Санкт-Петербургский Государственный Университет

**Факультет Прикладной Математики – Процессов Управления**

**Кафедра компьютерного моделирования и многопроцессорных систем**

**Абрамян Эдуард Робертович**

**Дипломная работа**

**Численное интегрирование уравнений Пенлеве степенными рядами**

Направление 02.03.02

«Фундаментальная информатика и информационные технологии»

Заведующий кафедрой,
доктор физ.-мат. наук,
профессор Андрианов С.Н.

Научный руководитель,
доктор физ.-мат. наук,
профессор Андрианов С.Н.

Рецензент,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент Аббасов М.Э

Санкт-Петербург

2019

Оглавление



**Введение**

1. **Сведение дифференциальных уравнений к полиномиальной форме**
	1. Метод сведения дифференциальных уравнений к полиномиальной форме

 введением дополнительных переменных

1.2 Три примера сведения.

**2. Уравнения Пенлеве**

2.1 Шесть уравнений Пенлеве

 2.2 Сведение уравнений Пенлеве к полиномиальной форме

**3. Вычисление коэффициентов Тейлора для полиномиальных ОДУ**

3.1 Схемы для вычисления коэффициентов Тейлора

 3.2 Применение к уравнениям Пенлеве

**4. Априорная оценка погрешности, выбор шага и степени Тейлоровского**

 **приближения**

 4.1 Теорема об оценке

 4.2 Алгоритм выбора шага и степени Тейлоровского приближения

 4.3 Применение к уравнениям Пенлеве

**5. Программа TSMR**

**6. Численные эксперименты**

**Заключение**

**Литература**

**Введение**

*При написании настоящего раздела, мы использовали вводную статью из раздела 32 источника NIST [18] и статью Питера Кларксона [9].*

Уравнения Пенлеве рассматриваются как “нелинейные специальные функции”, являющиеся нелинейными аналогами классических специальных функций и составляют ядро “современной теории специальных функций”. В статье Ивасаки и т.д. [13] рассмотрены уравнения Пенлеве как “важнейшие нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения” и утверждают, что “многие специалисты считают, что в течении XXI веке функции Пенлеве станут новыми членами сообщества специальных функций”. Впоследствии это случилось, так как уравнения Пенлеве являются главой в цифровой библиотеке математический функций [9]. Функции Пенлеве значительно расширили роль, классических специальных функций, таких как Эйри, Бессель, Эрмит, Лежандр и гипергеометрические функции, которые были изобретены в 19 веке. Все чаще и чаще обнаруживается, что решения широкого спектра научных проблем, от теории рассеяния нейтронов, специальных решений уравнений в частных производных, таких как нелинейные волновые уравнения, волоконная оптика, транспортные проблемы, комбинаторика, случайные матрицы, квантовая гравитация и теория чисел, могут быть выражены через уравнения Пенлеве.

Важным вопросом по теме уравнений Пенлеве считают [9] разработку современных высокоточных численных методов решения этих уравнений и проведение соответствующих численных экспериментов – как в комплексной, так и в вещественной области и, особенно, в окрестности особых точек (полюсов). Одним из наиболее высокоточных методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений как в комплексной, так и в вещественной областях являются методы рядов Тейлора высоких порядков. Настоящая работа посвящена численным экспериментам с уравнениями Пенлеве в полиномиальной форме в вещественной области.

В главе 1 рассматривается шесть уравнений Пенлеве и проблема вычисления коэффициентов Тейлора их решения, а также априорная оценка погрешности и основанный на ней выбор шага и степени приближения Тейлора.

**Глава 1. Сведение дифференциальных уравнений к полиномиальной форме**

**1.1 Метод сведения дифференциальных уравнений к полиномиальной форме введением дополнительных переменных**

Результаты, представленные в данной главе, взяты из [1, 3].

Формулировка метода дополнительных переменных. Этот метод позволяет сводить систему вида



 к полиномиальной. Он заключается в том, что находят такой набор дополнительных переменных – функций  который удовлетворяет условиям:

(а) правые части уравнений (1) – полиномы по 

(b) все производные  дополнительных переменных  в силу уравнений (1), также полиномы 

Метод Пуанкаре. Он был предложен для автономных ОДУ вида



 и состоит в том, что находят такую одну дополнительную переменную

 и полином  которые удовлетворяют условиям:

() правые части уравнений (2) – полиномы переменных 

( ) равенство  выполняется тождественно.

