

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ – ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ
КАФЕДРА МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ И КОМПЬЮТЕРНЫХ
СИСТЕМ

Чубаров Дмитрий Александрович

Выпускная квалификационная работа бакалавра

**Математическое моделирование межпозвонкового
диска**

Направление 010302

«Прикладная математика и информатика»

Образовательная программа "Прикладная математика, фундаментальная ин-
форматика и программирование"

Руководитель образовательной программы,
доктор физ.-мат. наук, профессор
Егоров Н.В.

Научный руководитель,
доктор физ.-мат. наук, профессор
Трегубов В. П

Санкт-Петербург

2019

Содержание

Введение	3
Постановка задачи	6
Обзор литературы	8
Глава 1. Математическая модель	12
1.1. Геометрическая формализация объекта.....	12
1.2. Метод Рэлея	13
Глава 2. Описание алгоритма	15
2.1. Предварительные вычисления	15
2.2. Шаг $s = 0$. Поворот пластин	16
2.3. Процесс диффузии	18
Результаты эксперимента	21
Выводы	22
Заключение	23
Список литературы	24
Приложение	27

Введение

Межпозвонковые диски представляют собой фиброзно-хрящевые суставы, связывающие между собой позвонки. Они состоят из пульпозного ядра и фиброзного кольца [1] (рис. 1), заключенных между жесткими хрящевыми пластинами, с помощью которых диски крепятся к позвонкам. Всего в позвоночнике человека 23 диска: 6 в области шеи (шейный отдел), 12 в области средней части спины (грудной отдел) и 5 в области нижней части спины (поясничный отдел). Основная их функция - механическая: они обеспечивают общую гибкость позвоночника, передают и распределяют большие нагрузки через него. Для выполнения этих задач межпозвонковые диски имеют сложную структуру.

У многих людей наблюдаются дегенеративные изменения в межпозвонковых дисках вследствие старения или патологических процессов. Эти изменения влияют на их состав и структуру, а также на механические функции. Боль в спине часто является клиническим следствием дегенерации диска.

До 40 лет, у примерно 25% людей наблюдаются признаки дегенеративных изменений межпозвонковых дисков. После 40-ка они наблюдаются у более чем 60% людей на одном или нескольких уровнях МРТ [2]. Эти изменения не связаны с болью и являются нормальной частью процесса старения. Одним из таких изменений является дегидратация пульпозного ядра, что ограничивает способность ядра впитывать воду, за счет уменьшения концентрации протеогликанов в нем. Это частично является причиной уменьшения роста с возрастом. Фиброзное кольцо также становится слабее, что увеличивает риск его разрыва и образования межпозвонковой грыжи.

Однако, дегенеративные процессы происходят не только из-за старения, но и вследствие предельных механических напряжений: во время максимальной физической нагрузки или травм позвоночника [3]. Если несбалансированное механическое давление существенно деформирует фиброз-

ное кольцо, часть ядра может выпятиться настолько, что попросту вылезает наружу, прорвав фиброзное кольцо. Это «выпячивание» пульпозного ядра называется межпозвонковой грыжей и может прогрессировать, оказывая давление на соседние нервные и мышечные ткани, что приводит к защемлению нервов и проявлению характерных симптомов: боль в спине, парестезия, онемение конечностей, потеря мышечного тонуса, а также снижением гомеопатической эффективности.

Существует, в целом, две разновидности способов лечения межпозвонковых грыж: хирургические (операционные) и консервативные (безоперационные). Хирургическое вмешательство рекомендуется применять лишь в крайних случаях, так как оно влечет за собой серьезные последствия, главными из которых являются высокий риск рецидивов и травмы позвоночника во время операции, которые могут привести к инвалидности. Однако, после операции облегчение наступает очень быстро. Все больше врачей на сегодняшний день отдают предпочтение консервативным методам лечения. К ним относятся медикаментозное лечение, массажи, иглореабилитация. Все они не избавляют от самой грыжи, однако снимают симптомы и воспаление.

Методы лечения, основанные на удалении грыжи или поддержании бессимптомного состояния, не призваны к восстановлению структуры и биомеханических свойств позвоночника. Это невозможно ввиду того, что в межпозвонковых дисках отсутствуют нервы и кровеносные сосуды, что в принципе исключает возможность их регенерации. Поэтому в некоторых случаях имеет смысл имплантация искусственных межпозвоковых дисков. Эндопротезирование проводится либо в шейном, либо в поясничном отделах, так как для грудного отдела дегенеративное поражение межпозвоковых дисков нетипично.

Для шейного и поясничного отделов для протезирования применяют различные системы. Это соответственно цервикальные искусственные диски и люмбальные искусственные диски. Конструктивно они очень похожи, и повторяют строение натуральных дисков: две металлические пла-

стины, опирающиеся на внешнее кольцо, внутри которого установлено ядро из эластичных полимеров. Разница между этими двумя видами протезов в том, что цервикальные искусственные диски имеют повышенную подвижность, легче разгибаются и сгибаются, что больше подходит для подвижного шейного отдела. В то время, как люмбальные диски больше по размеру и жестче, с более твердым ядром, что позволяет системе выдерживать более высокие нагрузки, которые как раз приходится на поясничную зону.

Чтобы сконструировать подходящий искусственный межпозвоночный диск, требуется заранее выяснить его параметры. Конечно, чтобы у пациента впоследствии не было проблем со здоровьем, конфигурация имплант должна быть максимально близка к конфигурации натурального межпозвоночного диска и не нарушать экосистему организма. Также важно знать, как имплант поведет себя при различных нагрузках и изгибах.

Поэтому, существует значительный интерес к пониманию того, как приложенная нагрузка влияет на сами межпозвоночные диски, какие процессы при этом происходят, какую внутреннюю структуру они имеют и как она влияет на поведение дисков.

Постановка задачи

Рассмотрим детально структуру межпозвонкового диска (рис. 1). Он представляет собой упругую прокладку между соседними позвонками. В нем выделяют две основные части:

1. Центральная часть - пульпозное ядро - представляет собой густое гелеобразное вещество, на 88% состоящее из воды.
2. Периферическая часть - фиброзное кольцо. Оно имеет волокнистую структуру и состоит из концентрических нитей, косо пересекающихся друг с другом.

