

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Тараскина Анастасия Николаевна

Выпускная квалификационная работа бакалавра

ОРБИТЫ В РЕГУЛЯРНОМ ПОЛЕ НЕСФЕРИЧЕСКОЙ
ЗВЕЗДНОЙ СИСТЕМЫ

Направление 01.03.02

«Прикладная математика и информатика»

Научный руководитель
старший преподаватель
Распопова Н.В.

Санкт-Петербург

2019

Содержание

Введение	4
Постановка задачи	6
Обзор литературы	7
1 Модели распределения масс в звездной системе	9
1.1 Семейство моделей для сферических систем	9
1.2 Ротационно–симметрическая система	9
1.2.1 Описание модели	9
1.2.2 Уравнения движения и выбор начальных условий . .	10
1.2.3 Сечения Пуанкаре	11
1.3 Трехосная система	12
1.3.1 Описание модели	12
1.3.2 Уравнения движения и выбор начальных условий . .	14
1.3.3 Сечения Пуанкаре	15
2 Численные методы	16
2.1 Вложенные методы Рунге-Кутты	16
2.2 Симплектические методы	18
2.3 Сравнение методов	19
3 Орбиты и сечения Пуанкаре	21
3.1 Орбиты	21
3.1.1 Ротационно-симметрическая модель	21
3.1.2 Трехосная модель	22
3.2 Сечения Пуанкаре	22
3.2.1 Ротационно-симметрическая модель	22
3.2.2 Трехосная модель	23
Выводы	25

Заключение	27
Список литературы	28
Приложение 1	30
Приложение 2	32

Введение

Моделирование движения тел в космосе всегда актуально. Один из способов решения такой задачи — построение модели гравитационного поля звездной системы. Знание математической модели для конкретной галактики или звездного скопления позволяет наиболее полно изучить систему. Ведь в этом случае можно предугадывать ее развитие, или наоборот, наблюдать эволюцию в прошлом.

В последнее десятилетие активно исследуются и предлагаются различные математические модели для гравитационного поля галактик, шаровых и рассеянных звездных скоплений, скоплений галактик. Нередко модель представляет собой аналитическое выражение для потенциала $\varphi = \varphi(r, t)$. Однако чаще всего авторы используют стационарную модель, когда потенциал φ не зависит от времени t . В данной работе рассмотрено трехпараметрическое семейство потенциалов. Оно интересно тем, что при некоторых наборах параметров получаются уже известные модели. Например, обобщенно-изохронные модели Кузмина–Маласидзе–Велтманна, модель Аня–Эванса и другие.

Изучение параметрических семейств потенциалов имеет большое практическое значения. Для того, чтобы применять модель к реальным звездным системам на основании, например, фотометрических данных, необходимо иметь четкое представление о том, как и какой параметр влияет на задаваемое гравитационное поле. Тогда можно будет выбрать наиболее подходящий набор параметров для рассматриваемого случая. Исследование модели можно проводить, опираясь на вид и характер движения пробного тела в гравитационном поле. Именно этот метод описан в данной работе.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, постановки задачи, обзора литературы, трех глав, выводов, заключения, списка литературы и приложений. В первой главе рассматривается математическая модель, соответствующая ей динамическая система и методы анализа траекторий. Также в ней приведены условия выбора начальных данных

для задачи Коши. Вторая глава посвящена решению полученной системы дифференциальных уравнений с помощью различных численных методов и анализа их эффективности для заданной системы. В третьей главе показаны результаты вычислений: графики орбит и сечений Пуанкаре.

Таким образом, в данной работе представлен графический анализ движения тел. Рассмотрены различные виды орбит в зависимости от начальных условий и значений параметров модели. Полученные траектории исследуются в фазовой плоскости с помощью сечений Пуанкаре при различных значениях интегралов движения и структурных параметров модели.

Постановка задачи

Целью работы является исследование несферической модели звездной системы. Для осуществления поставленной цели необходимо выполнить следующие задачи:

- Рассмотреть сферическую модель и выполнить обобщение на случай ротационной симметрии и общий несферический случай.
- Проверить физическую корректность модели.
- Поставить и решить задачу Коши различными численными методами.
- Построить орбиты звезд и соответствующие сечения Пуанкаре в заданном гравитационном поле.

Обзор литературы

В настоящей работе рассмотрена модель [9], которая представляет собой параметрическое семейство гравитационных потенциалов для сферической звездной системы. Описание некоторых свойств подобных семейств можно найти в [1], [3]. Данное семейство является обобщением более ранних моделей. В статье [9] перечислены модели, которые представляют собой частные случаи предложенного семейства, и указаны значения параметров, при которых эти модели получаются.