Тогда, если ввести новое “время” по формуле  то переменные  удовлетворяют некоторой полиномиальной системе ОДУ. Отметим, что метод Пуанкаре не является частным случаем МДП.

Обобщенный метод. Используя идею метода Пуанкаре, можно получить обобщение МДП и метода Пуанкаре, которое заключается в том, что находят такие дополнительные переменные – функции



и полиномы



выполняются тождественно, и



Тогда, если ввести новое “время” по формуле то переменная  удовлетворяют некоторой полиномиальной системе.

Ясно, что МДП и метод Пуанкаре = частные случаи этого обобщенного метода: к МДП он сводится при , а к методу Пуанкаре­ – при 

Вместе с тем, если выполнены условия  то введя еще одну дополнительную переменную , можно заметить, что относительно переменных выполнены свойства (a), (b). Это означает, что если к уравнениям (1) применим обобщенный метод дополнительных переменных, то применим и МДП, рассмотрением которого (как более простого и требующего введения нового “времени”) естественно и ограничиться.

**1.2 Три примера сведения.**

Приведены три модельных примера уравнений различных классов  (а именно, классов ) в которых используются и полные системы уравнений в частных производных, что, как легко заметит читатель, существенно расширяет возможности МДП для случая ОДУ и иллюстрирует его применимость к полным системам уравнений в частных производных.

**Пример 1. Задача Коши для ОДУ.**

Рассмотрим скалярную задач Коши.



где a, b – вещественные параметры. Права часть уравнения (3) принадлежит классу функций , поэтому, в соответствии с (4), введем дополнительные переменные



И подробно распишем получение их полных производных по t в силу этого уравнения:





Теперь можем переписать (13), (14) в форме полиномиальной задачи Коши:



**Пример 2. Задачи Коши для системы ОДУ.**

Рассмотрим задачу Коши

****

где  - алгебраические полиномы. Правые части уравнений (15) принадлежал классу функций  поэтому, в соответствии с (11), введем дополнительные переменные



и получим их полные производные по t в силу этих уравнений:



Перепишем, (5), (6) в искомой форме полиномиальной задачи Коши:

**Пример 3. Задачи Коши для полной системы.** Рассмотрим задачу Коши

****

где  есть алгебраические полиномы. Правые части уравнений (7) принадлежат классу функций  поэтому, в соответствии с (1), введем дополнительные переменные



и получим их производные по  в силу этих уравнений:



Итак, получим следующую полиномиальную задачу Коши:



**Глава 2. Уравнения Пенлеве**

В данной работе обсуждаются некоторые открытые задачи для уравнений Пенлеве. В частности, описываются следующие открытые задачи: сведение к полиномиальной форме уравнений Пенлеве и численное решение уравнений Пенлеве.

**2.1 Шесть уравнений Пенлеве**

Шесть уравнений Пенлеве  :

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |
|  | (2) |
|  | (3) |
|  | (4) |
|  | (5) |
|  | (6) |
| Начальные данные:  | (7) |

где  - произвольные постоянные. Решения  называют трансцендентами Пенлеве (*Painlevé transcendents*).

**2.2. Сведение уравнений Пенлеве к полиномиальной форме**

В представленном разделе, сводим уравнения Пенлеве к полиномиальной форме, т.е. к дифференциальным уравнениям с полиномиальными правыми частями (полиномы от переменных).

Рассмотрим следующие обозначения, которые будем использовать в дальнейшем:

 - -е уравнение Пенлеве;

- начальные данные (Initial Conditions) для -ого уравнения Пенлеве;

- -е уравнение Пенлеве в полиномиальной форме;

- начальные данные для -ого уравнения Пенлеве в полиномиальной форме;

1. , :

, .

Произведем замену переменных:, приходим к

,

.

1. , :

, .

Произведем замену переменных:, приходим к

,

.

1. , :

, .

Произведем замену переменных:, приходим к



.

1. , :

, .

Произведем замену переменных:, приходим к



.

1. , :

,

.

Произведем замену переменных:

,

приходим к





1. , :





Произведем замену переменных:





приходим к





**3. Вычисление коэффициентов Тейлора для полиномиальных**

**3.1 Схемы для вычисления коэффициентов Тейлора**

Набор  считаем упорядоченными так, что

 

Если любой моном , в  равен  при  то вводят в рассмотрению схему  из  пар натуральных чисел  и , таких, что  для любого  Используя схемы можно решить задачу последовательного вычисления всех мономов  набора  в предложении, что известны первые  его мономов  . Каждый подобный набор мономов можно дополнить новыми мономами так, чтобы он имел схему. Дополненный набор называют оболочкой для исходного набора.