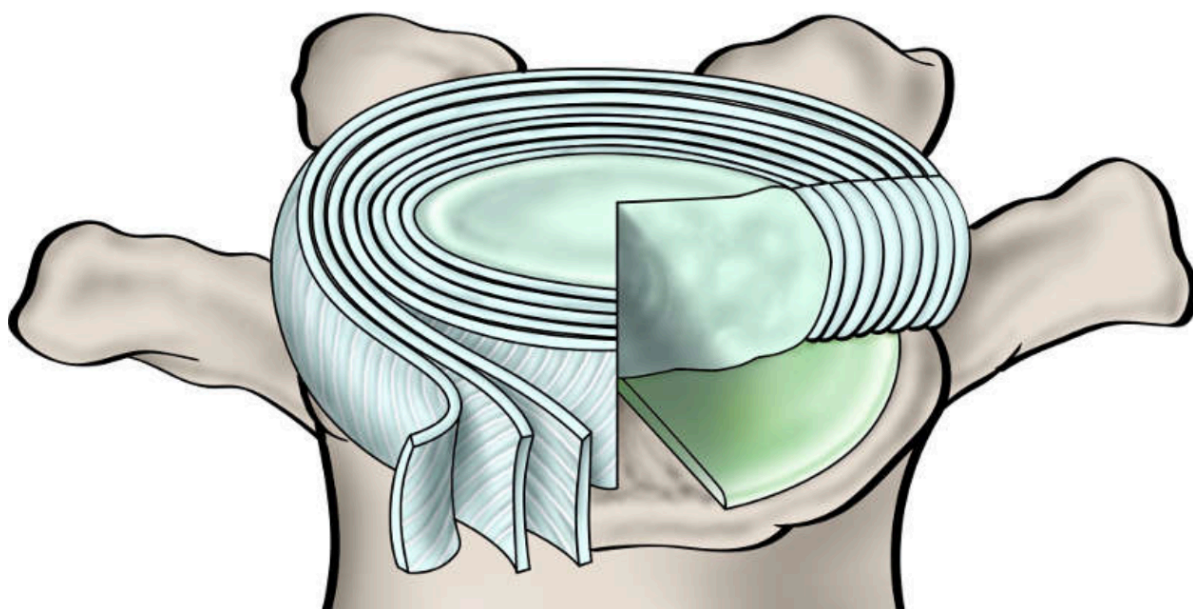


Рис. 1. Схема строения межпозвонкового диска

Сверху и снизу диски покрыты тонким слоем белого хряща - симфизом, с помощью которого они крепятся к соседним позвонкам. Также с его помощью осуществляется питание тканей дисков за счет имеющихся в позвонках кровеносных сосудов.

По большей степени межпозвонковый диск состоит из коллагеновых волокон, которые находятся в среде из протеогликанового геля. Коллаген здесь является основным структурным белком. Фиброзное кольцо состоит из коллагена 1-го типа, ядро и хрящевая пластинка - из коллагена 2-го типа

[4]. В фиброзном кольце коллагеновые волокна формируют сложную структуру: снаружи они направлены вертикально, по мере приближения к пульпозному ядру становятся все более горизонтальными, а в слое, который соприкасается с ядром, имеют почти горизонтальное направление. Такая структура обеспечивает армирующую функцию, задерживает в диске гликозаминогликаны, которые связывают воду, и позволяет выдерживать высокое давление (до 2.5 мПа в поясничном отделе позвоночника [5]).

В нормальном, не нагруженном состоянии давление внутри диска, вообще говоря, превосходит атмосферное, ввиду наличия вертикальной нагрузки и предварительного сжатия межпозвонковыми связками. И это давление изменяется при появлении дополнительной нагрузки на позвоночник.

Когда позвоночник сжимается в направлении вертикальной оси, сила, приложенная к межпозвонковому диску, уравнивается увеличением внутреннего давления. Из-за этого происходит растяжения волокон кольцевого пространства так, что это приводит к выпуклости боковых стенок фиброзных колец.

Целью данной работы является разработка модели, которая описывает этот процесс. А также учитывает, что давление внутри межпозвонкового диска, сразу после приложения нагрузки, распределяется неравномерно, и в результате межкольцевой диффузии жидкости, со временем становится одинаковым по всему объему диска.

Для этого **требовалось решить следующие задачи:**

- описание межпозвонкового диска и его внутренних процессов как объектов моделирования,
- построение математической модели с учетом атмосферного (внешнего) давления и предварительного сжатия с прогибом стенок,
- разработка и программная реализация алгоритма решения поставленной задачи,
- проведение численного эксперимента.

Обзор литературы

Согласно Варду и Нагендре [6], Основными подводными камнями в математическом моделировании биологических систем являются чрезмерная сложность, отсутствие достоверных экспериментальных данных и отсутствие проверки. Излишняя сложность приведет к созданию модели, включающей в себя слишком много деталей, влияние которых на модель будет сложно учесть. Во время процесса моделирования, как правило, необходимо вводить многочисленные допущения и упрощения, частично из-за отсутствия надежных данных о физических свойствах и для уменьшения сложности модели. Чтобы была уверенность в сделанных предположениях, модель должна быть проверена. Проверка проводится путем сопоставления численных прогнозов с результатами экспериментов в ситуациях, для которых построена модель. Поэтому важной частью исследований по биомеханике являются работы, дающие различные численные характеристики биологических систем.

Френсис [7] изучал размеры шейных позвонков и суставных граней из скелетного материала молодых людей. Ниссан и Гайлед [8] сообщили о средних размерах средне-сагиттального типа позвонков, которые были приближены кубическими формами в сочетании с треугольными элементами. Параметры для позвонков измеряли на основании данных латеральной рентгенограммы шейного отдела достаточно большого количества мужчин. Лю и другие [9] определили геометрию всех шейных позвонков молодых мужчин, измерив координаты предварительно отмеченных точек (по 36 точек на каждый позвонок) относительно центра масс тела позвонка. Кроме того была выяснена ориентация суставных граней и их соотношение с центральной площадью.

Не так давно Панджаби и другие [10] вычислили линейные размеры, углы и площади поперечных сечений большинства позвоночных компонентов исходя из трехмерных координат. Включая, среди прочего, размеры тела позвонка, позвоночного канала и ножек. Никаких результатов измере-

ний относительно размеров суставных граней не сообщалось. Однако авторы отметили, что их результаты совпадают с результатами других исследователей.

Интерес к моделированию межпозвонкового диска возник в связи с разработкой механических моделей человека для проектирования систем безопасности при аварийных ситуациях на транспорте, в частности на автомобиле.

Сначала в такого рода моделях механику позвоночника описывали двумя или тремя шарнирами, располагая их в областях шеи, тазобедренного сустава и в середине тела. На смену им пришли модели, представляющие позвоночник в виде твердых тел, соединенных некоторыми упругими элементами (пружинами, демпферами) [11], деформируемого стержня [12] или твердых тел (позвонков), соединенных деформируемыми телами (межпозвонковыми дисками) [13]. В некоторых работах межпозвонковый диск был представлен шарниром, вокруг которого могут поворачиваться соседние позвонки, в сочетании с пружинами, которые моделируют упругие свойства позвоночника.

Например, в работе [14] исследуются вибрационные характеристики позвоночника, и какое влияние на эти характеристики оказывает неоднородность и эффект демпфирования костных тканей. Позвонки представлены в твердыми пористыми демпферами, а межпозвонковые диски обычными шарнирами.

