\{2\}) \geq v(\{1,3\}) - v(\{1\}) \\ v(\{2,3\}) - v(\{2\}) \geq 10v(\{3\}) \end{cases}$$

для коалиции $\mathcal{P}_5 = \{1\}, \{2\}, \{3\}$

$$\begin{cases} \psi_1(\mathcal{P}_5) \geq \psi_1(\mathcal{P}_2) \\ \psi_1(\mathcal{P}_5) \geq \psi_1(\mathcal{P}_3) \\ \psi_2(\mathcal{P}_5) \geq \psi_2(\mathcal{P}_2) \\ \psi_2(\mathcal{P}_5) \geq \psi_2(\mathcal{P}_4) \\ \psi_3(\mathcal{P}_5) \geq \psi_3(\mathcal{P}_3) \\ \psi_3(\mathcal{P}_5) \geq \psi_3(\mathcal{P}_4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}v(\{1\}) \geq \frac{1}{9}(v(\{1\}) + \frac{1}{2}(v(\{1,2\}) - v(\{2\}))) \\ \frac{2}{3}v(\{1\}) \geq \frac{1}{9}(v(\{1\}) + \frac{1}{2}(v(\{1,3\}) - v(\{3\}))) \\ \frac{2}{3}v(\{2\}) \geq \frac{1}{9}(v(\{2\}) + \frac{1}{2}(v(\{1,2\}) - v(\{1\}))) \\ \frac{2}{3}v(\{2\}) \geq \frac{1}{9}(v(\{2\}) + \frac{1}{2}(v(\{2,3\}) - v(\{3\}))) \\ \frac{2}{3}v(\{3\}) \geq \frac{1}{9}(v(\{3\}) + \frac{1}{2}(v(\{1,3\}) - v(\{1\}))) \\ \frac{2}{3}v(\{3\}) \geq \frac{1}{9}(v(\{3\}) + \frac{1}{2}(v(\{2,3\}) - v(\{2\}))) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10v(\{1\}) \geq v(\{1,2\}) - v(\{2\}) \\ 10v(\{1\}) \geq v(\{1,3\}) - v(\{3\}) \\ 10v(\{2\}) \geq v(\{1,2\}) - v(\{1\}) \\ 10v(\{2\}) \geq v(\{2,3\}) - v(\{3\}) \\ 10v(\{3\}) \geq v(\{1,3\}) - v(\{1\}) \\ 10v(\{3\}) \geq v(\{2,3\}) - v(\{2\}) \end{cases}$$

4.3. Условия устойчивости при равномерном распределении и кооперативном решении вектора Аумана-Дрезе

для коалиции $\mathcal{P}_1 = \{1, 2, 3\}$

$$\begin{cases} \mu_1(\mathcal{P}_1) \geq \mu_1(\mathcal{P}_4) \\ \mu_2(\mathcal{P}_1) \geq \mu_2(\mathcal{P}_3) \\ \mu_3(\mathcal{P}_1) \geq \mu_3(\mathcal{P}_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{5}(\frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\})) + \frac{1}{6}(v(\{1,2\}) - v(\{2\}))+ \\ +\frac{1}{6}(v(\{1,3\}) - v(\{3\})) + \frac{1}{3}v(\{1\})) \geq \frac{1}{5}v(\{1\}) \\ \frac{1}{5}(\frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{1,3\})) + \frac{1}{6}(v(\{1,2\}) - v(\{1\}))+ \\ +\frac{1}{6}(v(\{2,3\}) - v(\{3\})) + \frac{1}{3}v(\{2\})) \geq \frac{1}{5}v(\{2\}) \\ \frac{1}{5}(\frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\})) + \frac{1}{6}(v(\{1,3\}) - v(\{1\}))+ \\ +\frac{1}{6}(v(\{2,3\}) - v(\{2\})) + \frac{1}{3}v(\{3\})) \geq \frac{1}{5}v(\{3\}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2v(\{1,2,3\}) - 2v(\{2,3\}) + v(\{1,2\}) - v(\{2\}) + v(\{1,3\})- \\ -v(\{3\}) + 2v(\{1\}) \geq 6v(\{1\}) \\ 2v(\{1,2,3\}) - 2v(\{1,3\}) + v(\{1,2\}) - v(\{1\}) + v(\{2,3\}- \\ -v(\{3\}) + 2v(\{2\}) \geq 6v(\{2\}) \\ 2v(\{1,2,3\}) - 2v(\{1,2\}) + v(\{1,3\}) - v(\{1\}) + v(\{2,3\})- \\ -v(\{2\}) + 2v(\{3\}) \geq 6v(\{3\}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2v(\{1,2,3\}) - 2v(\{2,3\}) + v(\{1,2\}) + v(\{1,3\}) \geq 4v(\{1\}) + \\ +v(\{2\}) + v(\{3\}) \\ 2v(\{1,2,3\}) - 2v(\{1,3\}) + v(\{1,2\}) + v(\{2,3\} \geq 4v(\{2\}) + \\ +v(\{1\}) + v(\{3\}) \\ 2v(\{1,2,3\}) - 2v(\{1,2\}) + v(\{1,3\}) + v(\{2,3\}) \geq 4v(\{3\}) + \\ +v(\{1\}) + v(\{2\}) \end{cases}$$

