САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

СУЙСЛЕП РЕГИНА

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

Позиционное управление в одной экономической задаче

Направление 010302

Прикладная математика и информатика

Научные руководители:
кандидат физ.-мат. наук,
доцент
Трофимова И. В.,
доктор физ.-мат. наук,
профессор
Смирнов Н. В.

Санкт-Петербург
2019

Содержание

Введение. Обзор литературы

В современном мире управление выпусками продукции является важнейшей частью производственного процесса. Правильно организованный процесс производства и поставок товаров способствует увеличению эффективности работы компании, удовлетворению потребительского спроса, увеличению прибыли и конкурентоспособности фирмы, а также позволяет уменьшить вероятность коммерческого риска, связанного с отсутствием сбыта товаров.

Для описания таких процессов могут использоваться дифференциальные уравнения и рассматриваться задачи оптимального управления. Под оптимальностью подразумевается максимизация или минимизация некоторых характеристик объекта, таких как производительность, быстродействие, энергосбережение. Уже придумано много математических моделей, описывающих принципы закупки и поставки товаров, а также их организацию [1, 2, 3]. Использование информационных технологий позволяет производителям реагировать на процесс выпуска товаров в реальном времени. Это дает им возможность учитывать воздействие внешних факторов при управлении процессом производства, поскольку если, например, не принимать во внимание данные об изменении спроса на товар, то это приведет к увеличению затрат, нарушению сроков и к увеличению объемов непроданной продукции. Несмотря на огромное количество разработанных программных продуктов и существующих подходов к моделированию производственных процессов при их применении требуется их отдельная проработка в конкретных ситуациях в зависимости от особенностей товаров (взаимовлияния спроса на товары, срока службы, осведомленности покупателей о продукции и др.). Это объясняет их большое количество и актуальность появления все новых моделей.

В данной работе рассматриваются действия производителей выпускающих два типа товаров, когда коэффициент спроса одного товара зависит от наличия другого товара [4], а также когда спрос на оба продукта одинаковый, но отличается цена и экологичность выпускаемой продукции [5]. В первом случае нужно определить оптимальную скорость производства двух товаров, чтобы избежать их бессмысленное хранение на складе и следственно уменьшить затраты на него, а во втором, необходимо установить для государства оптимальную политику субсидирования с целью внедрить экологически чистые продукты на рынок.

Для решения задачи поиска оптимальных стратегий выпуска товаров в обоих случаях предлагается использовать метод поиска оптимального позиционного управления (построенного с учетом поступающей информации об изменении спроса на товар или покупательской осведомленности об экологически чистых продуктах) основанный на адаптивном методе Р. Габасова [6]. Этот метод построения оптимального управления успешно применяется для различных задач управления в режиме реального времени [7].

Постановка задачи

Описание моделей

В данной работе будут использованы две различные модели:

1. Рассмотрим производственную компанию, у которой имеется свой склад, она производит два типа товаров, предполагается, что скорость производства совпадает со скоростью поступления товаров на склад, а со склада товары в соответствии с уровнем спроса на них отгружаются потребителю. Потребителем в данном случае могут быть как конечные потребители, так и оптовые или дилерские компании. Следуя работе [4], рассмотрим модель управления запасами двух продуктов с различными сроками службы и спросом на них, в ней динамика изменения скорости производства описывается с помощью нелинейного дифференциального уравнения типа Лотки-Вольтерры. Предполагаем, что в определенные моменты времени у производителя есть возможность получать информацию об объемах запасов продуктов на складе и изменять объемы последующего выпуска с целью уменьшения затрат путем улучшения оборачиваемости склада и оптимизации производства.

2. Рассмотрим действия двух производственных компаний. Одна компания производит экологически чистые продукты, а вторая обычные. Предполагаем, что эти два типа продукта могут заменять друг друга в некоторой степени, т. е. с помощью них потребители удовлетворяют свои одинаковые потребности. Уровень спроса на них зависит не только от цен, но и от увеличения потребительской осведомленности об эко-продуктах. Однако, часто слишком высокая

начальная стоимость эко-продуктов по сравнению с обычными продуктами становится одним из основных препятствий, мешающих внедрению экологически чистых продуктов. Пусть правительство заинтересовано в том, чтобы эко-продукты заняли определенную часть рынка и для этого может выделять субсидии производителям. Поскольку экологическая осведомленность постоянно растет, потребители более охотно покупают экологически чистые продукты, даже если им приходится платить больше. Правительство также стремиться минимизировать общие социальные издержки связанные, например, с потреблением энергии и воздействием на окружающую среду единицы эко-продукта и обычного продукта.

Постановка задачи

1. Используя модель управления запасами двух продуктов с различными сроками службы и спросом на них, определить оптимальную стратегию производства (оптимальные выпуски каждого товара), чтобы обеспечить ожидаемый уровень спроса на товары и минимизировать затраты на их хранение на складе. При этом, поскольку планируемый объем спроса может отличаться от текущего, то производитель может менять стратегию производства в фиксированные моменты времени, получая информацию о текущей ситуации с загруженностью склада.
2. Используя модель взаимодействия обычных и эко-продуктов на рынке при наличии субсидий правительства, определить оптимальную стратегию субсидирования (объемы финансирования производителей эко-продуктов на определенном периоде времени), позволяющую минимизировать социальные издержки и вывести объем продаж эко-продуктов на определенный уровень.
3. Провести численные эксперименты для различных значений параметров.

Глава 1. Метод поиска оптимального позиционного управления

1.1 Позиционное управление

Пусть $T = [t_*, t^*]$, $h = (t^* - t_*)/N$, $t_* < t^* < +\infty$, N – натуральное число. Функцию $v(t) = v_j(t)$, $j = \overline{1,r}$, $t \in T$ назовем дискретным r-мерным управлением из класса V с периодом квантования h, если $v_j(t) = v(t_* + kh)$ и $t \in [t_* + kh; t_* + (k+1)h]$, $k = \overline{0, N-1}$, $|v(t)| \leq l$.

В классе дискретных управлений V с периодом квантования $h > 0$ рассмотрим линейную задачу оптимизации многомерных нестационарных систем [8]:

$$
\begin{gathered}
Cz(t^*) \to max \\
\dot{z}(t) = A(t)z(t) + B(t)v(t), \qquad z(t_*) = z^0 \\
Hz(t^*) = g \\
v(t) \in V \\
t \in T = [t_*, t^*]
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Здесь $z = z(t) \in \mathbb{R}^n$ – состояние системы управления в момент времени t; $v = v(t) \in \mathbb{R}^r$ – значение управления в момент t; $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times r}$ – кусочно-непрерывные матричные функции; $g \in \mathbb{R}^m$, $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $rangH = m \leq n$.

Дискретное управление $v(t), t \in T$, и соответствующую ему траекторию $z(t)$, $t \in T$, системы (1) будем называть допустимыми, если они удовлетворяют ограничениям задачи (1).

Допустимые управление $v^o(t)$, $t \in T$, и траектория $z^o(t)$, $t \in T$, называются оптимальными (программным решением задачи (1)), если вдоль них критерий качества достигает максимального значения: $Cz(T) \to max$.

Введем понятие позиционного решения (оптимального управления типа обратной связи), как показано в [8]. Для этого "погрузим" задачу (1) в семейство

$$
\begin{gathered}
Cz(t^*) \to max \\
\dot{z}(t) = A(t)z(t) + B(t)v(t), \qquad z(\tau) = \zeta \\
Hz(t^*) = g \\
v(t) \in V \\
t \in T(\tau) = [\tau, t^*],
\end{gathered}
\tag{2}
$$

зависящее от скаляра $\tau \in [t_*, t_* + h, \dots, t^* - h, t^*] = T_u$ и n-вектора ζ.

