Правительство Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
Санкт-Петербургский государственный университет
Кафедра математической теории игр и статистических решений

Рогов Михаил Алексеевич

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Кооперация центров влияния в управляемой модели динамики мнений

Научный руководитель

к.ф.-м.н.

Седаков А.А.

Санкт-Петербург

2019

Оглавление

1 Введение

Математическое моделирование социальных взаимодействий — сложная и важная задача для современного общества. Имеется огромный пласт информации, доступной для анализа и существует необходимость в разработке моделей для описания подобных процессов. В данной работе рассмотрена задача управления мнениями агентов некоторой социальной структуры при помощи центров влияния. Данная модель является теоретико-игровой, то есть она включает в себя несколько игроков с различными целевыми. Ранее подобные модели уже существовали, но не все они рассматривали конфликтную постановку данной задачи.

При применении данных результатов в реальных задачах в качестве центров влияния может быть рассмотрены любые источники информации — СМИ, новостные порталы, в случае если масштаб задачи меньше (например исследуется замкнутая группа людей, слабо контактирующая с внешним миром), то центром влияния может выступить авторитетный человек, поставивший цель управлять мнением остальных людей. Конфликтный характер модели позволяет исследовать ситуации, когда одной из сторон не доступны все средства информации, и более того, есть другая сторона с конфликтующими целями. Также в этой задаче рассмотрен вариант кооперации, применимый как для просчитывания выигрышей в случае кооперативного управления мнениями агентов, так и для решения оптимизационной задачи, когда один игрок имеет несколько центров влияния, и ему необходимо построить оптимальное управление.

Рассматривается некоторая динамическая система из мнений агентов, управляемая мнениями центров влияния. Далее строится траектория мнений всех агентов с дискретным временем и конструируется целевая функция потерь, зависящая от отклонений мнений агентов от целевого и штрафов за затраченное управление на каждом шаге. Игроки ставят задачу минимизации целевой функции, путем выбора управления в каждый момент времени. Рассмотрены два класса стратегий — программные, которые не зависят от текущего состояния системы и позицонные, зависящие от состояния системы в каждый момент времени. Также предложен способ вычисления параметров доверия агентов друг другу и центрам влияния по графу социальных взаимодействий, основанный на мере центральности вершин графа, в случае если отсутсвует информация об уровнях доверия из других источников.

В приложении предстравлены результаты моделирования известной задачи про университетский клуб карате, часто используемой в задачах моделирования социальных взаимодействий. Также в приложении есть программный код, написанный для среды Matlab, позволяющий вычислять равновесные стратегии, оптимальное управление для одного игрока, а также вектор Шепли для заданной игры.

2 Постановка задачи

Исследуется динамика мнений в социальной сети в течение конечного периода времени. Социальная сеть, далее просто *сеть*, представляется парой (V, g), где V — конечное множество ее участников (узлов), а g — граф связей, или множество направленных ребер между ними, отражающий структуру коммуникации внутри сети. Будем предполагать, что множество узлов может быть представлено в виде $V = A \cup N$, где $A \cap N =$. Пусть $|A| = a$, $|N| = n$ и $a \gg n$. Узел из A будем ассоциировать с *агентом*, а узел из N — с *игроком*. Следовательно, участники сети разбиты на две группы, образующие множество агентов и множество игроков. Далее будем считать, что каждый агент $i \in A$ сети обладает собственным мнением о некоторой величине или некотором событии, которое выражается численно и может изменяться во времени, а рассматриваемый временной промежуток предполагается конечным с периодами $\mathcal{T} = \{0, 1, \dots, T\}$. Пусть $x_{i0} \in [0, 1]$ обозначает начальное мнение агента i, а $x_i(t) \in [0, 1]$ — его мнение в период $t \in \mathcal{T} \setminus 0$. Пусть $x(t) = (x_i(t), i \in A)'$ и $x_0 = (x_{i0}, i \in A)'$ отражают мнения агентов сети в период t и в начальным момент времени, соответственно.

Игроки могут влиять на мнения агентов сети. Обозначим через $u_i(t) \in [0, 1]$ действие (или элементарную стратегию) игрока $i \in N$ в период $t \in \mathcal{T} \setminus T$, которое заключается в декларировании своего мнения остальным участникам сети. Пусть $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$, $t \in \mathcal{T} \setminus T$. Агент учитывает не только свое мнение, но и может агрегировать мнения остальных участников сети. Простая модель агрегации мнений может быть описана следующей линейной разностной системой:

$$x_i(t+1) = \sum_{j \in A} w_{ij} x_j(t) + \sum_{j \in N} b_{ij} u_j(t), \quad t \in \mathcal{T} \setminus T$$

с начальным условием $x_i(0) = x_{i0}$, $i \in A$. Здесь $w_{ij} \in [0, 1]$ представляет собой степень доверия агента $i \in A$ мнению агента $j \in A$, в то время как $b_{ij} \in [0, 1]$ есть степень доверия агента $i \in A$ мнению игрока $j \in N$. Выполнения равенства $w_{ij} = w_{ji}$ не требуется, но предполагается, что $\sum_{j \in A} w_{ij} + \sum_{j \in N} b_{ij} = 1$ для любого $i \in A$. Собственные мнения самих игроков о рассматриваемой величине или событии в отличии от декларируемых ими мнений считаются не важными, и по этой причине они не включены в модель. Пусть $W = \{w_{ij}\}_{i,j \in A}$, $b_i = (b_{ji}, j \in A)'$, $i \in N$. Тогда динамика мнений агентов сети может быть записана в альтернативной форме:

$$x(t+1) = Wx(t) + \sum_{i \in N} b_i u_i(t), \quad t \in \mathcal{T} \setminus T, \quad x(0) = x_0.$$

Множество ребер g может быть разбито на два множества g_A и g_N, где g_A содержит только ребра между агентами, а g_N задает ребра типа «игрок–агент». Множество g можно ассоциировать с матрицей W и векторами b_i, $i \in N$: $w_{ij} > 0$ тогда и только тогда, когда $(j, i) \in g_A$; $b_{ij} > 0$ тогда и только тогда, когда $(j, i) \in g_N$.

3 Обзор литературы

Развитие моделей динамики мнений в социальных группах начиналось с вопросов достижимости в них консенсуса. Де Гроот в своей работе [11] привел простую модель динамики мнений, в которой предполагалось, что любой участник группы изменяет свое мнение согласно одному и тому же закону путем взвешивания собственного мнения и мнения непосредственно связанных с ним участников. Эта модель впоследствии дополнялась или видоизменялась при ряде новых предположений, в частности, с учетом приверженности участников социальной группы своим собственным взглядам [14, 15]. Задача достижимости консенсуса также решалась в [8, 9] для специальной структуры социальной группы с тремя типами участников и двух центрах влияния на их мнения. Свойство «мудрости» социальных групп исследовалось в [7, 19]. Стоит отметить и другие значимые исследования в этой области [2, 5, 6]. Вышеупомянутые работы не затрагивают задачи конфликтного характера. В литературе есть довольно много работ, в которых рассматриваются игровые модели динамики мнений. В частности, в [3, 16] за основу берется модель Де Гроота, в [12] изложение строится на модели Хегзельмана–Краузе [18]. В настоящей работе исследуется игра согласованного влияния на мнения участников социальной сети как кооперативную линейно-квадратичную игру в дискретном времени, в которой цели игроков в некотором смысле близки к рассматриваемым в [20, 22]. В модели предполагаем, что некоторые участники сети согласованным способом декларируют свои мнения остальным участникам сети с той целью, чтобы сделать их «среднее» мнение как можно близким к желаемому. В рамках решения исследуемой игры при кооперативном поведении приходится находить решения этой игры и в некооперативной постановке, в частности, заниматься поиском равновесия по Нэшу. По этой причине игру изначально не формулируется как некооперативная, а сразу рассматривается кооперативная форма поведения.

4 Основная часть

В данной работе будем рассматривать два класса стратегий, в которых будем искать равновесия. Пусть *программная стратегия* $u_i^{OL} = (u_i^{OL}(0), \ldots, u_i^{OL}(T-1))$ игрока $i \in N$ это отображение, которое каждому неокончательному периоду времени и начальному состоянию единственным образом предписывает действие, т. е. $u_i^{OL}(t) = \varphi_i(t, x_0)$ для любого $t \in \mathcal{T} \setminus T$, где $\varphi_i(\cdot, \cdot) : \mathcal{T} \setminus T \times [0,1]^a \mapsto [0,1]$. Ситуацией в программных стратегиях назовем набор программных стратегий $u^{OL} = (u_1^{OL}, \ldots, u_n^{OL})$. *Позиционной стратегией* $u_i^{FB} = (u_i^{FB}(0), \ldots, u_i^{FB}(T-1))$ игрока $i \in N$ назовем отображение, которое каждому неокончательному периоду и состоянию в этом периоде единственным образом предписывает действие, т. е. $u_i^{FB}(t) = \psi_i(t, x(t))$ для любого $t \in \mathcal{T} \setminus T$, где $\psi_i(\cdot, \cdot) : \mathcal{T} \setminus T \times [0,1]^a \mapsto [0,1]$. Ситуацией в позиционных стратегиях назовем набор позиционных стратегий $u^{FB} = (u_1^{FB}, \ldots, u_n^{FB})$. При использовании программных стратегий игроки ориентируются лишь на начальные мнения агентов сети и номер периода, в то время как при использовании позиционных — на номер периода и мнения агентов сети в этом периоде. В дальнейшем не будем отмечать конкретный класс стратегий там, где это не принципиально. Траекторией, порожденной ситуацией u, будем называть набор $(x(0), \ldots, x(T))$, где $x(0) = x_0$, а $x(t)$ для любого $t \in \mathcal{T} \setminus 0$ определяются последовательной подстановкой стратегий из этой ситуации в систему динамики мнений.