В [15] представлена математическая модель протеза межпозвонкового диска, которая основана на экспериментальном образце керамического эндопротеза, разработанном в Институте физики прочности и материаловедения СО РАН. Геометрическая модель включает в себя две противоположные пластины: верхнюю и нижнюю. Каждая содержит элементы, образующие пару сопряжения. Предполагается, что верхняя паутина крепится к нижней поверхности верхнего позвонка, а нижняя пластина, соответственно к верхней поверхности нижнего позвонка. Также предложен алгоритм, позволяющий перестраивать форму и размеры протеза в зависимости от

размера межпозвонкового пространства в конкретном отделе позвоночника конкретного индивида.

Подобного рода модели пригодны для исследований кратковременных, импульсных воздействий, однако не подходят, когда требуется решать медицинские проблемы, связанные с заболеваниями позвоночника, а также проблемы протезирования. В этом состоит актуальность разработки математических моделей, позволяющих выявить причины структурных нарушений, например грыж, наметить пути решения возникших проблем, и, конечно, служащих основой для конструирования более современных протезов.

Очень популярным после своего открытия стал метод конечных элементов. Это численный метод решения уравнений математической физики. Он широко используется для решения задач о деформируемом твердом теле, задач гидродинамики и электродинамики. Суть его отражена в названии. Область, в которой проходит поиск решения дифференциального уравнения, разбивается на конечное число элементов подходящей формы (например кубы, или пирамиды). В каждом элементе задается некоторая аппроксимирующая функция, равная нулю вне элемента. Ее коэффициенты выражаются из условий равенства функции на границах соседних элементов и находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений известными методами. Метод не зря пользуется популярностью, и имеет ряд преимуществ: форма моделируемого объекта может быть какой угодно сложности, а сетку в тех местах, где точность не важна, можно сделать более редкой, что позволит значительно упростить вычисления.

Доль в своей работе [16] с помощью метода конечных элементов представил решение стационарной задачи о деформировании функционального элемента поясничного отдела позвоночника, что позволило выяснить основные характеристики его тканей, а также нагрузки, которые действуют на него.

В исследовании [17] проведен анализ устойчивости и передачи нагрузок, создаваемых организмом, на позвоночник с естественным и искус-

ственным межпозвонковым диском. Анализ проводился для 2 случаев. В первом протез был установлен корректно и расположен в центре позвоночника, в то время как во втором случае была произведена неправильная имплантация. Проведенный анализ позволил оценить не только напряжения, но и области, подверженные риску при перегрузке функциональных элементов.

Для построения биомеханических моделей важно учитывать не только механическую составляющую, но и структурную. А также те внутренние процессы, которые происходят в стационарном состоянии биомеханической системы и то, как внешние возмущения могут на них повлиять, что является достаточно трудной задачей при использовании метода конечных элементов, или других упрощенных моделей позвоночника и межпозвонковых дисков.

В работах [18] и [19] показано, что при движениях позвоночника в сагиттальной плоскости происходит изменение давления внутри пульпозного ядра, а следовательно изменяются и механические напряжения, приложенные к межпозвонковому диску: повышения при сгибании, и понижения при разгибании. Также в [18] проводится анализ возможности возникновения диффузионных потоков вещества между ядром и околодисковым пространством при движениях позвоночника в сагиттальной плоскости. Это возможно, поскольку при нагрузке на межпозвонковые диски изменяется их биохимический состав и понижается концентрация лактата, что должно сопровождаться диффузионными процессами в двигательных сегментах позвоночника. [20]

Глава 1. Математическая модель

§ 1.1. Геометрическая формализация объекта

Геометрически, предложенная модель межпозвонкового диска представляет собой плоскую шайбу в цилиндрической системе координат с выпуклыми боковыми стенками, подверженная кольцевому и радиальному делению на ячейки (рис. 2, 3). Пульпозное ядро также принято считать кольцом, но «вырожденным», нулевым.

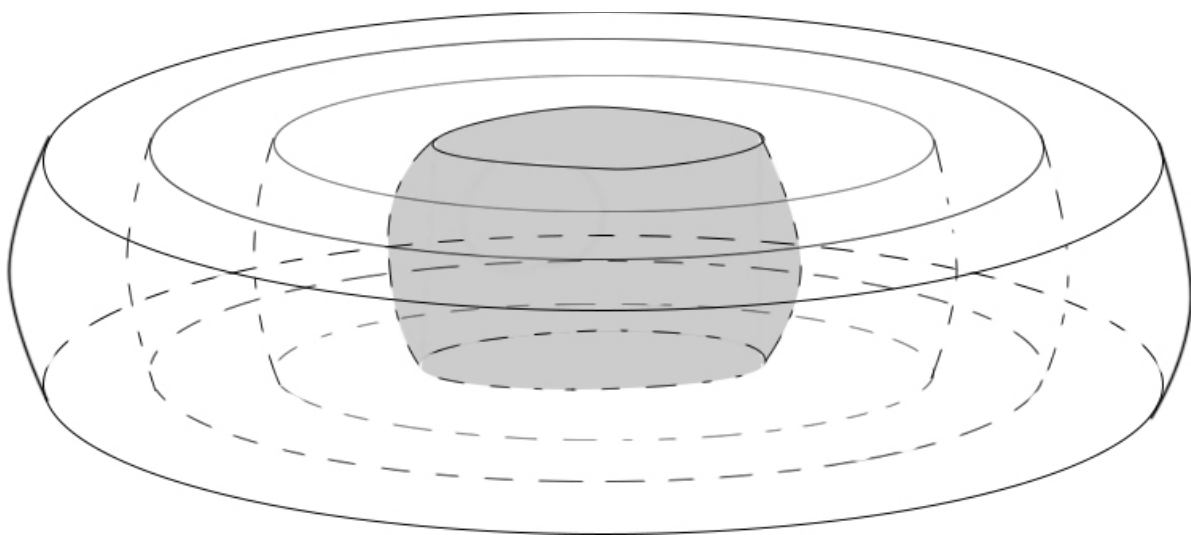


рис. 2. Кольцевое деление

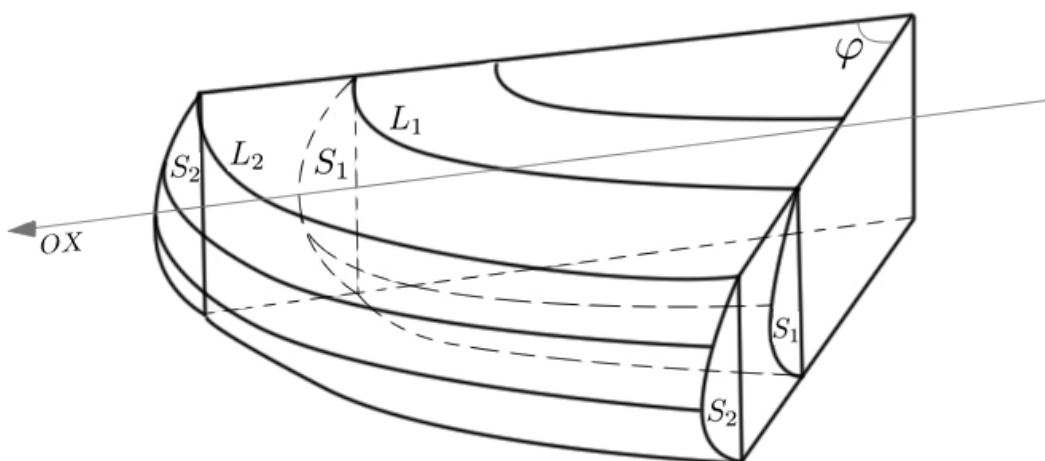


Рис. 3. Кольцевое и радиальное деление

Ячейки заполнены несжимаемой жидкостью с некоторым одинаковым для всех начальным давлением P_0 , которое, как уже было сказано, превосходит атмосферное ввиду предварительного сжатия межпозвоночного диска связками и наличия вертикальной нагрузки. За счет этого внутренние межкольцевые перегородки изначально находятся в состоянии прогиба. Радиальные и кольцевые стенки ячеек в разной степени проницаемы для жидкости.