Пусть $v^o(t|\tau,\zeta)$, $t \in T(\tau)$ – оптимальное программное управление задачи (2) для позиции (τ,ζ); X_τ – множество состояний ζ, для которых оптимальные программные решения задачи (2) существуют. Следуя теории оптимальных процессов из [9], функцию

$$
v^o(t|\tau,\zeta), \qquad \zeta \in \mathrm{X}_\tau, \qquad \tau \in T_u \tag{3}
$$

назовем оптимальным управлением типа (дискретной) обратной связи (позиционным решением задачи (1)), построение функции (3) – синтезом оптимальной обратной связи (синтезом оптимальной системы). Замена в (1) управления на функцию (3) называется замыканием системы управления. Под траекторией замкнутой системы при постоянно действующем возмущении $\varphi(t)$, $t \in T$,

$$
\dot{z}(t) = A(t)z(t) + B(t)v^o(t) + \varphi(t), \qquad z(t_*) = z^0,
$$

будем понимать решение уравнения

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) + B(t)v^o(t) + \varphi(t), \qquad z(t_*) = z^0,$$

$$v^o(t) \equiv v^o(t_* + kh, z(t_* + kh)),$$

$$t \in [t_* + kh; t_* + (k+1)h], k = \overline{0, N-1}.$$

1.2 Сведение задачи оптимального управления к задаче линейного программирования

Пусть время изменяется на интервале $[0, T]$, $h = T/N$, $0 < T < +\infty$, N – натуральное число. Функцию $v(t) = v_j(t)$, $j = \overline{1, r}$, $t = [0, T]$ назовем дискретным r-мерным управлением из класса U с периодом квантования h, если $v_j(t) = v(kh)$ и $t \in [kh; (k+1)h]$, $k = \overline{0, N-1}$, $|v(t)| \leq l$.

Рассмотрим процедуру сведения задачи оптимального управления к задаче линейного программирования на примере линейной системы с постоянными матрицами, тогда задача терминального управления в классе дискретных управлений U с периодом квантования h будет иметь вид:

$$Cz(T) \to max$$

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bv(t), \qquad z(0) = z^0$$

$$Hz(T) = g \tag{4}$$

$$v(t) \in U$$

$$t = [0, T]$$

где $z \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояний системы, $v \in \mathbb{R}^r$ – вектор управлений, $A_{n\times n} = const$, $B_{n\times 1} = const$, C, H, g – заданы, $g \in \mathbb{R}^m$, $rangH = m \leq n$.

Сведем задачу (4) к задаче линейного программирования (ЛП). Следуя работе [10], сделаем следующие преобразования. Будем использовать

решение Задачи Коши с начальными условиями $z(0) = z^0$ на $t \in [0; T]$: $z(t) = e^{At}z^0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bv(\tau)d\tau$. Подставим его в первое уравнение в задаче (4): $Cz(T) = Ce^{AT}z^0 + C\int_0^T e^{A(T-\tau)}Bv(\tau)d\tau$. Здесь первое слагаемое можно опустить, так как оно не зависит от управления. Также подставим в третье уравнение в задаче (4), тогда получим:

$$\int_0^T Ce^{A(T-\tau)}Bv(\tau)d\tau \to max, \tag{5}$$

$$\int_0^T He^{A(T-\tau)}Bv(\tau)d\tau = g_0, \tag{6}$$

где $g_0 = g - He^{AT}z^0$.

Если теперь учесть вид допустимого управления из класса U, то последние уравнения (5) и (6) можно переписать в виде сумм:

$$\sum_{k=0}^{T-h} \gamma_k v_{k_h} \to max$$

$$\sum_{k=0}^{T-h} \eta_k v_{k_h} = g_0,$$

где $\begin{matrix} \gamma_k = \int_t^{t+h} Ce^{A(T-\tau)}Bd\tau \\ \eta_k = \int_t^{t+h} He^{A(T-\tau)}Bd\tau \end{matrix}$ при $t = kh$, $k = \overline{0, N-1}$.

Введем обозначения:

$G = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{N-1})$ - $(1 \times N)$ строка,

$D = (\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{N-1})$ - $(m \times N)$ матрица,

$v = \left(v_{0_h}, v_{1_h}, \ldots, v_{N-1_h}\right)^T$ - N -мерный вектор.

В итоге получили каноническую задачу ЛП:

$$
\begin{gathered}
Gv \to max \\
Dv = g_0 \\
-l \le v_{k_h} \le l, k = \overline{0, N-1}
\end{gathered}
\tag{7}
$$

Полученную задачу (7) в данной работе предлагается решать адаптивным методом [6]. Данный метод выбран, поскольку он подходит для решения задач, в которых матрица системы в задаче (7) имеет ленточную структуру. В данном случае система в (7) будет иметь такой вид при разбиении отрезка $[0, T]$ на большее число интервалов.

1.3 Адаптивный метод

Для описания основной идеи адаптивного метода приведем некоторые ключевые определения [6].

Определение 1.

Пусть V – множество допустимых решений задачи ЛП (7):

$$
\begin{gathered}
Gv \to max \\
Dv = g_0 \\
-l \le v_{k_h} \le l, k = \overline{0, N-1}
\end{gathered}
$$

План $v^0 \in V$ называется *оптимальным*, если он доставляет максимум целевой функции: $Gv^0 = \max\limits_{v \in V} Gv$.

Определение 2.

Пусть задано число $\varepsilon \ge 0$. План v^ε называется *ε-оптимальным*, если выполняется: $Gv^0 - Gv^\varepsilon \le \varepsilon$.

Определение 3.

Из множества I индексов строк матрицы D выделим $\forall$ подмножество $I_{op} \in I$, и из множества J индексов ее столбцов выделим $\forall$ подмножество $J_{op} \in J$ так, чтобы количество элементов в каждом из подмножеств совпадало т.е. $|I_{op}| = |J_{op}|$. Пара множеств $K_{op}\{I_{op}, J_{op}\}$ называется *опорой*, а соответствующая ей квадратная матрица $D_{op} = (I_{op}, J_{op})$ является *опорной матрицей*, если $det\, D_{op} \neq 0$.

Обозначим за $I_n = I \backslash I_{op}$ и $J_n = J \backslash J_{op}$. Далее можем разбить матрицу D на блоки: $D = \begin{pmatrix} D_{op} & D_{pn} \\ D_{np} & D_{nn} \end{pmatrix}$, где $D_{op} = (I_{op}, J_{op})$; $D_{pn} = (I_{op}, J_n)$; $D_{np} = D(I_n, J_{op})$; $D_{nn} = (I_n, J_n)$.

Введем вектор затрат $w = Dv$. Физический смысл опоры состоит в том, что, зная опору всегда можно обеспечить выполнение опорной группы основных ограничений с помощью опорной компоненты плана: $w_{op} = D_{op} v_{op} + D_{pn} v_n$.

Определение 4.

Пара $\{x, K_{op}\}$, состоящая из произвольного плана x и произвольной опоры K_{op}, называется *опорным планом*.

Основная идея метода состоит в том, что для задачи ЛП, которая имеет вид (7), по известной информации о её решении и заданному числу $\varepsilon \geq 0$ необходимо построить ε-оптимальный план v^{ε}. Для этого будем строить последовательные приближения планов для задачи (7): $v^1, v^2, \ldots, v^k, \ldots$. Для эффективности метода, на каждой итерации строится своя опора, следовательно, получим последовательность опор: $K_{op}^1, K_{op}^2, \ldots, K_{op}^k, \ldots$. Таким образом итерация метода выглядит так: $\{v^k, K_{op}^k\} \to \{v^{k+1}, K_{op}^{k+1}\}$. Данный метод состоит из двух фаз, где первая заключается в построении начального опорного плана $\{v^1, K_{op}^1\}$, а вторая в построении последующих опорных

планов $\{v^k, K_{op}^k\}, k = 2,3 \ldots$. Поскольку построение начального опорного плана строится по алгоритму второй фазы, то кратко опишем сначала вторую фазу, а потом первую.

