Санкт-Петербругский государственный университет
Кафедра математической теории игр и статистических решений

Терещенко Полина Алексеевна

Выпускная квалификационная работа

Устойчивые коалиционные структуры в кооперативных играх специального вида

По направлению 01.03.02
Прикладная математика и информатика
Прикладная математика, фундаментальная информатика и программирование

Научный руководитель,
кандидат физ.-мат.н., доцент
Парилина Елена Михайловна

Санкт-Петербург
2019

Содержание

1 Аннотация

В работе рассмотрена проблема устойчивости коалиционных структур в играх с супераддитивными и несупераддитивными характеристическими функциями специального вида. Рассмотрены следующие игры: одна коалиционная игра n лиц, характеристическая функция которой определяется таким образом: $v(S) = k$, если $\{1, \ldots, k\} \subset S$, но $k + 1 \notin S$; игра "Аэропорт" ; игра "Рынок перчаток" ; игра кооперации при наличии антимонопольных агенств. Найдены устойчивые коалиционные структуры, совпадающие с максимальной коалицией в играх с супераддитивной функцией, а также при определенных условиях в игре "Рынок пречаток" найдены устойчивые коалиционные структуры, не совпадающие с максимальной коалицией. В игре кооперации при наличии антимонопольных агенств найдено $n!!!$ устойчивых коалиционных структур при четном количестве игроков n и $(n+1)!!!$ устойчивых коалиционных структур при нечетном количестве игроков n, где $n!!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot n - 1, (n+1)!!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot n + 1$, если n - четное. При другом определении устойчивой коалиционной структуры в игре "Рынок пречаток" найдены дополнительные устойчивые коалиционные структуры по сравнению с уже имеющимися.

2 Введение

Многие конфликтные ситуации, в которых разрешены коалиции игроков, могут быть смоделированы при помощи аппарата теории кооперативных игр. Основная идея кооперации состоит в том, что все игроки формируют одну коалицию, т. е. пытаются максимизировать выигрыш самой большой коалиции. На следующем шаге нужно найти распределение этого выигрыша. Но это не единственная коалиция, которая может быть образована, могут быть сформированы и более мелкие коалиции. В играх с коалиционной структурой одна структура может быть более предпочтительна для игрока, чем другая. Поэтому разумно найти разбиение игроков на коалиции, при котором никому из игроков невыгодно покинуть коалицию. Такие коалиционные структуры называются устойчивыми. Основная идея устойчивости заключается в сравнении выигрышей отдельных игроков, а не выигрышей коалиций.

В работе рассматриваются множество устойчивых коалиционных структур в следующих классах кооперативных игр:

1. Одна коалиционная игра n лиц, характеристическая функция которой определяется таким образом: $v(S) = k$, если $\{1, \ldots, k\} \subset S$, но $k + 1 \notin S$.

2. Игра "Аэропорт".

3. Игра "Рынок перчаток".

4. Игра кооперации при наличии антимонопольных агенств.

В качестве дележей рассматриваются одноточечные кооперативные решения – ES-значение и вектор Ауманна-Дрезе, являющийся аналогом вектора Шепли для игр с коалиционной структурой.

В игре кооперации при наличии антимонопольных агенств рассматривается прикладная задача о конкуренции на рынке. Рынок – это форма социально-экономической жизни общества, при которой воспроизводство материальных благ, отношений и интересов осуществляется на основе принципов товарного производства и обращения, главным из которых является свобода хозяйственной деятельности в целях извлечения прибыли. Рынок — неотъемлемый элемент рыночной экономики. Одним из главных критериев рынка является наличие конкуренции. Конкуренция – экономическое состязание изготовителей одинаковых товаров на рынке за привлечение как можно большего числа покупателей и получения благодаря этому максимальной выгоды, это та самая «невидимая рука» рынка (термин, введённый А. Смитом), которая координирует деятельность его участников. Чтобы рынок был конкурентоспособным, должно быть несколько независимых друг от друга покупателей и продавцов. Ситуация на рынке с одним продавцом и несколькими покупателями называется монополией. Монополия – тип рыночной структуры, характеризующийся отсутствием конкуренции, что предполагает господство на закрытом входными барьерами рынке одной фирмы, выпускающей уникальный продукт и контролирующей цену. Конкуренция – двигатель экономического прогресса. Это объясняется тем, что рыночное соперничество приводит к успеху в том случае, если предприниматель заботится не только о сохранении, но и расширении своего производства, для чего стремится усовершенствовать технику и организацию, повышает качество товаров, снижает затраты на производство единицы продукции и тем самым имеет возможность снизить цены, расширить ассортимент товаров.

Во всем мире существуют антимонопольные агенства, их задача

– выявлять те компании, которые являются объединением нескольких компании, для того, чтобы предотвратить назначение монопольной цены. Поэтому предполагаем, что крупные объединения могут находиться под вниманием этих агенств, а, соответственно, на эти компании могут быть наложены штрафы и их деятельность может быть запрещена, т. е. выигрыш таких коалиций будут отрицательными.

3 Обзор литературы

В [5] вводится определение коалиционных игр. В [2] вводится понятие коалиционной структуры. В [7] вводится определение вектора Шепли, а в [4] понятие ES-значения. В статье [1] рассматривается одна игра распределения издержек, для которой найдены все возможные устойчивые коалиционные структуры. Понятие устойчивой коалиционной структуры введено в работе [6], где предполагалась устойчивость структуры относительно индивидуальных отклонений игроков, которые могли выйти из текущей коалиции и стать индивидуальными игроками или присоединиться к любой другой коалиции в коалиционной структуре. Есть другое определение устойчивости, в котором предполгается, что игрок может войти только в ту коалицию, в которой выигрыши игроков из этой коалиции не уменьшатся после присоединения игрока. Это требование кажется естественным, поскольку учитывает возможность «блокирования» игроками входа нового игрока, если их выигрыши уменьшатся после этого. Устойчивые в этом смысле коалиционные структуры были названы индивидуально устойчивыми в статье [3].

4 Основные определения

Определение 1. Коалиционная структура π – это разбиение $\{B_1, \ldots, B_m\}$ множества игроков N, т. е.

- $B_1 \cup \ldots \cup B_m = N$,
- $B_i \cap B_j = \oslash$ для всех $i, j = 1, \ldots, m, i \neq j$.

Общее количество различных коалиционных структур $B(n)$ для n игроков определяется числом Бэлла и вычисляется рекуррентным образом по формуле:

$$B(n) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} B(k) \text{ , где } B(0) = 1.$$

Так, например, $B(1) = 1, B(2) = 2, B(3) = 5, B(4) = 15, B(5) = 52$ и т. д.

