

Санкт-Петербургский Государственный Университет  
Кафедра математической теории игр и статистических решений

Шагушина Анастасия Михайловна

Выпускная квалификационная работа бакалавра

# О структуре решений теоретико-игровой задачи управления объемами вредных выбросов

Направление 01.03.02

Прикладная математика, фундаментальная информатика и программирование

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н.,  
профессор

Громова Е. В.

Санкт-Петербург  
2019

# Оглавление

|   |           |
|---|-----------|
| Введение  | 3         |
| Постановка задачи   | 4         |
| Обзор литературы  | 5         |
| <b>1 Задача оптимального управления объемами вредных выбросов</b>   | <b>6</b>  |
| 1.1 Постановка задачи оптимального управления объемами вредных выбросов . . . . .   | 6         |
| 1.2 Применение принципа максимума Понтрягина . . . . .  | 6         |
| 1.3 Анализ оптимального управления объемами вредных выбросов на наличие точек переключения . . . . .  | 7         |
| 1.4 Графическая интерпретация . . . . .   | 9         |
| 1.5 Влияние коэффициента абсорбции $\delta$ на выигрыш . . . . .  | 10        |
| <b>2 Задача оптимального управления объемами вредных выбросов с терминальной составляющей выигрыша</b>  | <b>16</b> |
| 2.1 Постановка задачи оптимального управления объемами вредных выбросов с терминальной составляющей выигрыша . . . . .                        | 16        |
| 2.2 Применение принципа максимума Понтрягина . . . . .  | 16        |
| 2.3 Анализ оптимального управления объемами вредных выбросов на наличие точек переключения . . . . .  | 18        |
| 2.4 Влияние коэффициента абсорбции $\delta$ на выигрыш . . . . .  | 20        |
| <b>3 Кооперативная дифференциальная игра управления объемами вредных выбросов</b>   | <b>22</b> |
| 3.1 Постановка задачи кооперативной дифференциальной игры управления объемами вредных выбросов . . . . .                                      | 22        |
| 3.2 Применение принципа максимума Понтрягина . . . . .  | 22        |
| 3.3 Анализ оптимального управления объемами вредных выбросов на наличие точек переключения . . . . .  | 24        |
| 3.4 Графическая интерпретация . . . . .   | 24        |
| 3.5 Влияние коэффициента абсорбции $\delta$ на выигрыш . . . . .  | 24        |
| <b>4 Кооперативная дифференциальная игра управления объемами вредных выбросов с терминальной составляющей выигрыша</b>                        | <b>28</b> |
| 4.1 Постановка задачи кооперативной дифференциальной игры управления объемами вредных выбросов с терминальной составляющей выигрыша . . . . . | 28        |
| 4.2 Применение принципа максимума Понтрягина . . . . .  | 29        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 4.3      | Анализ оптимального управления объемами вредных выбросов на наличие точек переключения . . . . .                    | 30        |
| 4.4      | Влияние коэффициента абсорбции $\delta$ на выигрыш . . . . .  | 31        |
| <b>5</b> | <b>Некооперативная дифференциальная игра управления объемами вредных выбросов</b>                                   | <b>32</b> |
| 5.1      | Постановка задачи дифференциальной игры управления объемами вредных выбросов в некооперативной постановке . . . . . | 32        |
| 5.2      | Применение принципа максимума Понтрягина . . . . .  | 32        |
| 5.3      | Сравнение с кооперативной постановкой задачи управления объемами вредных выбросов . . . . .                         | 33        |
|          | <b>Выводы</b>   | <b>35</b> |
|          | <b>Заключение</b>   | <b>36</b> |
|          | <b>Литература</b>   | <b>36</b> |
|          | <b>Приложение. Листинг программ в Maple</b>   | <b>38</b> |

# Введение

Одна из основных задач, поставленная перед современной математической теорией игр, есть задача исследования и анализа различных экономико-экологических моделей. Особо значимые вопросы мировой экономики касаются загрязнения окружающей среды. Усугубление состояния природы негативно отражается на условиях производства и, как следствие, отрицательно воздействует на получение прибыли. Современная мировая экономика заинтересована в оптимизации затрат для достижения наилучших результатов. Следовательно, ввиду практической ценности, задачи в области природоохранного управления представляются важными.

Целью данной выпускной квалификационной работы бакалавра является исследование структуры теоретико-игровых задач управления в области природоохранного менеджмента.

Есть несколько участников экономического процесса. Мы рассматриваем процесс регулирования объемов выбросов вредных веществ, учитывая поведения игроков. В кооперативной модели рассматривается, выгодно ли игрокам действовать кооперативно для снижения уровня вредных выбросов и, следовательно, минимизации суммарных затрат и получения большей прибыли.

Мы рассматриваем дифференциальную игру  $n$  лиц. Известны начальный момент времени, момент окончания игры и начальное состояние игры. Динамика игры задается обыкновенным дифференциальным уравнением. Дифференциальная игра может иметь некооперативную постановку, тогда цель каждого игрока - увеличить лишь свою прибыль. В кооперативной постановке дифференциальной игры игроки объединяются в коалиции и стремятся увеличить общую прибыль. То есть каждый игрок или коалиция игроков имеет свою функцию выигрыша, которую необходимо максимизировать. Стратегии каждого игрока зависят только от начального состояния игры и текущего момента времени. Оптимальное управление  $u^*(t)$ , доставляющее максимум функционалу выигрыша, разыскивается в классе программных стратегий  $U(t)$ . В такой постановке теоретико-игровой задачи управления объемами вредных выбросов оптимальное управление игроков будем находить согласно принципу максимума Понтрягина. Далее необходимо провести анализ полученного оптимального управления на чувствительность.

Так, в первой главе рассматривается решение задачи оптимального управления объемами вредных выбросов. Произведен анализ модели на чувствительность, а именно проанализировано оптимальное управление на наличие точек перемены знака (переключения): оценены значения параметров, при которых происходит переключение управления. Также исследовано влияние коэффициента абсорбции, соответствующего естественному очищению атмосферы, на выигрыш. Во второй главе рассмотрена задача со смешанным функционалом выигрыша. Далее, в главах 3 и 4 изучается дифференциальная игра в кооперативной постановке с выигрышем без терминальной составляющей и с выигрышем с терминальной составляющей соответственно. Произведен анализ модели на чувствительность в зависимости от соотношений коэффициентов модели. В последней главе изучается дифференциальная игра в некооперативной постановке. Получены управления игроков, обеспечивающие равновесие по Нэшу. Найдена соответствующая траектория игры, произведен ее сравнительный анализ с траекторией, соответствующей оптимальному управлению в кооперативной постановке задачи.

## Постановка задачи

Динамика нашей теоретико-игровой задачи управления объемами вредных задается обыкновенным дифференциальным уравнением с заданным начальным условием:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n u_i(t) - \delta x(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

где  $x_0 \geq 0$ ,  $n$  - количество игроков,  $\delta > 0$  - коэффициент абсорбции, соответствующий естественному очищению атмосферы. Объём производства прямо пропорционален вредным выбросам  $u_i(t)$ . Таким образом, стратегией игрока является выбор объёма вредных выбросов в единицу времени  $u_i(t) \in [0; u_i^{max}(t)]$ . Будем искать решение в классе программных стратегий  $U(t)$ .

Доход игрока  $i$  в момент времени  $t$  определяется следующим образом:

$$R_i(u_i(t)) = c_i u_i(t) - \frac{1}{2} u_i^2(t), \quad i = \overline{1, n},$$

где

$$c_i > 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Функция полезности игрока  $i$  имеет вид:

$$h_i(x(t), u_i(t)) = R_i(u_i(t)) - d_i x(t), \quad i = \overline{1, n}.$$

Здесь второе слагаемое характеризует расходы игрока, связанные с устранением загрязнений, причем

$$d_i > 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Игра развивается на промежутке  $t \in [t_0, T]$ . Тогда интегральный выигрыш игрока  $i$  имеет вид:

$$K_i(x_0, u_i) = \int_{t_0}^T h_i(x(t), u_i(t)) dt.$$

В кооперативном варианте игры функционал выигрыша имеет вид

$$K(x_0, u_1, \dots, u_n) = \sum_{i=1}^n K_i(x_0, u_i).$$

## Обзор литературы

В развитие теоретико-игрового экологического моделирования существенный вклад внесли Л.А.Петросян и В.В.Захаров. Так, в книге [1] проанализированы математические модели экологии и исследованы задачи оптимизации управления загрязняющими веществами.

Большую значимость имеет статья [2], в которой исследованы модели, демонстрирующие взаимодействие экономики и окружающей среды нескольких стран, находящихся в условиях конкуренции. Исследовано оптимальное управление окружающей средой, когда страны стремятся достичь общей экологической цели.

Также в [3] исследована совместная игра стран, направленная на сокращение загрязняющих веществ окружающей среды. А именно, разработана модель распределения во времени общих затрат стран, позволяющая соблюдать изначальную конвенцию.

В диссертации [4] рассмотрены некоторые теоретико-игровые модели экологического регулирования. Проанализирован контроль выбросов веществ, загрязняющих атмосферу. Часть работы посвящена построению и исследованию теоретико-игровых экологических моделей, анализу их аналитических решений и рассмотрению методов поиска решений.

Объект исследования работы [5] - модель дифференциальной игры двух игроков для анализа совместного ведения экологических проектов. Исследование показывает, что наличие экологического ограничения, которое игроки стремятся достичь, не обязательно уменьшает выигрыш обоих игроков.

Практическое применение дифференциальных игр в экономике экосистем исследовалось в [6], где также достаточно полно изложена теория дифференциальных игр, в том числе изучены теоретические модели управления.

Модель управления объемами вредных выбросов, используемая в данной работе, предложена в статье [7], часть которой посвящена анализу кооперативного решения в дифференциальных играх трех игроков. С помощью принципа максимума Понтрягина найдены оптимальные управления и траектории игроков. Проведен сравнительный анализ траекторий игры в кооперативной и некооперативной постановке задачи.

Оптимальное управление  $u^*(t)$  разыскивается в классе программных стратегий  $U(t)$ , методология поиска оптимального управления описана в работе [8]. В исследовании изложена теория оптимизации и освещены вопросы, связанные с решением задач оптимизации.

# Глава 1

## Задача оптимального управления объемами вредных выбросов

### 1.1 Постановка задачи оптимального управления объемами вредных выбросов

Динамика нашей задачи задается обыкновенным дифференциальным уравнением с заданным начальным условием:

$$\dot{x}(t) = u(t) - \delta x(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

Тогда функционал выигрыша имеет вид:

$$\begin{aligned} K(x_0, u) &= \int_{t_0}^T h(x(t), u(t)) dt = \int_{t_0}^T (R(u(t)) - dx(t)) dt = \\ &= \int_{t_0}^T \left( cu(t) - \frac{1}{2}u^2(t) - dx(t) \right) dt = \int_{t_0}^T \left( \left( c - \frac{1}{2}u(t) \right) u(t) - dx(t) \right) dt. \end{aligned}$$

### 1.2 Применение принципа максимума Понтрягина

Необходимо максимизировать функционал выигрыша. Для решения этой задачи используем принцип максимума Понтрягина. Построим Гамильтониан:

$$H(x, u, \Psi) = \left( c - \frac{1}{2}u \right) u - dx + \Psi(u - \delta x).$$

Дифференцируем по  $u$ :

$$\frac{\partial H(x, u, \Psi)}{\partial u} = c - u + \Psi = 0.$$

С учетом сопряженного уравнения:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Дифференцируем по  $x$ :

$$\frac{\partial H(x, u, \Psi)}{\partial x} = -d - \delta \Psi,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi}{\partial t} &= d + \delta \Psi, \\ \Psi(T) &= 0.\end{aligned}$$

Ищем решение:

$$\Psi(t) = e^{\delta(t-T)} \left( \Psi(T) + \int_T^t e^{-\delta(s-T)} ds \right) = d \frac{e^{-\delta(T-t)} - 1}{\delta}.$$

С учетом полученного значения  $\Psi$  выражение дифференциала по  $u$  принимает вид:

$$u^*(t) = c + d \frac{e^{-\delta(T-t)} - 1}{\delta}. \quad (1.1)$$

Это оптимальное управление при условии, что оно не принимает отрицательных значений.

С учетом найденного оптимального управления исходное дифференциальное уравнение принимает вид:

$$\dot{x}(t) = c + d \frac{e^{-\delta(T-t)} - 1}{\delta} - \delta x(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Ищем решение, это и будет оптимальная траектория:

$$\begin{aligned}x^*(t) &= e^{-\delta(t-t_0)} \left( x_0 + \int_{t_0}^t e^{\delta(s-t_0)} \left( c + d \frac{e^{-\delta(T-s)} - 1}{\delta} \right) ds \right) = \\ &= e^{-\delta(t-t_0)} \left( -x_0 + \frac{1}{2} \frac{de^{\delta(t_0-T)} + 2c\delta - 2d}{\delta^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{de^{\delta(t-T)} + 2c\delta - 2d}{\delta^2}.\end{aligned} \quad (1.2)$$

### 1.3 Анализ оптимального управления объемами вредных выбросов на наличие точек переключения

Проанализируем границы значений полученного оптимального управления. Оно может принимать отрицательные значения. Определим точки, в которых управление меняет знак.