§ 1.2. Метод Рэлея

На этом этапе стояла задача описания формы прогиба стенок ячеек. Одним из возможных путей решения этой проблемы является применения методов приближенного расчета колебаний. В этом случае задается форма колебаний системы, а сама система таким образом сводится к система с одной степенью свободы. Если выбрана удачная аппроксимирующая форму функция, то получатся достаточно точные значения собственных частот системы.

В рамках данной задачи, имеет значение лишь объем прогиба, форма его не так важна. Поэтому для ее описания воспользуемся методом Рэлея. Суть метода заключается в следующем.

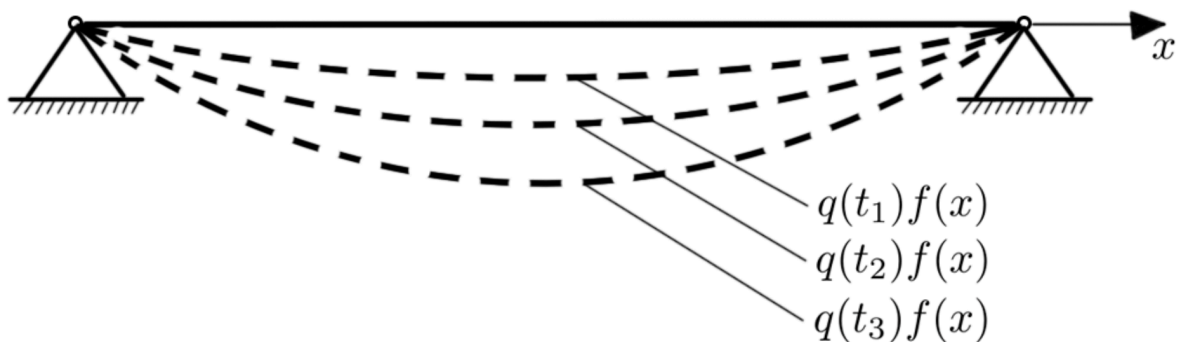


Рис. 4. Двухопорная балка

Рассмотрим двухопорную балку (рис. 4) и процесс ее колебаний в вертикальной плоскости. Пусть в любой момент времени форма балки остается неизменной, а меняется лишь ее масштаб.

Если задать форму изгиба балки в виде некоторой функции $f(x)$, то прогибы в процессе колебаний можно описать произведением

$$y(t, x) = q(t)f(x),$$

где $q(t)$ - функция времени - выступает в роли масштабного коэффициента. При фиксированном выборе функции $f(x)$, таким произведением описывается переход к системе с одной степенью свободы, в которой $q(t)$ - единственная обобщенная координата.

В нашем случае форма изгиба боковых стенок фиксирована и задается как полуволна косинуса, а в качестве масштабного коэффициента выступает высота прогиба боковой стенки ячейки:

$$\Delta_{i,j} \cos x \frac{\pi}{h_{i,j}},$$

где $\Delta_{i,j}$ - высота прогиба боковой стенки ячейки (i, j) , $h_{i,j}$ - высота ячейки (i, j) .

Глава 2. Описание алгоритма

Для моделирования процесса диффузии в систему вносится возмущение, в результате которого верхняя и нижняя пластины поворачиваются на некоторый угол α (рис. 5).

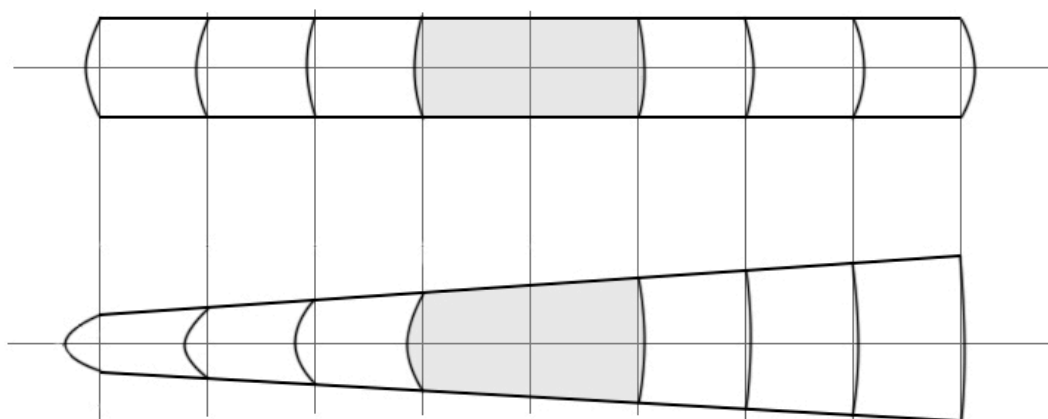


Рис. 5. Модель в разрезе до и после поворота

§ 2.1. Предварительные вычисления

Перед тем, как повернуть пластины, необходимо вычислить исходные значения объемов каждой ячейки. Сделать это можно, вычислив значение площади бокового сечения ячейки, затем проинтегрировать эту площадь, умноженную на r , по $d\varphi$ и вычесть такую же величину, но рассчитанную для соседней ячейки с предыдущего кольца. Под площадью бокового сечения ячейки понимается величина, равная сумме площади «выпячивания» и прямоугольной области шириной r_i (внешний радиус i -го кольца) и высотой h (исходная высота межпозвонкового диска) (рис. 6).