Определение 2. Характеристической функцией игры n лиц будем называть вещественнозначную функцию $v : 2^N \mapsto R^1$, удовлетворяющую условию $v(\oslash) = 0$.

Обозначим через (N, v, π) игру со множеством игроков N, характеристической функцией v и коалиционной структурой π.

Определение 3. Вектор $x^\pi = (x_1^\pi, \ldots, x_n^\pi) \in R^n$ называется распределением выигрыша в игре (N, v, π) с коалиционной структурой π, если выполняется условие коллективной рациональности, т. е.

$$\sum_{i \in B_j} x_i^\pi = v(B_j) \text{ для всех } B_j \in \pi.$$

Определение 4. Распределение выигрыша x^π называется дележом в игре (N, v, π) с коалиционной структурой π, если выполняется условие индивидуальной рациональности, т.е.

$$x_i^\pi \geq v(\{i\}) \text{ для всех } i \in N.$$

В игре (N, v, π) с коалиционной структурой $\pi = \{B_1, \ldots, B_m\}$ в качестве принципа оптимальности может быть выбран любой принцип оптимальности из классической теории кооперативных игр. В качестве принципа оптимальности в моей работе выбран вектор Шепли и ES-значение.

Определение 5. В качестве решения в кооперативной игре (N, v, π) с коалиционной структурой $\pi = \{B_1, \ldots, B_m\}$ рассмотрим вектор Шепли (или вектор Ауманна-Дрезе) $\varphi^\pi = (\varphi_1^\pi, \ldots, \varphi_n^\pi)$, компоненты которого могут быть вычислены по формуле:

$$\varphi_i^\pi = \sum_{i \in S, S \subseteq B(i)} \tfrac{(|B(i)|-|S|)!(|S|-1)!}{|B(i)|!}[v(S) - v(S \setminus \{i\})]$$

для всех $i \in N$.

Определение 6. В качестве решения в кооперативной игре (N, v, π) с коалиционной структурой $\pi = \{B_1, \ldots, B_m\}$ рассмотрим ES-значение $\psi^\pi = (\psi_1^\pi, \ldots, \psi_n^\pi)$, компоненты которого могут быть вычислены по формуле:

$$\psi_i^\pi = v(\{i\}) + \frac{v(B(i)) - \sum\limits_{j \in B(i)} v(\{j\})}{|B(i)|}$$

для всех $i \in N$.

Определение 7. Коалиционную структуру $\pi = \{B_1, \ldots, B_m\}$ будем называть устойчивой относительно выбранного одноточечного принципа оптимальности, если для любого игрока $i \in N$ выполняется следующее неравенство:

$$x_i^\pi \geq x_i^{\pi'} \text{ для всех } B_j \in \pi \cup \emptyset, B_j \neq B(i).$$

Здесь $x^\pi \geq x^{\pi'}$ – два распределения выигрыша, вычисленные согласно выбранному принципу оптимальности для игр с коалиционными структурами (N, v, π) и $(N, v, \pi'))$ соответственно, где $\pi' = \{B(i) \setminus$

$\{i\}, B_j \cup \{i\}, \pi \setminus (-B(i) \cup B_j)\}$. Понятие устойчивости из определения 7 подобно определению равновесия Нэша.

Представим, что у игрока есть 3 стратегии: остаться в текущей коалиции, стать единичной коалицией или присоединиться к другой коалиции. Если каждый игрок сравнит свой выигрыш со всеми возможными выигрышами, которые он может получить, используя одну из вышеупомянутых стратегий (когда все другие игроки не отклоняются), и поймёт, что он не может получить больший выигрыш, тогда такие стратегии игроков образуют равновесие Нэша. Другими словами, текущая структура коалиций является устойчивой относительного выбранного кооперативного решения.

В определении 7 мы также делаем предположение, которое является естественным. Если игрок оставляет коалицию, то оставшаяся коалиция не ломается и является частью новой коалиционной структуры, таким образом, игрок может вступить в любую существующую коалицию без каких-либо ограничений или стать единственным игроком в коалиции.

5 Одна коалиционная игра n лиц

Рассмотрим игру n игроков, характеристическая функция которой определяется таким образом: $v(S) = k$, если $\{1, \ldots, k\} \subset S$, но $k + 1 \notin S$, в противном случае $v(S) = 0$. Например, $v(\{2, 3, 4\}) = 0$, $v(\{1, 3, 4\}) = 1$ и $v(\{1, 2, 3, 5, 6\}) = 3$.

Для того, чтобы выделить устойчивые коалиционные структуры, рассмотрим игру с $n = 4$.

$$v(1) = 1, v(2) = 0, v(3) = 0, v(4) = 0, v(\{1, 2\}) = 2,$$
$$v(\{1, 3\}) = 1, v(\{1, 4\}) = 1, v(\{2, 3\}) = 0, v(\{2, 4\}) = 0,$$
$$v(\{3, 4\}) = 0, v(\{1, 2, 3\}) = 3, v(\{1, 2, 4\}) = 2, v(\{1, 3, 4\}) = 1,$$
$$v(\{2, 3, 4\}) = 0, v(\{1, 2, 3, 4\}) = 4.$$

Вектор Шепли для коалиции $N = \{1, 2, 3, 4\}$: $\varphi_{\{\{1,2,3,4\}\}} = = (\frac{25}{12}; \frac{13}{12}; \frac{7}{12}; \frac{3}{12})$.

Аналогично вычисляются вектора Шепли для коалиций $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}$ соответственно:

$$\varphi_{\{\{1,2,3\},\{4\}\}} = (\tfrac{11}{6}; \tfrac{5}{6}; \tfrac{2}{6}; 0), \varphi_{\{\{1,2,4\}\{3\}\}} = (\tfrac{9}{6}; \tfrac{3}{6}; 0; 0),$$
$$\varphi_{\{\{1,3,4\}\{2\}\}} = (1; 0; 0; 0), \varphi_{\{\{1\},\{2,3,4\}\}} = (1; 0; 0; 0),$$
$$\varphi_{\{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}} = (\tfrac{3}{2}; \tfrac{1}{2}; 0; 0), \varphi_{\{\{1,3\},\{2\},\{4\}\}} = (1; 0; 0; 0),$$
$$\varphi_{\{\{1,4\},\{2\},\{3\}\}} = (1; 0; 0; 0).$$

Тогда рассмотрим все коалиционные структуры, возможные в этой игре (см. табл. 1). Как видно из таблицы 1, единственной устойчивой коалиционной структурой является структура $\{\{1, \ldots, n\}\}$, совпадающая с объединением игроков в максимальную коалицию.