Пусть *функция выигрыша* $J_i(u)$ игрока $i \in N$ имеет вид

$$J_i(u) = \sum_{t=0}^{T-1} h_{it}(x(t), u(t)) + h_{iT}(x(T)),$$

где функции $h_{it}(x(t), u(t))$, $t \in \mathcal{T} \setminus T$, и $h_{iT}(x(T))$ определяют выигрыши этого игрока в каждом периоде. Зададим эти функции в следующем виде:

$$h_{it}(x(t), u(t)) = \frac{1}{a} \sum_{j \in A} (x_j(t) - \hat{x}_i)^2 + c_i u_i^2(t), \quad t \in \mathcal{T} \setminus T,$$
$$h_{iT}(x(T)) = \frac{1}{a} \sum_{j \in A} (x_j(T) - \hat{x}_i)^2.$$

Здесь $\hat{x}_i \in [0, 1]$ — изначально заданное для игрока $i \in N$ желаемое мнение, к которому он хочет приблизить исходные мнения агентов за рассматриваемый промежуток времени, выбирая стратегию u_i, а величина $c_i > 0$ характеризует собой затраты этого игрока, связанные с выбором u_i. Первые слагаемые в выражениях функций h_{it}, $t \in \mathcal{T} \setminus T$, как и функция h_{iT}, отвечают за затраты игрока i, связанные с отклонением мнений агентов (в среднеквадратическом смысле) от желаемого мнения этого игрока, и выражены в тех же единицах, что и вторые слагаемые в выражениях функций h_{it}, $t \in \mathcal{T} \setminus T$, представляющие собой непосредственные затраты игрока i на влияние.

В предположении трансферабельности выигрышей игроки, совместно выбирая стратегии u_i, $i \in N$, и учитывая динамику мнений агентов сети, стремятся минимизировать общие суммарные затраты, т. е. величину $\sum_{i \in N} J_i(u)$. При такой постановке рассматриваемая задача является задачей оптимального управления, а именно, кооперативной линейно-квадратичной игрой двух лиц с дискретным временем. Функция выигрыша игрока i может быть переписана в более привычной для такого класса игр форме:

$$\begin{aligned}
J_i(u) &= \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{1}{a} x(t)' x(t) + c_i u_i^2(t) - \frac{2\hat{x}_i}{a} \mathbf{1}' x(t) \right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{a} x(T)' x(T) - \frac{2\hat{x}_i}{a} \mathbf{1}' x(T) \right) + (T+1)\hat{x}_i^2, \\
&= \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{1}{2} x(t)' Q_i x(t) + c_i u_i^2(t) + q_i' x(t) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} x(T)' Q_i x(T) + q_i' x(T) + (T+1)\hat{x}_i^2,
\end{aligned}$$

где $\mathbf{1}$ обозначает вектор из единиц размерности a, $Q_i = \frac{2}{a}I$, матрица I — единичная матрица размерности a и $q_i = -\frac{2\hat{x}_i}{a}\mathbf{1}$. Тогда общая цель игроков принимает вид:

$$\sum_{i\in N} J_i(u) = \sum_{t=0}^{T-1}\left(\frac{1}{2}x(t)'Qx(t) + \frac{1}{2}u(t)'Cu(t) + q'x(t)\right) + \frac{1}{2}x(T)'Qx(T) + q'x(T) + (T+1)\hat{x}'\hat{x}.$$

где $Q = \sum_{i\in N} Q_i$, $C = 2\,\mathrm{diag}\{c_1, \ldots, c_n\}$, $q = \sum_{i\in N} q_i$ и $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)'$. Заметим, что матрицы $Q_1, \ldots, Q_n, Q$ и C положительно определенные.

Набор стратегий $\bar{u} = \arg\min_u \sum_{i\in N} J_i(u)$ назовем кооперативной ситуацией, стратегии игроков из этого набора — кооперативными стратегиями, а траекторию $(\bar{x}(0), \ldots, \bar{x}(T))$, порожденную кооперативной ситуацией, — кооперативной траекторией.

Далее будем опираться на теорию, представленную в [1, 4, 17].

4.1 Кооперативная ситуация в случае программных стратегий

Для поиска кооперативных программных стратегий игроков применим принцип максимума из теории оптимального управления. Определим гамильтониан $\mathcal{H}_N = \mathcal{H}_N(x(t), u(t), \lambda_N(t+1))$, $t \in \mathcal{T} \setminus T$:

$$\mathcal{H}_N = -\frac{1}{2}x(t)'Qx(t) - \frac{1}{2}u(t)'Cu(t) - q'x(t) + \lambda_N(t+1)'\left(Wx(t) + Bu(t)\right),$$

где через $\lambda_N(t+1)$ обозначен вектор сопряженных переменных размерности a, и $B = (b_1 \ldots b_n)$ — матрица, образованная векторами $b_1, \ldots, b_n$.

Для того, чтобы набор программных стратегий $\bar{u}^{OL} = (\bar{u}_1^{OL}, \ldots, \bar{u}_n^{OL})$ был кооперативной ситуацией, порождающей кооперативную траекторию $(\bar{x}^{OL}(0), \ldots,$

где $\bar{x}^{OL}(0) = x_0$, необходимо существование ненулевого набора $\lambda_N(t), t \in \mathcal{T} \backslash 0$, такого, что выполнены следующие условия:

$$\bar{u}^{OL} = \arg\max_u \mathcal{H}_N(\bar{x}^{OL}(t), u(t), \lambda_N(t+1))$$
$$\frac{\partial \mathcal{H}_N}{\partial x(t)} = -\bar{x}^{OL}(t)'Q - q' + \lambda_N(t+1)'W = \lambda_N(t)', \quad t \in \mathcal{T} \setminus \{0, T\},$$
$$\lambda_N(T)' = -\bar{x}^{OL}(T)'Q - q'.$$

Систему уравнений из утверждения выше можно переписать в таком виде:

$$\bar{u}^{OL}(t) = C^{-1}B'\lambda_N(t+1), \quad t \in \mathcal{T} \setminus T,$$
$$\lambda_N(t) = -Q\bar{x}^{OL}(t) - q + W'\lambda_N(t+1), \quad t \in \mathcal{T} \setminus \{0, T\},$$
$$\lambda_N(T) = -Q\bar{x}^{OL}(T) - q.$$

Заметим, что $C^{-1} = \frac{1}{2}\operatorname{diag}\{1/c_1, \ldots, 1/c_n\}$. При использовании игроками кооперативных программных стратегий $\bar{u}_i^{OL}$, $i \in N$, каждый из них в течение рассматриваемого промежутка времени привносит величину $J_i(\bar{u}^{OL})$, $i \in N$, в суммарный выигрыш игроков, при этом сумма $\sum_{i \in N} J_i(\bar{u}^{OL})$ минимальна.

4.2 Кооперативная ситуация в случае позиционных стратегий

Для поиска кооперативных позиционных стратегий игроков применим принцип динамического программирования. Определим функцию $F(t, x)$ как минимальный суммарный выигрыш игроков за периоды с t по T при мнении агентов x. Эта функция удовлетворяет уравнению Беллмана:

$$F(t, x) = \min_{u(t)} \Big(\frac{1}{2}x'Qx + \frac{1}{2}u(t)'Cu(t) + q'x + \hat{x}'\hat{x}$$
$$+ F(t+1, Wx + Bu(t)) \Big)$$

с граничным условием $F(T,x) = \frac{1}{2}x'Qx + q'x + \hat{x}'\hat{x}$.

Предположив квадратичный вид функции $F(t,x) = \frac{1}{2}x'K(t)x + k(t)'x + (t)$ и линейный вид набора кооперативных позиционных стратегий $\bar{u}^{FB}(t) = -P(t)x + p(t)$ игроков, что часто делается в линейно-квадратичной оптимизации, можно получить систему разностных уравнений для идентификации неизвестных матриц $K(t)$, $P(t)$, векторов $k(t)$, $p(t)$ и величин (t) в каждом периоде.