**Утверждение 1.** Пусть

$$\bar{\delta} = \frac{d}{c} + \frac{1}{T-t_0} W \left( -\frac{d(T-t_0)}{c} \exp \left( -\frac{d(T-t_0)}{c} \right) \right). \quad (1.3)$$

Здесь  $W(z)$  - главная ветвь вещественнозначной функции Ламберта.

Функция

$$u^*(t) = c - d \frac{1 - e^{-\delta(T-t)}}{\delta}, \quad t \in [t_0, T],$$

принимает значения не большие  $c$ .

Если  $T \leq \frac{c}{d} + t_0$ , то при всех  $\delta$ , а если  $T > \frac{c}{d} + t_0$ , то при  $\delta \geq \bar{\delta}$  функция принимает только неотрицательные значения.

Если  $T > \frac{c}{d} + t_0$  и  $\delta < \bar{\delta}$ , то функция меняет знак с минуса на плюс в точке

$$\bar{t} = T + \frac{1}{\delta} \ln \left( 1 - \frac{c}{d} \delta \right) \in (t_0, T).$$

*Доказательство.* Тот факт, что  $u^*(t)$  не принимает значения, больших  $c$ , очевиден, так как второе слагаемое в этой функции неположительно.

Функция  $u^*(t)$  возрастает по  $t$ . Значит, минимальное значение функция принимает при  $t = t_0$ :

$$u^*(t_0) = c - d \frac{1 - e^{-\delta(T-t_0)}}{\delta}.$$

По  $\delta$  данная функция возрастает. Значит,

$$u^*(t_0) \geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \left( c - \frac{1 - e^{-\delta(T-t_0)}}{\delta} \right) = c - d(T - t_0).$$

Если  $c - d(T - t_0) \geq 0$ , иными словами,  $T \leq \frac{c}{d} + t_0$ , то  $u^*(t) \geq 0$  для всех  $\delta$  и  $t \in [t_0, T]$ .

Пусть  $T > \frac{c}{d} + t_0$ . Заметим, что при достаточно больших  $\delta$  функция  $u^*(t)$  неотрицательна. Если же  $\delta \rightarrow 0$ , то управление  $u^*(t_0)$  принимает отрицательное значение по крайней мере в точке  $t_0$ . Надо найти  $\delta$ , при котором в точке  $t_0$  значение управления равно нулю, учитывая, что  $u^*(t)$  возрастает как по  $\delta$ , так и по  $t$ :

$$c - d \frac{1 - e^{-\delta(T-t_0)}}{\delta} = 0.$$

Произведем стандартные преобразования:

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\delta(T-t_0)} &= \frac{c}{d} \delta, \\ 1 - e^{-\delta(T-t_0)} &= \frac{c}{d(T-t_0)} \delta(T-t_0), \\ \delta(T-t_0) - \frac{d(T-t_0)}{c} + \frac{d(T-t_0)}{c} e^{-\delta(T-t_0)} &= 0. \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{d(T-t_0)}{c}, \\ \varepsilon &= \delta(T-t_0). \end{aligned}$$

Так как  $T > \frac{c}{d} + t_0$ , то  $\rho > 1$ . Получаем уравнение:

$$\varepsilon - \rho + \rho e^{-\varepsilon} = 0.$$

Найдём его решение:

$$\begin{aligned} (\varepsilon - \rho) e^{\varepsilon - \rho} &= -\rho e^{-\rho}, \\ \varepsilon - \rho &= W(-\rho e^{-\rho}), \\ \varepsilon &= \rho + W(-\rho e^{-\rho}). \end{aligned}$$

После обратной замены получим:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{T-t_0} \left( \frac{d(T-t_0)}{c} + W \left( -\frac{d(T-t_0)}{c} \exp \left( -\frac{d(T-t_0)}{c} \right) \right) \right) = \\ &= \frac{d}{c} + \frac{1}{T-t_0} W \left( -\frac{d(T-t_0)}{c} \exp \left( -\frac{d(T-t_0)}{c} \right) \right) = \bar{\delta}. \end{aligned}$$

Если  $\delta \geq \bar{\delta}$ , то  $u^*(t_0) \geq 0$  и  $u^*(t) \geq 0$ , при всех  $t \in [t_0, T]$ .

Если  $\delta < \bar{\delta}$ , то  $u^*(t_0) < 0$ . Поэтому надо найти момент времени  $t > 0$ , при котором  $u^*(t) = 0$ :

$$c - d \frac{1 - e^{-\delta(T-t)}}{\delta} = 0,$$

$$1 - e^{-\delta(T-t)} = \frac{c}{d} \delta,$$

$$e^{-\delta(T-t)} = 1 - \frac{c}{d} \delta,$$

$$-\delta(T-t) = \ln\left(1 - \frac{c}{d} \delta\right),$$

$$t = T + \frac{1}{\delta} \ln\left(1 - \frac{c}{d} \delta\right).$$

Это и есть момент времени, соответствующий смене знака управления с минуса на плюс.  $\square$

Таким образом, если  $T \leq \frac{c}{d} + t_0$ , то при всех  $\delta$ , а если  $T > \frac{c}{d} + t_0$ , то при  $\delta \geq \bar{\delta}$  оптимальное управление имеет вид (1.1).

В случае, когда  $T > \frac{c}{d} + t_0$  и  $\delta < \bar{\delta}$ , в качестве оптимального управления будем брать функцию

$$u^*(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_0, \bar{t}], \\ c + d \frac{e^{-\delta(T-t)} - 1}{\delta}, & t \in (\bar{t}, T]. \end{cases} \quad (1.4)$$

В этом случае оптимальная траектория имеет вид:

$$x^*(t) = \begin{cases} e^{-\delta(t-t_0)} x_0, & t \in [t_0, \bar{t}], \\ \frac{d}{2\delta^2} e^{-\delta(T-t)} + \frac{(c\delta - d)^2}{2d\delta^2} e^{\delta(T-t)} + e^{-\delta(t-t_0)} x_0 + \frac{c\delta - d}{\delta^2}, & t \in (\bar{t}, T]. \end{cases} \quad (1.5)$$

## 1.4 Графическая интерпретация

Зафиксируем параметры:  $d = 1$ ,  $c = 2$ ,  $t_0 = 0$ .

Возьмем  $T = 0.25$ . При этом управление не имеет переключений при любом  $\delta$ . На рисунке 1а изображено оптимальное управление при  $\delta = 0.5$ , а на рисунке 1б изображена соответствующая оптимальная траектория при  $x_0 = 1$ .

Теперь возьмем  $T = 3$ . Вычислим  $\bar{\delta}$ :

$$\bar{\delta} = 0.29.$$

Возьмем  $\delta = 0.5$ . При этом управление не имеет точек переключения. На рисунке 2а изображено оптимальное управление, а на рисунке 2б изображена соответствующая оптимальная траектория при  $x_0 = 1$ .

Возьмем  $\delta = 0.2$ . При этом управление имеет точку переключения  $\bar{t} = 0.45$ . На рисунке 3а изображено оптимальное управление, а на рисунке 3б изображена соответствующая оптимальная траектория при  $x_0 = 1$ .

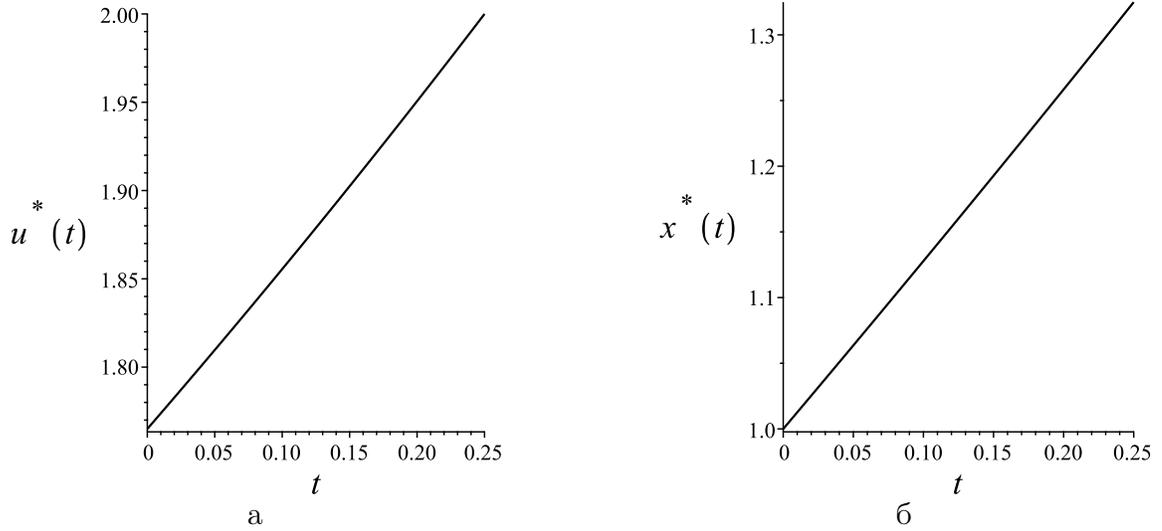


Рис. 1.1: Значения параметров:  $d = 1$ ,  $c = 2$ ,  $t_0 = 0$ ,  $T = 0.25$ ,  $\delta = 0.5$ ,  $x_0 = 1$ , а) оптимальное управление, б) оптимальная траектория.

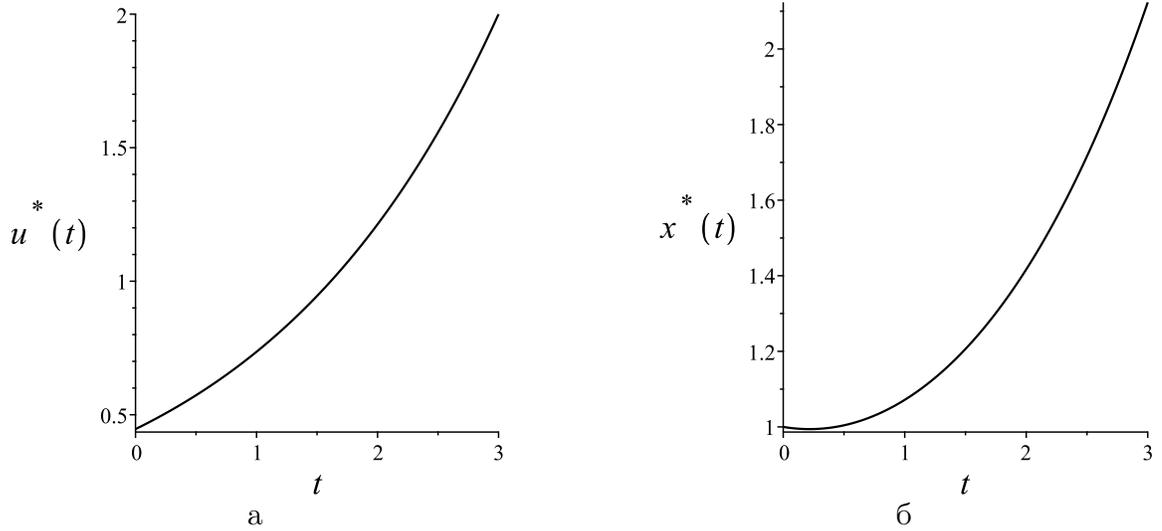


Рис. 1.2: Значения параметров:  $d = 1$ ,  $c = 2$ ,  $t_0 = 0$ ,  $T = 3$ ,  $\delta = 0.5$ ,  $x_0 = 1$ , а) оптимальное управление, б) оптимальная траектория.

## 1.5 Влияние коэффициента абсорбции $\delta$ на выигрыш

Исследуем зависимость выигрыша от коэффициента абсорбции.