для коалиции $\mathcal{P}_2 = (\{1,2\},\{3\})$

$$\begin{cases} \mu_1(\mathcal{P}_2) \geq \mu_1(\mathcal{P}_3) \\ \mu_1(\mathcal{P}_2) \geq \mu_1(\mathcal{P}_5) \\ \mu_2(\mathcal{P}_2) \geq \mu_2(\mathcal{P}_4) \\ \mu_2(\mathcal{P}_2) \geq \mu_2(\mathcal{P}_5) \\ \mu_3(\mathcal{P}_2) \geq \mu_3(\mathcal{P}_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{10}(v(\{1,2\}) - v(\{2\}) + v(\{1\})) \geq \frac{1}{10}(v(\{1,3\}) - v(\{3\}) + v(\{1\})) \\ \frac{1}{10}(v(\{1,2\}) - v(\{2\}) + v(\{1\})) \geq \frac{1}{5}v(\{1\}) \\ \frac{1}{10}(v(\{1,2\}) - v(\{1\}) + v(\{2\})) \geq \frac{1}{10}(v(\{2,3\}) - v(\{3\}) + v(\{2\})) \\ \frac{1}{10}(v(\{1,2\}) - v(\{1\}) + v(\{2\})) \geq \frac{1}{5}v(\{2\}) \\ \frac{1}{5}v(\{3\}) \geq \frac{1}{5}(\frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\})) + \frac{1}{6}(v(\{1,3\}) - v(\{1\})) + \\ +\frac{1}{6}(v(\{2,3\}) - v(\{2\})) + \frac{1}{3}v(\{3\})) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v(\{1,2\}) - v(\{2\}) \geq v(\{1,3\}) - v(\{3\}) \\ v(\{1,2\}) - v(\{2\}) \geq v(\{1\}) \\ v(\{1,2\}) - v(\{1\}) \geq v(\{2,3\}) - v(\{3\}) \\ v(\{1,2\}) - v(\{1\}) \geq v(\{2\}) \\ 4v(\{3\}) \geq 2v(\{1,2,3\}) - 2v(\{1,2\}) + v(\{1,3\}) - v(\{1\}) + \\ +v(\{2,3\}) - v(\{2\}) \end{cases}$$