Набор кооперативных позиционных стратегий $\bar{u}^{FB} = (\bar{u}_1^{FB}, \ldots, \bar{u}_n^{FB})$ является единственным и имеет вид:

$$\bar{u}^{FB}(t) = -(C + B'K(t+1)B)^{-1}B'\left[K(t+1)Wx(t) + k(t+1)\right],$$

для $t \in \mathcal{T} \setminus T$, где

$$\begin{aligned}
P(t) &= (C + B'K(t+1)B)^{-1}B'K(t+1)W,\\
p(t) &= -(C + B'K(t+1)B)^{-1}B'k(t+1),\\
K(t) &= Q + P(t)'CP(t) + (W - BP(t))'K(t+1)(W - BP(t)),\\
k(t) &= -P(t)'Cp(t) + q + (W - BP(t))'\left[K(t+1)Bp(t) + k(t+1)\right],\\
(t) &= \frac{1}{2}p(t)'Cp(t) + \frac{1}{2}(Bp(t))'K(t+1)Bp(t) + k(t+1)'Bp(t)\\
&\qquad + (t+1) + \hat{x}'\hat{x},
\end{aligned}$$

с граничным условием: $K(T) = Q$, $k(T) = q$, $(T) = \hat{x}'\hat{x}$, при этом $\sum_{i \in N} J_i(\bar{u}^{FB}) = F(0, x_0) = \frac{1}{2}x_0'K(0)x_0 + k(0)'x_0 + (0)$.

При использовании игроками кооперативных позиционных стратегий $\bar{u}_i^{FB}$, $i \in N$, каждый из них в течение рассматриваемого промежутка времени привносит величину $J_i(\bar{u}^{FB})$, $i \in N$, в суммарный выигрыш, при этом сумма $\sum_{i \in N} J_i(\bar{u}^{FB})$, на которую ориентируются игроки, минимальна. Дополнительно известно, что $\sum_{i \in N} J_i(\bar{u}^{OL}) = \sum_{i \in N} J_i(\bar{u}^{FB})$.

4.3 Распределение кооперативного выигрыша

В теории кооперативных динамических игр принято распределять суммарный кооперативный выигрыш между игроками, основываясь на заранее оговоренном игроками кооперативном решении. По этой причине для распределения величины $\sum_{i\in N} J_i(\bar{u}^{OL})$ (или $\sum_{i\in N} J_i(\bar{u}^{FB})$) строится необходимая вспомогательная игра с трансферабельной полезностью. Пусть (N, v) — такая игра, в которой N, как и прежде, обозначает множество игроков, а v — *характеристическая функция*, которая каждому подмножеству множества N, называемому коалицией, ставит в соответствие ее «силу», выражаемую вещественным числом. Естественно считать, что сила коалиции N есть величина, которую игроки хотят между собой распределить, т. е. $v(N) = \sum_{i\in N} J_i(\bar{u})$. Здесь и далее будем опускать верхний индекс OL или FB, где изложение одинаково справедливо как для программных, так и для позиционных стратегий, понимая под $\bar{u}$ набор стратегий, минимизирующий сумму $\sum_{i\in N} J_i(u)$. Естественно также считать, что $v() = 0$. Для произвольной непустой коалиции $S \subset N$ значение характеристической функции $v(S)$ определим в соответствии с γ-подходом, предложенным в [23] для модели олигополии и широко используемым впоследствии, в частности, в [10] применительно к модели природоохранного характера. Согласно γ-подходу величина $v(S)$ есть выигрыш коалиции S в ситуации равновесия по Нэшу в игре $n - |S| + 1$ лица, в которой коалиция S выступает одним игроком, стараясь минимизировать величину $\sum_{i\in S} J_i(u)$, а игрок $i \in N \setminus S$ нацелен минимизировать $J_i(u)$. Для коалиции S набор стратегий u будем записывать также через стратегии игроков из этой коалиции, u_S, и стратегии игроков из ее дополнения, $u_{N\setminus S}$, в виде $u = (u_S, u_{N\setminus S})$. Более формально, для непустой коалиции $S \subset N$ ее сила $v(S)$ определяется как $v(S) = \sum_{i\in S} J_k(\tilde{u}^S)$, где набор стратегий $\tilde{u}^S = (\tilde{u}_1^S, \ldots, \tilde{u}_n^S)$

определяется из равенств:

$$\tilde{u}_S^S = \arg\min_{u_S} \sum_{i\in S} J_i(u_S, \tilde{u}_{N\setminus S}^S),$$
$$\tilde{u}_i^S = \arg\min_{u_i} J_i(u_i, \tilde{u}_{N\setminus\{i\}}^S), \text{ для любого } i \notin S.$$

Тогда заключаем:

$$v(S) = \begin{cases} \sum\limits_{i\in N} J_i(\bar{u}), & S = N, \\ \sum\limits_{i\in S} J_i(\tilde{u}^S), & S \subset N, \\ 0, & S = . \end{cases}$$

Дележом в игре (N, v) назовем вектор $\xi[v] = (\xi_1[v], \dots, \xi_n[v])$, который удовлетворяет свойствам: эффективности, т. е. $\sum_{i\in N} \xi_i[v] = v(N)$, и индивидуальной рациональности, т. е. $\xi_i[v]v(\{i\})$ для любого $i \in N$.[1] Множество дележей в игре (N, v) обозначим через $\mathcal{I}[v]$. *Кооперативным решением* игры (N, v) называется правило, которое этой игре ставит в соответствие некоторое подмножество $\mathcal{M}[v] \subseteq \mathcal{I}[v]$. Таким образом игроки, выбрав заранее некоторое кооперативное решение $\mathcal{M}[v]$, совместно реализуют кооперативную ситуацию $\bar{u}$ и, получив в качестве общего суммарного выигрыша величину $v(N)$, далее ее распределяют между собой в виде некоторого одного дележа $\xi[v] \in \mathcal{M}[v]$. Величина $\xi_i[v]$ и будет считаться выигрышем игрока i, который он получает от кооперации с остальными игроками. Например, если в качестве кооперативного решения $\mathcal{M}[v]$ выбрать вектор Шепли, то оно состоит из единственного дележа $\mathrm{Sh}[v] = (\mathrm{Sh}_1[v], \dots, \mathrm{Sh}_n[v])$, компоненты которого определяются как

$$\mathrm{Sh}_i[v] = \sum_{S\subseteq N,\, i\in S} \frac{(n-|S|)!(|S|-1)!}{n}(v(S) - v(S\setminus\{i\})), \quad i \in N.$$

В частности, для игры двух лиц, т. е. игры, в которой только два игрока

[1] Напомним, что цель игроков состоит в минимизации суммы их выигрышей.

могут влиять на мнения остальных участников социальной сети, величина $v(\{i\})$, $i = 1, 2$, есть выигрыш игрока i в равновесии по Нэшу $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$. Тогда

$$v(S) = \begin{cases} J_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2) + J_2(\bar{u}_1, \bar{u}_2), & S = \{1, 2\}, \\ J_i(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2), & S = \{i\},\ i = 1, 2, \\ 0, & S =, \end{cases} \tag{1}$$

а вектор Шепли $\mathrm{Sh}[v] = (\mathrm{Sh}_1[v], \mathrm{Sh}_2[v])$ в кооперативной игре двух лиц примет вид:

$$\begin{cases} \mathrm{Sh}_1[v] = \dfrac{v(\{1, 2\}) + v(\{1\}) - v(\{2\})}{2}, \\ \mathrm{Sh}_2[v] = \dfrac{v(\{1, 2\}) - v(\{1\}) + v(\{2\})}{2}. \end{cases} \tag{2}$$

Случай игры двух лиц рассмотрим ниже в разделе 4.7 при проведении численного моделирования.

Также можно рассмотреть и большее количества игроков, далее будет приведен пример моделирования позиционных стратегий для случая из трех игроков.

Далее для игры (не обязательно двух лиц) построим характеристическую функцию в соответствии с γ-подходом для двух классов стратегий: программных и позиционных, поскольку известно, что выигрыши игроков в равновесии по Нэшу в одной и той же игре при использовании игроками стратегий из этих классов могут различаться [25].

4.4 Построение характеристической функции в случае программных стратегий

Для поиска набора программных стратегий $\tilde{u}^{S,OL}$, $S \subset N$, снова применим принцип максимума. Однако сначала рассмотрим сумму:

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in S} J_i(u) = \sum_{i \in S} &\left(\sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{1}{2} x(t)' Q_i x(t) + c_i u_i^2(t) + q_i' x(t) \right) \right. \\
&\left. + \frac{1}{2} x(T)' Q_i x(T) + q_i' x(T) + (T+1) \hat{x}_i^2 \right) \\
= &\sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{1}{2} x(t)' Q_S x(t) + \frac{1}{2} u_S(t)' C_S u_S(t) + q_S' x(t) \right) \\
&+ \frac{1}{2} x(T)' Q_S x(T) + q_S' x(T) + (T+1) \sum_{i \in S} \hat{x}_i^2,
\end{aligned}$$

где $Q_S = \sum_{i \in S} Q_i$, $C_S = 2 \operatorname{diag}\{c_i, i \in S\}$ и $q_S = \sum_{i \in S} q_i$. Важно, чтобы порядок игроков коалиции S как в наборе u_S, так и в определении диагональной матрицы C_S был одинаковым.