Подставим полученное оптимальное управление и соответствующую ему оптимальную траекторию в функционал выигрыша. В случае отсутствия переключений при любых  $\delta$ , то есть в случае  $T \leq \frac{c}{d} + t_0$  функционал выигрыша принимает вид:

$$K(x_0, u^*) = \frac{1}{4\delta^3} \left( -4d(c\delta - d - \delta^2 x_0) e^{-\delta(T-t_0)} - d^2 e^{-2\delta(T-t_0)} + \right. \\ \left. + 2c^2(T-t_0)\delta^3 - 4cd\delta^2(T-t_0) - 4d\delta^2 x_0 + 2d^2\delta(T-t_0) + 4cd\delta - 6d^2 \right).$$

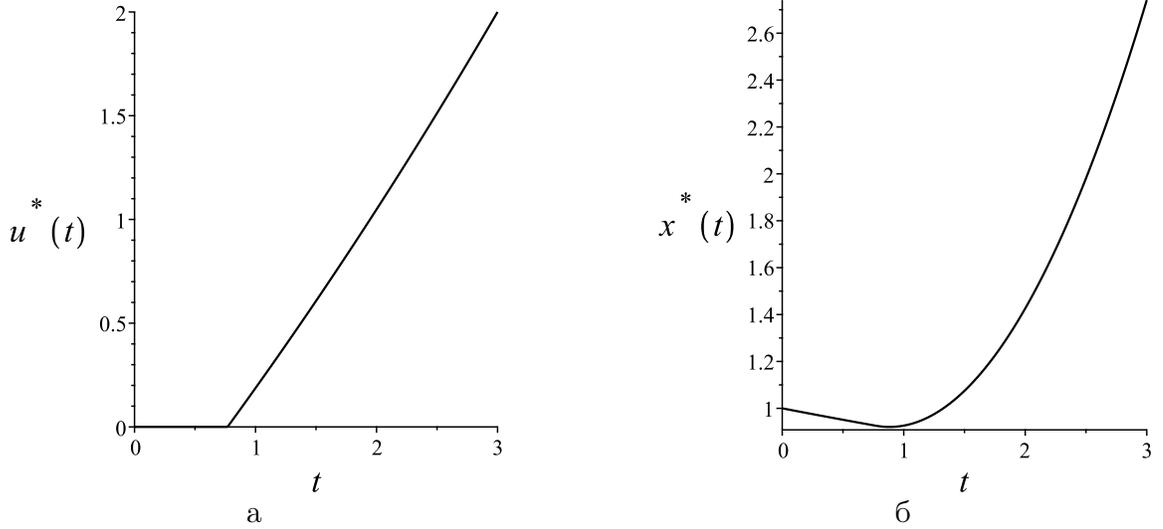


Рис. 1.3: Значения параметров:  $d = 1$ ,  $c = 2$ ,  $t_0 = 0$ ,  $T = 3$ ,  $\delta = 0.2$ ,  $x_0 = 1$ , а) оптимальное управление, б) оптимальная траектория.

В противном случае,

$$K(x_0, u^*) = \begin{cases} \frac{1}{4\delta^3} (-2(c\delta - d)^2 \ln(\frac{-c\delta + d}{d}) + 4e^{-\delta(T-t_0)} \delta^2 dx_0 + (3c^2 - 4dx_0)\delta^2 - 2cd\delta), & \delta < \bar{\delta}, \\ \frac{1}{4\delta^3} (-4d(-\delta^2 x_0 + c\delta - d)e^{-\delta(T-t_0)} - d^2 e^{-2\delta(T-t_0)} + 2c^2(T-t_0)\delta^3 - \\ -4d((T-t_0)c + x_0)\delta^2 + 2d((T-t_0)d + 2c)\delta - 3d^2), & \delta \geq \bar{\delta}. \end{cases}$$

**Утверждение 2.** При  $\delta \rightarrow \infty$  значение  $K(x_0, u^*)$  стремится к

$$\frac{1}{2}c^2(T-t_0). \quad (1.6)$$

Если значение  $K(x_0, u^*)$  возрастает с ростом  $\delta$ , то значение выигрыша неотрицательно, если

$$x_0 \leq \bar{x}_0.$$

Здесь

$$\bar{x}_0 = \frac{d^2(T-t_0)^2 - 3cd(T-t_0) + 3c^2}{6d}$$

в случае, когда  $T \leq \frac{c}{d} + t_0$ , и

$$\bar{x}_0 = \frac{c^3}{6d^2(T-t_0)} \quad (1.7)$$

в противном случае.

*Доказательство.* Трижды применив правило Лопиталья, можно показать, что выигрыш стремится к значению (1.6).

Если значение  $K(x_0, u^*)$  возрастает с ростом  $\delta$ , то минимальное значение достигается при  $\delta \rightarrow 0$ . Это значение равно

$$d^2(T-t_0)^2 - 3(c(T-t_0) + 2x_0)d + 3c^2,$$

если  $T \leq \frac{c}{d} + t_0$ . Для того чтобы функционал выигрыша не принимал отрицательных значений, надо потребовать, чтобы это выражение было неотрицательным. Отсюда выводим условие на  $x_0$  в случае  $T \leq \frac{c}{d} + t_0$ . В противном случае, действуя аналогично, получаем равенство (1.7).  $\square$

**Замечание.** Условие, что значение  $K(x_0, u^*)$  возрастает с ростом  $\delta$ , является необходимым, так как можно подобрать параметры, при которых оно нарушается. Например:  $d = 1$ ,  $c = 2$ ,  $t_0 = 0$ ,  $T = 6$ ,  $x_0 = 1$ . Зависимость выигрыша от коэффициента абсорбции  $\delta$  в этом случае изображена на рисунке 1.5.

На рисунке 1.4 изображена зависимость выигрыша от коэффициента абсорбции в частном случае, когда управление не имеет переключений при любых  $\delta$ . На рисунках 1.6, 1.7, 1.8, 1.9 изображена зависимость выигрыша от коэффициента абсорбции в частных случаях, когда управление имеет точку переключения при малых  $\delta$ . Случаи, изображенные на рисунках 1.8, 1.9, удовлетворяют условиям неотрицательности выигрыша из утверждения 2.

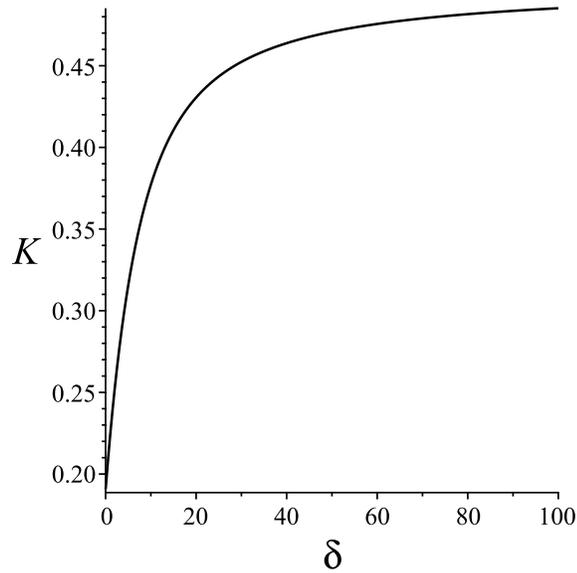


Рис. 1.4: Зависимость выигрыша от коэффициента абсорбции. Значения параметров:  $d = 1$ ,  $c = 2$ ,  $t_0 = 0$ ,  $T = 0.25$ ,  $x_0 = 1$

На рисунках 1.6, 1.7 изображена зависимость выигрыша от коэффициента абсорбции в частных случаях. Заметим, что выигрыш принимает отрицательные значения при малых  $\delta$ . Так, на рисунках 1.8, 1.9 изображена зависимость выигрыша от коэффициента абсорбции в случае неотрицательности выигрыша.

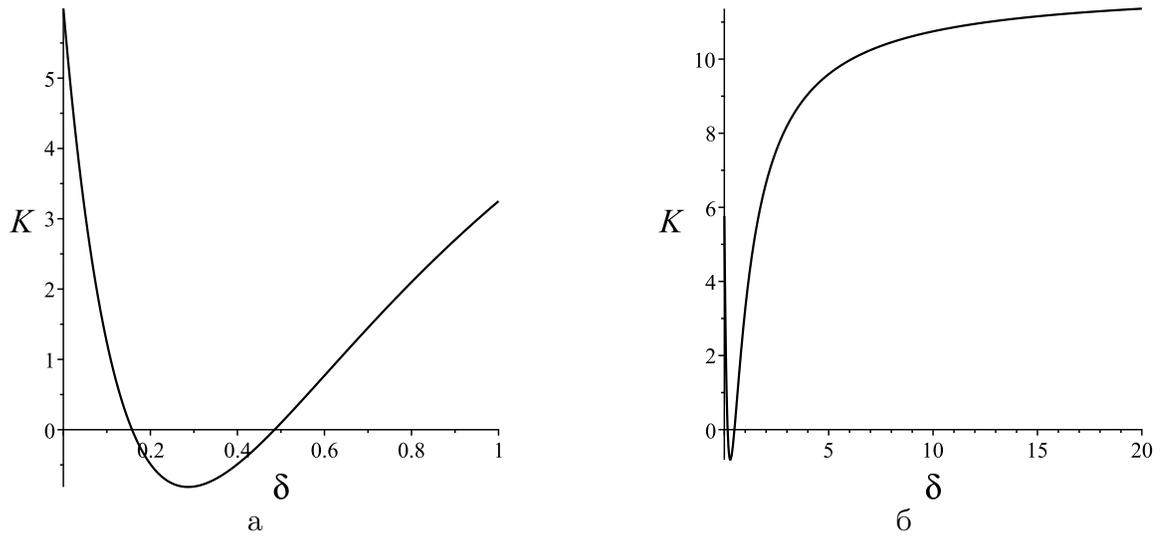


Рис. 1.5: Зависимость выигрыша от коэффициента абсорбции. Значения параметров:  $d = 1$ ,  $c = 2$ ,  $t_0 = 0$ ,  $T = 6$ ,  $x_0 = 1$ , а)  $\delta \in [0, 1]$ , б)  $\delta \in [0, 20]$

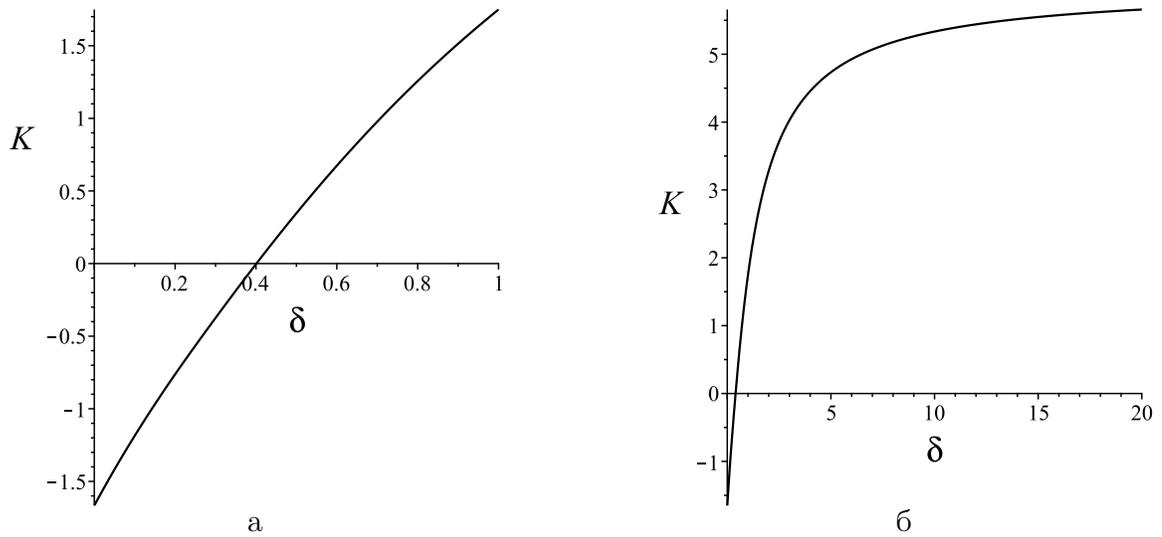


Рис. 1.6: Зависимость выигрыша от коэффициента абсорбции. Значения параметров:  $d = 1$ ,  $c = 2$ ,  $t_0 = 0$ ,  $T = 3$ ,  $x_0 = 1$ , а)  $\delta \in [0, 1]$ , б)  $\delta \in [0, 20]$

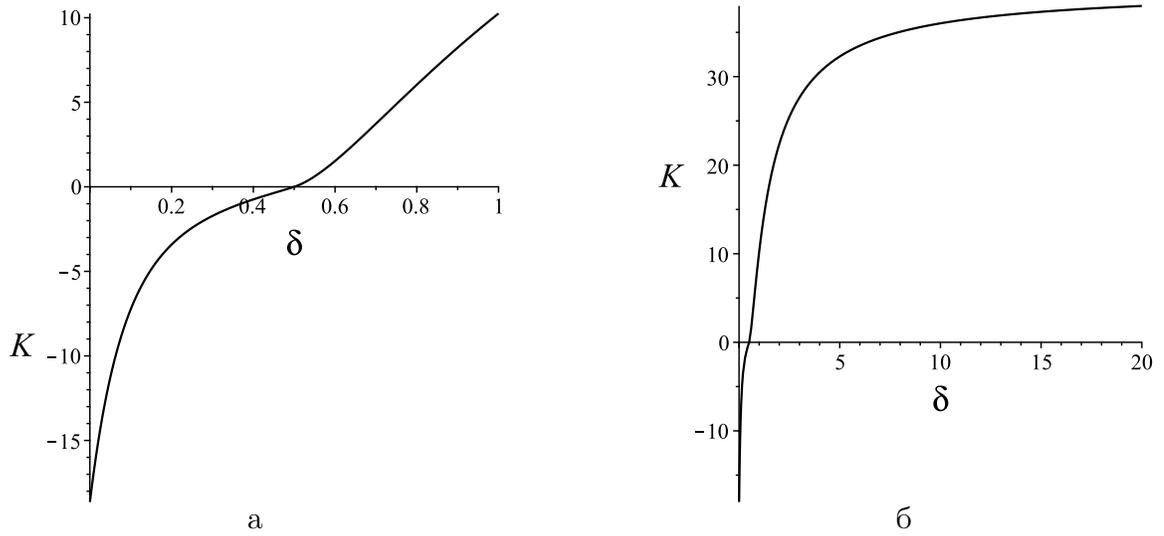


Рис. 1.7: Зависимость выигрыша от коэффициента абсорбции. Значения параметров:  $d = 1$ ,  $c = 2$ ,  $t_0 = 0$ ,  $T = 20$ ,  $x_0 = 1$ , а)  $\delta \in [0, 1]$ , б)  $\delta \in [0, 20]$