Так, как целью является построение ε-оптимального плана, то каждая последующая итерация адаптивного метода строится по *принципу уменьшения оценки субоптимальности*: $\beta(v^{k+1}, K_{op}^{k+1}) \leq \beta(v^k, K_{op}^k)$, где $\beta(v, K_{op}) = max\, G\, \Delta v$ – максимум от приращения целевой функции, который в свою очередь может быть расписан в виде суммы: $\beta(v, K_{op}) = \mu(v) + \mu(K_{op})$. Таким образом, принцип уменьшения оценки субоптимальности может быть реализован в виде двух процедур:

1. замена плана $v^k \to v^{k+1}$;
2. замена опоры $K_{op}^k \to K_{op}^{k+1}$;

где первая основана на *принципе уменьшения меры неоптимальности плана* $\mu(v^{k+1}) \leq \mu(v^k)$, а вторая на *принципе уменьшения меры неоптимальности опоры* $\mu(K_{op}^{k+1}) \leq \mu(K_{op}^k)$. Каждая процедура подробно описывается в работе [6].

Вернёмся теперь к описанию первой фазы, т. е. к построению начального плана и начальной опоры. Задача ЛП (7) является математической моделью экономической задачи, поэтому, кроме математической модели, специалист будет иметь дополнительную информацию об оптимальном, по его мнению, результате. Обозначим через $\tilde{v}_j$ значение j-й компоненты плана, вычисленной по рекомендациям специалистов. Очевидно, что $-l_j \leq \tilde{v}_j \leq l_j$. Обозначим через $\tilde{w}_i$ значение i-й компоненты вектора затрат, вычисленной по рекомендациям специалистов. Таким образом по известной информации построены два вектора $\tilde{v}$ и $\tilde{w}$. Найдем вектор невязок $\varpi = \tilde{w} - D\tilde{v}$. Если $\varpi = 0$, следовательно, $\tilde{v}$ – искомый план.

Рассмотри случай $\varpi \neq 0$. Введем множества $I_+ = \{i \in I: \varpi_i > 0\}$, $I_- = \{i \in I: \varpi_i < 0\}$ и $I_0 = \{i \in I: \varpi_i = 0\}$. Очевидно, что $I_+ \cup I_- = \emptyset$ при $\varpi \neq 0$. Сформулируем вспомогательную задачу первой фазы:

$$\begin{gathered} \sum_{i \in I_+ \cup I_-} v_{n+i} \to min \\ D(i,J)v + v_{n+i} \leq g_{0_i}, i \in I_+ \\ D(i,J)v - v_{n+i} \leq g_{0_i}, i \in I_- \\ D(i,J)v \leq g_{0_i}, i \in I_0 \\ -l \leq v \leq l \\ 0 \leq v_{n+i} \leq |\varpi_i|, i \in I_+ \cup I_- \end{gathered} \tag{8}$$

где $v_j, j \in J$ – исходные переменные; $v_{n+i}, i \in I_+ \cup I_-$ – искусственные переменные.

Легко увидеть, что совокупность $(\tilde{v}, v_{n+i} = |\varpi_i|, i \in I_+ \cup I_-)$ является допустимым планом задачи (8), который состоит из $n + |I_+| + |I_-|$ компонент. Задачей первой фазы является – обратить в нуль искусственные переменные. Таким образом, для построения начального плана задачи (7) или обнаружить, что в ней нет планов (т.е. ограничения противоречивы), необходимо решить задачу (8) с помощью второй фазы адаптивного метода, где уже для новой задачи, в качестве начального плана берется допустимый план $(\tilde{v}, v_{n+i} = |\varpi_i|, i \in I_+ \cup I_-)$, а в качестве начальной опоры – берется пустая опора. Более подробное описание метода можно найти в работе [6].

Преимуществами данного метода является получение результатов за конечное число итераций, быструю скорость работы реализованной программы, возможность прервать ход программы в любой момент времени, при этом не потерять вычисленные результаты на предыдущих шагах, а также его приспосабливание к различным типам задач.

1.4 Позиционное управление в нелинейной задаче

Рассмотрим нелинейную систему уравнений

$$\dot{x} = F(t, x, u) \tag{9}$$

Кратко изложим процедуру построения позиционного управления.

Построим систему в отклонениях для (9). Для этого сделаем замену $x = \bar{x} + z$ и $u = \bar{u} + v$, и перейдем к системе в отклонениях [11]:

$$\dot{z} = \psi(t, z, v) = F(t, \bar{x} + z, \bar{u} + v) - F(t, \bar{x}, \bar{u}),$$

где $\bar{x}$, $\bar{u}$ – равновесные решения и $\psi(t, 0{,}0) = 0$.

В полученной системе выделим линейные члены относительно z и v:

$$\dot{z} = A(t)z + B(t)v + \varphi(t, z, v) \tag{10}$$

Будем считать, что $A(t), B(t)$ – вещественные непрерывные матрицы, заданные при $t \geq 0$, с ограниченными элементами:$\|\varphi(t, z, v)\| \leq L(\|z\| + \|v\|)^{1+\alpha}$, причем $\alpha = const > 0, L = const$.

Сведем эту задачу к канонической задаче ЛП для поиска оптимального управления $v(t)$ из класса кусочно-постоянных управлений U.

Пусть заданы начальные условия $z(0) = z^0$ и $t \in [0; T]$, где $t \in [kh; (k+1)h]$, $h = \frac{T}{N}$, $k = \overline{0, N-1}$, N – заданное натуральное число. Обозначим за $\tilde{z} = \tilde{z}(t, z, v, \varphi)$ – решение нелинейной системы (10), а за $\bar{z} = \bar{z}(t, z, v)$ – решение соответствующей линейной системы (10).

На каждом шаге k вместо нелинейной задачи решаем линейную, приводим её к задаче ЛП и с помощью адаптивного метода получаем оптимальное управление $v^k = \left(v^k_{0_h} \quad \dots \quad v^k_{N-1_h}\right)$. Далее запоминаем его часть в виде k-ой компоненты $v(t) = v^k_{k_h}$, подставляем в решения линейной и нелинейной системы и считаем отклонение $z(k) = \tilde{z}(t, z(k-1), v^{k-1}_{k-1_h}, \varphi) -$

$\bar{z}(t, z(k-1), v_{k-1_h}^{k-1})$ где вместо t подставляем $t = (k+1)h$. Это будут наши новые начальные условия на шаге $k = \overline{0, N-1}$.

Следственно, решая на каждом шаге вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} \dot{z} = A(t)z(k) + B(t)v^k \\ v^k = \begin{pmatrix} v_{0_h}^k & \dots & v_{N-1_h}^k \end{pmatrix} \\ z(k) = \tilde{z}(t, z(k-1), v_{k-1_h}^{k-1}, \varphi) - \bar{z}(t, z(k-1), v_{k-1_h}^{k-1}) \\ t = (k+1)h \\ k = \overline{0, N-1} \end{cases}$$

построим постоянный вектор управления, состоящий из частей всех вычисленных управлений $v = \begin{pmatrix} v_{0_h}^0 & \dots & v_{k_h}^k & \dots & v_{N-1_h}^{N-1} \end{pmatrix}$, который и будет искомым для системы (10). Таким образом на каждом шаге поступает новая информация т. е. непосредственное решение нелинейной системы.