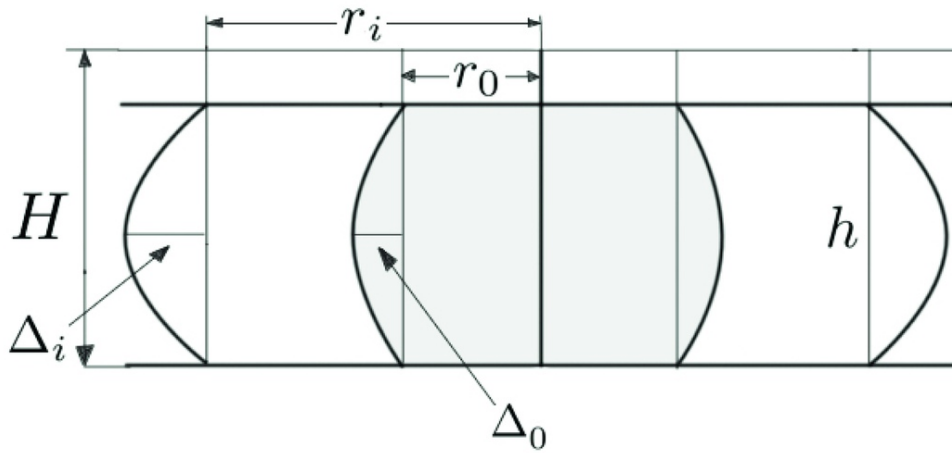


Рис. 6. Центральный фрагмент модели в разрезе

Площади боковых сечений и объемы вычислялись по следующим формулам:

$$S_{i,j} = hr_i + \frac{2h\Delta_{i,j}}{\pi},$$

$$V_{0,j} = \int_{\varphi_j}^{\varphi_{j+1}} r_i S_{0,j} d\varphi,$$

$$V_{i,j} = \int_{\varphi_j}^{\varphi_{j+1}} r_i S_{i,j} d\varphi - V_{i-1,j},$$

где $i = \overline{0,n}$ - порядковый номер кольца, $j = \overline{0,m}$ - порядковый номер ячейки в кольце, $S_{i,j}$ - площадь бокового сечения ячейки (i, j) до внесения возмущения, $V_{i,j}$ - объем ячейки (i, j) до внесения возмущения, $\Delta_{i,j}$ - величина прогиба боковой стенки ячейки (i, j) до внесения возмущения.

§ 2.2. Шаг $s = 0$. Поворот пластин

Теперь будем считать, что пластины повернулись на угол α , но стенки пока непроницаемы для жидкости. На этом этапе необходимо рассчи-

тать новые значения объемов и прогибов боковых стенок с измененной геометрической конфигурацией.

В результате поворота пластин, распределение давлений в ячейках становится неравномерным: с одной стороны диска давление в ячейках увеличивается, что приводит к еще большей выпуклости боковых стенок, а в диаметрально-противоположных ячейках давление становится меньше начального и, соответственно, боковые стенки этих ячейки начинают выпячиваться меньше, или вовсе «впучиваться», выпячиваясь в обратную сторону.

Для начала найдем уравнение подвижной верхней плоскости (и, автоматически, нижней, так как отличаются они будут только знаком). Угол между ней и OX составляет α . Вектор нормали верхней плоскости $\vec{n}' = (-\sin \alpha, 0, \cos \alpha)$. Также известно, что она проходит через точку $(0, 0, \frac{h}{2})$. Следовательно, можно записать уравнение плоскости в цилиндрических координатах:

$$z = r \cos \varphi \sin \alpha + \frac{h}{2}.$$

Теперь вычислим

$$S_{i,j}^0 = \int_{z_1}^{z_2} \Delta_{i,j}^0 \cos \left(z \frac{\pi}{r_i \cos \varphi_j \sin \alpha + \frac{h}{2}} \right) dz + (r_i \cos \varphi_j \sin \alpha) \frac{2r_i \cos \varphi_j \cos \alpha + 1.5h}{2}.$$

Так как жидкость, которой заполнены ячейки, принято считать несжимаемой, то имеет место равенство $V_{i,j} = V_{i,j}^0$, а следовательно и $S_{i,j} = S_{i,j}^0$. Исходя из этого, можно найти

$$\Delta_{i,j}^0 = \frac{\pi \left(S_{i,j} - (r_i \cos \varphi_j \sin \alpha) \frac{2r_i \cos \varphi_j \cos \alpha + 1.5h}{2} \right)}{2r_i \cos \varphi_j \sin \alpha + h}.$$

Далее стенки ячеек становятся проницаемы для жидкости и начинается процесс диффузии. Опишем алгоритм для s -го шага по времени.

§ 2.3. Процесс диффузии

Как уже было сказано, давление после поворота распределяется неравномерно и стремится выровняться. Происходит это за счет гибкости боковых стенок и их способности пропускать жидкость.

Во первых, требуется выяснить, какое количество жидкости покинет ячейку, если давление в ней превосходит давление в соседних, или же сколько жидкости прибудет, если давление в ней меньше чем в окружающих ячейках.

Кольцевые и радиальные стенки ячеек неодинаковы. Различие состоит в их пропускной способности, то есть в количестве жидкости, которое стенка может пропустить через себя в единицу времени. Поток жидкости полагается пропорциональным разности давлений рассматриваемой ячейки и ее соседних с соответствующими коэффициентами (D - для ячеек из соседнего кольца и d - для соседних ячеек внутри кольца):

$$\frac{\Delta V_{0,j}^s}{\Delta t} = D \left(P_{1,j}^{s-1} - P_{0,j}^{s-1} \right) + d \left(P_{0,j-1}^{s-1} + P_{0,j+1}^{s-1} - 2P_{0,j}^{s-1} \right),$$

$$\frac{\Delta V_{i,j}^s}{\Delta t} = D \left(P_{i+1,j}^{s-1} + P_{i-1,j}^{s-1} - 2P_{i,j}^{s-1} \right) + d \left(P_{i,j-1}^{s-1} + P_{i,j+1}^{s-1} - 2P_{i,j}^{s-1} \right),$$

где $V_{i,j}^s$ - объем ячейки (i, j) на s -ом шаге по времени, Δt - величина шага

по времени, $P_{i,j}^s$ - давление в ячейке (i, j) на s -ом шаге по времени, D - коэффициент проницаемости кольцевых стенок, d - коэффициент проницаемости радиальных стенок.

Отсюда нетрудно получить величину изменения объемов, умножив обе части уравнений на Δt , и найти новые значения объемов через их значения на предыдущем шаге:

$$V_{i,j}^s = V_{i,j}^{s-1} + \Delta V_{i,j}^s.$$

Величины

$$S_{i,j}^s = \frac{V_{i,j}^s}{r_i(\varphi_{j+1} - \varphi_j)}.$$

Зная их, можно найти величины новых прогибов боковых стенок ячейки (i, j) на s -ом шаге:

$$\Delta_{i,j}^s = \frac{\pi \left(S_{i,j}^s - (r_i \cos \varphi_j \sin \alpha) \frac{2r_i \cos \varphi_j \cos \alpha + 1.5h}{2} \right)}{2r_i \cos \varphi_j \sin \alpha + h}.$$

Давления $P_{i,j}^s$ принимаются пропорциональными амплитудам $\Delta_{i,j}^s$, при этом для $i \geq 1$ амплитуды принимаются пропорциональными разности давлений соседних ячеек, то есть

$$\begin{aligned} P_{0,j}^s &= K\Delta_0^s, \\ P_{i,j}^s - P_{i-1,j}^s &= K\Delta_i^s, \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} P_{0,j}^s &= K\Delta_0^s, \\ P_{i,j}^s &= P_{i-1,j}^s + K\Delta_i^s, \end{aligned}$$

где K - коэффициент упругости боковых стенок,

Данный процесс продолжается до тех пор, пока давления во всех ячейках не станут отличаться не более чем на некоторое заданное достаточно малое ε .