Обобщим данное исследование для n игроков.

Коалиционная структура	Устойчива/неустойчива	Аргументы
$\{1, 2, 3, 4\}$	Устойчива	Никому из игроков невыгодно выходить из коалиции.
$\{1, 2, 3\}$ и $\{4\}$	Неустойчива	игроку 4 выгодно присоединиться к коалиции $\{1, 2, 3\}$
$\{1, 2\}$ и $\{3, 4\}$	Неустойчива	игроку 3 выгоднее присоединиться к коалиции $\{1, 2\}$.
$\{1\}$ и $\{2, 3, 4\}$	Неустойчива	игроку 1 выгодно присоединиться к коалиции $\{2, 3, 4\}$
$\{1, 3, 4\}$ и $\{2\}$	Неустойчива	игроку 2 выгодно присоединиться к коалиции $\{1, 3, 4\}$
$\{1\}$ и $\{2, 3, 4\}$	Неустойчива	игроку 1 выгодно присоединиться к коалиции $\{2, 3, 4\}$
$\{1, 2, 4\}$ и $\{3\}$	Неустойчива	игроку 3 выгодно присоединиться к коалиции $\{1, 2, 4\}$
$\{1, 3, 4\}$ и $\{2\}$	Неустойчива	игроку 2 выгодно присоединиться к коалиции $\{1, 3, 4\}$
$\{1, 2\}$, $\{3\}$,$\{4\}$	Неустойчива	игроку 3 выгодно присоединиться к коалиции $\{1, 2\}$
$\{1, 3\}$, $\{2\}$,$\{4\}$	Неустойчива	игроку 2 выгодно присоединиться к коалиции $\{1, 3\}$
$\{1, 4\}$, $\{2\}$,$\{3\}$	Неустойчива	игроку 2 выгодно присоединиться к коалиции $\{1, 4\}$
$\{1\}$, $\{2\}$,$\{3\}$, $\{4\}$	Неустойчива	игроку 2 выгодно присоединиться к игроку 1

Таблица 1: Коалиционные структуры в игре из п.5 для 4 игроков

Утверждение 1.

В коалиционной игре n лиц, характеристическая функция которой представлена в следующем виде: $v(S) = k$, если $\{1, \ldots, k\} \subset S$, но $k+1 \notin S$ единственной устойчивой относительно вектора Шепли является коалиционная структура вида $\{\{1, ..., n\}\}$, когда игроки объединены в максимальную коалицию.

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. За базу индукции возьмём рассмотренный пример с $n = 4$. Пусть для n игроков утверждение справедливо. Теперь нужно доказать, что для $n+1$ игрока тоже будет устойчивой коалиционной структурой только максимальная коалиция.

Когда мы добавляем нового игрока, он может повлиять на выигрыш только той коалиции, в которой все игроки с номерами до него состоят. Поэтому добавление ещё одного игрока $n + 1$ к n игрокам влияет только на случай коалиционных структур:

1) $\{1, \ldots, n\}$ и $\{n + 1\}$

2) $\{1, \ldots, n + 1\}$

Рассмотрим первый случай. У игрока $n + 1$ в этом случае выигрыш равен 0. Соответственно, так как в другую коалицию все игроки с номерами до него включены, то если он присоединится к ней, то его выигрыш будет больше 0, поэтому эта коалиционная структура является неустойчивой.

Теперь второй случай. Ни одному игроку невыгодно отклоняться от этой коалиции, потому что выигрыш этой коалиции максимально возможный в данной игре.

Получается, что и в игре для $n + 1$ игроков устойчивой является коалиционная структура, совпадающая с максимальной коалицией. Из этого следует, что и для любого n игроков утверждение верно.

6 Игра "Аэропорт"

Игра заключается в следующем. Строительство аэродрома пойдёт на пользу n игрокам. Игроку j требуется длина полосы, стоимостью c_j, поэтому для удовлетворения всех потребностей игроков, будет построена полоса стоимостью $\max_{1 \leq j \leq n} c_j$. Как распределить расходы между игроками? Предположим, что все стоимости различны $c_1 < c_2 < \cdots < c_n$. Характеристическую функцию можно определить следующим образом: $v(S) = -\max_{j \in S} c_j$.

Рассмотрим игру для $n = 3$.

$$v(1) = -c_1, v(2) = -c_2, v(3) = -c_3, v(\{1,2\}) = -c_2, v(\{1,3\}) =$$
$$= -c_3, v(\{2,3\}) = -c_3, v(\{1,2,3\}) = -c_3.$$

Вектор Шепли для коалиции $N = \{1,2,3\}$:

$$\varphi_{\{\{1,2,3\}\}} = (-\tfrac{1}{3}c_1; -\tfrac{1}{2}c_2 + \tfrac{1}{6}c_1; \tfrac{1}{6}c_1 + \tfrac{1}{2}c_2 - c_3),$$

Аналогично вычисляются вектора Шепли для коалиций $\{1,2\}, \{1, 3\}, \{2,3\}$. Соответственно получается:

$$\varphi_{\{\{1,2\},\{3\}\}} = (-\tfrac{1}{2}c_1; -c_2 + \tfrac{1}{2}c_1; -c_3),$$
$$\varphi_{\{\{1,3\},\{2\}\}} = (-\tfrac{1}{2}c_1; -c_2; -c_3 + \tfrac{1}{2}c_1;),$$
$$\varphi_{\{\{2,3\},\{1\}\}} = (-c_1; -\tfrac{1}{2}c_2; -c_3 + \tfrac{1}{2}c_2).$$

Тогда рассмотрим все коалиционные структуры, возможные в этой игре (см. табл. 2.). Как видно из таблицы 2, единственной устойчивой коалиционной структурой будет коалиционная структура, совпадающая с максимальной коалицией.

Теперь в качестве принципа оптимальности выберем решение ES. ES-значения для коалиций $\{1,2,3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$ равны:

Коалиционная структура	Устойчива/неустойчива	Аргументы
$\{1,2,3\}$	Устойчива	Никому из игроков невыгодно выходить из коалиции.
$\{1,2\}$ и $\{3\}$	Неустойчива	2 игроку выгодно присоединиться к игроку 3
$\{1,3\}$ и $\{2\}$	Неустойчива	3 игроку выгоднее присоединиться к игроку 2
$\{1\}$ и $\{2,3\}$	Неустойчива	1 игроку выгодно присоединиться к коалиции $\{2,3\}$

Таблица 2: Коалиционные структуры в игре "Аэропорт"для 3 игроков

$$\varphi_{123} = (-\tfrac{2}{3}c_1 + \tfrac{1}{3}c_2; \tfrac{1}{3}c_1 - \tfrac{2}{3}c_2; \tfrac{1}{3}c_1 + \tfrac{1}{3}c_2 - c_3),$$
$$\varphi_{12} = (-\tfrac{1}{2}c_1; \tfrac{1}{2}c_1 - c_2), \varphi_{13} = (-\tfrac{1}{2}c_1; \tfrac{1}{2}c_1 - c_3), \varphi_{23} = (-\tfrac{1}{2}c_2; \tfrac{1}{2}c_2 - c_3).$$

Рассмотрим возможные коалиционные структуры:

1) $\{\{1,2,3\}\}$

Устойчива всегда, так как если любой из игроков отклонится, то он будет платить больше.