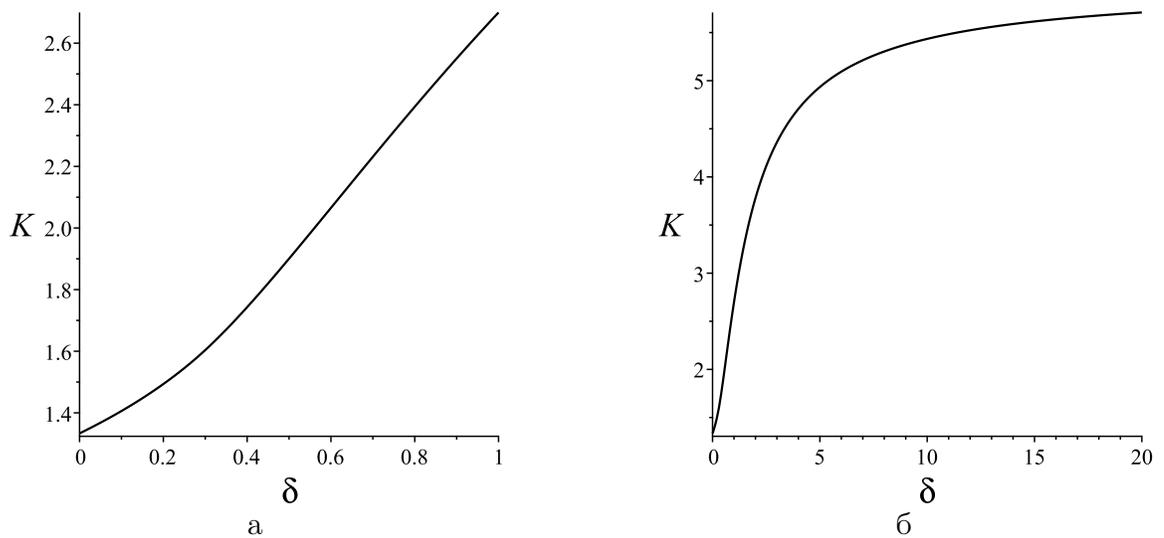


Рис. 1.8: Зависимость выигрыша от коэффициента абсорбции. Значения параметров:  $d = 1$ ,  $c = 2$ ,  $t_0 = 0$ ,  $T = 3$ ,  $x_0 = \frac{1}{4}$ , а)  $\delta \in [0, 1]$ , б)  $\delta \in [0, 20]$

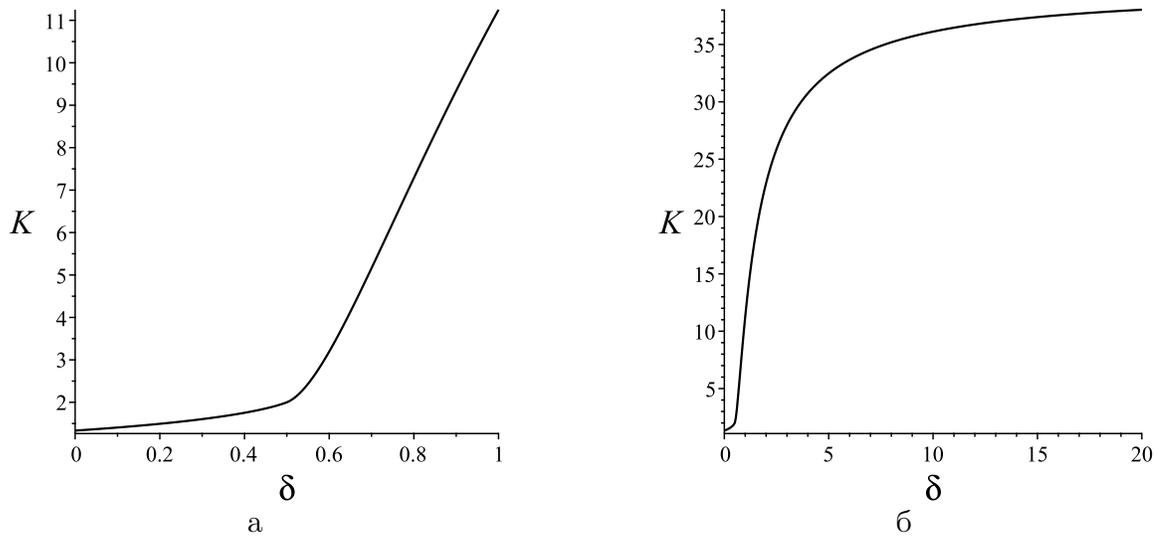


Рис. 1.9: Зависимость выигрыша от коэффициента абсорбции. Значения параметров:  $d = 1$ ,  $c = 2$ ,  $t_0 = 0$ ,  $T = 20$ ,  $x_0 = \frac{1}{4}$ , а)  $\delta \in [0, 1]$ , б)  $\delta \in [0, 20]$

## Глава 2

# Задача оптимального управления объемами вредных выбросов с терминальной составляющей выигрыша

### 2.1 Постановка задачи оптимального управления объемами вредных выбросов с терминальной составляющей выигрыша

Рассмотрим задачу оптимального управления с учетом терминальной составляющей выигрыша  $Dx(T)$ . То есть по мере нанесения вреда окружающей среде участники игрового процесса будут получать меньший выигрыш.

Динамика нашей задачи задается обыкновенным дифференциальным уравнением с заданным начальным условием:

$$\dot{x}(t) = u(t) - \delta x(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

Интегральный выигрыш имеет вид:

$$\begin{aligned} K(x_0, u) &= \int_{t_0}^T (h(x(t), u(t))) dt - Dx(T) = \\ &= \int_{t_0}^T (R(u(t)) - dx(t)) dt - Dx(T) = \\ &= \int_{t_0}^T (cu(t) - \frac{1}{2}u^2(t) - dx(t)) dt - Dx(T) = \\ &= \int_{t_0}^T ((c - \frac{1}{2}u(t))u(t) - dx(t)) dt - Dx(T). \end{aligned}$$

### 2.2 Применение принципа максимума Понтрягина

Необходимо максимизировать функционал выигрыша. Для нахождения оптимального управления используем принцип максимума Понтрягина. В этом случае накладывается

условие трансверсальности (производная по  $x(T)$ ):

$$\Psi(T) = \frac{d}{dx(T)}K.$$

Тогда:

$$\Psi(T) = -D.$$

Гамильтониан строится аналогично случаю без терминальной составляющей выигрыша:

$$H(x, u, \Psi) = (c - \frac{1}{2}u)u - dx + \Psi(u - \delta x(t)).$$

Дифференцируем по  $u$ :

$$\frac{\partial H(x, u, \Psi)}{\partial u} = c - u + \Psi = 0.$$

С учетом сопряженного уравнения:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Дифференцируем по  $x$ :

$$\frac{\partial H(x, u, \Psi)}{\partial x} = -d - \delta\Psi,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = d + \delta\Psi,$$

$$\Psi(T) = -D,$$

$$\Psi(t) = -\frac{d}{\delta} - e^{\delta(t-T)} \left( D - \frac{d}{\delta} \right).$$

С учетом полученного значения  $\Psi$  выражение дифференциала по  $u$  принимает вид:

$$u^*(t) = c - \frac{d}{\delta} - e^{\delta(t-T)} \left( D - \frac{d}{\delta} \right).$$

Это оптимальное управление при условии, что оно не принимает отрицательных значений.

С учетом полученного оптимального управления исходное дифференциальное уравнение принимает вид:

$$\dot{x}(t) = c - \frac{d}{\delta} - e^{\delta(t-T)} \left( D - \frac{d}{\delta} \right) - \delta x(t).$$

Находим решение - это оптимальная траектория

$$x^*(t) = \frac{1}{2\delta^2} \left( (D\delta - d)e^{-\delta(T+t-2t_0)} + 2(\delta^2 x_0 - c\delta + d)e^{-\delta(t-t_0)} + (d - D\delta)e^{-\delta(T-t)} + 2(c\delta - d) \right). \quad (2.1)$$

## 2.3 Анализ оптимального управления объемами вредных выбросов на наличие точек переключения

Проанализируем полученное оптимальное управление. Нужно выяснить, всегда ли оно принимает значения из отрезка  $[0, c]$ .

**Утверждение 3.** Пусть  $\bar{\delta} > 0$  – корень уравнения

$$c - D + \left(1 - e^{-\bar{\delta}(T-t_0)}\right) \left(D - \frac{d}{\bar{\delta}}\right) = 0.$$

Функция

$$u^*(t) = c - D + \left(1 - e^{-\delta(T-t)}\right) \left(D - \frac{d}{\delta}\right). \quad (2.2)$$

принимает значения не большие  $c$ .

Если  $T \leq \frac{c-D}{d} + t_0$ , то при всех  $\delta$ , а если  $T > \frac{c-D}{d} + t_0$ , то при  $\delta \geq \bar{\delta}$  и  $c \geq D$  функция принимает только неотрицательные значения.

Если  $T > \frac{c-D}{d} + t_0$ ,  $c \geq D$  и  $\delta < \bar{\delta}$ , то функция меняет знак с минуса на плюс в точке

$$\bar{t} = \frac{1}{\delta} \ln \left( \frac{c-D}{D-d/\delta} + 1 \right) + T.$$

Если же  $T > \frac{c-D}{d} + t_0$ ,  $c < D$  и  $\delta \geq \bar{\delta}$ , то функция меняет знак с плюса на минус в той же точке  $\bar{t}$ .

Когда  $T > \frac{c-D}{d} + t_0$ ,  $c < D$  и  $\delta < \bar{\delta}$ , то функция отрицательна в каждой точке.

*Доказательство.* Управление монотонно возрастает при увеличении  $\delta$ . Значит, значения управления не превосходят предела управления при  $\delta = \infty$ . Этот предел равен  $c$ . Таким образом, функция  $u^*(t)$  ограничена сверху константой  $c$ . Остается найти значения параметров, при которых найденное управление может принимать отрицательные значения.

Так как управление возрастает с увеличением  $\delta$  к значению  $c$ , то оно может принимать отрицательные значения только при малых  $\delta$ . Найдем предел при  $\delta \rightarrow +0$  и потребуем, чтобы этот предел был неотрицателен:

$$c - D - d(T - t) \geq 0.$$

Это условие будет выполнено при всех  $t \in [t_0, T]$ , если

$$c - D - d(T - t_0) \geq 0.$$

Выразим  $T$ :

$$T \leq \frac{c-D}{d} + t_0. \quad (2.3)$$

Таким образом, мы нашли условие, при котором управление не будет иметь точек переключения ни при каких  $\delta$ .

Предположим теперь, что условие (2.3) нарушается, то есть:

$$T > \frac{c-D}{d} + t_0. \quad (2.4)$$

Рассмотрим 2 случая:

I.  $c \geq D$ .

Для начала вычислим управление в точке  $T$ :

$$u^*(T) = c - D \geq 0.$$

Если же и в точке  $t_0$  значение управления неотрицательно, то точек переключения не будет. Получаем условие:

$$u^*(t_0) = c - D + (1 - e^{-\delta(T-t_0)}) \left( D - \frac{d}{\delta} \right) \geq 0.$$

Заметим, что при достаточно малых  $\delta$  полученное условие нарушается, так как при стремлении  $\delta$  к 0 управление принимает значение:

$$c - D - d(T - t_0).$$

При сделанном предположении (2.4) это значение отрицательно.

Суммируя вышесказанное, заключаем, что при достаточно малых  $\delta$  управление имеет ровно одну точку переключения

$$\bar{t} = \frac{1}{\delta} \ln \left( \frac{c - D}{D - d/\delta} + 1 \right) + T,$$

а при достаточно больших  $\delta$  управление не имеет точек переключения. Очевидно, что переходное значение  $\bar{\delta}$  может быть найдено из уравнения

$$\bar{t} = t_0.$$

Подставив  $\bar{t}$  и упростив выражение, получим

$$c - D + \left( 1 - e^{-\bar{\delta}(T-t_0)} \right) \left( D - \frac{d}{\bar{\delta}} \right) = 0.$$

Это уравнение можно решить численно.