Глава 2. Оптимальное позиционное управление в экономических задачах

2.1 Задача об управлении запасами двух продуктов

Следуя работе [4], рассматривается предприятие, которое производит два различных продукта $i, j = 1,2$ и хранит свою продукцию на складе. Предполагается, что скорость производства товаров равна скорости поставки товаров на склад, откуда товары в соответствии с уровнем спроса на них отгружаются потребителю.

Система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u_1(t) - x_1(t)[d_1 + \theta_1 + a_{12}x_2(t) + \theta_{11}x_1(t)] \\ \dot{x}_2(t) = u_2(t) - x_2(t)[d_2 + \theta_2 + a_{21}x_1(t) + \theta_{22}x_2(t)] \end{cases} \quad (11)$$

Здесь:

$x_i(t)$ – уровень запасов i-го продукта в момент t;

$u_i(t)$ – скорость непрерывной поставки i-го продукта в момент t;

${x_i}^0$ – уровень запасов i-ого продукта в начальный момент $t = 0$;

$d_i x_i$ – цена, которую готовы заплатить покупатели за x_i ,где $d_i = const$;

θ_{ii} – коэффициент износа независимо от x_i;

a_{ij} – коэффициент спроса на x_i при наличии x_j ,$(i \neq j)$;

θ_i – коэффициент естественного износа x_i.

Пусть у предприятия есть желаемый уровень выпуска, который производитель определяет исходя из планируемого уровня спроса. Предполагается, что производитель в дискретные моменты времени получает информацию об имеющихся запасах на складе и учитывает их при определении дальнейшей стратегии производства. Таким образом получается

задача поиска оптимального позиционного управления. Предположим, что предприятие стремится минимизировать все отклонения запасов, поскольку если их много, то у предприятия будут дополнительные затраты на хранение. Функционалом качества в данной задаче является $\min_u J = \sum_i p_i x(t_i)$, где p_i характеризуют затраты на хранение единицы продукции на складе на i-ом интервале времени.

2.1.1 Вывод системы в отклонениях и сведение к задаче линейного программирования

Построим систему в отклонениях для системы (11) из рассматриваемой модели. Для этого в окрестности выбранного положения равновесия, в системе $\dot{x} = F(t, x, u)$ сделаем замену $x = \bar{x} + z$ и $u = \bar{u} + v$, и перейдем к системе в отклонениях [11]:

$$\dot{z} = \psi(t, z, v) = F(t, \bar{x} + z, \bar{u} + v) - F(t, \bar{x}, \bar{u}),$$

где $\bar{x}$, $\bar{u}$ – равновесные решения и $\psi(t, 0{,}0) = 0$.

В полученной системе выделим линейные члены относительно z и v. Тогда получим: $\dot{z} = A(t)z + B(t)v + \varphi(t, z, v)$. Будем считать, что $A(t), B(t)$ –вещественные непрерывные матрицы, заданные при $t \geq 0$, с ограниченными элементами:$\|\varphi(t, z, v)\| \leq L(\|z\| + \|v\|)^{1+\alpha}$, причем $\alpha = const > 0, L = const$.

Пусть для производителя

$\bar{x}_i$ – желаемый уровень запасов i-го продукта, который определяется из состояния равновесия;

$\bar{u}_i$ – скорость непрерывной поставки i-го продукта в состоянии равновесия.

Они могут быть определены следующим образом:

$$\begin{cases} 0 = \bar{u}_1 - \bar{x}_1(d_1 + \theta_1 + a_{12}\bar{x}_2 + \theta_{11}\bar{x}_1) \\ 0 = \bar{u}_2 - \bar{x}_2(d_2 + \theta_2 + a_{21}\bar{x}_1 + \theta_{22}\bar{x}_2) \end{cases} \tag{12}$$

Выразим из первого уравнения $\bar{x}_2$

$$\bar{x}_2 = \left(\frac{\bar{u}_1}{\bar{x}_1} - d_1 - \theta_1 - \theta_{11}\bar{x}_1\right)\frac{1}{a_{12}} \tag{13}$$

И подставим его во второе:

$$0 = \bar{u}_2 - \left(\frac{\bar{u}_1}{\bar{x}_1} - d_1 - \theta_1 - \theta_{11}\bar{x}_1\right)\frac{1}{a_{12}}\Big[d_2 + \theta_2 + a_{21}\bar{x}_1 + \theta_{22}\left(\frac{\bar{u}_1}{\bar{x}_1} - d_1 - \theta_1 - \theta_{11}\bar{x}_1\right)\frac{1}{a_{12}}\Big],$$

$$0 = \bar{u}_2 - \frac{\bar{u}_1}{\bar{x}_1}\frac{1}{a_{12}}(d_2 + \theta_2) - \frac{\bar{u}_1}{\bar{x}_1}\frac{1}{a_{12}}a_{21}\bar{x}_1 + \frac{(d_1 + \theta_1)}{a_{12}}(d_2 + \theta_2) + \frac{(d_1 + \theta_1)}{a_{12}}a_{21}\bar{x}_1 +$$

$$+\frac{\theta_{11}a_{21}}{a_{12}}\bar{x}_1{}^2 - \theta_{22}\left(\frac{\bar{u}_1}{\bar{x}_1} - d_1 - \theta_1 - \theta_{11}\bar{x}_1\right)^2\frac{1}{a_{12}{}^2},$$

где последняя скобка раскрывается следующим образом:

$$\left(\frac{\bar{u}_1}{\bar{x}_1} - d_1 - \theta_1 - \theta_{11}\bar{x}_1\right)^2 = \left(\frac{\bar{u}_1}{\bar{x}_1} - \theta_{11}\bar{x}_1\right)^2 - 2\left(\frac{\bar{u}_1}{\bar{x}_1} - \theta_{11}\bar{x}_1\right)(d_1 + \theta_1) + (d_1 + \theta_1)^2 =$$

$$= \frac{\bar{u}_1{}^2}{\bar{x}_1{}^2} - 2\theta_{11}\bar{u}_1 + \theta_{11}{}^2\bar{x}_1{}^2 - 2(d_1 + \theta_1)\frac{\bar{u}_1}{\bar{x}_1} + 2\theta_{11}(d_1 + \theta_1)\bar{x}_1 + (d_1 + \theta_1)^2 .$$

Тогда окончательно получаем, что $\bar{x}_1$ можно найти, решив уравнение:

$$-\frac{\theta_{22}\bar{u}_1{}^2}{a_{12}{}^2}\frac{1}{\bar{x}_1{}^2} - \left(\frac{(d_2 + \theta_2)}{a_{12}} - 2\frac{\theta_{22}}{a_{12}{}^2}(d_1 + \theta_1)\right)\bar{u}_1\frac{1}{\bar{x}_1} +$$

$$+\left[\bar{u}_2 - \left(\frac{a_{21}}{a_{12}} - 2\frac{\theta_{22}\theta_{11}}{a_{12}{}^2}\right)\bar{u}_1 + \frac{(d_1 + \theta_1)}{a_{12}}(d_2 + \theta_2) - \frac{\theta_{22}}{a_{12}{}^2}(d_1 + \theta_1)^2\right] +$$

$$+\left(\left(\frac{a_{21}}{a_{12}}-2\,\frac{\theta_{22}\theta_{11}}{{a_{12}}^2}\right)(d_1+\theta_1)\right)\bar{x}_1+\left(\frac{\theta_{11}a_{21}}{a_{12}}-\frac{\theta_{22}{\theta_{11}}^2}{{a_{12}}^2}\right){\bar{x}_1}^2=0\,. \qquad (14)$$

Таким образом, по заданным $\bar{u}_1$ и $\bar{u}_2$ получим конкретные $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$, и наоборот. Так как решений будет несколько, а именно 4, то в дальнейшем рассматриваются только положительные.