2)$\{\{1\},\{2,3\}\}$

Неустойчива всегда, так как для 1 игрока выгоднее присоединиться к коалиции $\{2,3\}$ в связи с тем, что его платеж будет меньше.

3)$\{\{1,3\},\{2\}\}$

Неустойчива всегда, так как для 2 игрока выгоднее присоединиться к коалиции $\{\{1,3\}$ в связи с тем, что его платеж будет меньше.

4)$\{\{1,2\},\{3\}\}$

Неустойчива всегда, так как для 3 игрока выгоднее присоединиться к коалиции $\{1,3\}$ в связи с тем,что его платеж будет меньше.

Утверждение 2.

В игре Аэропорт единственной устойчивой является коалиционная структура вида $\{\{1,...,n\}\}$ относительно принципов оптимальности – вектора Шепли и решения ES.

Доказательство. Когда мы добавляем нового игрока, то его выйгрыш в каждой коалиции, в которой он будет состоять, будет равен $-c_n + s$, где s - это сумма всех одиночных выйгрышей игроков с некоторыми отрицательными индексами. Соответственно, каждый игрок будет платить тем меньше, чем больше игроков в коалиции. Поэтому в каждой коалиционной структуре, кроме коалиционной структуры, совпадающей с максимальной коалицией, найдётся такой игрок, которому будет выгодно отклониться от своей стратегии и присоединиться к коалиции с большим количеством игроков. Таким образом, для любого числа игроков данное утверждение выполняется.

7 Рынок перчаток

Имеется n перчаток, некоторые из них левые, другие правые. У каждого игрока одна перчатка. Множество N имеет естественное разбиение: $Л \cup П = N$; Л - множество владельцев левых перчаток, П - правых. Выигрыш коалиции равен количеству целых пар, которыми коалиция владеет: $v(S) = \min\{S \cap Л, S \cap П\}$. Выигрыш максимальной коалиции равен $v(N) = \min\{Л, П\}$.

Рассмотрим таблицу 3 для компоненты вектора Шепли игрока с правой перчаткой в игре с p правыми перчатками и l левыми перчатками.

$p \setminus l$	0	1	2	3	4
1	0	0,500	0,667	0,750	0,800
2	0	0,167	0,500	0,650	0,733
3	0	0,083	0,233	0,500	0,638
4	0	0,050	0,133	0,271	0,500

Таблица 3: Компонента вектора Шепли для правого игрока в игре "Рынок перчаток"

Эта таблица демонстрирует тот факт, что при росте количества игроков с левой перчаткой, выигрыш игрока с правой пречаткой возрастает.

Рассмотрим все возможные коалиционные структуры в этой игре:

1. Начнем с коалиции, когда все игроки находятся в одной коалиции. Эта коалиционная структура будет устойчива всегда, так как выигрыш будет максимально возможный в этой игре, каждый игрок получит выигрыш больше нуля и никому не выгодно отклоняться от данной коалиции, так как в единичной коалиции любой игрок получает нуль.

2. Если количество игроков четное, а левых и правых перчаток одинаковое количество, то коалиционные структуры вида: любые комби-

нации коалиции, где количество игроков с правой перчаткой равно количеству игроков с левой перчаткой, также являются устойчивыми. Никому из игроков невыгодно отклониться от своей коалиции и стать единичной коалицией, так как он будет получать нуль, или присоединиться к другой, так как выигрыш в новой коалиции будет делиться между большим количеством игроков, что, очевидно, меньше.

3. В случае с нечётным количеством игроков, когда игроков с левой перчаткой на одного больше или на одного меньше, рассмотрим следующие коалиционные структуры: все игроки разбиты по коалициями вида: любые комбинации коалиции, где количество игроков с правой перчаткой равно количеству игрок с левой перчаткой, а "лишний" игрок, который без пары, присоединяется к той коалиции, где игроков максимальное количество (если таких коалиций несколько, то к любой). Такие коалиционные структуры будут устойчивы, так как игрокам из коалиций, где количество игроков с правой перчаткой равно количеству игроков с левой перчаткой, невыгодно отклоняться и становиться единичной коалицией, так как они будут получать нуль, а присоединяться к другой коалиции тоже невыгодно, так как выигрыш будет делиться на большее количество игроков, что, очевидно, меньше. А "лишнему" игроку становиться единичной коалицией также невыгодно, так как он будет получать нуль, а присоединяться к другим коалициям невыгодно, так как выигрыш его уменьшится, если он присоединится к коалиции, где игроков меньше.

4. Теперь рассмотрим следующие коалиционные структуры: пусть иг-

роков будет n, при этом игроков с левыми перчатками будет l, а с правыми перчатками p и для них выполняется следующие условия:

$$l > p;$$
$$l - p \leq p$$

Разобьем данных игроков на следующие коалиции: $2p$ игроков (p левых игроков и p правых игроков) на коалиции $S_1 \cup \cdots \cup S_r$:

$$|S_1| + \cdots + |S_r| = 2p;$$
$$v(S_j) = \frac{|S_j|}{2};$$
$$|S_i| = |S_j|, \forall i \neq j,$$

и к каждой коалиции $S_j, j = 1, \ldots, l - p$ присоединяем по одному из оставшихся игроков с левыми перчатками (если $l - p = 1$, то это частный случай пункта 3). Коалиционные структуры, сформированные из таких коалиции, будут устойчивыми, так как ни одному игроку с правой перчаткой не будет выгодно отклониться от своей коалиции и стать единичной коалицией, так как в этом случае он будет получать нуль, а присоединиться к другой коалиции тоже невыгодно, так как в этом случае его выигрыш не увеличится. Ни одному игроку с левой перчаткой не будет выгодно отклониться от своей коалиции, так как если он отклонится и станет едиичной коалицией, то он будет получать нуль, а если он присоединится к любой другой коалиции, то его выигрыш не увеличится.