II.  $c < D$ .

Заметим, что в точке  $t = T$  управление принимает отрицательное значение. Так как управление монотонно по  $t$ , то все будет зависеть от того, какой знак имеет управление в точке  $t = t_0$ . Если это значение отрицательно, то управление будет отрицательным при любых  $t \in [t_0, T]$ . В противном случае, управление будет иметь одну точку переключения. Причем оно будет переключаться с положительного на отрицательное значение. Найдем  $\bar{\delta}$ , при котором значение управления в точке  $t_0$  равно нулю:

$$c - D + \left( 1 - e^{-\bar{\delta}(T-t_0)} \right) \left( D - \frac{d}{\bar{\delta}} \right) = 0.$$

Найдем точку переключения. Выразим  $\bar{t}$  из следующего уравнения:

$$c - D + \left( 1 - e^{-\delta(T-\bar{t})} \right) \left( D - \frac{d}{\delta} \right) = 0.$$

Получаем

$$\bar{t} = \frac{1}{\delta} \ln \left( \frac{c - D}{D - d/\delta} + 1 \right) + T.$$

Если  $\delta \leq \bar{\delta}$ , то управление всюду отрицательно. Если же  $\delta > \bar{\delta}$ , то управление в точке  $\bar{t}$  меняет знак с плюса на минус.  $\square$

Получаем, что если  $c \geq D$  и  $\delta \leq \bar{\delta}$ , то управление имеет вид (2.2), а оптимальная траектория имеет вид (2.1).

Если же  $c \geq D$  и  $\delta > \bar{\delta}$ , то мы берем управление в виде:

$$u^*(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_0, \bar{t}], \\ c - D(1 - e^{-\delta(T-t)})(D - \frac{d}{\delta}), & t \in (\bar{t}, T]. \end{cases} \quad (2.5)$$

Оптимальная траектория:

$$x^*(t) = \begin{cases} x_0 e^{-\delta(t-t_0)}, & t \in [t_0, \bar{t}], \\ \frac{1}{2\delta^2} ((D\delta - d)e^{-\delta(T+t-2\bar{t})} + (2\delta^2 x_0 e^{-\delta(\bar{t}-t_0)} - \\ - 2c\delta + 2d)e^{-\delta(t-\bar{t})} + (-D\delta + d)e^{-\delta(T-t)} + 2c\delta - 2d), & t \in (\bar{t}, T]. \end{cases}$$

Если  $c < D$  и  $\delta \leq \bar{\delta}$ , то управление берется нулевым. Оптимальная траектория имеет вид

$$x(t) = x_0 e^{-\delta(t-t_0)}, \quad t \in [t_0, T].$$

Если же  $c < D$  и  $\delta > \bar{\delta}$ , то управление имеет вид:

$$u^*(t) = \begin{cases} c - D + (1 - e^{-\delta(T-t)})(D - \frac{d}{\delta}), & t \in [t_0, \bar{t}], \\ 0, & t \in (\bar{t}, T], \end{cases} \quad (2.6)$$

и оптимальная траектория:

$$x^*(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\delta^2} ((D\delta - d)e^{-\delta(\bar{t}+t-2t_0)} + \\ + (2\delta^2 x_0 - 2c\delta + 2d)e^{-\delta(t-t_0)} + (-D\delta + d)e^{-\delta(\bar{t}-t)} + 2c\delta - 2d), & t \in [t_0, \bar{t}], \\ \frac{1}{2\delta^2} ((D\delta - d)e^{-\delta(2\bar{t}-2t_0)} + \\ + (2\delta^2 x_0 - 2c\delta + 2d)e^{-\delta(\bar{t}-t_0)} - D\delta + 2c\delta - d)e^{-\delta(t-\bar{t})}, & t \in (\bar{t}, T]. \end{cases} \quad (2.7)$$

## 2.4 Влияние коэффициента абсорбции $\delta$ на выигрыш

Исследуем зависимость выигрыша с терминальной составляющей от коэффициента абсорбции  $\delta$ , зафиксируем остальные параметры. Рассмотрим случай, когда нет точек переключения управления при любых  $\delta$ . Тогда с учетом оптимального управления (2.2) и оптимальной траектории (2.1), функционал выигрыша принимает вид:

$$K(x_0, u^*) = \frac{1}{4\delta^3} (-4d(-\delta^2 x_0 + c\delta - d)e^{-\delta(T-t_0)} + (D^2\delta^2 - d^2)e^{-2\delta(T-t_0)} + \\ + 2c^2(T-t_0)\delta^3 + (((-4T + 4t_0)c - 4x_0)d - D^2)\delta^2 + 2d((T-t_0)d + 2c)\delta - 3d^2).$$

На рисунке 2.1 изображена зависимость выигрыша от коэффициента абсорбции в частном случае.

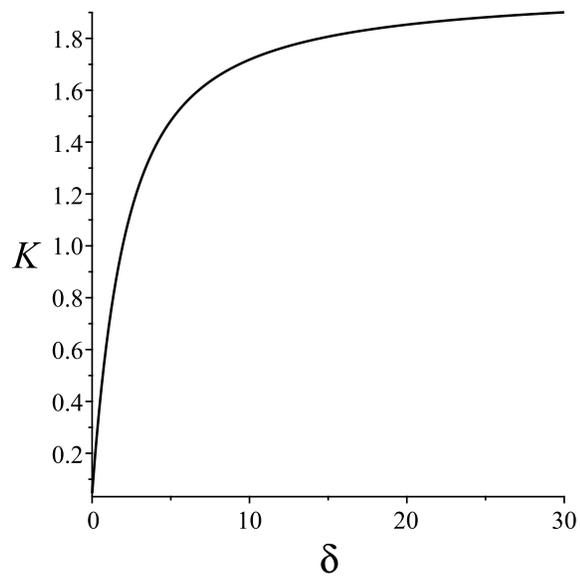


Рис. 2.1: Зависимость выигрыша с терминальной составляющей от коэффициента абсорбции. Значения параметров:  $d = 1$ ,  $c = 2$ ,  $t_0 = 0$ ,  $T = 1$ ,  $D = 0.5$ ,  $x_0 = 1$

## Глава 3

# Кооперативная дифференциальная игра управления объемами вредных выбросов

### 3.1 Постановка задачи кооперативной дифференциальной игры управления объемами вредных выбросов

Рассмотрим кооперативную постановку дифференциальной игры для трех игроков ( $n = 3$ ).

Динамика игры задается обыкновенным дифференциальным уравнением с заданным начальным условием:

$$\dot{x}(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) - \delta x(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (3.1)$$

Функционал выигрыша:

$$\begin{aligned} K(x_0, u_1, u_2, u_3) &= \sum_{i=1}^3 \int_{t_0}^T h_i(t, x(t), u_1(t), u_2(t), u_3(t)) dt = \\ &= \sum_{i=1}^3 \int_{t_0}^T (c_i u_i(t) - \frac{1}{2} u_i^2(t) - d_i x) dt = \sum_{i=1}^3 \int_{t_0}^T ((c_i - \frac{1}{2} u_i(t)) u_i(t) - d_i x) dt = \\ &= \int_{t_0}^T ((c_1 - \frac{1}{2} u_1(t)) u_1(t) - d_1 x) dt + \int_{t_0}^T ((c_2 - \frac{1}{2} u_2(t)) u_2(t) - d_2 x) dt + \\ &\quad + \int_{t_0}^T ((c_3 - \frac{1}{2} u_3(t)) u_3(t) - d_3 x) dt. \end{aligned}$$

### 3.2 Применение принципа максимума Понтрягина

Необходимо максимизировать функционал выигрыша. Для решения этой задачи используем принцип максимума Понтрягина. Построим Гамильтониан:

$$H_i(x, u, \Psi) = \sum_{i=1}^3 (c_i - \frac{1}{2} u_i(t)) u_i(t) - \sum_{i=1}^3 d_i x + \Psi(u_1 + u_2 + u_3 - \delta x(t)).$$

Дифференцируем по  $u_i$ :

$$\frac{\partial H(x, u, \Psi)}{\partial u_i} = c_i - u_i(t) + \Psi = 0.$$

С учетом сопряженного уравнения:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Дифференцируем по  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(x, u, \Psi)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{i=1}^3 (c_i - \frac{1}{2} u_i(t)) u_i(t) - \sum_{i=1}^3 d_i x + \right. \\ &\quad \left. + \Psi(u_1 + u_2 + u_3 - \delta x(t)) \right) = -d_s - \delta \Psi, \\ d_1 + d_2 + d_3 &= d_s, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= d_s + \delta \Psi, \\ \Psi(T) &= 0. \end{aligned}$$

Получаем решение:

$$\Psi(t) = \frac{-(d_s - e^{\delta(t-T)} d_s)}{\delta} = d_s \frac{e^{\delta(t-T)} - 1}{\delta}.$$

Получаем оптимальное управление:

$$u^*(t) = \begin{pmatrix} c_1 + \Psi(t) \\ c_2 + \Psi(t) \\ c_3 + \Psi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + d_s \frac{e^{-\delta(T-t)} - 1}{\delta} \\ c_2 + d_s \frac{e^{-\delta(T-t)} - 1}{\delta} \\ c_3 + d_s \frac{e^{-\delta(T-t)} - 1}{\delta} \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

С учетом найденного оптимального управления исходное дифференциальное уравнение принимает вид:

$$\dot{x}(t) = c_1 + c_2 + c_3 + 3d_s \frac{e^{-\delta(T-t)} - 1}{\delta} - \delta x(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Введем обозначение:

$$c_1 + c_2 + c_3 = c_s,$$

тогда дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\dot{x}(t) = c_s + 3d_s \frac{e^{-\delta(T-t)} - 1}{\delta} - \delta x(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Ищем решение, это и будет оптимальная траектория.

$$\begin{aligned} x^*(t) &= \frac{1}{2\delta^2} \left( -3e^{-\delta(T+t-2t_0)} d_s + (2x_0\delta^2 - 2c_s\delta + 6d_s) e^{-\delta(t-t_0)} \right. \\ &\quad \left. + 3d_s e^{-\delta(T-t)} + 2c_s\delta - 6d_s \right). \quad (3.3) \end{aligned}$$

### 3.3 Анализ оптимального управления объемами вредных выбросов на наличие точек переключения

Проанализируем оптимальное управление  $u^*(t)$  по утверждению 1. Получаем  $\delta$ , при котором происходит переход:

$$\bar{\delta}_i = \frac{d_s}{c_i} + \frac{1}{T - t_0} W \left( -\frac{d_s(T - t_0)}{c_i} \exp \left( -\frac{d_s(T - t_0)}{c_i} \right) \right).$$

Момент времени, соответствующий переключению управления:

$$\bar{t}_i = T + \frac{1}{\delta} \ln \left( 1 - \frac{c_i}{d_s} \delta \right).$$

Таким образом, если  $T \leq \frac{c_i}{d_s} + t_0$ , то при всех  $\delta_i$ , и если  $T > \frac{c_i}{d_s} + t_0$ , то при  $\delta_i \geq \bar{\delta}_i$   $i$ -ая компонента оптимального управления  $u_i^*(t)$  не имеет точек переключения и она имеет вид, как в формуле (3.2). В случае, когда  $T > \frac{c_i}{d_s} + t_0$  и  $\delta < \bar{\delta}$ ,  $i$ -ая компонента оптимального управления  $u_i^*(t)$  имеет точку переключения и следующий вид:

$$u_i^*(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_0, \bar{t}_i], \\ c_i + d_s \frac{e^{-\delta(T-t)} - 1}{\delta}, & t \in (\bar{t}_i, T]. \end{cases} \quad (3.4)$$

Оптимальная траектория может быть получена из дифференциального уравнения (3.1).

### 3.4 Графическая интерпретация

Зафиксируем параметры:  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 2$ ,  $c_3 = 5$ ,  $d_s = 4$ ,  $t_0 = 0$ .

Возьмем  $T = 0.2$ . При этом управление не имеет переключений при любом  $\delta$ . На рисунках 3.1а-в изображены компоненты оптимального управления, а на рисунке 3.1г изображена соответствующая оптимальная траектория при  $x_0 = 1$ ,  $\delta = 1$ .

Теперь возьмем  $T = 1$ . Тогда первые два управления могут иметь точки переключения при некоторых  $\delta$ , а третье управление – нет. Вычислим  $\bar{\delta}_i$ ,  $i = 1, 2$ :

$$\bar{\delta}_1 = 3.92,$$

$$\bar{\delta}_2 = 1.59.$$

Возьмём  $\delta = 1$ . При этом первая компонента управления имеет точку переключения  $\bar{t}_1 = 0.71$ , а вторая компонента имеет точку переключения  $\bar{t}_2 = 0.31$ . На рисунках 3.2а-в изображены компоненты оптимального управления, а на рисунке 3.2г изображена соответствующая оптимальная траектория при  $x_0 = 1$ .