Используя схему



для набора всех различных нелинейных мономов в правых частях уравнений  ,

где  а  все различные нелинейные мономы в правых частях уравнений

,

где



Для быстрого вычисления коэффициентов Тейлора  из решения  можно вывести следующие рекуррентные формулы:

 

**3.2 Применение к уравнениям**

Рассмотрим следующие обозначения, которые будем использовать в этом разделе:

*j*-е уравнение Пенлеве в полиномиальной форме;

 упорядоченный набор мономов стоящих в правой части *j*-ого уравнения Пенлеве в полиномиальной форме;

оболочка для набора мономов ;

схема для *j*-ого уравнения Пенлеве.

*Рассмотрим первое уравнение Пенлеве*

 , .

*Рассмотрим второе уравнение Пенлеве*

 , .

*Рассмотрим третье уравнение Пенлеве*



,

добавим два монома , получим оболочку:

,



*Рассмотрим четвертое уравнение Пенлеве*



,

 добавим три монома , получим оболочку:

,



*Рассмотрим пятое уравнение Пенлеве*







добавим два монома , получим оболочку:









*Рассмотрим шестое уравнение Пенлеве*









добавим десять монома

,

получим оболочку:















**Глава 4. Априорная оценка погрешности, выбор шага и степени приближения Тейлора**

**4.1 Теорема об оценке погрешности метода**





 Пусть будет решением (1) и





Например, if  тогда:



**Теорема об оценке погрешности метода**

Если  тогда:

 Решение  проблемы (1) является голоморфной для 
где

 

Используя выбор  можно уменьшить . Это улучшит оценки, приведенные в теореме. В работе [4] было показано, что теорема является мощным инструментом для численного интегрирования ОДУ. Минимаксная задача, которая позволяет найти оптимальные значения  это:

**Дано:** 

и  for 

**Минимизировать:** 



**При условии** 

* 1. **Алгоритм выбора шага и степени Тейлоровского приближения**

В данной работе рассматривается полиномиальная задача Коши в форме. Ее решение обозначим

    

где  и  - операторы, которые решению  сопоставляют полином Тейлора  и остаточный член  соответственно. Радиус сходимости ряда Тейлора  обозначим . Метод рядов Тейлора решения задачи Коши заключается в построении таблицы приближенных значений  по формулам



где  натуральные числа,  а  удовлетворят неравенствам  Вычисление каждого значения  называют шагом метода, а число  - величина этого шага. В общем случае интегрирования вдоль кривой на комплексной плоскости  вещественны. Для вычисления  при некотором заданном  с высокой точностью по формулам (1), даже для t из круга сходимости



число шагов  может оказаться большим, что может стать причиной ускоренного накопления ошибок округления и увеличения времени счета. Потому на каждом шаге целесообразно использовать по возможности больший шаг. Этого можно добиться, если иметь в своем распоряжении априорные гарантированные оценки величин  и  при .

* 1. **Применение к уравнениям Пенлеве**

Применим приведенную выше теорему к шести уравнениям Пенлеве:

-е уравнение Пенлеве в полиномиальной форме,

 -е уравнение Пенлеве в нормализованной полиномиальной форме,

 соответствующая задача минимакс





 









  







 

 



 









 

 











 

 





 











 























Прежде чем решать проблемы , естественно нужно разобраться с их структурой и начать с самых сложных из них. Поскольку все  в задачеявляются полиномами с параметрами  с положительными коэффициентами, решение этой задачи достигается с помощью  и следовательно, сводится к задаче:









Точно так же, упрощаются и задачи , and :









 



Как мы можем увидеть, оставшиеся две задачи  не упрощаются таким же образом.

**5. Программа TSMR**

Описанная ниже программа взята из [2].

В данной главе описана программа, реализованная на языке Fortran, которая численно интегрирует системы дифференциальных уравнений в полиномиальной форме.