для коалиции $\mathcal{P}_3 = (\{1,3\},\{2\})$

$$\begin{cases} \mu_1(\mathcal{P}_3) \geq \mu_1(\mathcal{P}_2) \\ \mu_1(\mathcal{P}_3) \geq \mu_1(\mathcal{P}_5) \\ \mu_2(\mathcal{P}_3) \geq \mu_2(\mathcal{P}_1) \\ \mu_3(\mathcal{P}_3) \geq \mu_3(\mathcal{P}_4) \\ \mu_3(\mathcal{P}_3) \geq \mu_3(\mathcal{P}_5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{10}(v(\{1,3\}) - v(\{3\}) + v(\{1\})) \geq \frac{1}{10}(v(\{1,2\}) - v(\{2\}) + v(\{1\})) \\ \frac{1}{10}(v(\{1,3\}) - v(\{3\}) + v(\{1\})) \geq \frac{1}{5}v(\{1\}) \\ \frac{1}{5}v(\{2\}) \geq \frac{1}{5}(\frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{1,3\})) + \frac{1}{6}(v(\{1,2\}) - v(\{1\})) + \\ +\frac{1}{6}(v(\{2,3\}) - v(\{3\})) + \frac{1}{3}v(\{2\})) \\ \frac{1}{10}(v(\{1,3\}) - v(\{1\}) + v(\{3\})) \geq \frac{1}{10}(v(\{2,3\}) - v(\{2\}) + v(\{3\})) \\ \frac{1}{10}(v(\{1,3\}) - v(\{1\}) + v(\{3\})) \geq \frac{1}{5}v(\{3\}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v(\{1,3\}) - v(\{3\}) \geq v(\{1,2\}) - v(\{2\}) \\ v(\{1,3\}) - v(\{3\}) \geq v(\{1\}) \\ 4v(\{2\}) \geq 2v(\{1,2,3\}) - 2v(\{1,3\}) + v(\{1,2\}) - v(\{1\}) + v(\{2,3\}) - \\ -v(\{3\}) \\ v(\{1,3\}) - v(\{1\}) \geq v(\{2,3\}) - v(\{2\}) \\ v(\{1,3\}) - v(\{1\}) \geq v(\{3\}) \end{cases}$$

для коалиции $\mathcal{P}_4 = \{1\}, \{2,3\}$

$$\begin{cases} \mu_1(\mathcal{P}_4) \geq \mu_1(\mathcal{P}_1) \\ \mu_2(\mathcal{P}_4) \geq \mu_1(\mathcal{P}_2) \\ \mu_2(\mathcal{P}_4) \geq \mu_2(\mathcal{P}_5) \\ \mu_3(\mathcal{P}_4) \geq \mu_3(\mathcal{P}_3) \\ \mu_3(\mathcal{P}_4) \geq \mu_3(\mathcal{P}_5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{5}v(\{1\}) \geq \frac{1}{5}(\frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\})) + \frac{1}{6}(v(\{1,2\}) - v(\{2\})) + \\ +\frac{1}{6}(v(\{1,3\}) - v(\{3\})) + \frac{1}{3}v(\{1\})) \\ \frac{1}{5}v(\{1\}) \geq \frac{1}{10}(v(\{1,2\}) - v(\{2\}) + v(\{1\})) \\ \frac{1}{10}(v(\{2,3\}) - v(\{3\}) + v(\{2\})) \geq \frac{1}{5}v(\{2\}) \\ \frac{1}{10}(v(\{2,3\}) - v(\{2\}) + v(\{3\})) \geq \frac{1}{10}(v(\{1,3\}) - v(\{1\}) + v(\{3\})) \\ \frac{1}{10}(v(\{2,3\}) - v(\{2\}) + v(\{3\})) \geq \frac{1}{5}v(\{3\}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4v(\{1\}) \geq 2v(\{1,2,3\}) - 2v(\{2,3\}) + v(\{1,2\}) - v(\{2\}) + \\ +v(\{1,3\}) - v(\{3\}) \\ v(\{1\}) \geq v(\{1,2\}) - v(\{2\}) \\ v(\{2,3\}) - v(\{3\}) \geq v(\{2\}) \\ v(\{2,3\}) - v(\{2\}) \geq v(\{1,3\}) - v(\{1\}) \\ v(\{2,3\}) - v(\{2\}) \geq v(\{3\}) \end{cases}$$