Сделаем замену:

$$\begin{cases} x_1(t)=\bar{x}_1+z_1(t) \\ x_2(t)=\bar{x}_2+z_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1(t)=\bar{u}_1+v_1(t) \\ u_2(t)=\bar{u}_2+v_2(t) \end{cases}$$

И подставим в уравнение (11):

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t)=\bar{u}_1+v_1(t)-(\bar{x}_1+z_1(t))[d_1+\theta_1+a_{12}(\bar{x}_2+z_2(t))+\theta_{11}(\bar{x}_1+z_1(t))]=f_1 \\ \dot{z}_2(t)=\bar{u}_2+v_2(t)-(\bar{x}_2+z_2(t))[d_2+\theta_2+a_{21}(\bar{x}_1+z_1(t))+\theta_{22}(\bar{x}_2+z_2(t))]=f_2 \end{cases}$$

Разложим полученные выражения в правых частях в ряд Тейлора по переменным z_1, z_2 в окрестности точки $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$:

$$\begin{cases} \dot{z}_1=0+a\cdot z_1+b\cdot z_2+O_2(z_1,z_2) \\ \dot{z}_2=0+c\cdot z_1+d\cdot z_2+O_2(z_1,z_2) \end{cases},$$

где $O_2(z_1,z_2)$ величина второго порядка малости.

Коэффициенты a ,b ,c и d есть частные производные:

$a=\frac{\partial f_1(\bar{x}_1,\bar{x}_2)}{\partial z_1}=-d_1-\theta_1-a_{12}(\bar{x}_2+z_2)-2\theta_{11}(z_1+\bar{x}_1)$, и в точке $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ будет:

$$a=-d_1-\theta_1-2a_{12}\bar{x}_2-4\theta_{11}\bar{x}_1;$$

$$b=\frac{\partial f_1(\bar{x}_1,\bar{x}_2)}{\partial z_2}=-a_{12}(\bar{x}_1+z_1)=-2a_{12}\bar{x}_1\ ;$$

$$c=\frac{\partial f_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2)}{\partial z_1}=-a_{21}(\bar{x}_2+z_2)=-2a_{21}\bar{x}_2\ ;$$

$d = \frac{\partial f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial z_2} = -d_2 - \theta_2 - a_{21}(\bar{x}_1 + z_1) - 2\theta_{22}(z_2 + \bar{x}_2) = -d_2 - \theta_2 - 2a_{21}\bar{x}_1 - 4\theta_{22}\bar{x}_2$.

В итоге получили систему в отклонениях, относительно z_1 и z_2:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \varphi(t, z, v) \ . \tag{15}$$

Введем предположение, что $\varphi(t, z, v) = \varphi(t)$ и обозначив в (15) за $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ придем к нелинейной системе вида:

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bv(t) + \varphi(t), \tag{16}$$

где $z \in \mathbb{R}^2$ – вектор состояний системы, $v \in \mathbb{R}^1$ – управление, $A_{2\times2} = const$, $B_{2\times1} = const$.

Решение системы (16) и оптимальное позиционное управление для поставленной задачи можно получить с помощью метода построения позиционного управления и адаптивного метода, изложенных в Главе 1.

2.1.2 Пример

Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим следующий числовой пример.

Пусть:

$d_1 = 10$; $d_2 = 20$; $a_{12} = 2{,}5$; $a_{21} = 3{,}5$; $\theta_1 = 0{,}1$; $\theta_2 = 0{,}15$; $\theta_{11} = \theta_{22} = 0{,}01$ – параметры модели;

$x^0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ – начальный уровень запасов каждого из продуктов;

$T = 0{,}6$ – конечный момент времени равный полугоду, $N = 6$, тогда шаг будет $h = \frac{T}{N} = \frac{0{,}6}{6}$ и время будет меняться, как $t = kh = 0{,}1k$, $k = \overline{0;5}$;

$C = (-1 \quad -5)$, $H = (1 \quad 1)$, $g = 0{,}6$ – параметры для функционала качества и ограничений;

$\varphi(t) = 2\cos(t)$ – возмущения;

$\bar{x}_1 = 100$, $\bar{x}_2 = 80$ – ожидаемый уровень спроса на оба продукта. И допустим, что начиная с времени $t = 0{,}4$ производитель получает информацию о том, что уровень спроса начнет падать на единицу;

$\bar{u}_1 = 2{,}5$; $\bar{u}_2 = 3$ – объемы поставок, планируемые изначально;

$l = 2{,}5$ – граница искомого вектора управления $|v(t)| \leq l$;

С помощью программ, реализованных в среде Matlab, рассматриваемая задача оптимального управления сводится к задаче линейного программирования и решается с помощью процесса построения позиционного управления, основанного на адаптивном методе. Получившийся вектор управления будет $v = (2{,}5 \quad 2{,}5 \quad 2{,}5 \quad 2{,}5 \quad 2{,}5 \quad -0{,}0004)^T$ и соответствующие ему решения системы (4) будут:

$z_1 = (-90 \quad 0{,}1 \quad 0{,}099 \quad 0{,}096 \quad 0{,}093 \quad 0{,}93)^T$,

$z_2 = (-75 \quad 0{,}069 \quad 0{,}068 \quad 0{,}67 \quad 0{,}64 \quad 0{,}064)^T$.

Теперь, сделав обратную замену $\begin{cases} x_1 = \bar{x}_1 + z_1 \\ x_2 = \bar{x}_2 + z_2 \end{cases}$ и $\begin{cases} u_1 = \bar{u}_1 + v_1 \\ u_2 = \bar{u}_2 + v_2 \end{cases}$ получим искомые величины.

На рис. 1 изображены оптимальные векторы управлений u_1 и u_2.

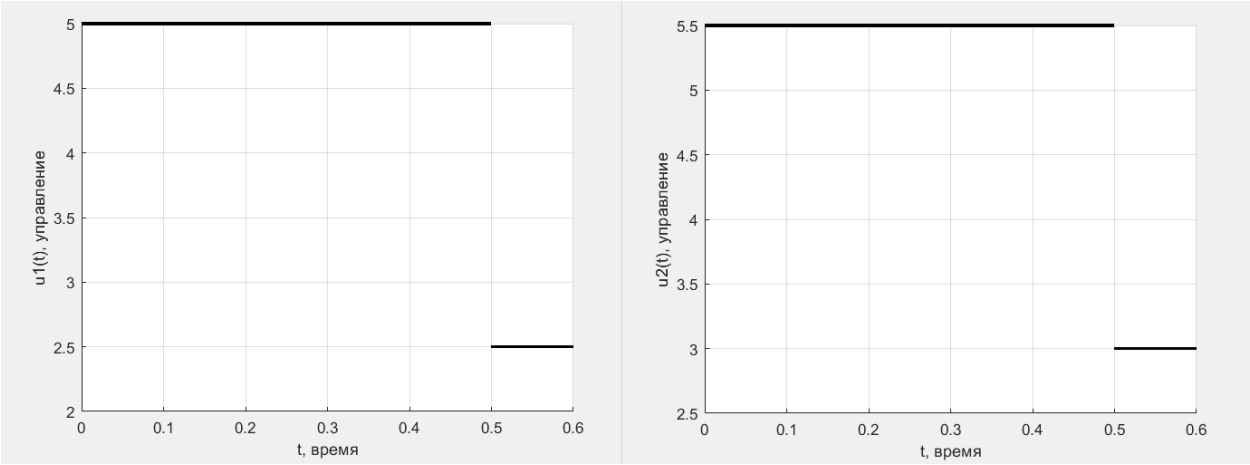

Рис. 1. Оптимальные темпы поставок двух продуктов

Это оптимальные скорости поставок двух продуктов за время T, которые минимизируют заданный функционал качества.

На рис. 2 показаны соответствующие этим темпам поставок уровни запасов продуктов.