Определим для коалиции S и любого игрока $i \in N \setminus S$ гамильтонианы $\mathcal{H}_S = \mathcal{H}_S(x(t), u(t), \lambda_S(t+1))$ и $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_i(x(t), u(t), \lambda_i(t+1))$ для всех $t \in \mathcal{T} \setminus T$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_S = -\sum_{i \in S} &\left(\frac{1}{2} x(t)' Q_S x(t) + \frac{1}{2} u_S(t)' C_S u_S(t) + q_S' x(t) \right) \\
&+ \lambda_S(t+1)' \left(W x(t) + B u(t) \right), \\
\mathcal{H}_i = -&\frac{1}{2} x(t)' Q_i x(t) - c_i u_i^2(t) - q_i' x(t) + \lambda_i(t+1)' \left(W x(t) + B u(t) \right),
\end{aligned}$$

где через $\lambda_S(t+1)$ и $\lambda_i(t+1)$ обозначены вектора сопряженных переменных размерности a.

Для того, чтобы набор программных стратегий $\tilde{u}^{S,OL} = (\tilde{u}_1^{S,OL}, \ldots, \tilde{u}_n^{S,OL})$ был равновесием по Нэшу в игре $n - |S| + 1$ лица, в которой коалиция S выступает одним игроком, порождающим траекторию $(\tilde{x}^{S,OL}(0), \ldots, \tilde{x}^{S,OL}(T))$, где $\tilde{x}^{S,OL}(0) = x_0$, необходимо существование ненулевых наборов $\lambda_S(t)$, $\lambda_i(t)$, $i \in N \setminus S$, $t \in \mathcal{T} \setminus 0$ таких, что выполнены следующие условия:

$$\tilde{u}_S^{S,OL} = \arg\max_{u_S} \mathcal{H}_S(\tilde{x}^{S,OL}(t), u_S(t), \tilde{u}_{N\setminus S}^{S,OL}, \lambda_S(t+1)),$$
$$\tilde{u}_i^{S,OL} = \arg\max_{u_i} \mathcal{H}_i(\tilde{x}^{S,OL}(t), u_i(t), \tilde{u}_{N\setminus\{i\}}^{S,OL}, \lambda_i(t+1)), \quad i \in N \setminus S,$$
$$\frac{\partial \mathcal{H}_S}{\partial x(t)} = -\tilde{x}^{S,OL}(t)' Q_S - q_S' + \lambda_S(t+1)' W = \lambda_S(t)', \quad t \in \mathcal{T} \setminus \{0, T\},$$
$$\frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial x(t)} = -\tilde{x}^{S,OL}(t)' Q_i - q_i' + \lambda_i(t+1)' W = \lambda_i(t)', \quad i \in N \setminus S,$$
$$t \in \mathcal{T} \setminus \{0, T\},$$
$$\lambda_S(T)' = -\tilde{x}^{S,OL}(T)' Q_S - q_S',$$
$$\lambda_i(T)' = -\tilde{x}^{S,OL}(T)' Q_i - q_i', \quad i \in N \setminus S.$$

Пусть $B_S = (b_i,\ i \in S)$ — матрица, образованная векторами b_i, где $i \in S$. Последовательность игроков при составлении этой матрицы также должна совпадать с их последовательностью при составлении u_S. Систему уравнений из утверждения выше можно переписать в следующем виде:

$$\tilde{u}_S^{S,OL}(t) = C_S^{-1} B_S' \lambda_S(t+1), \quad t \in \mathcal{T} \setminus T,$$
$$\tilde{u}_i^{S,OL}(t) = \frac{1}{2c_i} b_i' \lambda_i(t+1), \quad i \in N \setminus S,\ t \in \mathcal{T} \setminus T,$$
$$\lambda_S(t) = -Q_S \tilde{x}^{S,OL}(t) - q_S + W' \lambda_S(t+1), \quad t \in \mathcal{T} \setminus \{0, T\},$$

$$\lambda_i(t) = -Q_i \tilde{x}^{S,OL}(t) - q_i + W' \lambda_i(t+1), \quad i \in N \setminus S,\ t \in \mathcal{T} \setminus \{0, T\},$$
$$\lambda_S(T) = -Q_S \tilde{x}^{S,OL}(T) - q_S,$$
$$\lambda_i(T) = -Q_i \tilde{x}^{S,OL}(T) - q_i, \quad i \in N \setminus S.$$

Заметим, что $C_S^{-1} = \frac{1}{2} \operatorname{diag}\{1/c_i,\ i \in S\}$. При использовании игроками равновесных по Нэшу стратегий $\tilde{u}_i^{S,OL}$, $i \in N$, каждый игрок из коалиции S в течение рассматриваемого промежутка времени привносит величину $J_i(\tilde{u}^{S,OL})$, $i \in S$, в суммарный выигрыш этой коалиции, и, следовательно, сила этой коалиции есть $v^{OL}(S) = \sum_{i \in S} J_i(\tilde{u}^{S,OL})$.

4.5 Построение характеристической функции в случае позиционных стратегий

Для поиска набора позиционных стратегий игроков $\tilde{u}^{S,FB}$, $S \subset N$, использованы следующие результаты, основываясь на свойствах матриц Q_S, C_S и Q_i, $i \in N \setminus S$.

Для того, чтобы набор позиционных стратегий $\tilde{u}^{S,FB} = (\tilde{u}_1^{S,FB}, \ldots, \tilde{u}_n^{S,FB})$ являлся равновесием по Нэшу, необходимо и достаточно существование функций $F_S(t,\cdot)$, $F_i(t,\cdot)$, $i \in N \backslash S$, таких, что выполнены следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned}
F_S(t,x) = &\min_{u_S(t)} \Bigg(\frac{1}{2} x' Q_S x + \frac{1}{2} u_S(t)' C_S u_S(t) + q_S' x + \sum_{i \in S} \hat{x}_i^2 \\
&+ F_S(t+1, Wx + B_S u_S(t) + B_{N \backslash S} \tilde{u}_{N \backslash S}^{S,FB}(t)) \Bigg), \\
F_i(t,x) = &\min_{u_i(t)} \Bigg(\frac{1}{2} x' Q_i x + c_i u_i^2(t) + q_i' x + \hat{x}_i^2 \\
&+ F_i(t+1, Wx + b_i u_i(t) + B_{N \backslash \{i\}} \tilde{u}_{N \backslash \{i\}}^{S,FB}(t)) \Bigg), \ i \in N \setminus S,
\end{aligned}$$

с граничным условием: $F_S(T,x) = \frac{1}{2} x' Q_S x + q_S' x + \sum_{i \in S} \hat{x}_i^2$, $F_i(T,x) = \frac{1}{2} x' Q_i x + q_i' x + \hat{x}_i^2$.

Снова будем предполагать квадратичный вид функций $F_S(t,x) = \frac{1}{2} x' K_S(t) x + k_S(t)' x + {}_S(t)$ и $F_i(t,x) = \frac{1}{2} x' K_i(t) x + k_i(t)' x + \kappa_i(t)$, $i \in N \backslash S$, а также линейный вид набора равновесных позиционных стратегий $\tilde{u}_S^{S,FB}(t) = -P_S(t) x + p_S(t)$ и $\tilde{u}_i^{S,FB}(t) = -P_i(t) x + p_i(t)$ для $i \in N \setminus S$.

Для того, чтобы набор позиционных стратегий $\tilde{u}^{S,FB} = (\tilde{u}_1^{S,FB}, \ldots, \tilde{u}_n^{S,FB})$

являлся единственным равновесием по Нэшу, необходимо и достаточно существование функций $F_S(t,\cdot)$, $F_i(t,\cdot)$, $i \in N \setminus S$, таких, что выполнены следующие рекуррентные соотношения:

$$
\begin{aligned}
P_S(t) &= (C_S + B_S' K_S(t+1) B_S)^{-1} B_S' K_S(t+1)\Big[W - \sum_{j \notin S} b_j P_j(t)\Big],\\
P_i(t) &= \frac{1}{2c_i + b_i' K_i(t+1) b_i} b_i' K_i(t+1)\Big[W - B_S P_S(t) - \sum_{j \notin S \cup \{i\}} b_j P_j(t)\Big],\\
p_S(t) &= -(C_S + B_S' K_S(t+1) B_S)^{-1} B_S'\Big[k_S(t+1) + K_S(t+1)\sum_{j \notin S} b_j p_j(t)\Big],\\
p_i(t) &= -\frac{1}{2c_i + b_i' K_i(t+1) b_i}\\
&\quad \times b_i'\Big[k_i(t+1) + K_i(t+1)\Big(B_S p_S(t) + \sum_{j \notin S \cup \{i\}} b_j p_j(t)\Big)\Big],\\
K_S(t) &= Q_S + P_S(t)' C_S P_S(t) + \Big(W - B_S P_S(t) - \sum_{j \notin S} b_j P_j(t)\Big)'\\
&\quad \times K_S(t+1)\Big(W - B_S P_S(t) - \sum_{j \notin S} b_j P_j(t)\Big),\\
K_i(t) &= Q_i + 2c_i P_i(t)' P_i(t) + \Big(W - B_S P_S(t) - \sum_{j \notin S} b_j P_j(t)\Big)'\\
&\quad \times K_i(t+1)\Big(W - B_S P_S(t) - \sum_{j \notin S} b_j P_j(t)\Big),\\
k_S(t) &= -P_S(t)' C_S p_S(t) + q_S + \Big(W - B_S P_S(t) - \sum_{j \notin S} b_j P_j(t)\Big)'\\
&\quad \times \Big[K_S(t+1)\Big(B_S p_S(t) + \sum_{j \notin S \cup \{i\}} b_j p_j(t)\Big) + k_S(t+1)\Big],\\
k_i(t) &= -2c_i P_i(t)' p_i(t) + q_i + \Big(W - B_S P_S(t) - \sum_{j \notin S} b_j P_j(t)\Big)'\\
&\quad \times \Big[K_i(t+1)\Big(B_S p_S(t) + \sum_{j \notin S} b_j p_j(t)\Big) + k_i(t+1)\Big],
\end{aligned}
$$