5. Также в предыдущем пункте можно изменить условия, накладываемое на l, p, r:

$$l - p = 2c, \text{ где } c \in Z.$$

Сформируем коалиционные структуры вида: разбиваем $l-p$ игроков на коалиции $S_1 \cup \dots \cup S_r$:

$$|S_1| + \dots + |S_r| = 2p, \text{ где } r - \forall \text{ четный делитель числа } 2c \ ;$$
$$v(S_j) = \frac{|S_j|}{2};$$
$$|S_i| = |S_j|, \forall i \neq j,$$

и к каждой коалиции $S_j, j = 1, \dots, r$ присоединяем по $\frac{2c}{r}$ из оставшихся игроков с левыми перчатками (если $l - p = 1$, то это частный случай пункта 3). Коалиционные структуры, сформированные из таких коалиции, будут устойчивыми, так как ни одному игроку с правой перчаткой не будет выгодно отклониться от своей коалиции и стать единичной коалицией, так как в этом случае он будет получать нуль, а присоединиться к другой коалиции тоже невыгодно, так как в этом случае его выигрыш уменьшится. Ни одному игроку с левой перчаткой не будет выгодно отклониться от своей коалиции, так как если он отклонится и станет едиичной коалицией, то он будет получать нуль, а если он присоединится к любой другой коалиции, то его выигрыш уменьшится.

Эти рассуждения доказывают следующее утверждение.

Утверждение 3.

В игре "Рынок перчаток" устойчивыми относительно вектора Шепли являются следующие коалиционные структуры:

1. Коалиционная структура, совпадающая с максимальной коалицией игроков, для любого n.

2. В случае, когда игроков четное количество, игроков с левыми перчатками и игроков с правыми перчатками одинаковое количество,

то коалиционные структуры вида: любые комбинации коалиции, в которых количество игроков с правыми перчатками равно количеству игроков с левыми перчатками, являются устойчивыми.

3. В случае, когда игроков нечетное количество, коалиционные структуры вида: любые комбинации коалиции, где количество игроков с правыми перчатками равно количеству игроков с левыми перчатками, а "лишний" игрок, который без пары, присоединяется к той коалиции, где игроков максимальное количество (если таких коалиций несколько, то к любой), являются устойчивыми.

4. Пусть игроков будет n, при этом игроков с левыми перчатками будет l, а с правыми перчатками p и для них выполняется следующие условия:

$$l > p;$$
$$l - p \leq p$$

Разобьем данных игроков на следующие коалиции: $2p$ игроков (p левых игроков и p правых игроков) на коалиции $S_1 \cup \dots \cup S_r$:

$$|S_1| + \dots + |S_r| = 2p;$$
$$v(S_j) = \frac{|S_j|}{2};$$
$$|S_i| = |S_j|, \forall i \neq j,$$

и к каждой коалиции $S_j, j = 1, \dots, l - p$ присоединяем по одному из оставшихся игроков с левыми перчатками (если $l - p = 1$, то это частный случай предыдущих коалиции). Коалиционные структуры, сформированные из таких коалиции, будут устойчивыми.

5. Также можно изменить условия, накладываемое на l, p, r:

$$l - p = 2c, \text{ где } c \in Z.$$

Сформируем коалиционные структуры вида: разбиваем $l-p$ игроков на коалиции $S_1 \cup \dots \cup S_r$:

$$|S_1| + \dots + |S_r| = 2p, \text{ где } r \text{ – } \forall \text{ четный делитель числа } 2c \text{ };$$
$$v(S_j) = \frac{|S_j|}{2};$$
$$|S_i| = |S_j|, \forall i \neq j,$$

и к каждой коалиции $S_j, j = 1, \dots, r$ присоединяем по $\frac{2c}{r}$ из оставшихся игроков с левыми перчатками. Коалиционные структуры, сформированные из таких коалиции, будут также устойчивыми.

8 Игра кооперации при наличии антимонопольных агенств

Смоделируем процесс объединения компаний с помощью кооперативной игры. Антимонопольные агенства запрещают укрупнять производства. Если компания работает индивидуально, то ее прибыль равна $\alpha > 0$, если две компании объединяются, то их прибыль равна $\beta > 2\alpha$. Все объединения более, чем двух компаний запрещены, т. е на коалиции накладывается штраф $-\gamma < 0$ независимо от размера коалиции. Также предположим, что характеристическая функция имеет вид:

$$v(\{i\}) = \alpha \in R, \alpha > 0 \ ;$$
$$v(\{S\}) = \beta \in R, \beta > 2\alpha, |S| = 2;$$
$$v(\{S\}) = -\gamma, \gamma \in R, \gamma > 0, \gamma > \beta, |S| \geq 3.$$

Пусть $|N| \geq 3$.

Компоненты вектора Шепли для двух игроков i и j, объединенных в одну коалицию, при такой характеристической функции будут следующими:

$$\varphi_{ij} = (\tfrac{1}{2}\beta; \tfrac{1}{2}\beta) \text{ для любых } i, j \in N, \text{ причем } \tfrac{1}{2}\beta > \alpha,$$

а при объединении игроков в коалицию более, чем по двое, каждый из игроков получит отрицательный выигрыш, поэтому не так важно конкретизировать значения векторов Шепли.

Рассмотрим всевозможые коалиционные структуры в данной игре и проверим их на устойчивость относительно вектора Шепли:

1. Очевидно, что коалиционная структура, совпадающая с максимальной коалицией, будет неустойчива в связи с тем, что если больше, чем 2 игрока объединяются, то тогда накладывается штраф.

2. Если коалиционная структура будет состоять только из единичных коалиций, то каждому из игроков будет выгодно объединится в коалицию из двоих игроков, следовательно, эта коалиционная структура также является неустойчивой.

3. В случае четного количества игроков рассмотрим объединение всех игроков по двое, причём любые комбинации игроков по два возможны. Никому из игроков невыгодно отклониться: становясь единичной коалицией, игрок получит меньше, чем при текущей стратегии, присоединившись к другой коалиции, уже состоящей из двух игроков, на образованную коалицию наложится штраф, выигрыш станет отрицательным. Соответственно, эти коалиционные структуры являются устойчивыми. Найдём количество этих устойчивых коалиционных структур:

$$\frac{C_n^2 \cdot C_{n-2}^2 \cdot \ldots C_2^2}{\frac{n}{2}!} = \frac{\frac{n!(n-2)!\cdot\ldots}{(n-2)!2!(n-4)!2!\cdot\ldots}}{\frac{n}{2}!} = \frac{n!}{(2!)^{\frac{n}{2}}(\frac{n}{2})!} = \frac{n!}{2\cdot4\cdot\ldots} = n!!!$$

где $n!!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot n-1, (n+1)!!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot n+1$, если n - четное.