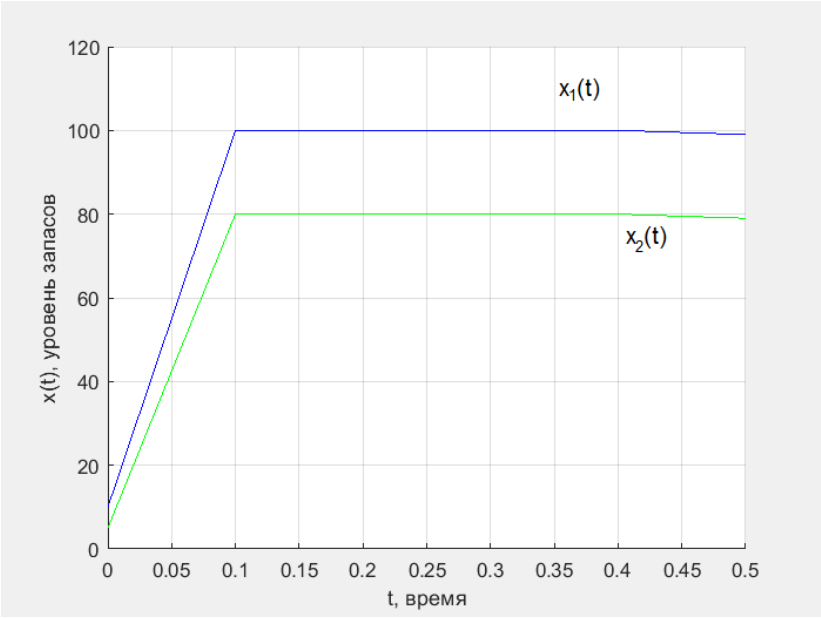

Рис. 2. Уровень запасов первого и второго продукта

Оба графика резко увеличиваются при включении первой компоненты вектора управления на первом временном промежутке, что говорит об увеличении объема товаров до желаемого уровня их выпуска. Далее уровни запасов остаются неизменными до времени $t = 0{,}4$, после чего производитель учитывает тот факт, что спрос на оба продукта уменьшится и

поэтому уровень выпуска товаров также должен снизиться при дальнейших вычисленных темпах поставок продукции.

2.2 Задача о субсидировании производителей эко-продукции

Следуя работе [5], рассматривается рынок из двух фирм, где одна фирма производит экологически чистые продукты, а вторая обычные. Эти два типа продукта нужны потребителю, чтобы удовлетворять одним и тем же потребностям. Уровень спроса на них зависит не только от цен, но и от увеличения потребительской осведомленности об эко-продуктах. Правительство использует политику субсидирования, чтобы внедрить эко-продукты.

Пусть индекс $i = 1$ обозначает эко-продукты, а $i = 2$ обычные продукты. Тогда спрос на каждый тип продуктов в момент времени t соответственно равен:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha_1 - \beta_1(t)[(\eta_1 - x_1(t)) - s(t)] + \gamma_1[\eta_2 - x_2(t)] \\ \dot{x}_2(t) = \alpha_2 - \beta_2(t)[\eta_2 - x_2(t)] + \gamma_2\big[\big(\eta_1 - x_1(t)\big) - s(t)\big] \end{cases} \tag{17}$$

где присутствуют следующие обозначения:

$x_i(t)$ – совокупный объем продаж i-ого типа продукции на рынке с момента времени от 0 до t;

$s(t)$ – размер субсидий, приходящихся на единицу эко-продукта в момент t;

α_i, γ_i, η_i – положительные коэффициенты, γ_i коэффициент взаимозаменяемости продуктов, а η_i характеризует цену продукта i;

$\beta_i(t)$ – коэффициент, показывающий экологическую осведомленность потребителей.

Экологическая осведомленность потребителей означает, что покупатель имеет достаточно знаний об экологически чистом продукте, чтобы выбирать и использовать его, а также предлагать и рекомендовать его другим. Эта характеристика важна в модели, т. к. она влияет на сам процесс внедрения эко-продуктов на рынок. Чем больше людей осведомлены об эко-продукте, тем больше его будут покупать. Поскольку экологическая осведомленность постоянно растет, потребители более охотно покупают экологически чистые продукты, даже если им приходится платить больше. Таким образом, ценовая эластичность продуктов больше не является неизменной и кроме того: $\frac{\partial \beta_1(t)}{\partial t} < 0$, $\frac{\partial \beta_2(t)}{\partial t} > 0$. Также предполагается, что $\beta_1(t)\,\beta_2(t) - \gamma_1\gamma_2 > 0$, чтобы цены и продажи двух типов продуктов оставались положительными.

Пусть у правительства есть цель увеличить объем продаж экологически чистых продуктов, при этом уменьшить потребление обычных продуктов на рынке. Предполагается, что правительство учитывает полученную в дискретные моменты времени информацию о проданных товарах и об экологической осведомленности потребителей при определении дальнейшей стратегии субсидирования. Целью правительства также является минимизация общих социальных издержек, тогда функционалом качества в исследуемой задаче будет $\min_{s(t)} J = q_1 x_1(T) + q_2 x_2(T)$, где $q_1 < q_2$ и соответственно относятся к социальным издержкам, связанным с потреблением энергии и воздействием на окружающую среду единицы эко-продукта и обычного продукта. Таким образом эта задача является задачей поиска оптимального позиционного управления.

2.2.1 Сведение задачи к задаче линейного программирования

Рассмотрим систему (17) и предположим, что $\beta_i(t) = \beta_i$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha_1 - \beta_1[(\eta_1 - x_1(t)) - s(t)] + \gamma_1[\eta_2 - x_2(t)] \\ \dot{x}_2(t) = \alpha_2 - \beta_2[\eta_2 - x_2(t)] + \gamma_2\big[\big(\eta_1 - x_1(t)\big) - s(t)\big] \end{cases} \tag{18}$$

Раскрыв скобки получим:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha_1 - \beta_1\eta_1 + \beta_1 x_1(t) + \beta_1 s(t) + \gamma_1\eta_2 - \gamma_1 x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \alpha_2 - \beta_2\eta_2 + \beta_2 x_2(t) + \gamma_2\eta_1 - \gamma_2 x_1(t) - \gamma_2 s(t) \end{cases}$$

или в матричном виде:

$$\dot{x} = Ax + Bs + K, \tag{19}$$

где $A = \begin{pmatrix} \beta_1 & -\gamma_1 \\ -\gamma_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ -\gamma_2 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \beta_1\eta_1 + \gamma_1\eta_2 \\ \alpha_2 - \beta_2\eta_2 + \gamma_2\eta_1 \end{pmatrix}$.

Функционалом качества в данной задаче является минимизация общих издержек правительства или $Cx(T) \to max$, где $C = (-q_1 \quad -q_2)$, при заданных ограничениях $Hx(T) = g$.

Таким образом исходная задача с системой (19), с целевой функцией $Cx(T) \to max$ и заданными ограничениями может быть сведена к задаче линейного программирования и решена с помощью построения позиционного управления. Позиционное управление строится с помощью адаптивного метода, где на каждом шаге меняется экологическая осведомленность покупателей $\beta_1^1 > \cdots > \beta_1^k$ и $\beta_2^1 < \cdots < \beta_2^k$ и учитывается отклонение K, то есть решается вспомогательная задача, как показано в Главе 1 параграф 1.4.