$$\kappa_S(t) = \kappa_S(t+1) + \frac{1}{2} p_S(t)' C_S p_S(t) + \Big(B_S p_S(t) + \sum_{j \notin S \cup \{i\}} b_j p_j(t) \Big)'$$
$$\times \Big[\frac{1}{2} K_S(t+1) \Big(B_S p_S(t) + \sum_{j \notin S \cup \{i\}} b_j p_j(t) \Big) + k_S(t+1) \Big] + \sum_{i \in S} \hat{x}_i^2,$$
$$\kappa_i(t) = \kappa_i(t+1) + c_i p_i(t)' p_i(t) + \Big(B_S p_S(t) + \sum_{j \notin S \cup \{i\}} b_j p_j(t) \Big)'$$
$$\times \Big[\frac{1}{2} K_i(t+1) \Big(B_S p_S(t) + \sum_{j \notin S \cup \{i\}} b_j p_j(t) \Big) + k_i(t+1) \Big] + \hat{x}_i^2,$$

с граничным условием: $K_S(T) = Q_S$, $k_S(T) = q_S$, $\kappa_S(T) = \sum_{i \in S} \hat{x}_i^2$ и $K_i(T) = Q_i$, $k_i(T) = q_i$, $\kappa_i(T) = \hat{x}_i^2$; при этом $\sum_{i \in S} J_i(\tilde{u}^{S,FB}) = F_S(0, x_0) = \frac{1}{2} x_0' K_S(0) x_0 + k_S(0)' x_0 + \kappa_S(0)$.

При использовании игроками равновесных по Нэшу стратегий $\tilde{u}_i^{S,FB}$, $i \in N$, каждый игрок из коалиции S в течение рассматриваемого промежутка времени привносит величину $J_i(\tilde{u}^{S,FB})$, $i \in S$, в суммарный выигрыш этой коалиции, и, следовательно, сила этой коалиции есть $v^{FB}(S) = \sum_{i \in S} J_i(\tilde{u}^{S,FB})$.

Используя приведенную выше схему также находим равновесие по Нэшу в игре n лиц, как если бы изначально рассматривали некооперативную игру. Для поиска равновесия по Нэшу достаточно выбрать одноэлементную коалицию, причем не важно какую именно. Тогда сила любого игрока определяется как его выигрыш в равновесии по Нэшу в некооперативной игре n лиц при выбранном классе стратегий.

4.6 Оценка уровней доверия

В случае, когда степеней доверия участников сети друг другу не известны, т. е. когда матрицы W и B изначально не заданы, можно предложить способ их оценивания на основе меры центральности. Пусть $\mathcal{A}$ — матрица смежности графа связей g, т. е. ее компоненты $a_{ij} = 1$, если ребро $(i, j) \in g$, и $a_{ij} = 0$ в противном случае. Напомним, что в рамках модели игроки могут влиять только на мнения агентов сети.

Центральность показывает степень «важности» или «влиятельности» узла сети. Рассмотрим центральность по близости [13, 21, 24]. Путем между вершинами i и j в g, который будем обозначать через $i \xrightarrow{g} j$, назовем последовательность направленных ребер $(i, i_1), (i_1, i_2), \ldots, (i_\ell, j)$. Пусть $V_i^{out}(g) = \{j \in V \setminus \{i\} : i \xrightarrow{g} j\}$, $N_i^{in}(g) = \{j \in V \setminus \{i\} : (j, i) \in g\}$, и $\mathrm{dist}(i, j)$ обозначает количество ребер в кратчайшем пути между вершинами i и j. Центральность по близости $\varsigma_i(g)$ узла $i \in V$ сети есть величина

$$\varsigma_i(g) = \begin{cases} \left(\dfrac{|V_i^{out}(g)|}{|V|-1}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{\sum\limits_{j \in V_i^{out}(g)} \mathrm{dist}(i, j)}, & V_i^{out}(g) \neq , \\ 0, & V_i^{out}(g) = . \end{cases}$$

Надо отметить, что в качестве меры центральности можно выбрать и другую адекватную меру, характеризующую влиятельность узла сети. В рамках исследуемой постановки выбор центральности по близости оправдан, поскольку для выбранного узла сети эта мера учитывает количество узлов, на которые может повлиять этот узел с учетом их удаленности от него.

Определим степени доверия агента $i \in A$ как другим агентам сети, так и игрокам. Положим:

$$w_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\varsigma_j(g)}{\varsigma_i(g) + \sum\limits_{\ell \in N_i^{in}(g)} \varsigma_\ell(g)}, & j \in A \cap N_i^{in}(g), \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$b_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\varsigma_j(g)}{\varsigma_i(g) + \sum\limits_{\ell \in N_i^{in}(g)} \varsigma_\ell(g)}, & j \in N \cap N_i^{in}(g), \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

По построению требуемое равенство $\sum_{j \in A} w_{ij} + \sum_{j \in N} b_{ij} = 1$ будет выполнено для любого $i \in A$.

4.7 Университетский клуб карате

Модель университетского клуба карате является известной классической задачей в моделировании социальных систем. Социальная сеть клуба, состоящая из 34 участников, изучалась У. Закари [26], который зафиксировал взаимодействия между ними. В результате конфликта между тренером и президентом клуба участники разделились на две группы. Рассмотрим эту сеть применительно к данной модели. Будем считать тренера и президента клуба игроками (1 и 2, соответственно), а остальных участников сети — агентами. Под мнением агента будем понимать вероятность, с которой он пересматривает участие в клубе. В качестве параметров модели выберем следующие: $T = 15$, $n = 2$, $a = 32$, $c_1 = 0.4$, $c_2 = 0.3$, $\hat{x}_1 = 0.6$, $\hat{x}_2 = 0.4$. Начальные мнения агентов генерируются случайным образом при помощи равномерного распределения на единичном отрезке.

Поскольку у нас нет информации о степени доверия участников сети друг другу, будем использовать подход, предложенный в разделе 4.6. В приложении А-рис.1 приведена визуализация связей участников сети: цвет вершин отражает мнения агентов в начальный момент времени, размер узла соответствует центральности вершины. Для большей наглядности убрана индикация в ориентации ребер: ориентация ребер сохранена согласно оригинальной работе [26], однако с учетом специфики текущей модели игроки имеют лишь исходящие ребра.

В приложении А-рис.5 представлены кооперативные стратегии игроков и их стратегии в равновесии по Нэшу в случае как программных, так и позиционных стратегий.

Конечные мнения агентов сети $\bar{x}(T)$ в случае кооперации изображены в приложении А-рис.4. Конечные мнения агентов $\tilde{x}^{OL}(T)$ и $\tilde{x}^{FB}(T)$ в равновесии по Нэшу для разных классов стратегий изображены в приложении А-рис.2.

Ниже приведены числовые характеристики модели, рассчитанные по формулам (1)–(2): выигрыши игроков при кооперации, их выигрыши в равновесии по Нэшу (в программных и позиционных стратегиях) и вектора Шепли для двух способов построения характеристической функции:

$$
\begin{aligned}
J_1(\bar{u}) &= 1.5312, & J_2(\bar{u}) &= 0.7228, & J_1(\bar{u}) + J_2(\bar{u}) = 2.2540,\\
J_1(\tilde{u}^{OL}) &= 2.1027, & J_2(\tilde{u}^{OL}) &= 0.5031, &\\
J_1(\tilde{u}^{FB}) &= 2.1087, & J_2(\tilde{u}^{FB}) &= 0.5167, &\\
\mathrm{Sh}_1[v^{OL}] &= 1.9268, & \mathrm{Sh}_2[v^{OL}] &= 0.3272, &\\
\mathrm{Sh}_1[v^{FB}] &= 1.9230, & \mathrm{Sh}_2[v^{FB}] &= 0.3310. &
\end{aligned}
$$

Также промоделирован вариант с тремя игроками для случая позиционных стратегий. Параметры модели: $T = 15$, $n = 3$, $a = 31$, $c_1 = 0.6$, $c_2 = 0.7$, $c_3 = 0.2$, $\hat{x}_1 = 0.4$, $\hat{x}_2 = 0.6$, $\hat{x}_3 = 0.1$. В приложении А приведены рисунки для терминальных состояний в случае кооперации всех игроков(Рис. 6) и для случая, когда каждый игрок играет индивидуальное равновесие (Рис. 7). Начальное состояние такое же, как и для случая 2 игроков. Полученный вектор Шепли: $Sh_1^{FB} = 0.4280, Sh_2^{FB} = 0.9610, Sh_3^{FB} = 3.0328$

5 Выводы

Проведен анализ модели динамики мнений с кооперацией центров влияния. В данной работе исследовалась линейная модель взвешивания мнений всех участников группы, а также квадратичный функционал отклонения мнений агентов сети от целевого. Также исследовались только два класса стратегий, программные и один класс позиционных. В данной работе рассматривались только необходимые условия существования равновесия в программных стратегиях и не производилось доказательства достаточности этих условий для достижения минимума данного функционала. Были произведены предположения о линейном виде позиционных стратегий и линейно квадратичном виде функции Беллмана. При вероятностной интерпретации мнений агентов были установлены ограничения на матрицы доверия агентов друг другу и игрокам, но не были учтены ограничения для управлений игроков, которые в таком случае должны быть заключены в отрезке от 0 до 1. В таком случае приведенные формулы верны только при предположении, что полученные управления удовлетворяют этому условию, иначе данные результаты не могут быть вероятностно интерпретированы. Подобные допущения были сделаны из-за высокой сложности подобной задачи оптимизации с ограничениями, в часности для позиционных стратегий, когда данные ограничения зависят от текущего состояния системы, что ознает необходимость замыкания системы относительно начального состояния, и дальнейшего просчитывания всей трактории системы. В качестве продолжения данной работы можно рассмотреть другие целевые функции потерь, рассмотреть другую динамику системы. Также можно решить данную задачу как задачу с ограничениями на управления и исследовать достаточность полученных условий для программных стратегий.