для коалиции $\mathcal{P}_5 = \{1\}, \{2\}, \{3\}$

$$\begin{cases} \mu_1(\mathcal{P}_5) \geq \mu_1(\mathcal{P}_2) \\ \mu_1(\mathcal{P}_5) \geq \mu_1(\mathcal{P}_3) \\ \mu_2(\mathcal{P}_5) \geq \mu_2(\mathcal{P}_2) \\ \mu_2(\mathcal{P}_5) \geq \mu_2(\mathcal{P}_4) \\ \mu_3(\mathcal{P}_5) \geq \mu_3(\mathcal{P}_3) \\ \mu_3(\mathcal{P}_5) \geq \mu_3(\mathcal{P}_4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{5}v(\{1\}) \geq \frac{1}{10}(v(\{1,2\}) - v(\{2\}) + v(\{1\})) \\ \frac{1}{5}v(\{1\}) \geq \frac{1}{10}(v(\{1,3\}) - v(\{3\}) + v(\{1\})) \\ \frac{1}{5}v(\{2\}) \geq \frac{1}{10}(v(\{1,2\}) - v(\{1\}) + v(\{2\})) \\ \frac{1}{5}v(\{2\}) \geq \frac{1}{10}(v(\{2,3\}) - v(\{3\}) + v(\{2\})) \\ \frac{1}{5}v(\{3\}) \geq \frac{1}{10}(v(\{1,3\}) - v(\{1\}) + v(\{3\})) \\ \frac{1}{5}v(\{3\}) \geq \frac{1}{10}(v(\{2,3\}) - v(\{2\}) + v(\{3\})) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v(\{1\}) \geq v(\{1,2\}) - v(\{2\}) \\ v(\{1\}) \geq v(\{1,3\}) - v(\{3\}) \\ v(\{2\}) \geq v(\{1,2\}) - v(\{1\}) \\ v(\{2\}) \geq v(\{2,3\}) - v(\{3\}) \\ v(\{3\}) \geq v(\{1,3\}) - v(\{1\}) \\ v(\{3\}) \geq v(\{2,3\}) - v(\{2\}) \end{cases}$$

4.4. Условия устойчивости при распределении 1/3 и 1/9 и кооперативном решении вектора Аумана-Дрезе

для коалиции $\mathcal{P}_1 = \{1, 2, 3\}$

$$\begin{cases} \mu_1(\mathcal{P}_1) \geq \mu_1(\mathcal{P}_4) \\ \mu_2(\mathcal{P}_1) \geq \mu_2(\mathcal{P}_3) \\ \mu_3(\mathcal{P}_1) \geq \mu_3(\mathcal{P}_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(\frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\})) + \frac{1}{6}(v(\{1,2\}) - v(\{2\}))+ \\ +\frac{1}{6}(v(\{1,3\}) - v(\{3\})) + \frac{1}{3}v(\{1\})) \geq \frac{1}{9}v(\{1\}) \\ \frac{1}{3}(\frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{1,3\})) + \frac{1}{6}(v(\{1,2\}) - v(\{1\}))+ \\ +\frac{1}{6}(v(\{2,3\}) - v(\{3\})) + \frac{1}{3}v(\{2\})) \geq \frac{1}{9}v(\{2\}) \\ \frac{1}{3}(\frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\})) + \frac{1}{6}(v(\{1,3\}) - v(\{1\}))+ \\ +\frac{1}{6}(v(\{2,3\}) - v(\{2\})) + \frac{1}{3}v(\{3\})) \geq \frac{1}{9}v(\{3\}) \end{cases}$$

домножим все неравенства на 18

$$\begin{cases} 2v(\{1,2,3\}) - 2v(\{2,3\}) + v(\{1,2\}) - v(\{2\}) + v(\{1,3\}) - v(\{3\}) \geq 0 \\ 2v(\{1,2,3\}) - 2v(\{1,3\}) + v(\{1,2\}) - v(\{1\}) + v(\{2,3\}) - v(\{3\}) \geq 0 \\ 2v(\{1,2,3\}) - 2v(\{1,2\})) + v(\{1,3\}) - v(\{1\}) + v(\{2,3\}) - v(\{2\}) \geq 0 \end{cases}$$