Большой интерес представляют не сферические модели, поэтому проведем обобщение на случай ротационной симметрии и трехосный случай. Для обобщения будем использовать метод эквипотенциалей Кутузова, Осипкова [12]. Он обладает рядом достоинств по сравнению с методом штеккелевских моделей: если известны гравитационный потенциал и его градиент, то численные расчеты орбит выполняются более точно и эффективно; известно аналитическое выражение для плотности. Недостатком метода является то, что заранее неизвестна физическая корректность моделей, а именно, положительность плотности. Эта проблема подробно обсуждается в [11, 12]. Используя эквипотенциали из [6, 7, 10], получим модели, обладающую ротационной симметрией, а рассмотрев эквипотенциаль из [13] — трехосную модель.

Один из способов исследования модели — анализ траекторий движения в заданном гравитационном поле. Для этого необходимо решить задачу Коши: составить систему дифференциальных уравнений и задать начальные условия. Постановка задачи Коши требует знания особенностей динамики звездных систем. Этому посвящены монографии [2, 14, 15]. В них также описаны различные способы исследования характера движения вычисленных орбит такие, как отображение Пуанкаре и показатели Ляпунова.

Полученные дифференциальные уравнения, как правило, имеют достаточно громоздкие правые части. Для их решения приходится приме-

нять численные методы., подробное описание которых можно найти в [5]. Однако, учитывая особенности полученной задачи Коши, следует также рассмотреть симплектические методы. Они не являются распространенными, и автору известно мало литературы, посвященной этому вопросу. Упоминание таких методов можно также найти в [5], однако более полное изложение теории и применения симплектических методов дано в [4].

В выпускной квалификационной работе проводится сравнение с работой [8], в которой также исследуются ротационно-симметрическая и трехосная модели.

1 Модели распределения масс в звездной системе

1.1 Семейство моделей для сферических систем

Гравитационное поле в моделях галактик обычно описывается с помощью потенциала как функции координат. Закон изменения потенциала $\varphi(r)$ в случае сферически симметричного распределения масс в модели [9] имеет вид

$$\varphi(r) = \frac{\alpha}{\alpha - 1 + w(r)}, \quad w(r) = (1 + \kappa r^p)^{1/p}, \quad \kappa = O(\alpha^p), \quad (1)$$

где r — расстояние от начала координат до пробной звезды, $\alpha > 0$, $p > 0$ — структурные параметры. Параметр p влияет на наличие пика центральной плотности, который имеет место для всех моделей с $0 < p < 2$ (как в [1]). Такой потенциал удобно использовать для моделирования, например, звездных систем с черной дырой в центре. С увеличением значения α пик плотности становится выше. Таким образом, α можно считать параметром концентрации распределения масс [3]. Все фигурирующие в настоящей работе переменные являются безразмерными. Переход к размерным величинам выполняется умножением на соответствующие размерные единицы.

1.2 Ротационно–симметрическая система

1.2.1 Описание модели

Используя метод эквипотенциалей Кутузова, Осипкова [11, 12], обобщим предложенную модель для систем, обладающих ротационной и зеркальной симметрией. Теперь закон изменения потенциала задается аналитическим выражением $\varphi(\xi)$, где ξ — функция от безразмерных цилиндрических координат:

$$\xi^2 = f(R, z).$$

Рассмотрим эквипотенциали Миямото–Нагаи [7]

$$\xi^2 = R^2 + z^2 + 2(1 - \varepsilon)(\sqrt{z^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon), \quad (2)$$

и Линден-Белла–Багина [6, 10]

$$\xi^2 = -\Lambda + \sqrt{(R^2 + \Lambda)^2 + (z^2 + 1)^2} - 1. \quad (3)$$

Здесь ε, Λ — структурные параметры, отвечающие за сплюснутость системы. Их значения выбираются из условия положительности плотности. Плотность ρ находим из уравнения Пуассона [15]. В цилиндрических координатах оно имеет вид

$$\rho(R, z) = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} - \frac{\partial \varphi}{R \partial R} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Положительность плотности проверяем численно для следующих наборов значений параметров: $p \in \{0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 4\}$, $\alpha \in \{2, 3, 4\}$, $\varepsilon \in \{0.2, 0.8, 0.5\}$, $\Lambda \in \{0, 0.5, 1, 1.5\}$ в области $R \in [0; 10]$, $z \in [0; 10]$.