2.2.2 Пример

Зададим следующие начальные данные и такие параметры модели, чтоб были выполнены все сделанные ранее предположения:

$x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$ – совокупный объем продаж каждого продукта в начальный момент;

$\gamma_1 = 0{,}6$; $\gamma_2 = 0{,}5$; $\alpha_1 = 20$; $\alpha_2 = 18$; $\eta_1 = 39$; $\eta_2 = 25$ – коэффициенты модели;

$T = 4$ – рассматриваемый промежуток времени в годах, $N = 8$, тогда шаг будет $h = \frac{T}{N} = \frac{4}{8}$ и время будет меняться $t = kh = 0{,}5k$, $k = \overline{0;7}$;

$\beta_1(t) = e^{-0{,}01t}$, $\beta_2(t) = e^{0{,}01t}$ – правило, по которому на каждом шаге будет меняться экологическая осведомленность;

$l^* = 1{,}5$; $l_* = 0$ – верхняя и нижняя граница искомого вектора управлений;

$C = (-1 \quad -3{,}5)$, $H = (1 \quad 1)$, $g = 0{,}9$ – параметры для функционала и ограничений.

С помощью прикладных программ, прописанных в среде Matlab, рассматриваемая задача сводится к задаче ЛП и решается с помощью процесса построения позиционного управления, который основан на адаптивном методе.

На рис. 3 изображен полученный вектор управлений: $s(t) = (0 \quad 1{,}5 \quad 1{,}5 \quad 1{,}5 \quad 1{,}5 \quad 1{,}5 \quad 0 \quad 0)^T$.

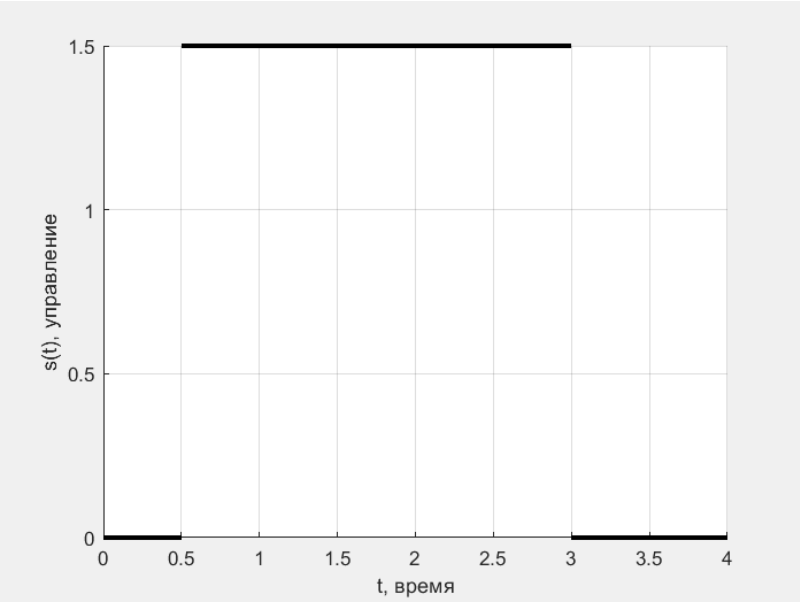

Рис. 3. Оптимальные размеры субсидий $s(t)$

Это оптимальные размеры субсидий на единицу экологически чистого продукта, которые нужно выплатить государству в определенные моменты времени производителям эко-продуктов для того, чтобы поддержать их производство и конкурентоспособность на рынке и при этом государство будет минимизировать общие социальные издержки.

На рис. 4 показаны изменения совокупных объёмов продаж каждого продукта.

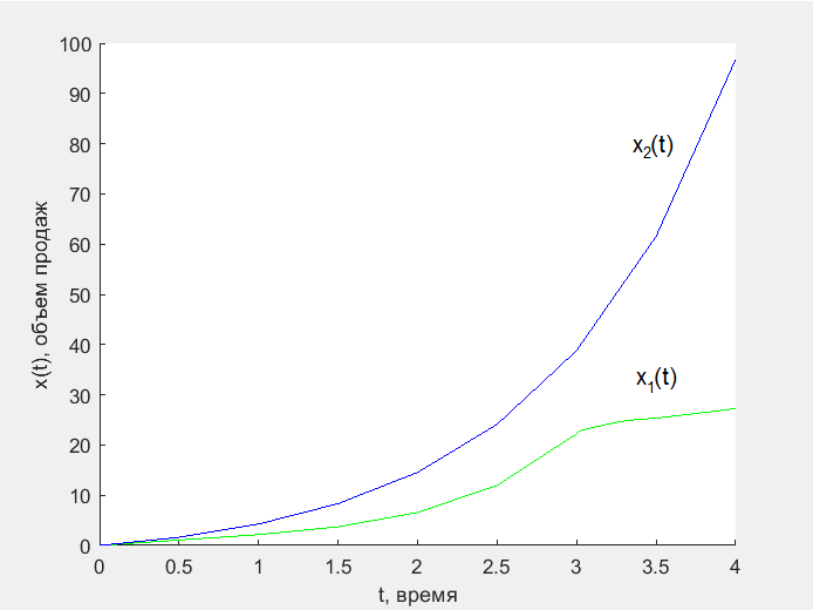

Рис. 4. Графики объемов продаж эко-продукции $x_1(t)$ и обычных продуктов $x_2(t)$

Продажи эко-продуктов в реальности не захватят весь рынок и не будут даже сопоставимы с объемами продаж крупных заводов, так как им попросту не справиться с большими выпусками, и они не смогут конкурировать в цене все время. Поэтому производители экологически чистых продуктов, стремятся выйти на рынок и занять определенную долю рынка, чтобы у них появились свои потребители, которые несмотря на последующее увеличение цен (когда не будет субсидирования) покупали бы их продукцию.

Заключение

В данной работе были достигнуты следующие результаты:

- ✓ Изучен адаптивный метод, с помощью которого решаются задачи оптимального управления;
- ✓ Изучен метод построения позиционного управления.
- ✓ Рассмотрены две экономические задачи: первая – задача об управлении запасами двух продуктов и вторая – задача о поиске оптимальной политики субсидирования;
- ✓ Для первой задачи были установлены оптимальные темпы производства двух продуктов с целью минимизировать их хранение на складе;
- ✓ Для второй задачи были найдены оптимальные размеры субсидий государства, целью которого является внедрение экологически чистых продуктов на рынке и минимизация общих социальных издержек;
- ✓ Был создан комплекс программ в среде Matlab, реализующий метод построения позиционного управления и адаптивный метод, результаты его работы продемонстрированы на численных примерах для двух рассмотренных задач.

Программная реализация

1. Задача об управлении запасами двух продуктов
    - Построение оптимального позиционного управления с учетом поступающей информации и выведение результатов на графики

```
clc
clear all;
%начальные данные
x0=[10;5];
t=0;
T=0.6;
N=6;
%параметры для функционала и ограничений
C=[-1 -5];
H=[1 1];
g=0.6;
%пустые массивы для хранения данных чтобы нарисовать графики
vv=[];
zz01=[];
zz02=[];
tt01=[];
xx1r=[];
xx2r=[];
%ожидаемый уровень спроса
x1r=100;
x2r=80;
%постоянные поставки
u1r=2.5;
u2r=3;
%начальная точка со сдвигом
z0=[x0(1)-x1r; x0(2)-x2r];

for k=0:N-1

%заполнение пустых массивов нужными данными
zz01=[zz01 z0(1)];
zz02=[zz02 z0(2)];
tt01=[tt01 t];
xx1r=[xx1r x1r];
xx2r=[xx2r x2r];

%приведение задачи к задаче ЛП
[ G,D,g0,l1,l2,h,A,B]=privedenije_sistemq_1(z0,N,T,C,H,g,x1r,x2r);
%применение адаптивного метода
v=adapt_method(D,g0,G',l1,l2);

%построение позиционного управления
vv=[vv v(k+1)];

%вычисление новой начальной точки
t=(k+1)*h
syms q
 S1=exp(A*(t-q))*B*v(k+1);
 S2=exp(A*(t-q))*(B*v(k+1)+2*cos(q));
 z0=-int(S1,0,t)+int(S2,0,t);
```

```
%начиная с времени t=0.4 получаем информацию, что ожидаемый спрос уменьшается
на 1
if kk>=4
x1r=x1r-1
x2r=x2r-1
end
end

zz01=[zz01 z0(1)];
zz02=[zz02 z0(2)];
tt01=[tt01 t];
xx1r=[xx1r x1r];
xx2r=[xx2r x2r];

%построение графика управления u1
figure
grid on
xlabel('t, время');
ylabel('u1(t), управление');
k=1;
  for i=0:h:T
qx=linspace(i,i+h,150);
for j=1:150
    tr(j)=vv(k)+u1r;
end
hold on
plot(qx,tr,'k','LineWidth' ,2);
k=k+1;
  end

%построение графика управления u2
figure
grid on
xlabel('t, время');
ylabel('u2(t), управление');
k=1;
  for i=0:h:T
qx=linspace(i,i+h,150);
for j=1:150
    tr(j)=vv(k)+u2r;
end
hold on
plot(qx,tr,'k','LineWidth' ,2);
k=k+1;
  end

%построение графиков уровней запасов
figure
grid on
xlabel('t, время');
ylabel('x(t), уровень запасов');
hold on
plot(tt01,zz01+xx1r,'g',tt01,zz02+xx2r,'b');
```