Опишем структуру данной программы. Программа состоит из: главная программа, подпрограмма чтения конфигурационного файла, подпрограмма интегрирования на промежутке, подпрограмма вычисления коэффициентов Тейлора, подпрограмма вычисления полиномов Тейлора, функция вычисления шага по априорному алгоритму, функция вычисления шага стандартной коррекцией, функция вычисления шага итеративной коррекцией, функция автоматического выбора шага, функция вычисления, подпрограмма чтения файлов с данными, функция вычисления степени правой части, функция вычисления  и , процедура замера времени расчета коэффициентов, функция вычисления , процедура вычисления оптимального порядка.

Главная программа:

1. Считывает имя конфигурационного файла из командной строки.

2. Считывает данные из конфигурационного файла.

3. Запускает интегрирование на промежутке.

Подпрограмма чтения конфигурационного файла.

Аргументы: *cfg* - имя конф. файла *ipar*: 1 – размерность, 2 – число мономов, 3 – число ненулевых коэффициентов, 4 – число точек вывода; *rpar* – требуемая погрешность: 1 - относительная, 2 - абсолютная; *ln* – линейность; *fpar* - файлы: 1 –с начальными данными, 2 – со схемой, 3 – файл с коэффициентами, 4 - с таблицей, 5 – для записи результатов, 6 – с точками вывода. Возвращает: *ipar*, *rpar*, *ln*, *fpar*.

Подпрограмма интегрирования на промежутке.

Аргументы: *n* - размерность; *u* - число мономов; *na* - число ненулевых коэффициентов; *np* - число точек для выдачи решения; *ln* - линейность; *rtol* - требуемая относительная погрешность; *atol* - требуемая абсолютная погрешность; *fpar* - файлы: 1 – с начальными данными, 2 – со схемой, 3 – файл с коэффициентами, 4 - с таблицей, 5 – для записи результатов, 6 – с точками вывода. Возвращает: значение *x*.

Подпрограмма вычисления коэффициентов Тейлора.

Аргументы: *x* - массив коэффициентов Тейлора; *tx* - массив значений решения в точке; *pl*, *pu* - нижний и верхний порядок. Возвращает: значение *x*. Глобальные переменные*: n, u, na, sch, a, ia, ja, pmax*.

Подпрограмма вычисления полиномов Тейлора.

Аргументы: *tx* - массив значений решения в точке; *x* - массив коэффициентов Тейлора; *h* - длина шага; *pl*, *pu* – нижний и верхний порядок. Возвращает: *tx*. Глобальные переменные: *n*, *u*, *pmax*.

Функция вычисления шага по априорному алгоритму.

Аргументы: *tx* - массив значений решения в точке; *alp* - ; *pwork* - порядок. Глобальные переменные: *n*.

Функция вычисления шага стандартной коррекцией.

Аргументы: *tx* - массив значений решения в точке; *x* - массив коэффициентов Тейлора;  - приближение к шагу; *rx*, *tx* - вспомогательные массивы; *pwork* - порядок. Глобальные переменные: *n*, *pmax*, *atol*, *rtol*.

Функция вычисления шага итеративной коррекцией.

Аргументы: *tx* - массив значений решения в точке; x - массив коэффициентов Тейлора; - приближение к шагу; *rx, tx* - вспомогательные массивы; *pwork* - порядок. Глобальные переменные: *n, pmax, atol, rtol.*

Функция автоматического выбора шага.

Аргументы: *h* - приближение к шагу; *tx* - массив значений решения в точке;
*x* - массив коэффициентов Тейлора; *rx, tx* - вспомогательные массивы; *alp* -
; *pwork* - порядок; *dir* - направление. Глобальные переменные: *n, u.*

Функция вычисления  по 

Аргументы: *alp* - . Глобальные переменные: *n, u, na, ut, aa, ia, ja, rdeg*.

Подпрограмма чтения файлов с данными.

 Аргументы: *tx* - значение решения в точке; *fpar* - файлы: 1 – с начальными данными, 2 – со схемой, 3 – файл с коэффициентами, 4 - с таблицей, 5 – для записи результатов, 6 – с точками вывода. Возвращает: *tx, sch, a, ia, ja, rdeg, ox* Глобальные переменные: *n, u, na, sch, ox, np, a, ia, ja, rdeg.*

Функция вычисления степени правой части. Глобальные переменные: *n, u, sch*.

Функция вычисления  и .

Аргументы: *alp* - ; *tx* - массив значений решения в точке; *r* - оценка радиуса сходимости; *pwork* - текущий порядок метода. Глобальные переменные: *n, atol, rtol, vtb, vtn, pmin, pmax.*

Процедура замера времени расчета коэффициентов Аргументы: *x* - массив коэффициентов Тейлора; *tx* - массив значений решения в точке. Возвращает: *time*. Глобальные переменные: *n, u, pmax, time*.