### 3.5 Влияние коэффициента абсорбции $\delta$ на выигрыш

Мы рассмотрим только случай, когда управление не имеет переключений при любых  $\delta$ . Тогда с учетом оптимального управления (3.2) и оптимальной траектории (3.3), функ-

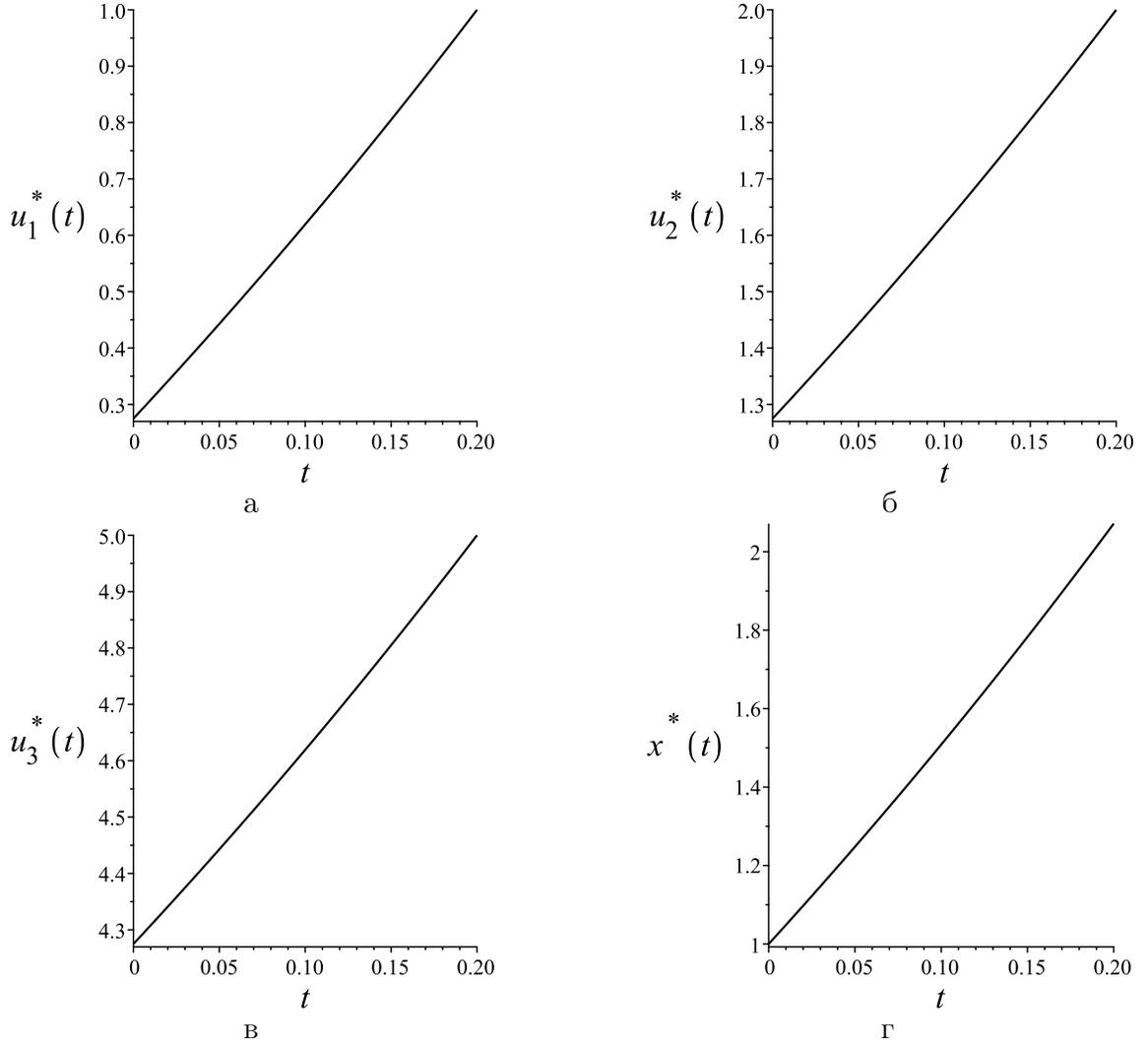


Рис. 3.1: Значения параметров:  $d_s = 4$ ,  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 2$ ,  $c_3 = 5$ ,  $t_0 = 0$ ,  $T = 0.2$ ,  $\delta = 1$ ,  $x_0 = 1$ , а-в) компоненты оптимального управления, г) оптимальная траектория

ционал выигрыша принимает вид:

$$K(x_0, u_1^*, u_2^*, u_3^*) = \frac{1}{4\delta^3} \left( -4d_s(-x_0\delta^2 + c_s\delta - 3d_s)e^{-\delta(T-t_0)} - 3d_s^2e^{-2\delta(T-t_0)} + \right. \\ \left. + 2(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)(T - t_0)\delta^3 - 4(-c_s t_0 + c_s T + x_0)d_s\delta^2 + 6d_s((T - t_0)d_s + \frac{2}{3}c_s)\delta - 9d_s^2 \right).$$

На рисунке 3.3 изображена зависимость выигрыша от коэффициента абсорбции в частном случае при отсутствии переключения управления.

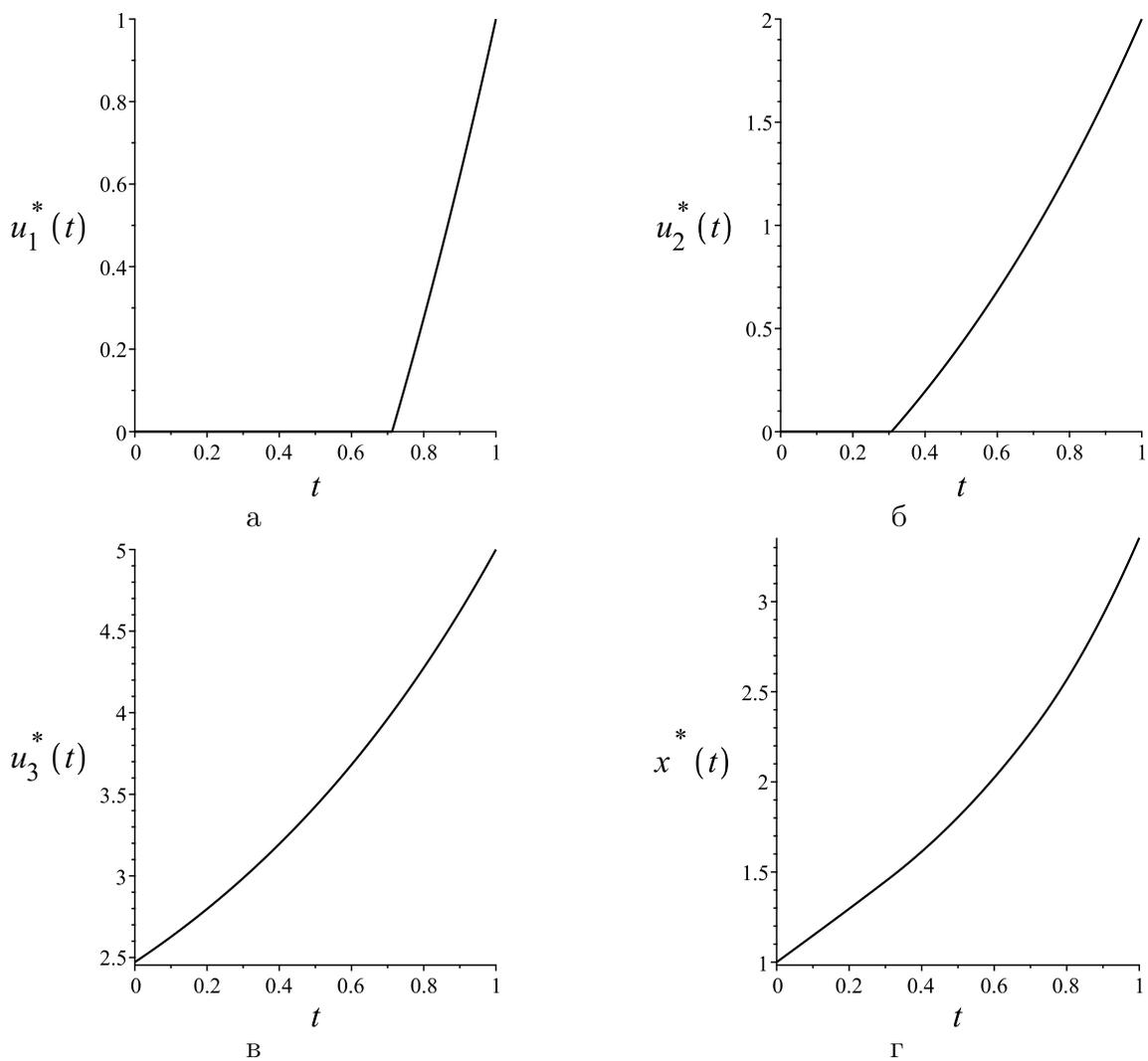


Рис. 3.2: Значения параметров:  $d_s = 4$ ,  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 2$ ,  $c_3 = 5$ ,  $t_0 = 0$ ,  $T = 1$ ,  $\delta = 1$ ,  $x_0 = 1$ , а-в) компоненты оптимального управления, г) оптимальная траектория

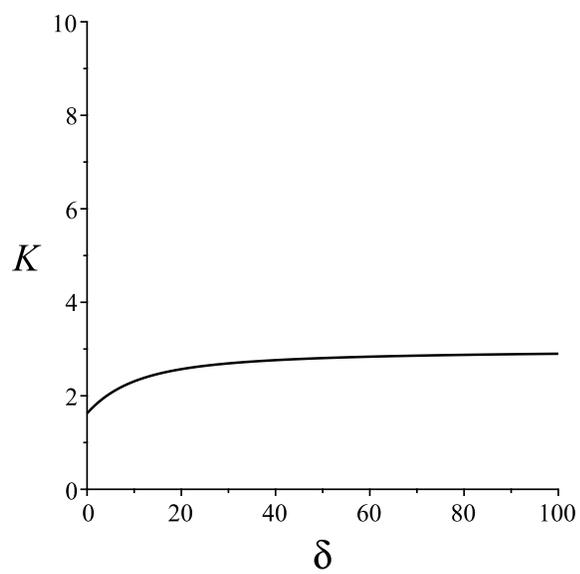


Рис. 3.3: Зависимость выигрыша от коэффициента абсорбции. Значения параметров:  $T = 0.2$ ,  $d_s = 4$ ,  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 2$ ,  $c_3 = 5$ ,  $t_0 = 0$ ,  $x_0 = 1$

## Глава 4

# Кооперативная дифференциальная игра управления объемами вредных выбросов с терминальной составляющей выигрыша

### 4.1 Постановка задачи кооперативной дифференциальной игры управления объемами вредных выбросов с терминальной составляющей выигрыша

Рассмотрим кооперативную постановку дифференциальной игры для трех игроков с терминальной составляющей выигрыша  $D_i x(T)$ .

Введем обозначение:

$$D_1 + D_2 + D_3 = D_s.$$

Тогда интегральный выигрыш имеет вид:

$$\begin{aligned} K(x_0, u_1, u_2, u_3) &= \sum_{i=1}^3 \int_{t_0}^T (c_i u_i(t) - \frac{1}{2} u_i^2(t) - d_i x) dt - D_s x(T) = \\ &= \sum_{i=1}^3 \int_{t_0}^T ((c_i - \frac{1}{2} u_i(t)) u_i(t) - d_i x) dt - D_s x(T) = \\ &= \int_{t_0}^T ((c_1 - \frac{1}{2} u_1(t)) u_1(t) - d_1 x) dt + \int_{t_0}^T ((c_2 - \frac{1}{2} u_2(t)) u_2(t) - d_2 x) dt + \\ &+ \int_{t_0}^T ((c_3 - \frac{1}{2} u_3(t)) u_3(t) - d_3 x) dt - D_s x(T). \end{aligned}$$

## 4.2 Применение принципа максимума Понтрягина

Необходимо максимизировать функционал выигрыша. Для решения этой задачи используем принцип максимума Понтрягина. Построим Гамильтониан:

$$H_i(x, u, \Psi) = \sum_{i=1}^3 (c_i - \frac{1}{2}u_i(t))u_i(t) - \sum_{i=1}^3 d_i x + \Psi(u_1 + u_2 + u_3 - \delta x(t)).$$

Дифференцируем по  $u_i$ :

$$\frac{\partial H(x, u, \Psi)}{\partial u_i} = c_i - u_i(t) + \Psi = 0. \quad (4.1)$$

С учетом сопряженного уравнения:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Дифференцируем по  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(x, u, \Psi)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{i=1}^3 (c_i - \frac{1}{2}u_i(t))u_i(t) - \sum_{i=1}^3 d_i x + \Psi(u_1 + u_2 + u_3 - \delta x(t)) \right) = \\ &= -d_s - \delta \Psi, \end{aligned}$$

$$d_1 + d_2 + d_3 = d_s,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = d_s + \delta \Psi.$$

И с учетом условия трансверсальности:

$$\Psi(T) = \frac{d}{dx(T)} K,$$

$$\Psi(T) = -D_s,$$

$$\Psi(t) = \frac{-d_s + e^{\delta(t-T)}(d_s - \delta D_s)}{\delta}.$$

С учетом полученного значения выражения дифференциала принимает вид:

$$u_i^*(t) = c_i + \frac{-d_s + e^{\delta(t-T)}(d_s - \delta D_s)}{\delta}, \quad (4.2)$$

$$u^*(t) = \begin{pmatrix} c_1 + \frac{-d_s + e^{\delta(t-T)}(d_s - \delta D_s)}{\delta} \\ c_2 + \frac{-d_s + e^{\delta(t-T)}(d_s - \delta D_s)}{\delta} \\ c_3 + \frac{-d_s + e^{\delta(t-T)}(d_s - \delta D_s)}{\delta} \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Это оптимальное управление.