6 Заключение

В результате данной работы было проведено исследование кооперативной задачи управления в модели динамики мнений. Были получены формулы для вычисления равновесий в одном классе позиционных стратегий и в классе программных стратегий, как для кооперативного случая, так и для некооперативного. Была построена характеристическая функция согласно γ-принципу, по которой вычисляется вектор Шепли. Также была написана программа, позволяющая вычислить равновесные стратегии и было проведено моделирование. Также в данной работе предложен метод построения параметров модели по графу социальных взаимодействий.

7 Список литературы

1. Болтянский В. Г. *Оптимальное управление дискретными системами*, М: Наука, 1973.

2. Acemoglu D., Ozdaglar A. *Opinion dynamics and learning in social networks* // Dynamic Games and Applications. 2011. Vol. 1. No. 1. PP. 3–49.

3. Barabanov I. N., Korgin N. A., Novikov D. A., Chkhartishvili A. G. *Dynamic models of informational control in social networks* // Automation and Remote Control. 2010. Vol. 71. No. 11. PP. 2417–2426.

4. Başar T., Olsder G. J. *Dynamic Noncooperative Game Theory*, 2nd edition. USA: Academic Press, 1999.

5. Bauso D., Cannon M. *Consensus in opinion dynamics as a repeated game* // Automatica. 2018. Vol. 90. PP. 204–211.

6. Bindel D., Kleinberg J., Oren S. *How bad is forming your own opinion?* // Games and Economic Behavior. 2015. Vol. 92. PP. 248–265.

7. Buechel B., Hellmann T., Klößner S. *Opinion dynamics and wisdom under conformity* // Journal of Economic Dynamics and Control. 2015. Vol. 52. PP. 240–257.

8. Bure V., Parilina E., Sedakov A. *Consensus in social networks with heterogeneous agents and two centers of influence*. Stability and Control Processes in Memory of V. I. Zubov (SCP), 2015 International Conference. 2015. PP. 233–236.

9. Bure V., Parilina E., Sedakov A. *Consensus in a social network with two principals* // Automation and Remote Control. 2017. Vol. 78. No. 8. PP. 1489–1499.

10. Chander P., Tulkens H. *A core of an economy with multilateral environmental externalities* // International Journal of Game Theory. 1997. Vol. 26. PP. 379–401.

11. DeGroot M. H. *Reaching a Consensus* // Journal of the American Statistical Association. 1974. Vol. 69. No. 345. PP. 118–121.

12. Etesami S. R., Başar T. *Game-theoretic analysis of the Hegselmann–Krause model for opinion dynamics in finite dimensions* // IEEE Transactions on Automatic Control. 2015. Vol. 60. No. 7. PP. 1886–1897.

13. Freeman L. C. *Centrality in Social Networks Conceptual Clarification* // Social Networks. 1978. Vol. 1. No. 3. PP. 215–239.

14. Friedkin N. E., Johnsen E. C. *Social influence and opinions* // Journal of Mathematical Sociology. 1990. Vol. 15. No. 3–4. PP. 193–206.

15. Ghaderi J., Srikant R. *Opinion dynamics in social networks with stubborn agents: Equilibrium and convergence rate* // Automatica. 2014. Vol. 50. No. 12. PP. 3209–3215.

16. Gubanov D. A., Novikov D. A., Chkhartishvili A. G. *Informational influence and informational control models in social networks* // Automation and Remote Control. 2011. Vol. 72. No. 7. PP. 1557–1597.

17. Haurie A., Krawczyk J., Zaccour G. *Games and dynamic games*. Singapore: World Scientific, 2012.

18. Hegselmann R., Krause U. *Opinion dynamics and bounded confidence models, analysis, and simulation* // Journal of Artificial Societies and Social Simulation. 2002. Vol. 5. No. 3.

19. Golub B., Jackson M. O. *Naive learning in social networks and the wisdom of crowds* // American Economic Journal: Microeconomics. 2010. Vol. 2.

No. 1. PP. 112–49.

20. Krawczyk J. B., Tidball M. *A discrete-time dynamic game of seasonal water allocation* // Journal of Optimization Theory and Applications. 2006. Vol. 128. No. 2. PP. 411–429.

21. Lin N. *Foundations of social research.* McGraw-Hill, 1976.

22. Niazi M. U. B., Özgüler A. B., Yıldız A. *Consensus as a Nash Equilibrium of a Dynamic Game*, 12th International Conference on Signal-Image Technology & Internet-Based Systems. 2016. PP. 365–372.

23. Rajan R. *Endogenous Coalition Formation in Cooperative Oligopolies* // International Economic Review. 1989. Vol. 30. No. 4. PP. 863–876.

24. Sabidussi G. *The centrality index of a graph* // Psychometrika. 1966. Vol. 31. No. 4. PP. 581–603.

25. Starr A. W., Ho Y. C. *Further Properties of Nonzero-Sum Differential Games* // Journal of Optimization Theory and Applications. 1969. Vol. 3. No. 4. PP. 207–219.

26. Zachary W. W. *An Information Flow Model for Conflict and Fission in Small Groups* // Journal of Anthropological Research. 1977. Vol. 33. No. 4. PP. 452–473.

8 Приложение

8.1 Приложение А. Графики

Визуализация графов (Цвет вершин соответсвует мнению, размер вершин весу агента в outcloseness centrality мере)