4. Предыдущая рассмотренная коалиционная структура может существовать только в игре с четным количеством игроков, поэтому разумно рассмотреть случай нечетного количества игроков. Пусть игроки будут в любой комбинации по двое, а оставшийся игрок – единичная коалиция. Тогда никому из коалиций по двое не будет выгодно отклониться, а игроку из единичной коалиции невыгодно вступить в какую-либо коалицию, так как тогда будет наложен штраф. Получается, что коалиционные структуры таких видов также являются устойчивыми. Количество этих коалиционных структур будет

равно (n+1)!!!.

5. Если рассматривать все оставшиеся коалиционные структуры, где коалиций из двух игроков одна или более, а все остальные игроки – единичные коалиции. Так как в этой игре однозначно определено, что при объединении игрок получает больше, чем когда он в единичной коалиции, то если единичных коалиций больше одной, любому из этих игроков будет выгодно отклониться от своей стратегии и присоединиться к другому игроку. Поэтому эти коалиций являются неустойчивыми.

Эти рассуждения доказывают следующее утверждение.

Утверждение 4.

В игре кооперации при наличии антимонопольных агенств с характеристической функцией вида:

$$v(\{i\}) = \alpha \in R, \alpha > 0 \ ;$$
$$v(\{S\}) = \beta \in R, \beta > 2\alpha, |S| = 2;$$
$$v(\{S\}) = -\gamma, \gamma \in R, \gamma > 0, \gamma > \beta, |S| \geq 3;$$

только коалиционные структуры вида: если количество игроков четное, то все комбинации по двое игроков, а если количество игроков нечетное, то все комбинации игроков по двое и одна единичная коалиция являются устойчивыми относительно вектора Шепли. Всего этих коалиционных структур $n!!! + (n+1)!!!$.

Для того, чтобы рассмотреть более сложный случай, введем характеристическую функцию в следующем виде для того, чтобы выигрыши игроков не были симмтеричными:

$$v(\{i\}) = c_i \in R, c_1 > c_2 > \cdots > c_n;$$

$$v(\{S\}) = (1 + \tfrac{n-(i+j)}{n})(c_i + c_j), i, j \in N, |S| = 2;$$
$$v(\{S\}) = -\gamma, \gamma \in R, \gamma > 0, |S| \geq 3.$$

Компоненты вектора Шепли для двух игроков i и j, объединенных в одну коалицию, при такой характеристической функции будут следующими:

$$\varphi_{ij} = (c_i + \tfrac{n-(i+j)}{2n}(c_i + c_j); c_j + \tfrac{n-(i+j)}{2n}(c_j + c_i)).$$

А для коалиции, где игроков больше, чем двое, значения компонентов для всех игроков будут отрицательны.

Аналогично игре с симметричными выигрышами лиц, коалиционные структуры: совпадающая с максимальной коалицией и состоящая из единичных коалиций, являются также неустойчивыми.

Рассмотрим игру, где количество игроков четно. Тогда любые коалиционные структуры, где игроки объединены по двое, будут устойчивы, так как ни одному игроку невыгодно выходить из коалиции и становиться единичной коалицией, так как он будет выигрывать меньше, или присоединяться к другой коалиции, так как тогда будет наложен штраф. В случае, когда игроков нечетное количество, коалиционные структуры, состоящие из любых комбинаций игроков по двое и игрока n, который является единичной коалицией, будут устойчивы, так как ни одному игроку из коалиций невыгодно становится единичной коалицией, а присоединяться к игроку n также невыгодно, потому что с ним игрок будет получать меньше, чем при объединении с любым другим игроком. А игроку n невыгодно присоединиться к любой из коалиций, так как будет наложен штраф. Оставшиеся коалиционные структуры являются неустойчивыми по той же причине, что и в предыдущем случае.

Эти рассуждения доказывают следующее утверждение.

Утверждение 5.

В игре кооперации при наличии антимонопольных агенств с характерисической функцией вида:

$$v(\{i\}) = c_i \in R, c_1 > c_2 > \dots > c_n;$$
$$v(\{S\}) = (1 + \tfrac{n-(i+j)}{n})(c_i + c_j), i, j \in N, |S| = 2;$$
$$v(\{S\}) = -\gamma, \gamma \in R, \gamma > 0, |S| \geq 3;$$

только коалиционные структуры вида: если игроков четное количество, то любые комбинации игроков по двое, если игроков нечетное количество, то любые комбинации игроков по двое, кроме игрока c_n - он находится в единичной коалиции, являются устойчивыми относительно вектора Шепли.

9 Индивидуальная устойчивость коалиционной структуры

В соответствии с определением 7 все индивидуальные отклонения игроков считаются возможными. Но отклонившийся игрок, который становится индивидуальным игроком или присоединяется к другой коалиции, меняет коалиционную структуру. В случае, когда игрок покидает текущую коалицию и присоединяется к другой, игроки, принадлежащие последней коалиции, могут сравнить свои выигрыши до присоединения этого игрока и после его присоединения. В случае, если выигрыш какого-либо игрока из этой коалиции уменьшится после присоединения отклонившегося игрока, разумно было бы предположить, что он может заблокировать это присоединение. Учитывая это обстоятельство, дадим новое определение устойчивой коалиционной структуры.

Определение 8. Коалиционная структура $\pi = \{B_1, \ldots, B_m\}$ называется индивидуально устойчивой относительно одноточечного кооперативного решения, если для любого игрока $i \in N$ справедливо неравенство:

$$x_i^{\pi} \geq x_i^{\pi''} \text{ для всех } \pi'' = \{B(i) \setminus \{i\}, B_j \cup \{i\}, \pi_{-B(i) \cup B_j}\}, \text{ и } x_k^{\pi} \geq x_k^{\pi''}$$
$$\text{для всех } k \in B_j,$$

где $B_j \in \pi \cup \oslash, B_j \neq B(i)$, и x_i^{π} и $x_i^{\pi''}$ – распределения выигрышей, рассчитанные по одному и тому же решению в играх $(N, v, \pi)(N, v, \pi'')$ с коалиционными структурами π, π'' соответственно.

Рассмотрим все 4 игры, используя новое определение устойчивости. Множество индивидуально устойчивых структур включает в себя множество устойчивых структур, поэтому мы не будем доказывать их индивидуальную устойчивость.