Функция вычисления . Аргументы: *alp* - ; *tx* - массив значений решения в точке; *rpar, ipar* - вспомогательные массивы. Глобальные переменные: *n*.

Процедура вычисления оптимального порядка.

Аргументы: *x* - массив коэффициентов Тейлора; *tx* - массив значений решения в точке. Возвращает: *pwork, h.* Глобальные переменные: *n, u, pmax, time*.

**Глава 6. Численные эксперименты**

Шесть уравнений Пенлеве имею особенности типа полюс, поэтому целесообразно рассмотреть пример с такой же особенностью, что и в уравнениях Пенлеве. В разделе 6.1 представлена простейшая квадратичная задача с особенность типа полюс. В разделе 6.2 представлены расчёты третьего уравнения Пенлеве.

**6.1 Простейшая квадратичная задача.**

Результаты, представленные в данном разделе взяты из статьи [2]. Более описанный ниже эксперимент можно найти в самой статье.
Это задача Коши  решением является . Подобные задачи дают представление об эффективности численного интегрирования тем или иным методом в окрестности особых точек решения.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *ε* | Метод | SIMPLEST,  | SIMPLEST,  |
|  |  |  |  |
|   | DOP853 |   |   |   |   |
| ODEX |   |   |   |   |
| TIDES |   |   |   |   |
| TSMR |   |   |   |   |
| TSMR\_A |   |   |   |   |
|   | DOP853 |   |   |   |   |
| ODEX |   |   |   |   |
| TIDES |   |   |   |   |
| TSMR |   |   |   |   |
| TSMR\_A |   |   |   |   |
|   | DOP853 |   |   |   |   |
| ODEX |   |   |   |   |
| TIDES |   |   |   |   |
| TSMR |   |   |   |   |
| TSMR\_A |   |   |   |   |

**6.2 Численное интегрирование уравнений Пенлеве.**

Проведем численные расчёты используя программу TSMR и функцию NDSolve реализованную в Wolfram Mathematica. Прочерк означает, что произошла ошибка: “singularity or stiff system suspected”.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Метод |  |  |
| , |  |
| TSMR |  |  |  |
| NDSolve |  |  |
| TSMR |  |  |  |
| NDSolve |  |  |
| TSMR |  |  |  |
| NDSolve |  |  |

**Заключение**

В главе 1 был рассмотрен подход к построению полиномиальной системы [1, 3], и рассмотрены 3 примера сведения системы к полиномиальной форме. В главе 2 были рассмотрены шесть уравнений Пенлеве и сведены к полиномиальной форме, результаты представлены в пункте 2.1–. В главе 3 был рассмотрен алгоритм метода рядов Тейлора [4]. Были составлены: оболочки и схемы, необходимые для нахождения коэффициентов Тейлора для случая шести уравнений Пенлеве. В главе 4 рассмотрена теорема об оценке погрешности метода рядов Тейлора [4] и получены оценки для шести уравнений Пенлеве. В главе 5 кратко описано реализация метода рядов Тейлора, предложенная в статье [2]. В главе 6 предложены численные эксперименты для третьего уравнения Пенлеве. Таким образом, автором в настоящей ВКР получены следующие новые результаты:

1. Каждое из шести уравнений Пенлеве сведено к полиномиальной системе обыкновенных дифференциальных уравнений (Глава 2).

2. Для каждой из этих систем при помощи теоремы об оценке погрешности [4] получены априорные гарантированные оценки абсолютной и относительной погрешности решения задачи Коши.

3. Построены оболочки и схемы для каждой из этих систем, позволяющие применить рекуррентные соотношения для коэффициентов Тейлора, решения задачи Коши.

4. При помощи программы TSMR и на основе полученных схем и формул для коэффициентов Тейлора проведены численные эксперименты решения задачи Коши для простейшего квадратичного уравнения и системы полиномиальных уравнений для третьего уравнения Пенлеве. Полученные эксперименты показали преимущества примененного метода решения полиномиальной задачи Коши в окрестности особых точек.