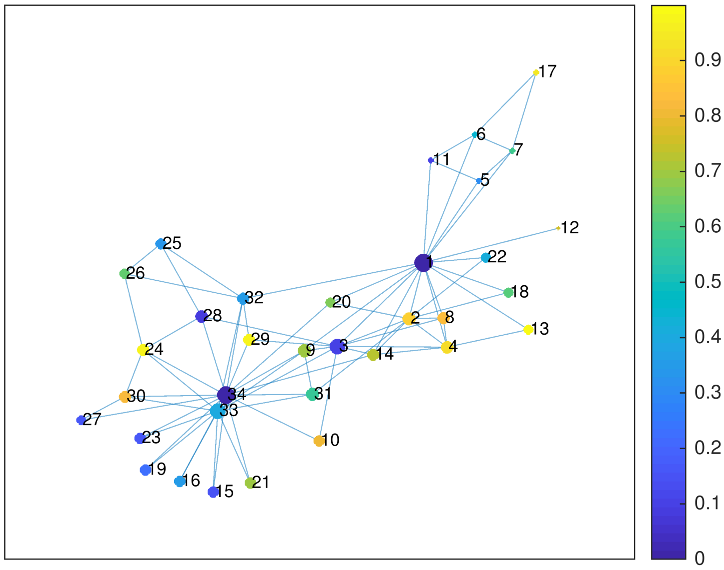

Рис. 1: Начальное состояние

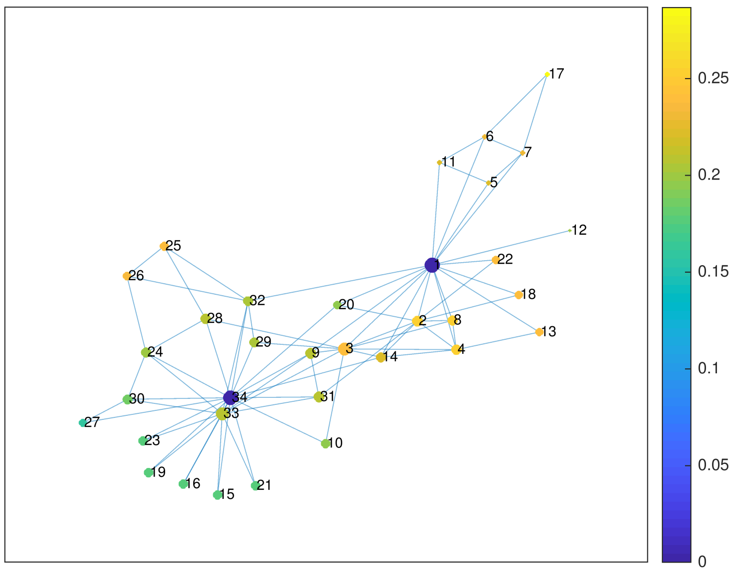

Рис. 2: Терминальное состояние в программных стратегиях

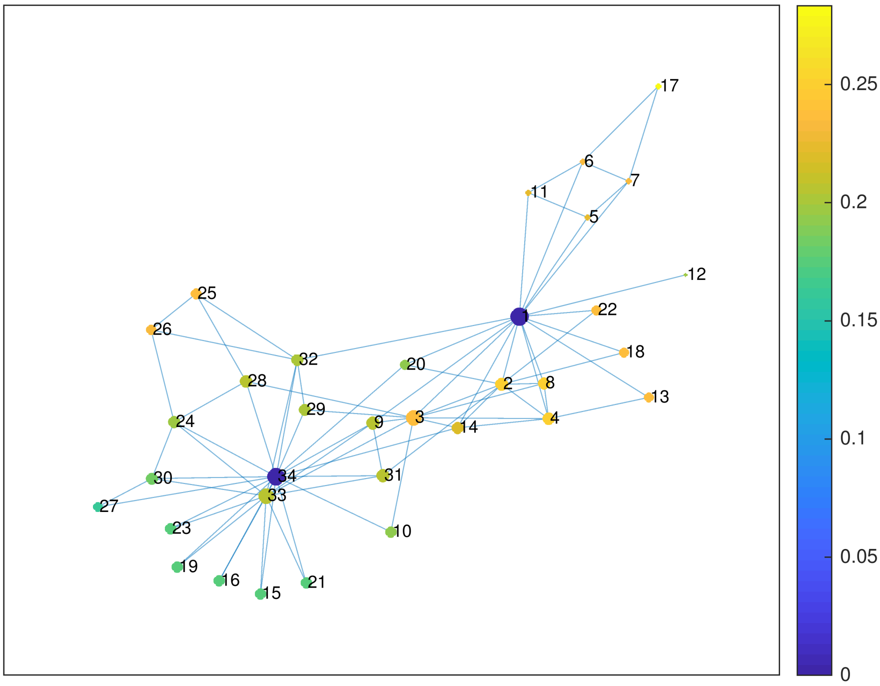

Рис. 3: Терминальное состояние в позиционных стратегиях

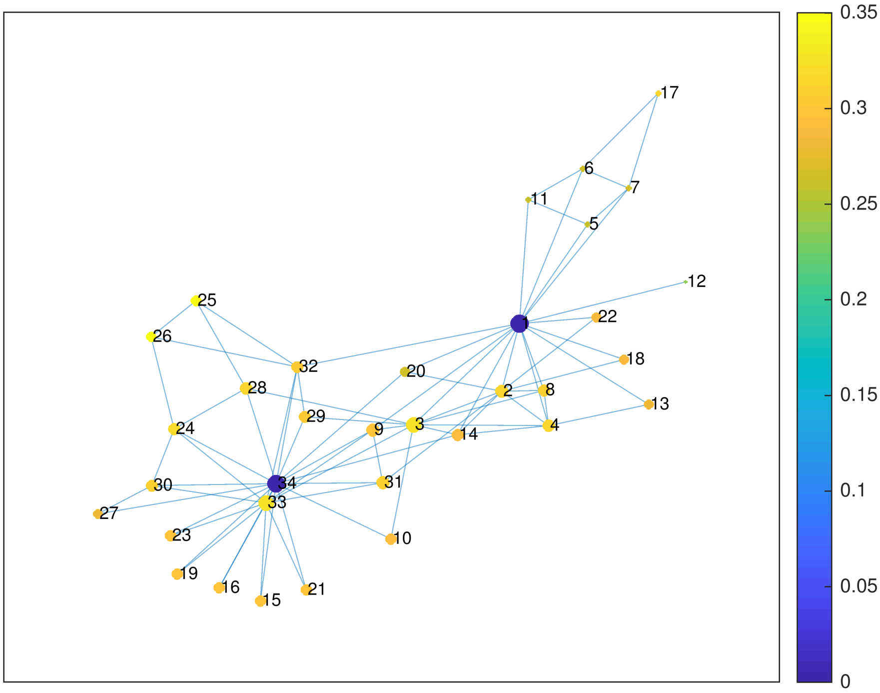

Рис. 4: Терминальное состояние при кооперации

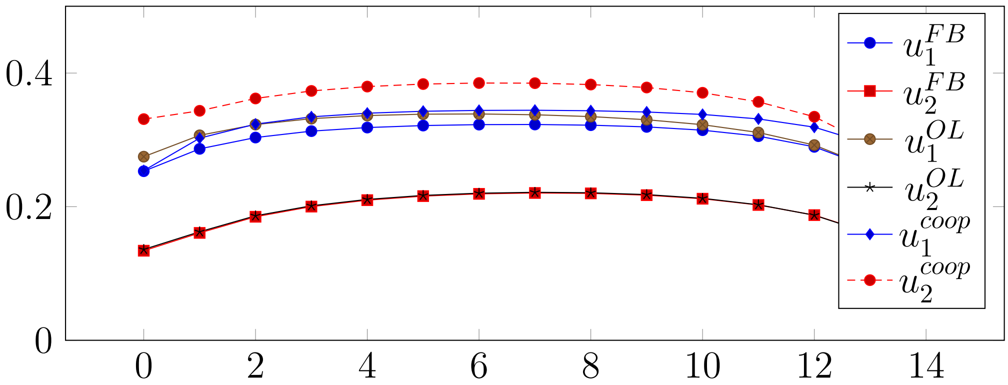

Рис. 5: Графики управлений для модели клуба Закари

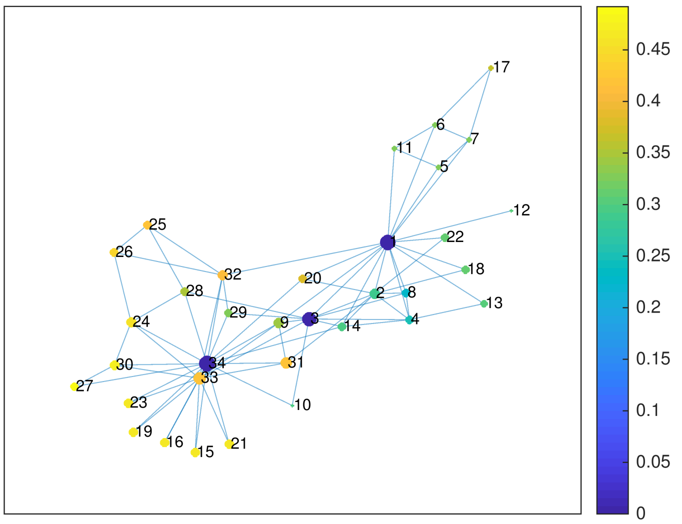

Рис. 6: Терминальное состояние при кооперации для 3 игроков

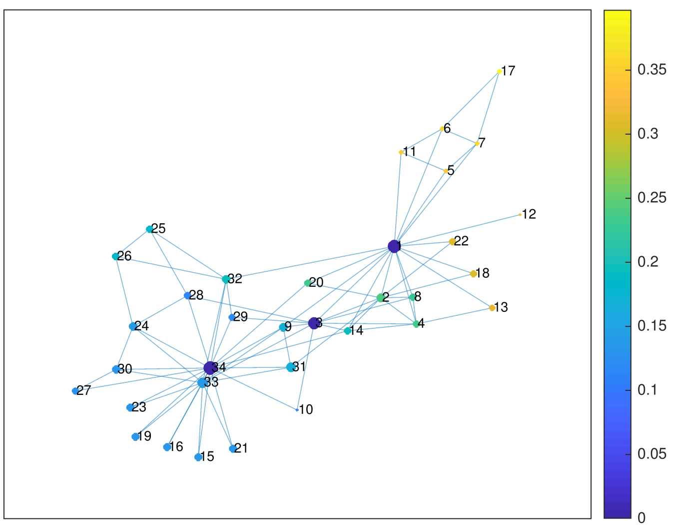

Рис. 7: Терминальное состояние без кооперации для 3 игроков

8.2 Приложение Б. Программный код

Весь код написан для среды Matlab.