Результаты эксперимента

При проведении численного эксперимента была выбрана следующая конфигурация модели:

- исходное внутреннее давление $P_0 = 111.458$ кПа,
- атмосферное давление $P_{atm} = 101.325$ кПа,
- высота диска $H = 8$ мм,
- радиус диска $R = 20$ мм,
- количество колец $n = 5$,
- количество ячеек в каждом кольце $m = 46$.

Эксперимент проводился для 4 различных наборов значений коэффициентов D , d и K .

Результаты и соответствующие входные параметры приведены на графиках в разделе Приложение.

Выводы

На самом деле, истинные значения коэффициентов проницаемости внутренних структур межпозвонковых дисков физиологам на сегодняшний день неизвестны. Были получены лишь некоторые значения времени релаксации давлений в [5], [21] и [22].

Все параметры структуры межпозвонковых дисков сильно зависят от возраста человека, его образа жизни, рациона питания и даже времени суток. Однако, полученные в ходе эксперимента результаты можно считать достаточно достоверными, поскольку на графиках видно, как выравнивается давление при различных значениях коэффициентов.

Заключение

В ходе данной работы получены следующие результаты:

1. Построена объемная модель межпозвоночного диска, которая учитывает его внутреннюю структуру и процесс диффузии жидкости через стенки ячеек
2. Написан алгоритм, описывающий данный процесс диффузии
3. Программная реализация алгоритма, результатом работы которого является динамика значений давления внутри каждой ячейки и время стабилизации давления по всему объему диска
4. Численный эксперимент, в ходе которого получены графики изменения давления внутри проверочных ячеек при различных коэффициентах D , d и K .

Поставленная задача была решена в стационарном случае, то есть величина угла поворота пластин устанавливается лишь в начале и не меняется с течением времени. Для дальнейшего исследования планируется решить эту же задачу, но уже для динамического случая, когда угол поворота пластин есть величина, зависящая от времени.

Список литературы

1. J. Urban, S. Roberts. Degeneration of the intervertebral disc. *Arthritis Res Ther.* 5. 120 p.
2. Intervertebral disc disorders. <https://ghr.nlm.nih.gov/condition/intervertebral-disc-disease#>
3. Capoor Manu N., Ruzicka Filip, Schmitz Jonathan E., James Garth A. Machackova Tana, Jancalek Radim, Smrcka Martin, Lipina Radim, Ahmed Fahad S. Propionibacterium acnes biofilm is present in intervertebral discs of patients undergoing microdiscectomy. 2017.
4. Жарнов А.М., Жарнова О.А. Биомеханические процессы в позвоночно-двигательном сегменте шейного отдела позвоночника при его движении // *Российский журнал биомеханики.* 2014.
5. Cloward R.B., Buzaid L.L. Discography, indications and evaluation of the normal and abnormal intervertebral disk // *Amer. J. Roentgenol.* 1952. Vol. 68. No 4. P. 552–564.
6. C.C. Ward and G.K. Nagendra. Mathematical models: Anima and human models. In A.M. Nahum and J. Melvin, editors, *The Biomechanics of Trauma.* 1985. P. 77-100.
7. C.C. Francis. Dimensions of the cervical vertebrae. *Anatomical Record.* 1955 P. 603-609.
8. M. Nisan, L. Gilad. The cervical and lumbar vertebrae-anthropometric model. *Engineering in Medicine.* 1984. P. 111-114.
9. Y.K. Liu, C.R. Clark, K.W. Krieger. Quantitative geometry of young human male cervical vertebrae. // *Mechanisms of Head and Spine Trauma.* 1986. P. 417-431.
10. M.M. Panjabi, J. Duranceau, V. Goel, T. Oxland, K. Takata. Cervical human vertebrae // *Quantitative three-dimensional anatomy of the middle and lower regions.* 1991. P. 861-869.

11. R. Toth. Multiple degree-of-freedom nonlinear spinal model // Proceeding of 19th Annual Conference on Engineering in Medicine and Biology. 1967. Vol. 5. 102 p.
12. Трегубов В.П. Анализ поведения тела человека при горизонтальном импульсном воздействии. 1976. С. 140-154.
13. D. Orne, Y. Liu. A mathematical model of spinal response to impact // Journal of Biomechanics. 1971. P. 49-71.
14. J. C. Misra, S. Samanta, A mathematical model for the biomechanics of the body of a vertebra. Computers & mathematics with applications. 1988. Vol. 15. P. 85-96.
15. Yu A Rikun, T V Kolmakova, S P Buyakova, S N Kulkov. Computer Modeling of Intervertebral Disk Endoprosthesis. 2018. 4 p.
16. Е.С.Доль. Моделирование функционального элемента позвоночника. 2016. 4 с.
17. W. Kajzer, A. Kajzer, I. Pindycki. Biomechanical analysis of the intervertebral disk implant using the finite element method // Advances in materials science. 2015. Vol. 15. 45 p.
18. Жарнов А.М., Жарнова О.А. Биомеханические процессы в межпозвонковом диске шейного отдела позвоночника при его движении // Российский журнал биомеханики. 2013. Т. 17. С. 32–40.
19. Nachemson A., Evans I. Some mechanical properties of the third lumbar interlaminar ligament (ligamentum flavum) // J. Biomech. 1968. Vol. 1, No 3. P. 211–220.
20. Huang C.Y., Yong G.W. Effects of mechanical compression on metabolism and distribution of oxygen and lactate in intervertebral disc // J. Biomech. 2008. Vol. 41, No 6. P. 1184–1196.
21. Bush H.D., Horton W.G., Smare D.L., Naylor A. Fluid content of the nucleus pulposus as a factor in the disk syndrome // British Medical Journal 1956. No 14. P. 81–83.
22. Cloward R.B. The clinical significance of the sinu-vertebral nerve of the cervical spine in relation to the cervical disk syndrome // J. Neurol.

Neurosurg. Psychiatr. 1960. No 23. P. 321–326.