для коалиции $\mathcal{P}_2 = \{1, 2\}, \{3\}$

$$\begin{cases} \mu_1(\mathcal{P}_2) \geq \mu_1(\mathcal{P}_3) \\ \mu_1(\mathcal{P}_2) \geq \mu_1(\mathcal{P}_5) \\ \mu_2(\mathcal{P}_2) \geq \mu_2(\mathcal{P}_4) \\ \mu_2(\mathcal{P}_2) \geq \mu_2(\mathcal{P}_5) \\ \mu_3(\mathcal{P}_2) \geq \mu_3(\mathcal{P}_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{18}(v(\{1,2\}) - v(\{2\}) + v(\{1\})) \geq \frac{1}{18}(v(\{1,3\}) - v(\{3\}) + v(\{1\})) \\ \frac{1}{18}(v(\{1,2\}) - v(\{2\}) + v(\{1\})) \geq \frac{1}{3}v(\{1\}) \\ \frac{1}{18}(v(\{1,2\}) - v(\{1\}) + v(\{2\})) \geq \frac{1}{18}(v(\{2,3\}) - v(\{3\}) + v(\{2\})) \\ \frac{1}{18}(v(\{1,2\}) - v(\{1\}) + v(\{2\})) \geq \frac{1}{3}v(\{2\}) \\ \frac{1}{9}v(\{3\}) \geq \frac{1}{3}(\frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\})) + \frac{1}{6}(v(\{1,3\}) - v(\{1\}))+ \\ +\frac{1}{6}(v(\{2,3\}) - v(\{2\})) + \frac{1}{3}v(\{3\})) \end{cases}$$

домножим все неравенства на 18

$$\begin{cases} v(\{1,2\}) - v(\{2\}) \geq v(\{1,3\}) - v(\{3\}) \\ v(\{1,2\}) - v(\{2\}) \geq 5v(\{1\}) \\ v(\{1,2\}) - v(\{1\}) \geq v(\{2,3\}) - v(\{3\}) \\ v(\{1,2\}) - v(\{1\}) \geq 5v(\{2\}) \\ 0 \geq 2v(\{1,2,3\}) - 2v(\{1,2\}) + v(\{1,3\}) - v(\{1\}) + v(\{2,3\}) - v(\{2\})) \end{cases}$$

для коалиции $\mathcal{P}_3 = (\{1,3\},\{2\})$

$$\begin{cases} \mu_1(\mathcal{P}_3) \geq \mu_1(\mathcal{P}_2) \\ \mu_1(\mathcal{P}_3) \geq \mu_1(\mathcal{P}_5) \\ \mu_2(\mathcal{P}_3) \geq \mu_2(\mathcal{P}_1) \\ \mu_3(\mathcal{P}_3) \geq \mu_3(\mathcal{P}_4) \\ \mu_3(\mathcal{P}_3) \geq \mu_3(\mathcal{P}_5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{18}(v(\{1,3\}) - v(\{3\}) + v(\{1\})) \geq \frac{1}{18}(v(\{1,2\}) - v(\{2\}) + v(\{1\})) \\ \frac{1}{18}(v(\{1,3\}) - v(\{3\}) + v(\{1\})) \geq \frac{1}{3}v(\{1\}) \\ \frac{1}{9}v(\{2\}) \geq \frac{1}{3}(\frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{1,3\})) + \frac{1}{6}(v(\{1,2\}) - v(\{1\})) + \frac{1}{6}(v(\{2,3\}) - v(\{3 \\ \frac{1}{18}(v(\{1,3\}) - v(\{1\}) + v(\{3\})) \geq \frac{1}{18}(v(\{2,3\}) - v(\{2\}) + v(\{3\})) \\ \frac{1}{18}(v(\{1,3\}) - v(\{1\}) + v(\{3\})) \geq \frac{1}{3}v(\{3\}) \end{cases}$$

упростим неравенства домножив на 18

$$\begin{cases} v(\{1,3\}) - v(\{3\}) \geq v(\{1,2\}) - v(\{2\}) \\ v(\{1,3\}) - v(\{3\}) \geq 5v(\{1\}) \\ 0 \geq 2v(\{1,2,3\}) - 2v(\{1,3\}) + v(\{1,2\}) - v(\{1\}) + v(\{2,3\}) - v(\{3\}) \\ v(\{1,3\}) - v(\{1\}) \geq v(\{2,3\}) - v(\{2\}) \\ v(\{1,3\}) - v(\{1\}) \geq 5v(\{3\}) \end{cases}$$