I. Для игры с характеристической функцией $v(S) = k$, если $\{1, \ldots, k\} \subset S$, но $k+1 \notin S$ коалиционная структура, совпадающая с максимальной коалицией, является индивидуально устойчивой. Рассмотрим другие коалиционные структуры, в которых игроки находятся не в одной коалиции: в этой игре в связи со специфичностью определения вида характериститческой функции в любой другой коалиционной структуре найдётся такой игрок, которому было бы выгодно отклониться от своей стратегии и присоединиться к коалиции, чей выигрыш он тем самым увеличит (т. е присоединится к той коалиции, где все подряд до него идущие номера игроков уже присутствуют), а поэтому ни один из игроков не будет блокировать это присоединение, так как и выигрыш каждого из игроков из этой коалиции не уменьшиится. Поэтому эти оставшиеся коалиционные структуры являются неустойчивыми.

II. В игре "Аэропорт" коалиционная структура, совпадающая с максимальной коалицией, является индивидуально устойчивой. Рассмотрим оставшиеся коалиционные структуры: в этой игре в связи с тем, что чем больше игроков в коалиции, тем меньше платит каждый из игроков, то в любой коалиционной структуре найдется игрок, которому было бы выгодно присоединиться к той коалиции, где уже большее количество игроков или если все коалиции состоят из одинакового количества игроков, то любому из игроков выгодно присоединиться к любой из коалиции, чтобы игроков стало больше и ,соответственно, плата у каждого из игроков станет меньше. Поэтому все оставшиеся коалиционные структуры являются неустойчивыми по новому определению.

III. В игре "Рынок перчаток"индивидуально устойчивой является коалиционная структура, совпадающая с гранд коалицией.

Если количество игроков четное, а игроков с левыми перчатками и игроков с правыми перчатками одинаковое количество, то коалиционные структуры вида: любые комбинации коалиции, где количество игроков с правыми перчатками равно количеству игроков с левыми перчатками, также являются индивидуально устойчивыми.

В случае с нечётным количеством игроков, когда игроков с левыми перчатками на одного больше или на одного меньше, рассмотрим следующие коалиционные структуры: все игроки разбиты по коалициями вида: любые комбинации коалиции, где количество игроков с правой перчаткой равно количеству игроков с левой перчаткой, а "лишний" игрок, который без пары, присоединяется к той коалиции, где игроков максимальное количество (если таких коалиций несколько, то к любой), являются индивидуально устойчивыми.

Следующие коалиционные структуры: пусть игроков будет n, при этом игроков с левыми перчатками будет l, а с правыми перчатками p и для них выполняется следующие условия:

$$l > p;$$
$$l - p \leq p$$

Разобьем данных игроков на следующие коалиции: $2p$ игроков (p левых игроков и p правых игроков) на коалиции $S_1 \cup \dots \cup S_r$:

$$|S_1| + \dots + |S_r| = 2p;$$
$$v(S_j) = \frac{|S_j|}{2};$$
$$|S_i| = |S_j|, \forall i \neq j,$$

и к каждой коалиции $S_j, j = 1, \dots, l - p$ присоединяем по одному из оставшихся игроков с левыми перчатками (если $l - p = 1$, то это частный случай пункта 3). Коалиционные структуры, сформированные из таких коалиции, будут также индивидуально устойчивыми устойчивыми.

Можно изменить условия, накладываемое на l, p, r:

$$l - p = 2c, \text{ где } c \in Z.$$

Сформируем коалиционные структуры вида: разбиваем $l-p$ игроков на на коалиции $S_1 \cup \dots \cup S_r$:

$$|S_1| + \dots + |S_r| = 2p, \text{ где } r \text{ – } \forall \text{ четный делитель числа } 2c \text{ ;}$$
$$v(S_j) = \tfrac{|S_j|}{2};$$
$$|S_i| = |S_j|, \forall i \neq j,$$

и к каждой коалиции $S_j, j = 1, \dots, r$ присоединяем по $\frac{2c}{r}$ из оставшихся игроков с левыми перчатками (если $l - p = 1$, то это частный случай пункта 3). Коалиционные структуры, сформированные из таких коалиции, будут индивидуально устойчивыми.

Также рассмотрим следующие коалиционные структуры: предположим, что в игре участвуют n игроков. Пусть k игроков с левыми перчатками, соответственно $n - k$ с правыми, при этом $k > n - k$. Тогда «разобьем» множество игроков на следующие группы: $n - k$ групп, состоящих из игрока с правой перчаткой и игрока с левой перчаткой, и оставшиеся $2k - n$ левых перчаток. Тогда все коалиционные структуры вида: любые комбинации $n - k$ групп,состоящих из игроков с правой перчаткой и игроков с левой перчаткой таких, что: $2(n-k)$ игроков разбиваем на множества $S_1 \cup \dots \cup S_l$:

$$|S_1| + \dots + |S_l| = 2(n - k);$$
$$v(S_j) = \tfrac{|S_j|}{2}, j = 1, \dots, l;$$
$$|S_j| = 2t, t \in Z$$

и любые комбинации одиночных левых перчаток $T_1 \cup \dots \cup T_p$:

$$|T_j| > 0, j = 1, \dots, p;\ p \leq 2k - n$$

будут индивидуально устойчивыми, так как если один из одиночных игроков с левыми перчатками присоединится к S_j (что ему выгодно, так как его выигрыш при присоединении будет больше нуля), то игроку(ам) с левой(ыми) перчаткой(ами) невыгодно такое присоединение, потому что он(и) будет(ут) получать меньше, чем без. Оставшиеся коалиционные структуры будут неустойчивыми, так как если будут без "пары" игроки с правыми перчатками(если их меньше, чем игроков с левыми), то им всегда будет выгодно присоединится к той коалиции, где есть игрок(и) с левыми перчатками.

IV. В игре кооперации при наличии антимонопольных агенств коалиционная структура, совпадающая с максимальной коалицией, являетя индивидуально устойчивой. Также индивидуально устойчивыми являются коалиционные структуры следующего вида: все комбинации игроков по двое при четном количестве игроков n, а при нечетном количестве игроков n все комбинации игроков по двое и единичной коалиции. Рассмотрим другие коалиционные структуры: если одиночных игроков в этой игре больше одного, то игроку выгодно присоединиться к другому одиночному игроку,так как в этой коалиции он будет получать прибыль больше, а игроку невыгодно блокировать это присоединение, потому что он тоже будет получать выигрыш больше. Но одиночный игрок никогда не посчитает выгодным присоединиться к коалиции из двух игроков, так как тогда на эту коалицию будет наложен штраф, а это невыгодно никому из них. Поэтому оставшиеся коалиции являются неустойчивыми.

Эти рассуждения доказывают следующее утверждение.

Утверждение 6.