Приложение

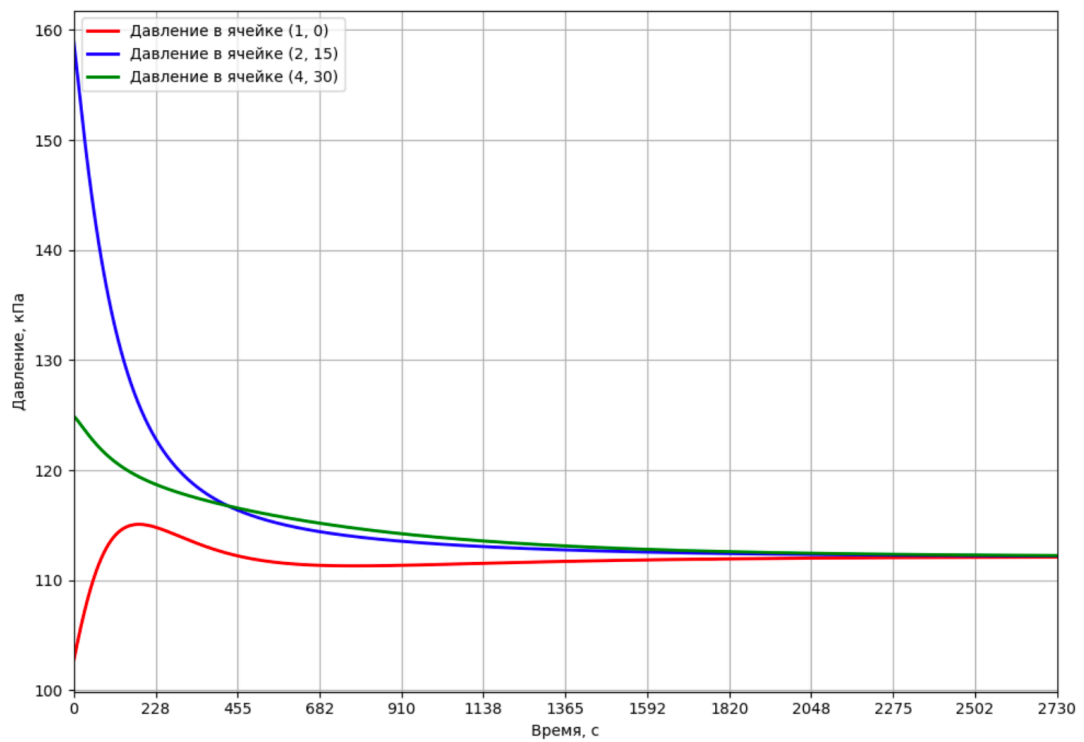


Рис. 7. - Динамика давления в проверочных ячейках при значениях коэффициентов $d = 0.36$, $D = 0.07$, $K = 5.7$. Время стабилизации давления составило 2730 секунд.

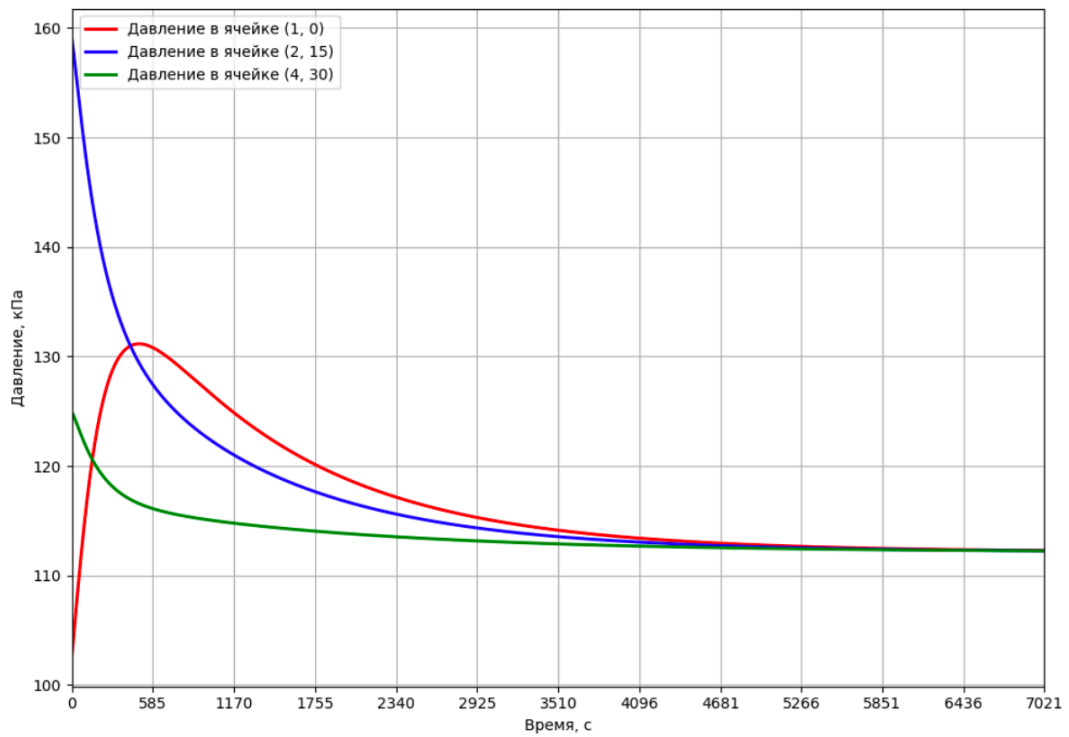


Рис. 8. Динамика давления в проверочных ячейках при значениях коэффициентов $d = 0.26$, $D = 0.01$, $K = 4.7$. Время стабилизации давления составило 7021 секунд.

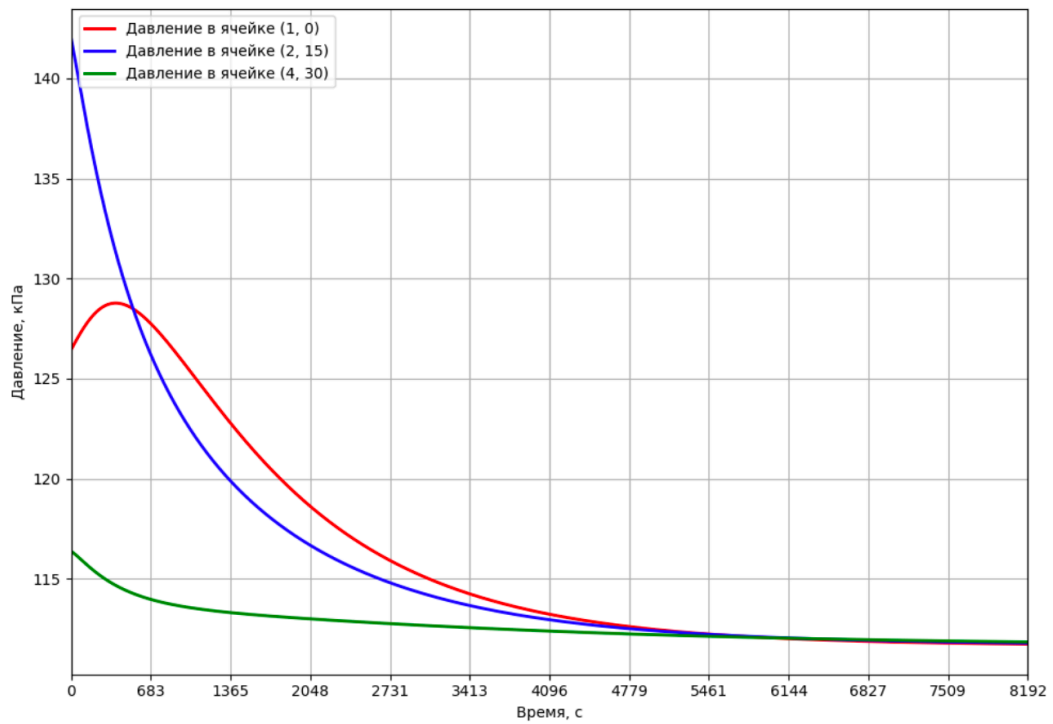


Рис. 9. Динамика давления в проверочных ячейках при значениях коэффициентов $d = 0.37$, $D = 0.03$, $K = 1.7$. Время стабилизации давления составило 8192 секунд.