- Функция сведения к задаче ЛП

```
function [ G,D,g0,l,h,A,B]=privedenije_sistemq_1(z0,N,T,C,H,g,x1r,x2r)

%параметры модели
d1=10;
d2=20;
```

```
a12=2.5;
a21=3.5;
O1=0.1;
O2=0.15;
O11=0.01;
O22=0.01;

%коэффициенты для матрицы A
a=-d1-O1-2*a12*x2r-4*O11*x1r;
b=-2*a12*x1r;
c=-2*a21*x2r;
d=-d2-O2-2*a21*x1r-4*O22*x2r;
A=[a b; c d];
B=[1 ; 1];

h=T/N; %шаг
d=[];
c=[];
g0=g-H*exp(A*T)*z0; %значение g0 по формуле

%вычисление интегралов
    for i=0:(N-1)

    syms t, cc=int( C*exp(A*(T-t))*B  ,  (i)*h, (i+1)*h) ;
      c=[c;cc];
    end


    for i=0:(N-1)

    syms t,  dd=int( H*exp(A*(T-t))*B  ,  (i)*h, (i+1)*h) ;
      d=[d dd];
    end

  G = c;
  D = d;
%границы вектора управления
for i=1:N
    l1(i)=2.5;
    l2(i)=-2.5;
end
end
```

2. Задача о поиске оптимальных субсидий

   - Построение оптимального позиционного управления с учетом поступающей информации и выведение результатов на графики

```
clear all;
clc;
%начальные дынные
x0=[0;0];
t=0;
T=4;
N=8;
%параметры для функционала и ограничений
C=[-1 -3.5];
```

```
H=[1 1];
g=0.9;
%массивы для хранения данных чтобы нарисовать графики
vv=[];
xx01=[];
xx02=[];
tt01=[];

for k=0:N-1
%изменение экологической осведомленности по правилу экспоненты
a=double(exp(-0.01*t));
b=double(exp(0.01*t));
%вектор K, содержащий коэффициенты модели
K=[20+0.6*39-39*a;18+0.5*25-25*b];

%заполнение массивов данными
xx01=[xx01 x0(1)];
xx02=[xx02 x0(2)];
tt01=[tt01 t];

%сведение задачи к задаче ЛП
[G,D,g0,l1,l2,A,B,h] = privedenije_sistemq_2(x0,N,a,b,C,H,g);

%применение адаптивного метода
v=adapt_method(D,g0,G',l1,l2);

%построение позиционного управления
vv=[vv v(k+1)]

%вычисление новой начальной точки для цикла
t=(k+1)*h;
syms q
 S1=exp(A*(t-q))*B*v(k+1);
 S2=exp(A*(t-q))*(B*v(k+1)+K);
 x0=double(-int(S1,0,t)+int(S2,0,t));
end
xx01=[xx01 x0(1)];
xx02=[xx02 x0(2)];
tt01=[tt01 t];
%построение графика управления
figure
grid on
xlabel('t, время');
ylabel('s(t), управление');
k=1;
  for i=0:h:T
qx=linspace(i,i+h,150);
for j=1:150
    tr(j)=vv(k);
end
hold on
plot(qx,tr,'k','LineWidth' ,2);
k=k+1;
  end
%построение графиков объемов продаж
 figure
xlabel('t, время');
ylabel('x(t), объем продаж');
hold on
 plot(tt01,xx01,'g',tt01,xx02,'b');
```

- Функция сведения к задаче ЛП

```
function [G,D,g0,l1,l2,A,B,h]= privedenije_sistemq_2(x0,N,a,b,C,H,g)
%пересчет матрицы A и B с учетом изменения экологической осведомленности
A=[a -0.6; -0.5 b];
B=[a ;-0.5];
h=T/N; %шаг
g0=g-H*exp(A*T)*x0;
c=[];
d=[];

%вычисление интегралов
    for i=0:(N-1)

    syms t, cc=int( C*exp(A*(T-t))*B  ,  (i)*h, (i+1)*h) ;
      c=[c;cc];
    end


    for i=0:(N-1)

    syms t,  dd=int( H*exp(A*(T-t))*B  ,  (i)*h, (i+1)*h) ;
      d=[d dd];
    end

  G= double(c);
  D= double(d);

for i=1:N
    l1(i)=1.5;
    l2(i)=0;
end
end
```

Список литературы

1. Juliana Keiko Sagawaa, Marcelo Seido Nagano. Modeling the dynamics of a multi-product manufacturing system: A real case application // European Journal of Operational Research. 2015. Vol. 244. Iss. 2. P. 624–636.

2. Huthaifa AL-Khazraji, Colin Cole, William Guo. Dynamics analysis of a production-inventory control system with two pipelines feedback // Kybernetes. 2017. Vol. 46. Iss. 10. P. 1632–1653.

3. Bacel Maddah, Ebru K. Bish. Joint Pricing, Assortment, and Inventory Decisions for a Retailer's Product Line // Wiley Periodicals, Inc. Naval Research Logistics. 2007. Vol. 54. P. 315–330.

4. Ahmad M. Alshamrani. Adaptive Control of a Two-Item Inventory Model with Unknown Demand Rate Coefficients // Hindawi Publishing Corporation Journal of Applied Mathematics. Vol. 2012. Article ID 810635, 16 p.

5. Hongguang Peng. Optimal subsidy policy for accelerating the diffusion of green products // Journal of Industrial Engineering and Management JIEM. 2013. No 6(2). P. 626–641.

6. Альсевич В.В., Габасов Р., Глушенков В.С. Оптимизация линейных экономических моделей. Минск: Изд-во БГУ, 2000. 210 с.

7. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Поясок Е. И. Оптимальное управление в режиме реального времени // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. 2009. Т. 2. № 1. С. 132–169.

8. Габасов Р., Дмитрук Н.М., Кириллова Ф.М. Численные методы оптимизации и нестационарных многомерных систем с полиэдральными ограничениями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2005. Т. 45. № 4. С. 617–636.

9. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 408 с.

10. Габасов Р., Кириллова Ф.М, Хомицкая Т.Г. Программное и позиционное решения терминальной линейно выпуклой задачи оптимального управления // Изв. вузов. Матем. 2004. № 12. С. 3–16.

11. Зубов В.И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 495 с.

12. Балашевич Н.В., Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М. Численные методы программной и позиционной оптимизации линейных систем управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2000. Т. 40. № 6. С. 838–859.