1) В игре с характеристической функцией $v(S) = k$,если $\{1, \dots, k\} \subset S$, но $k + 1 \notin S$ коалиционная структура, совпадающая с максимальной ко-

алицией является индивидуально устойчивой относительно вектора Шепли;

2) В игре "Аэропорт" коалиционная структура, совпадающая с максимальной коалицией, является индивидуально устойчивой относительно вектора Шепли;

3) В игре "Рынок перчаток" коалиционные структуры вида: совпадающая с гранд коалицией; если количество игроков четное, а левых и правых перчаток одинаковое количество, то коалиционные структуры вида: любые комбинации коалиции, где количество игроков с правой перчаткой равно количеству игроков с левой перчаткой, являются индивидуально устойчивыми. В случае с нечётным количеством игроков, когда игроков с левой перчаткой на одного больше или на одного меньше, следующие коалиционные структуры: любые комбинации коалиции, где количество игроков с правой перчаткой равно количеству игроков с левой перчаткой, а "лишний" игрок, который без пары, присоединяется к той коалиции, где игроков максимальное количество (если таких коалиций несколько, то к любой) являются индивидуально устойчивыми относительно вектора Шепли.

Пусть игроков будет n, при этом игроков с левыми перчатками будет l, а с правыми перчатками p и для них выполняется следующие условия:

$$l > p;$$
$$l - p \leq p$$

Разобьем данных игроков на следующие коалиции: $2p$ игроков (p левых игроков и p правых игроков) на коалиции $S_1 \cup \cdots \cup S_r$:

$$|S_1| + \cdots + |S_r| = 2p;$$

$$v(S_j) = \frac{|S_j|}{2};$$
$$|S_i| = |S_j|, \forall i \neq j,$$

и к каждой коалиции $S_j, j = 1, \dots, l - p$ присоединяем по одному из оставшихся игроков с левыми перчатками (если $l - p = 1$, то это частный случай предыдущих коалиции). Коалиционные структуры, сформированные из таких коалиции, будут индивидуально устойчивыми относительно вектора Шепли.

Также можно изменить условия, накладываемое на l, p, r:

$$l - p = 2c, \text{ где } c \in Z.$$

Сформируем коалиционные структуры вида: разбиваем $l - p$ игроков на на коалиции $S_1 \cup \dots \cup S_r$:

$$|S_1| + \dots + |S_r| = 2p, \text{ где } r \text{ – } \forall \text{ четный делитель числа } 2c \text{ ;}$$
$$v(S_j) = \frac{|S_j|}{2};$$
$$|S_i| = |S_j|, \forall i \neq j,$$

и к каждой коалиции $S_j, j = 1, \dots, r$ присоединяем по $\frac{2c}{r}$ из оставшихся игроков с левыми перчатками. Коалиционные структуры, сформированные из таких коалиции, будут также индивидуально устойчивыми относительно вектора Шепли.

Также следующие коалиционные структуры: предположим, что в игре участвуют n игроков. Пусть k игроков с левыми перчатками, соответственно $n - k$ с правыми, при этом $k > n - k$. Тогда «разобьем» множество игроков на следующие группы: $n - k$ групп, состоящих из игрока с правой перчаткой и игрока с левой перчаткой, и оставшиеся $2k - n$ левых перчаток. Тогда все коалиционные структуры вида: любые комбинации $n - k$ групп,состоящих из игроков с правой перчаткой и игроков с левой перчаткой таких, что : $2(n-k)$ игроков разбиваем на множества $S_1 \cup \dots \cup S_l$:

$$|S_1| + \dots + |S_l| = 2(n-k);$$
$$v(S_j) = \frac{|S_j|}{2}, j = 1, \dots, l;$$
$$|S_j| = 2t, t \in Z$$

и любые комбинации одиночных левых перчаток $T_1 \cup \dots \cup T_p$:

$$|T_j| > 0, j = 1, \dots, p, p \leq 2k - n$$

являются индивидуально устойчивыми относительно вектора Шепли;

4) В игре кооперации при наличии антимонопольных агенств коалиционная структура, совпадающая с максимальной коалицией, являяется индивидуально устойчивой. Также будут индивидуально устойчивыми относительно вектора Шепли коалиционные структуры вида: при четном количестве игроков любые комбинации игроков по двое, при нечетном количестве игроков все комбинации игроков по двое и единичной коалиции.

10 Заключение

В работе исследована проблема устойчивости коалиционных структур в играх с супераддитивными и несупераддитивными характеристическими функциями специального вида. Рассмотрены различные классы игр: одна коалиционная игра n лиц, характеристическая функция которой определяется таким образом: $v(S) = k$, если $\{1, \dots, k\} \subset S$, но $k+1 \notin S$, игра "Аэропорт", рынок перчаток, игра кооперации при наличии антимонопольных агенств. Найдены устойчивые коалиционные структуры, совпадающие с максимальной коалицией, в играх с супераддитивной функцией, а также при определенных условиях в игре перчаток найдена устойчивая коалиционная структура, не совпадающая с максимальной коалицией. В игре кооперации при наличии антимонопольных агенств $n!!!$ устойчивых коалиционных структур при четном количестве игроков n и $(n+1)!!!$ устойчивых коалиционных структур при нечетном количестве игроков n, где $n!!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n-1$, $(n+1)!!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n+1$, если n - четное. При индивидуальной устойчивости коалиционной структуры в игре пречаток найдены другие устойчивые коалиционные структуры по сравнению с уже имеющимися.

Дальнейшая работа в этом направлении может заключаться в следующем: могут быть рассмотрены другие классы игр, новые подходы к определению устойчивых коалиционных структур, а также обобщения на множественные принципы оптимальности.

Список литературы

1. Парилина Е. М., Седаков А. А. Устойчивость коалиционных структур в одной модели банковской кооперации // МТИП. 2012. Т. 4. Вып 4. С. 45–62.

2. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е. В. Теория игр. М.: Высшая школа, 1998. 304 с.

3. Bogomolnaia A., Jackson M. O. The Stability of Hedonic Coalition Structures // Games and Economic Behavior. 2002. Vol. 38. P. 201–230.

4. Driessen T., Funaki Y. Coincidence of and collinearity between game theoretic solutions // OR Spectrum. 1991. 13 (1). P. 15–30.

5. Ferguson T. S. Game Theory. Second Edition. 2014.
URL: $https : //www.math.ucla.edu/\ tom/Game_Theory/Contents.html$

6. Sedakov A., Parilina E., Volobuev Y., Klimuk D. Existence of stable coalition structures in three-person Games // Contributions to Game Theory and Management. 2013. Vol. 6. P. 407–422.

7. Shapley L. S. A value for n-person games. In: Kuhn, H. W., Tucker, A. W. (Eds.), Contributions to the Theory of Games, vol. II, Princeton University Press, 1953. P. 307–317.