**Список литературы**

1. Бабаджанянц Л.К., Брэгман К.М. [Алгоритм метода дополнительных переменных](http://www.apmath.spbu.ru/ru/staff/babadzhanyants/publ/publ32.pdf) // Вестник СПБГУ Серия 10. Вып. 2. 2012. 3 - 12.
2. Бабаджанянц Л.К., Большаков А.И. [Реализация метода рядов Тейлора для решения обыкновенных дифференциальных уравнений](http://www.apmath.spbu.ru/ru/staff/babadzhanyants/publ/publ33.pdf) // Вычислительные методы и программирование. Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М.В. Ломоносова, 2012. Т. 13. 497 - 510.
3. Бабаджанянц Л.К. [Метод дополнительных переменных](http://www.apmath.spbu.ru/ru/staff/babadzhanyants/publ/publ24.pdf) // Вестник СПБГУ Серия 10, 2010. 3 - 11.
4. Бабаджанянц Л.К. [Метод рядов Тейлора](http://www.apmath.spbu.ru/ru/staff/babadzhanyants/publ/publ28.pdf) // Вестник СПБГУ Серия 10, 2010. 13 - 29.
5. Кудряшов, Н.А. Соросовский образовательный журнал, №9 // Свойство Пенлеве в теории дифференциальных уравнений. Московский инженерно-физический институт, 1999.
6. Цегельник, В.В. Доклады БГУИР // О полиномиальных гамильтонианах, ассоциированных с первым уравнением Пенлеве. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь, 2005.
7. Цегельник, В.В. Доклады БГУИР // Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве-типа и некоторые их приложения. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники П. Бровки, 6, 220013. Минск, Беларусь, 2006. С. 1-7.
8. Abramov A.A., Yukhno L.F., Numerical solution of the Cauchy problem for Painlev´e III, Differ. Equ. 48 (2012), 909–918.
9. Abramov A.A., Yukhno L.F., Numerical solution of the Cauchy problem for the Painlev´e I and II equations, Comput. Math. Math. Phys. 52 (2012), 321–329.
10. Abramov A.A., Yukhno L.F., Numerical solution of the Painlev´e IV equation, Comput. Math. Math. Phys. 52 (2012), 1565–1573.
11. Abramov A.A., Yukhno L.F., A method for the numerical solution of the Painlev´e equations, Comput. Math. Math. Phys. 53 (2013), 540–563.
12. Abramov A.A., Yukhno L.F., Numerical solution of the Painlev´e V equation, Comput. Math. Math. Phys. 53 (2013), 44–56.
13. Abramov A.A., Yukhno L.F., Numerical solution of the Painlev´e VI equation, Comput. Math. Math. Phys. 53 (2013), 180–193.
14. Abramov A.A., Yukhno L.F., A method for calculating the Painlev´e transcendents, Appl. Numer. Math. 93 (2015), 262–269.
15. Sakai H., Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlev´e equations, Comm. Math. Phys. 220 (2001), 165–229.
16. Clarkson P. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications // Problems for Painlev´e Equations. School of Mathematics, Statistics and Actuarial Science, University of Kent, UK, 2019.
17. Fornberg B., Weideman J. Oxford Centre for Collaborative Applied Mathematics // A numerical methodology for the Painleve equations. Oxford Mathematical Institute, England, 2011.
18. 18. Ссылка на *NIST*: <https://dlmf.nist.gov/32.2>
19. [Olver F.W.J., Lozier D.W., Boisvert R.F., Clark C.W. (Editors), NIST handbook of mathematical functions, Cambridge University Press, Cambridge, 2010, available at](Olver%20F.W.J.%2C%20Lozier%20D.W.%2C%20Boisvert%20R.F.%2C%20Clark%20C.W.%20%28Editors%29%2C%20NIST%20handbook%20of%20mathematical%20functions%2C%20Cambridge%20University%20Press%2C%20Cambridge%2C%202010%2C%20available%20at%20)  <https://dlmf.nist.gov/>
20. Ohyama Y., Kawamuko H., Sakai H., Okamoto K., Studies on the Painlev´e equations. V. Third Painlev´e equations of special type PIII(D7) and PIII(D8), J. Math. Sci. Univ. Tokyo 13 (2006), 145–204
21. Iwasaki K., Kimura H., Shimomura S., Yoshida M., From Gauss to Painleve. A modern theory of special functions, Aspects of Mathematics, Vol. E16, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1991.
22. Painlev´e P., Sur les ´equations diff´erentielles du second ordre `a points critiques fix´es, C. R. Acad. Sci. Paris 127 (1898), 945–948.