Найдем оптимальную траекторию:

$$\dot{x}(t) = c_1 + c_2 + c_3 + 3 \frac{-d_s + e^{\delta(t-T)}(d_s - \delta D_s)}{\delta} - \delta x(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

С учетом обозначения

$$c_1 + c_2 + c_3 = c_s$$

дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\dot{x}(t) = c_s + 3 \frac{-d_s + e^{\delta(t-T)}(d_s - \delta D_s)}{\delta} - \delta x(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Его решение есть оптимальная траектория:

$$x^*(t) = \frac{1}{2\delta^2} e^{-\delta(t-T)} (3d_s(e^{\delta t} - e^{\delta t_0})(e^{\delta t} - 2e^{\delta T} + e^{\delta t_0}) + \delta(-3D_s e^{2\delta t} + 2c_s e^{\delta(t+T)} + 3D_s e^{2\delta t_0} - 2c_s e^{\delta(T+t_0)} + 2\delta^{\delta(T+t_0)} x_0)). \quad (4.4)$$

### 4.3 Анализ оптимального управления объемами вредных выбросов на наличие точек переключения

Проанализируем оптимальное управление  $u^*(t)$ , используя утверждение 3.

Условие, при котором  $i$ -ая компонента управления не будет иметь точек переключения ни при каких  $\delta$ :

$$T \leq \frac{c_i - D_s}{d_s} + t_0. \quad (4.5)$$

При этом управление имеет вид (4.2).

Если условие (4.5) нарушается, то рассматриваем 2 случая:

I.  $c_i \geq D_s$ .

При достаточно малых  $\delta$   $i$ -ая компонента управления имеет ровно одну точку переключения в момент времени

$$\bar{t}_i = \frac{1}{\delta} \ln \left( \frac{c_i - D_s}{D_s - d_s/\delta} + 1 \right) + T,$$

а при достаточно больших  $\delta$  управление не имеет точек переключения. Переходное значение  $\bar{\delta}_i$  для  $i$ -ой компоненты может быть найдено из уравнения

$$c_i - D_s + \left( 1 - e^{-\bar{\delta}_i(T-t_0)} \right) \left( D_s - \frac{d_s}{\bar{\delta}_i} \right) = 0.$$

Это уравнение можно решить численно.

Получаем, что если  $\delta \leq \bar{\delta}_i$ , то  $i$ -ая компонента управления имеет вид (4.2).

Если же  $\delta > \bar{\delta}_i$ , то  $i$ -ая компонента управления имеет вид:

$$u_i^*(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_0, \bar{t}_i], \\ c_i - D_s (1 - e^{-\delta(T-t)}) \left( D_s - \frac{d_s}{\delta} \right), & t \in (\bar{t}_i, T]. \end{cases} \quad (4.6)$$

II.  $c < D$ .

Если  $\delta \leq \bar{\delta}_i$ , то управление тождественно равно нулю. Если же  $\delta > \bar{\delta}_i$ , то  $i$ -ая компонента управления имеет вид:

$$u^*(t) = \begin{cases} c_i - D_s + (1 - e^{-\delta(T-t)}) \left( D_s - \frac{d_s}{\delta} \right), & t \in [t_0, \bar{t}_i], \\ 0, & t \in (\bar{t}_i, T]. \end{cases} \quad (4.7)$$

## 4.4 Влияние коэффициента абсорбции $\delta$ на выигрыш

Мы рассмотрим случай, когда управление не имеет переключений при любых  $\delta$ . Тогда с учетом оптимального управления (4.3) и оптимальной траектории (4.4), функционал выигрыша принимает вид:

$$K(x_0, u_1^*, u_2^*, u_3^*) = \frac{1}{4\delta^3} \left( 4(D_s\delta - d_s)(-x_0\delta^2 + c_s\delta - 3d_s)e^{-\delta(T-t_0)} - \right. \\ \left. - 3(D_s\delta - d_s)^2 e^{-2\delta(T-t_0)} + 2(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)(T - t_0)\delta^3 + 4((-T + t_0)c_s - x_0)d_s + \right. \\ \left. + 3D_s(D_s - 4/3c_s)\delta^2 + 6((T - t_0)d_s + D_s + 2/3c_s)d_s\delta - 9d_s^2 \right).$$

На рисунке 4.1 изображена зависимость выигрыша с терминальной составляющей от коэффициента абсорбции в частном случае при отсутствии переключения управления.

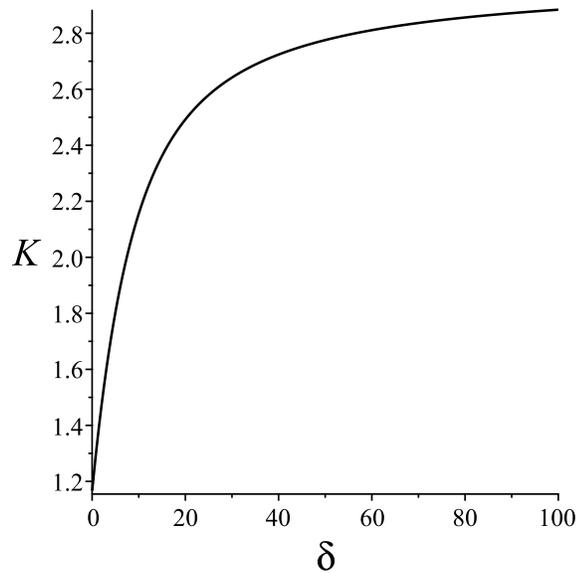


Рис. 4.1: Зависимость выигрыша с терминальной составляющей от коэффициента абсорбции. Значения параметров:  $d_s = 4$ ,  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 2$ ,  $c_3 = 5$ ,  $T = 0.2$ ,  $D = 0.2$ ,  $x_0 = 1$ ,  $t_0 = 0$

## Глава 5

# Некооперативная дифференциальная игра управления объемами вредных выбросов

### 5.1 Постановка задачи дифференциальной игры управления объемами вредных выбросов в некооперативной постановке

Рассмотрим некооперативный вариант игры для трех игроков. В таком случае:

$$\dot{x}(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) - \delta x(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (5.1)$$

Построим функционалы выигрыша для каждого игрока:

$$K_1(u_1) = \int_{t_0}^T ((c_1 - \frac{1}{2}u_1(t))u_1(t) - d_1x) dt,$$

$$K_2(u_2) = \int_{t_0}^T ((c_2 - \frac{1}{2}u_2(t))u_2(t) - d_2x) dt,$$

$$K_3(u_3) = \int_{t_0}^T ((c_3 - \frac{1}{2}u_3(t))u_3(t) - d_3x) dt.$$

### 5.2 Применение принципа максимума Понтрягина

Необходимо максимизировать функционал выигрыша. Для решения этой задачи используем принцип максимума Понтрягина. Построим Гамильтонианы:

$$H_1(x, u, \Psi) = (c_1 - \frac{1}{2}u_1(t))u_1(t) - d_1x + \Psi(u_1 + u_2 + u_3 - \delta x(t)),$$

$$H_2(x, u, \Psi) = (c_2 - \frac{1}{2}u_2(t))u_2(t) - d_2x + \Psi(u_1 + u_2 + u_3 - \delta x(t)),$$

$$H_3(x, u, \Psi) = (c_3 - \frac{1}{2}u_3(t))u_3(t) - d_3x + \Psi(u_1 + u_2 + u_3 - \delta x(t)).$$

Дифференцируем  $H_i$  по  $u_i$ :

$$\frac{\partial H_i(x, u, \Psi)}{\partial u_i} = c_i - u_i(t) + \Psi = 0.$$

С учетом сопряженного уравнения:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial H_i}{\partial x}.$$

Дифференцируем по  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_i(x, u, \Psi)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( (c_i - \frac{1}{2}u_i(t))u_i(t) - d_i x + \right. \\ &\quad \left. + \Psi(u_1 + u_2 + u_3 - \delta x(t)) \right) = -d_i - \delta \Psi, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= d_i + \delta \Psi, \\ \Psi(T) &= 0. \end{aligned}$$

Ищем решение:

$$\Psi(t) = \frac{-(d_i - e^{\delta(t-T)})d_i}{\delta} = d_i \frac{e^{\delta(t-T)} - 1}{\delta}.$$

Получаем управление, обеспечивающее равновесие по Нэшу:

$$u^N(t) = \begin{pmatrix} c_1 + d_1 \frac{e^{-\delta(T-t)} - 1}{\delta} \\ c_2 + d_2 \frac{e^{-\delta(T-t)} - 1}{\delta} \\ c_3 + d_3 \frac{e^{-\delta(T-t)} - 1}{\delta} \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

С учетом найденного оптимального управления исходное дифференциальное уравнение принимает вид:

$$\dot{x}(t) = c_s + d_s \frac{e^{-\delta(T-t)} - 1}{\delta} - \delta x(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

где

$$d_s = d_1 + d_2 + d_3,$$

$$c_s = c_1 + c_2 + c_3.$$

Ищем решение, это будет траектория, соответствующая управлению, обеспечивающему равновесие по Нэшу:

$$x^N(t) = \frac{1}{2\delta^2} \left( -e^{-\delta(T+t-2t_0)} d_s + 2(x_0 \delta^2 - c_s \delta + d_s) e^{-\delta(t-t_0)} + d_s e^{-\delta(T-t)} + 2c_s \delta - 2d_s \right). \quad (5.3)$$

### 5.3 Сравнение с кооперативной постановкой задачи управления объемами вредных выбросов

Сравним траекторию, соответствующую оптимальному управлению в кооперативной постановке задачи, и траекторию, соответствующую управлению равновесному по Нэшу в некооперативном случае.

**Утверждение 4.** При отсутствии в управлении точек перемен знака (точек переключения), значение  $x^*(t)$  меньше значения  $x^N(t)$  для любых  $t \in (t_0, T]$ .

*Доказательство.* Вычтем из  $x^N(t)$  функцию  $x^*(t)$ :

$$\begin{aligned} x^N(t) - x^*(t) &= \frac{1}{2\delta^2} \left( -e^{-\delta(T+t-2t_0)}d_s + 2(x_0\delta^2 - c_s\delta + d_s)e^{-\delta(t-t_0)} + d_se^{-\delta(T-t)} + 2c_s\delta - 2d_s \right. \\ &\quad \left. + 3e^{-\delta(T+t-2t_0)}d_s - (2x_0\delta^2 - 2c_s\delta + 6d_s)e^{-\delta(t-t_0)} - 3d_se^{-\delta(T-t)} - 2c_s\delta + 6d_s \right) = \\ &= \frac{1}{2\delta^2} \left( 2e^{-\delta(T+t-2t_0)}d_s - 4d_se^{-\delta(t-t_0)} - 2d_se^{-\delta(T-t)} + 4d_s \right) = \\ &= \frac{d_s}{\delta^2} \left( e^{-\delta(T+t-2t_0)} - 2e^{-\delta(t-t_0)} - e^{-\delta(T-t)} + 2 \right). \end{aligned}$$

Можно заметить, что полученное выражение раскладывается на множители:

$$\begin{aligned} x^N(t) - x^*(t) &= \frac{d_s}{\delta^2} \left( e^{-\delta(T-t)} (e^{-2\delta(t-t_0)} - 1) + 2(1 - e^{-\delta(t-t_0)}) \right) = \\ &= \frac{d_s}{\delta^2} (1 - e^{-\delta(t-t_0)}) \left( 2 - e^{-\delta(T-t)} (1 + e^{-\delta(t-t_0)}) \right). \end{aligned}$$

Заметим, что полученное выражение неотрицательно, а в ноль оно обращается только в случае, если  $t = t_0$ .  $\square$

Таким образом, в кооперативном случае суммарный уровень вреда, наносимого окружающей среде, всегда ниже, чем в некооперативном случае. На рисунке 5.1 изображены кривые  $x^*(t)$  и  $x^N(t)$  в частном случае.