Функция SolveGame для вычисления кооперативной позиционной стратегии. A - матрица доверия агентов друг другу, B - матрица доверия агентов игркоам, c - вектор коэффициентов затрат для каждого игрока, T - количество шагов, getQ - функция, возвращающая матрицу затрат Q_i и вектор q_i из матричного представления функции затрат.

```
function [ P, r, S, h, s, optim] = SolveGame( A, B, c, T, getQ)
dim = size(A);
n = dim(1);
dim = size(B);
m = dim(2);
R = 2*diag(c);
[Q, q] = getQ(n);
S = zeros(T+1, n, n);
h = zeros(T+1, n);
s = zeros(T+1,1);
P = zeros(T, m, n);
r = zeros(T, m);
S(T+1,:,:) = Q;
h(T+1,:) = q';
optim = 1;
for t = T :-1:1
    V = reshape(S(t+1,:,:), n, n);
    optim = optim.*PositiveDefinite(R + B'*V*B);

    P(t,:,:) = (A'*V*B/(R + B'*V*B))';
    K = reshape(P(t,:,:), m,n);
```

```
    r(t,:) = -h(t+1,:)*B/(R + B'*V*B);
    Temp_Mat = A - B*K;
    S(t,:,:) = Q + K'*R*K + Temp_Mat'*V*Temp_Mat;
    h(t,:) = -r(t, :)*R*K + q +(B*r(t,:)')'*V*Temp_Mat +
        + h(t+1,:)*Temp_Mat;

    s(t) = 0.5*r(t,:)*R*r(t,:)' + 0.5*(B*r(t,:)')'*V*(B*r(t,:)') +
        + h(t+1,:)*B*r(t,:)' + s(t+1);

end
```

Функция SolveGame_2 для вычисления кооперативной позиционной стратегии. A - матрица доверия агентов друг другу, B - матрица доверия агентов игркоам, c - вектор коэффициентов затрат для каждого игрока, T - количество шагов, getQ - функция, возвращающая матрицу затрат Q_i и вектор q_i из матричного представления функции затрат, x0 - вектор начального состояния системы, eps - параметр для определения точности численного решения системы уравнений. Функция Equation - вспомогательная функция для вычисления невязок, необходимая для численного решения системы уравнений.

```
function [ U ] = SolveGame_2( A, B, c, T,x0, eps, getQ)

dim = size(A);
n = dim(1);
dim = size(B);
m = dim(2);
R = 2*diag(c);
[Q, q] = getQ( n);

f = @(L) Equation(L,x0,A,B,R,Q,q);
```

```
opt = optimoptions('fsolve','TolFun', eps );

[L,f_eval] = fsolve(f,ones(n,T), opt);
R_inv = inv(R);
U = zeros(m,T);

for i = 1:T
    U(1:m,i) = -L(1:n,i)'*B*R_inv;
end
end

function [ res] = Equation(L,x,A,B,R,Q,q)

dim = size(L);
n = dim(1);
T = dim(2);
res = zeros(n,T);
R_inv = inv(R);

for t = 1:T-1
    U = -L(1:n,t)'*B*R_inv;
    x = (A*x+B*U');
    res(:, t) = x'*Q+ q + L(1:n,t+1)'*A-L(1:n,t)';
end
U = -L(1:n,T)'*B*R_inv;
x = (A*x+B*U');
res(:, T) = x'*Q + q - L(1:n,T)';
end
```

Функция SolveGameNC_Nash для вычисления некооперативной позиционной стратегии. A - матрица доверия агентов друг другу, B1 - матрица доверия агентов игрокам из коалиции, B2 - матрица доверия агентов игрокам не из коалиции, c1 - вектор коэффициентов затрат для каждого игрока из коалиции, c2 - вектор коэффициентов затрат для каждого игрока не из коалиции, x2_ - вектор целевых мнений для игроков не из коалиции, T - количество шагов, getQ - функция, возвращающая матрицу затрат Q_i и вектор q_i из матричного представления функции затрат для игроков из коалиции.

```
function [P, r] = SolveGameNC_Nash( A, B1, B2, c1, c2, x2_, T, getQ)

dim = size(A);
n = dim(1);
dim = size(B1);
m = dim(2);
dim = size(B2);
k = dim(2);

R1 = 2*diag(c1);
R2 = 2*diag(c2);

[Q1, q1] = getQ(n);
Q2 = zeros(n, n, k);
q2 = zeros(n,k);
for i=1:n
    for j=1:k
       Q2(i,i,j) = 2./n;
       q2(i,j) = -2.*x2_(j)./n;
    end
```

```
end

S1 = reshape(Q1,n,n);
S2 = Q2;
h1 = q1;
h2 = q2;
P = zeros(T, n, m+k);
r = zeros(T, m+k);
P_0 = ones(n+1,m+k);

for t =T :-1:1

    f = @(X)NC_NashResiduals(X, A, B1, B2, S1, S2, h1, h2, R1, R2);
    [P_opt, eval] = fsolve(f, P_0);
    f(P_opt);
    P(t, :,:) = P_opt(1:n,:);
    r(t,:) = P_opt(n+1,:);

    P1 = @(t)reshape(P(t, :,1:m),n,m);
    P2 = @(t,i)reshape(P(t, :,m+i),n,1);

    r1 = @(t) r(t,1:m);
    r2 = @(t, i) r(t,m+i);

    S2_ind = @(i) reshape(S2(:,:,i),n,n);

    SumPBA = - B1*P1(t)';
    SumBr = B1*r1(t)';
    for i=1:k
```

```
        SumPBA = SumPBA - B2(:,i)*P2(t,i)';
        SumBr = SumBr + B2(:,i)*r2(t,i);
    end

    S1_ = Q1 + P1(t) * R1 *P1(t)' +
        + (A + SumPBA )' * S1 * (A + SumPBA );
    h1_ = (- P1(t)* R1* r1(t)'+ q1' +
        + (A + SumPBA)'*(h1' + S1*(SumBr)))';

    S2_ = zeros(n,n,k);
    h2_ = zeros(n,k);
    for i = 1:k
        S2_(:,:,i) = Q2(:,:,i) + R2(i,i)*P2(t,i)*P2(t,i)' +
            + (A + SumPBA )'*S2_ind(i)*(A + SumPBA );
        h2_(:,i) = q2(:,i) - R2(i,i)*P2(t,i)*r2(t,i) +
            + (A + SumPBA)'*(S2_ind(i)*SumBr +  h2(:,i));
    end
    S1 = S1_;
    S2 = S2_;
    h1 = h1_;
    h2 = h2_;
end


end
```

Функция SolveGameNC_Nash_OL для вычисления некооперативной позиционной стратегии. A - матрица доверия агентов друг другу, B1 - матрица доверия агентов игрокам из коалиции, B2 - матрица доверия агентов игрокам не из коалиции, c1 - вектор коэффициентов затрат для каждого игрока из коалиции, c2 - вектор коэффициентов затрат для каждого игрока не из коалиции, x2_ - вектор целевых мнений для игроков не из коалиции, T - количество шагов, x0 - вектор начального состояния системы, getQ - функция, возвращающая матрицу затрат Q_i и вектор q_i из матричного представления функции затрат для игроков из коалиции, eps - параметр для определения точности численного решения системы уравнений.

```
function [U1 ,U2] = SolveGameNC_Nash_OL( A, B1, B2, C1, C2, x2_, T, x0
dim = size(A);
n = dim(1);
assert(dim(1)==dim(2), 'Matrix A is not square');
dim = size(B2);
assert(dim(1)==n, 'Dimension of B is not appropriate');
k = dim(2);
dim = size(B1);
m = dim(2);
assert(T+1 >= 0, 'T is negative');

[Q1, q1] = getQ(n);
Q2 = zeros(n, n, k);
q2 = zeros(n,k);
for i=1:n
    for j=1:k
       Q2(i,i,j) = 2;
       q2(i,j) = -2.*x2_(j);
    end
end

f = @(L) Residuals_NC_Nash_OL(L,x0,A,B1, B2,C1, C2, Q1, Q2, q1, q2);
```

```
opt = optimoptions('fsolve','TolFun', eps );
opt.MaxIterations = 5000;
opt.MaxFunctionEvaluations = 1000000;
[L,f_eval] = fsolve(f,ones(n,T,k+1), opt);
f(L)

U1 = zeros(m,T);
U2 = zeros(k ,T);
for t = 1:T
    U1(1,t) = -reshape(L(:,t,1), n,1)'*B1./(2*C1);

    for i = 1:k
        U2(i, t) = -B2(:,i)'*reshape(L(:,t,i+1), n, 1)./(2*C2(i));
    end
end
end

function [residuals] = Residuals_NC_Nash_OL(L,x,A,B1, B2,C1, C2, Q1, Q
dim = size(L);
n = dim(1);
T = dim(2);

dim = size(B2);
k = dim(2);
dim = size(B1);
m = dim(2);

residuals = zeros(n, T, k+1);
```

```
for t = 1:T-1
   U1 = -B1'*reshape(L(:,t,1), n, 1)/(2*diag(C1));
   U2 = zeros(k,1);
   for i = 1:k
       U2(i) = -B2(:,i)'*reshape(L(:,t,i), n, 1)/(2*C2(i));
   end

   x = (A*x + B1*U1 + B2 * U2);

   residuals(:, t, 1) = x'*Q1+ q1 + reshape(L(:,t+1,1),n,1)'*A - resha

   for i = 1:k
      residuals(:, t, i+1) = x'*Q2(:,:,i) + q2(:,i)' + reshape(L(:,t+1
   end

end
U1 = - -B1'*reshape(L(:,T,1), n, 1)/(2*diag(C1));
U2 = zeros(k,1);
   for i = 1:k
       U2(i) = -B2(:,i)'*reshape(L(:,T,i+1), n, 1)/(2*C2(i));
   end
x = (A*x + B1*U1 + B2 * U2);
residuals(:,T,1) =  x'*Q1 + q1 - reshape(L(:,T,1),n,1)';

for i = 1:k
      residuals(:, t, i+1) = x'*Q2(:,:,i) + q2(:,i)' - reshape(L(:,T,i
end
end
```