для коалиции $\mathcal{P}_4 = \{1\}, \{2, 3\}$

$$\begin{cases} \mu_1(\mathcal{P}_4) \geq \mu_1(\mathcal{P}_1) \\ \mu_2(\mathcal{P}_4) \geq \mu_2(\mathcal{P}_2) \\ \mu_2(\mathcal{P}_4) \geq \mu_2(\mathcal{P}_5) \\ \mu_3(\mathcal{P}_4) \geq \mu_3(\mathcal{P}_3) \\ \mu_3(\mathcal{P}_4) \geq \mu_3(\mathcal{P}_5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{9}v(\{1\}) \geq \frac{1}{3}(\frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\})) + \frac{1}{6}(v(\{1,2\}) - v(\{2\})) + \frac{1}{6}(v(\{1,3\}) - v(\{3 \\ \frac{1}{18}(v(\{2,3\}) - v(\{3\}) + v(\{2\})) \geq \frac{1}{18}(v(\{1,2\}) - v(\{1\}) + v(\{2\})) \\ \frac{1}{18}(v(\{2,3\}) - v(\{3\}) + v(\{2\})) \geq \frac{1}{3}v(\{2\}) \\ \frac{1}{18}(v(\{2,3\}) - v(\{2\}) + v(\{3\})) \geq \frac{1}{18}(v(\{1,3\}) - v(\{1\}) + v(\{3\})) \\ \frac{1}{18}(v(\{2,3\}) - v(\{2\}) + v(\{3\})) \geq \frac{1}{3}v(\{3\}) \end{cases}$$

домножим все неравенства на 18 и упростим

$$\begin{cases} 0 \geq 2v(\{1,2,3\}) - 2v(\{2,3\}) + v(\{1,2\}) - v(\{2\}) + v(\{1,3\}) - v(\{3\}) \\ v(\{2,3\}) - v(\{3\}) \geq v(\{1,2\}) - v(\{1\}) \\ v(\{2,3\}) - v(\{3\}) \geq 5v(\{2\}) \\ v(\{2,3\}) - v(\{2\}) \geq v(\{1,3\}) - v(\{1\}) \\ v(\{2,3\}) - v(\{2\}) \geq 5v(\{3\}) \end{cases}$$

для коалиции $\mathcal{P}_5 = \{1\}, \{2\}, \{3\}$

$$\begin{cases} \mu_1(\mathcal{P}_5) \geq \mu_1(\mathcal{P}_2) \\ \mu_1(\mathcal{P}_5) \geq \mu_1(\mathcal{P}_3) \\ \mu_2(\mathcal{P}_5) \geq \mu_2(\mathcal{P}_2) \\ \mu_2(\mathcal{P}_5) \geq \mu_2(\mathcal{P}_4) \\ \mu_3(\mathcal{P}_5) \geq \mu_3(\mathcal{P}_3) \\ \mu_3(\mathcal{P}_5) \geq \mu_3(\mathcal{P}_4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}v(\{1\}) \geq \frac{1}{18}(v(\{1,2\}) - v(\{2\}) + v(\{1\})) \\ \frac{1}{3}v(\{1\}) \geq \frac{1}{18}(v(\{1,3\}) - v(\{3\}) + v(\{1\})) \\ \frac{1}{3}v(\{2\}) \geq \frac{1}{18}(v(\{1,2\}) - v(\{1\}) + v(\{2\})) \\ \frac{1}{3}v(\{2\}) \geq \frac{1}{18}(v(\{2,3\}) - v(\{3\}) + v(\{2\})) \\ \frac{1}{3}v(\{3\}) \geq \frac{1}{18}(v(\{1,3\}) - v(\{1\}) + v(\{3\})) \\ \frac{1}{3}v(\{3\}) \geq \frac{1}{18}(v(\{2,3\}) - v(\{2\}) + v(\{3\})) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5v(\{1\}) \geq v(\{1,2\}) - v(\{2\}) \\ 5v(\{1\}) \geq v(\{1,3\}) - v(\{3\}) \\ 5v(\{2\}) \geq v(\{1,2\}) - v(\{1\}) \\ 5v(\{2\}) \geq v(\{2,3\}) - v(\{3\}) \\ 5v(\{3\}) \geq v(\{1,3\}) - v(\{1\}) \\ 5v(\{3\}) \geq v(\{2,3\}) - v(\{2\}) \end{cases}$$