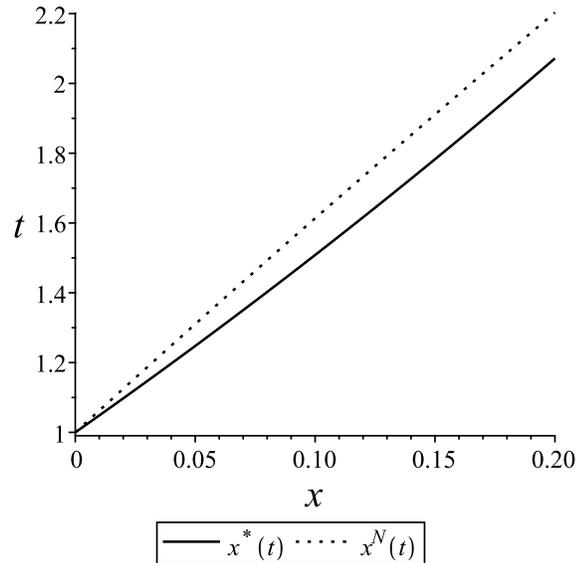


Рис. 5.1: Зависимости  $x^*(t)$  и  $x^N(t)$ . Значения параметров:  $T = 0.2$ ,  $d_s = 4$ ,  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 2$ ,  $c_3 = 5$ ,  $\delta = 1$ ,  $t_0 = 0$ ,  $x_0 = 1$

## Выводы

В данной работе исследована структура теоретико-игрового подхода в задаче управления объемами вредных выбросов: рассмотрена модель экологического регулирования, а именно модель управления объемами вредных выбросов.

В первой и во второй главе рассмотрена задача оптимального управления объемами вредных выбросов с интегральным функционалом выигрыша без терминальной составляющей и с терминальной составляющей соответственно. Построено оптимальное управление и найдены условия на параметры модели, при которых полученное управление неотрицательно при любом коэффициенте абсорбции. В случае, когда эти условия нарушаются, найдено критическое значение коэффициента абсорбции. Если коэффициент абсорбции больше этого значения, то управление неотрицательно, а если меньше, может принимать отрицательные значения. Найдена точка смены знака (точка переключения).

В главах 3 и 4 эти результаты перенесены на случай кооперативной игры с тремя игроками. В последней главе рассмотрен некооперативный вариант игры с тремя игроками, найдено равновесие по Нэшу. Полученный результат сравнивается с результатом кооперативной игры. Показано, что при кооперативном варианте игры загрязнение окружающей среды всегда меньше.

## Заключение

Предмет исследования данной выпускной квалификационной работы бакалавра играет ключевую роль в разработке мер контроля загрязнений окружающей среды, поэтому представляется актуальным.

В работе произведен анализ модели экологического регулирования на чувствительность в зависимости от соотношений коэффициентов. Найдено оптимальное управление для различных вариантов постановки задачи. Управление исследовано на наличие точек перемена знака (точек переключения). Также рассмотрено влияние коэффициента абсорбции на выигрыш. Рассмотрены задача оптимального управления объемами вредных выбросов, дифференциальная игра управления объемами вредных выбросов в кооперативной постановке, дифференциальная игра управления объемами вредных выбросов в некооперативной постановке. Рассмотрены задачи со смешанным функционалом выигрыша.

Также проведен сравнительный анализ кооперативного и некооперативного варианта игры с целью оценки суммарного уровня вреда, наносимого окружающей среде.

В дальнейшем можно рассмотреть более общие случаи постановки задачи. Можно рассмотреть случай произвольного количества игроков, изменить вид терминальной составляющей. Кроме того, нужно найти условия того, что выигрыш является неубывающей функцией от коэффициента абсорбции, что соответствует, по нашему мнению, физическому смыслу задачи.

# Литература

- [1] *Петросян Л. А., Захаров В. В.* Введение в математическую экологию. -Л.: Изд-во Ленингр. Ун-та, 1986. 224 с.
- [2] *Haurie A., Zaccour G.* Differential Game Models of Global Environmental Management // Control and Game-Theoretic Models of the Environment. Birkhauser, Boston, MA. 1995. pp. 3-23.
- [3] *Petrosyan L., Zaccour G.* Time-consistent Shapley Value Allocation of Pollution Cost Reduction // Journal of Economic Dynamics and Control. No. 27. 2003. pp. 381-398.
- [4] *Козловская Н. В.* Теоретико-игровые модели экологического регулирования. Диссертация кандидата физико-математических наук. Санкт-Петербургский Государственный Университет. 2011. 144 с.
- [5] *Breton M., Zaccour G., Zahaf M.* A differential game of joint implementation of environmental projects // Automatica, Vol. 41(10). 2005. pp. 1737–1749.
- [6] *Dockner E., Jorgensen S., Long N., Sorger G.* Differential Games in Economics and Management Science. Cambridge: Cambridge University Press. 2000. 396 p.
- [7] *Gromova E. V.* The Shapley Value as a Sustainable Cooperative Solution in Differential Games of Three Players // Recent Advances in Game Theory and Applications, Static & Dynamic Game Theory: Foundations & Applications. Springer. 2016. pp. 67-89.
- [8] *Понтрягин Л. С.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961. 392 с.

## Приложение. Листинг программ в Maple

**Задача оптимального управления объемами вредных выбросов.  
Построение оптимального управления и оптимальной траектории**

```
T := .25;
d := 1;
c := 2;
t0 := 0;
delta := .2;
x0 := 1/4;
if x0 > (d^2*(T-t0)^2-3*c*d*(T-t0)+3*c^2)/(6*d) then
print('Выигрыш может принимать отрицательные значения');
end if;
u := c+d*(exp(-delta*(T-t))-1)/delta;
if T > c/d+t0 then
deltabar := d/c+LambertW(0, -d*(T-t0)*exp(-d*(T-t0)/c)/c)/(T-t0);
if evalf(deltabar-delta) > 0 then
t1 := T+ln(1-c*delta/d)/delta;
u1 := u;
u := piecewise(t > t1, u1, 0);
end if;
end if;
ode := diff(x(t), t) = u-delta*x(t);
ics := x(t0) = x0;
x := simplify(rhs(dsolve({ics, ode})));
plot(x, t = t0 .. T);
```

**Задача оптимального управления объемами вредных выбросов.  
Зависимость выигрыша от коэффициента абсорбции в случае от-  
сутствия переключений управления**

```
T := .25;
d := 1;
c := 2;
t0 := 0;
x0 := 1/4;
u := c+d*(exp(-delta*(T-t))-1)/delta;
if T > c/d+t0 then
print("Есть переключение управления")
end if;
ode := diff(x(t), t) = u-delta*x(t);
ics := x(t0) = x0;
x := simplify(rhs(dsolve({ics, ode})));
K := 'assuming'([int((c-(1/2)*u)*u-d*x, t = t0 .. T)], [real]);
K := simplify(K);
```

```
plot(K, delta = 0 .. 100);
```

**Задача оптимального управления объемами вредных выбросов.  
Зависимость выигрыша от коэффициента абсорбции при наличии  
точек переключения управления**

```
T := 4;
d := 1;
c := 2;
t0 := 0;
x0 := 1;
u := c+d*(exp(-delta*(T-t))-1)/delta;
if T <= c/d+t0 then
print("Нет переключений управления")
end if;
deltabar := d/c+LambertW(0, -d*(T-t0)*exp(-d*(T-t0)/c)/c)/(T-t0);
t1 := T+ln(1-c*delta/d)/delta;
ode := diff(x11(t), t) = -delta*x11(t);
ics := x11(t0) = x0;
x11 := simplify(rhs(dsolve({ics, ode})));
ode := diff(x12(t), t) = u-delta*x12(t);
ics := x12(t1) = simplify(eval(x11, t = t1));
x12 := simplify(rhs(dsolve({ics, ode})));
ode := diff(x2(t), t) = u-delta*x2(t);
ics := x2(t0) = x0;
x2 := simplify(rhs(dsolve({ics, ode})));
K1 := 'assuming'([int(-d*x11, t = t0 .. t1)...
    +int((c-(1/2)*u)*u-d*x12, t = t1 .. T)], [real]);
K1 := simplify(K1);
K2 := 'assuming'([int((c-(1/2)*u)*u-d*x2, t = t0 .. T)], [real]);
K2 := simplify(K2);
K := piecewise(delta < deltabar, K1, K2);
plot(K, delta = 0 .. 20, color = black, labels = ['delta', 'K'],...
    size = [350, 350]);
```

**Задача оптимального управления объемами вредных выбросов  
с терминальной составляющей выигрыша. Зависимость выигрыша  
от коэффициента абсорбции в случае отсутствия переключений  
управления**

```
u := c-dd+(1-exp(-delta*(T-t)))*(dd-d/delta);
ics := x(t0) = x0;
ode := diff(x(t), t) = u-delta*x(t);
x := simplify(rhs(dsolve({ics, ode})));
K := 'assuming'([int((c-(1/2)*u)*u-d*x, t = t0 .. T)], [real]);
simplify(K);
```

```

T := 1;
d := 1;
c := 2;
t0 := 0;
x0 := 1;
dd := .5;
plot(K, delta = 0 .. 30, color = black, labels = ['delta', 'K'],...
      size = [350, 350]);

```

### Кооперативная дифференциальная игра управления объемами вредных выбросов. Построение оптимального управления и оптимальной траектории

```

u1 := c1+ds*(exp(-delta*(T-t))-1)/delta;
u2 := c2+ds*(exp(-delta*(T-t))-1)/delta;
u3 := c3+ds*(exp(-delta*(T-t))-1)/delta;
ode := diff(x(t), t) = u1+u2+u3-delta*x(t);
ics := x(t0) = x0;
x := simplify(rhs(dsolve({ics, ode})));
K := 'assuming'([int((c1-(1/2)*u1)*u1, t = t0 .. T)...
               +int((c2-(1/2)*u2)*u2, t = t0 .. T)+int((c3-(1/2)*u3)*u3, t = t0 .. T)...
               -ds*(int(x, t = t0 .. T))], [real]);
K := simplify(K);
T := .2;
ds := 4;
c1 := 1;
c2 := 2;
c3 := 5;
t0 := 0;
x0 := 1;
plot(K, delta = 0 .. 100, y = 0 .. 10, color = black, ...
      labels = ['delta', 'K'], size = [350, 350]);

```

### Кооперативная дифференциальная игра управления объемами вредных выбросов. Зависимость выигрыша от коэффициента абсорбции в случае отсутствия переключения управления

```

u1 := c1+(-ds+exp(-delta*(T-t))*(-Ds*delta+ds))/delta;
u2 := c2+(-ds+exp(-delta*(T-t))*(-Ds*delta+ds))/delta;
u3 := c3+(-ds+exp(-delta*(T-t))*(-Ds*delta+ds))/delta;
ode := diff(x(t), t) = u1+u2+u3-delta*x(t);
ics := x(t0) = x0;
x := simplify(rhs(dsolve({ics, ode})));
K := 'assuming'([int((c1-(1/2)*u1)*u1, t = t0 .. T)...
               +int((c2-(1/2)*u2)*u2, t = t0 .. T)+int((c3-(1/2)*u3)*u3, t = t0 .. T)...
               -ds*(int(x, t = t0 .. T))-Ds*(eval(x, t = T))], [real]);

```

```

K := simplify(K);
T := .2;
ds := 4;
c1 := 1;
c2 := 2;
c3 := 5;
t0 := 0;
x0 := 1;
Ds := .2;
plot(K, delta = 0 .. 100, color = black, labels = ['delta', 'K'],...
      size = [350, 350]);

```

### Сравнение кооперативной и некооперативной постановок задач управления объемами вредных выбросов

```

u1 := c1+ds*(exp(-delta*(T-t))-1)/delta;
u2 := c2+ds*(exp(-delta*(T-t))-1)/delta;
u3 := c3+ds*(exp(-delta*(T-t))-1)/delta;
ode := diff(x(t), t) = u1+u2+u3-delta*x(t);
ics := x(t0) = x0;
x := simplify(rhs(dsolve({ics, ode})));
x11 :=(1/2)*(-exp(-delta*(T+t-2*t0))*ds...
      +(2*(x0*delta^2+(-c1-c2-c3)*delta+ds))*exp(-delta*(t-t0))...
      +ds*exp(-delta*(T-t))+(2*(c1+c2+c3))*delta-2*ds)/delta^2;
T := .2;
ds := 4;
c1 := 1;
c2 := 2;
c3 := 5;
t0 := 0;
x0 := 1;
delta := 1;
plot([x, x11], t = 0 .. T, color = black, labels = ['x', 't'],...
      size = [350, 350], linestyle = [solid, dot], legend = ['x', 'x^N']);

```