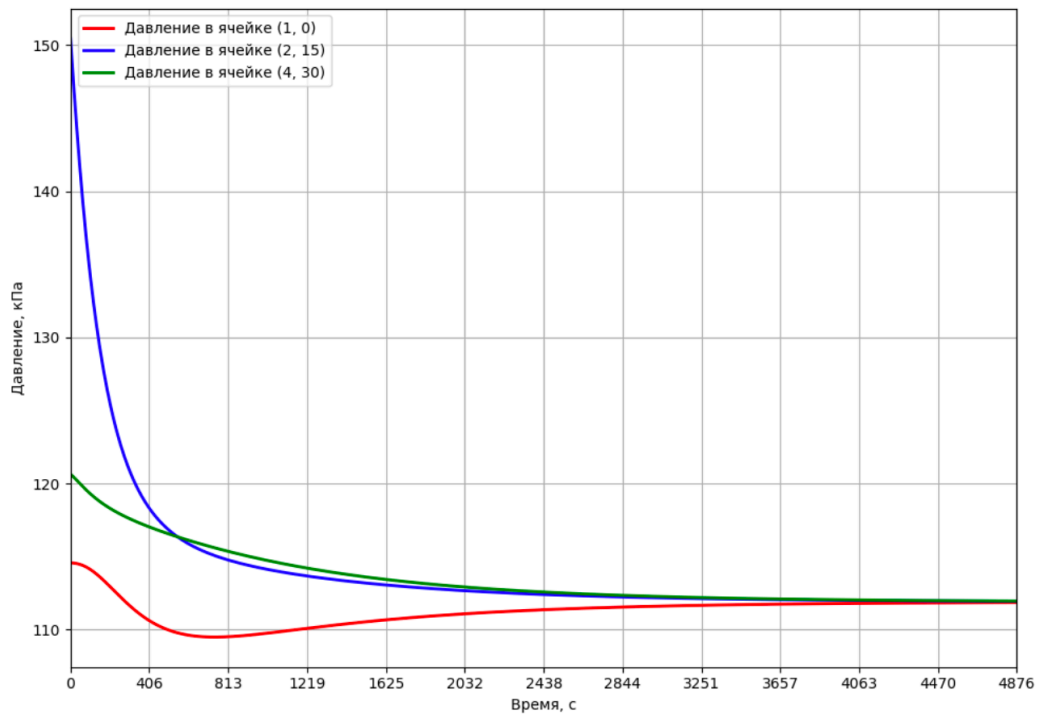


Рис. 10. Динамика давления в проверочных ячейках при значениях коэффициентов $d = 0.27$, $D = 0.1$, $K = 3.7$. Время стабилизации давления составило 4876 секунд.

Фрагмент программного кода алгоритма (Java)

```
/**
 * Пересчитать "крайние" высоты ячеек после поворота
 */
private void calculateNewHeight() {
    for(Cell[] row : cells) {
        for(Cell cell : row) {
            cell.setH(cell.getR() * Math.cos(cell.getFi()) *
Math.sin(alpha) + data.get_DISK_H());
        }
    }
}

/**
 * Вычислить значения новых объемов
 *
 * @param deltaT шаг по времени (секунды)
 */
private void calculateNewVolume(double deltaT) {
    setupOldCells();
    for(int i = 0; i < data.get_DISK_RINGS(); i++) {
        for(int j = 0; j < data.get_DISK_CELLS(); j++) {
            double deltaV = 0;

            if(j == 0) { // первая ячейка кольца граничит с
последней
                deltaV += d * (oldCells[i]
[data.get_DISK_CELLS() - 1].getPressure() + oldCells[i][j +
1].getPressure() - 2 * oldCells[i][j].getPressure());
            } else if(j == data.get_DISK_CELLS() - 1) { // по-
следняя ячейка кольца граничит с первой
                deltaV += d * (oldCells[i][j -
1].getPressure() + oldCells[i][0].getPressure() - 2 * old-
Cells[i][j].getPressure());
            } else { // внутренние ячейки кольца
                deltaV += d * (oldCells[i][j -
1].getPressure() + oldCells[i][j + 1].getPressure() - 2 * old-
Cells[i][j].getPressure());
            }

            if(i == 0) { // если ячейка в пульпозном ядре
                deltaV += D * (oldCells[i + 1]
[j].getPressure() - oldCells[i][j].getPressure());
            } else if(i == data.get_DISK_RINGS() - 1) { //
если ячейка на крайнем кольце - считаем, что диффузии с внеш-
ними тканями не происходит
                deltaV += D * (oldCells[i - 1]
[j].getPressure() - oldCells[i][j].getPressure());
            } else { // прочие ячейки
```

```

        deltaV += D * (oldCells[i - 1]
[j].getPressure() + oldCells[i + 1][j].getPressure() - 2 *
oldCells[i][j].getPressure());
    }

    cells[i][j].setVolume(oldCells[i][j].getVolume() +
deltaV * deltaT);
    }
}

/**
 * Вычисление новых величин прогиба стенок
 */
private void calculateNewDelta() {
    setupOldCells();
    for(int j = 0; j < data.get_DISK_CELLS(); j++) {
        double prevVolSum = 0;
        for(int i = 0; i < data.get_DISK_RINGS(); i++) {
            prevVolSum += oldCells[i][j].getVolume();

            double S_comm = prevVolSum / cells[i][j].getFi-
Step();

            double S_cos = S_comm - (cells[i][j].getR() *
Math.cos(cells[i][j].getFi()) * Math.cos(alpha)) * ((cells[i]
[j].getH() + data.get_DISK_H()) / 2);
            double delta = S_cos * (Math.PI / (2 * cells[i]
[j].getH()));

            cells[i][j].setDelta(delta);
        }
    }
}

/**
 * Вычисление новых давлений
 */
private void calculateNewPressure() {
    setupOldCells();
    for(int i = data.get_DISK_RINGS() - 1; i >= 0; i--) {
        for(int j = 0; j < data.get_DISK_CELLS(); j++) {
            if(i == data.get_DISK_RINGS() - 1) {
                cells[i][j].setPressure(K * cells[i][j].get-
Delta() + data.get_OTHER_ATMP());
            } else {
                cells[i][j].setPressure(K * cells[i][j].get-
Delta() + cells[i + 1][j].getPressure());
            }
        }
    }
}
}

```