1.2.2 Уравнения движения и выбор начальных условий

Согласно принципам классической механики, движение пробного тела в гравитационном поле можно задать с помощью потенциала данного поля:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\text{grad}(\varphi).$$

Обозначим $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ и перейдем к цилиндрическим координатам (R, θ, z) . Градиент потенциала будет иметь вид

$$\text{grad}(\varphi) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial R}, \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right).$$

В случае стационарности и ротационной симметрии модели имеют место интегралы энергии H и площадей I :

$$H = \frac{1}{2}(v_R^2 + v_z^2 + v_\theta^2) - \varphi(\xi), \quad I = Rv_\theta.$$

Учитывая сохранение интегралов движения, получим систему дифференциальных уравнений первого порядка [3]

$$\begin{cases} \dot{R} = v_R, & \dot{v}_R = I^2/R^3 + \partial\varphi/\partial R, \\ \dot{\theta} = I/R^2, & \dot{v}_z = \partial\varphi/\partial z, \\ \dot{z} = v_z. \end{cases} \quad (4)$$

Будем задавать значения R, z, θ, v_R, I, H в начальный момент времени. Выбор интегралов движения осуществляется с помощью диаграммы Линдблада [2], определяющей их возможные значения:

$$\begin{cases} 2H - I^2/R^2 - 2\varphi(R, z, \theta) \geq 0, \\ H < 0. \end{cases}$$

Можем найти значения v_z и v_θ в начальный момент времени из выражений для интегралов движения.

В данной работе не рассматриваются орбиты тел, вылетающих из системы, то есть исключаются начальные условия, при которых модуль скорости больше скорости убегания [2]

$$v_r^2 + v_z^2 + v_\theta^2 < 2\varphi(R, z, \theta).$$

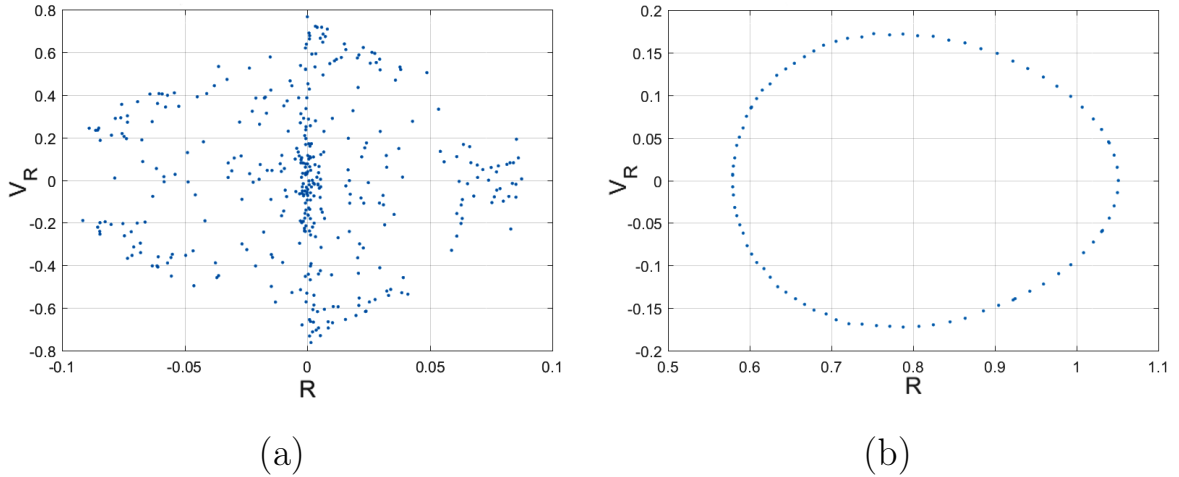
.

1.2.3 Сечения Пуанкаре

Исследуем характер движения построенных орбит: регулярный или хаотический. В литературе нет четкого определения хаоса. Будем, как это сделано в [14], говорить, что тело движется хаотически, если его финальное динамическое состояние существенным образом зависит от его начального динамического состояния. Одним из методов определения характера движения является сечение Пуанкаре [2]. Он позволяет количественно выявить области хаотического и регулярного движения.

Опишем подробнее идею метода. Отображения Пуанкаре получается путем фиксации плоскости в фазовом пространстве (R, z, v_R, v_z) и определения точек, в которых траектория пересекает эту плоскость в заданном

направлении [2, 14]. Если точки пересечения плоскости складываются в гладкую непрерывную линию, как на рисунке (b) ниже, то движение считается регулярным. В случае хаотического движения точки разбросаны по плоскости или скапливаются в некоторой области (рисунок (a)).



Сечения Пуанкаре для хаотической (a) и регулярной (b) траекторий

Алгоритм построения сечений Пуанкаре выглядит следующим образом.

1. Рассмотрим четырехмерное фазовое пространство (R, z, v_R, v_z) .
2. Сохранение интеграла энергии позволяет исключить v_z . Таким образом, перейдем в пространство (R, z, v_R) .
3. Определим плоскость $z = 0$, точки пересечения с орбитой обозначим на плоскости (R, v_R) . Будем брать только те точки, в которых $v_z < 0$.

1.3 Трехосная система

1.3.1 Описание модели

Переход к трехосной модели выполним с помощью эквипотенциалей четвертого порядка [13]. Теперь они являются функциями от безразмерных прямоугольных координат:

$$\xi^2 = f(x, y, z).$$

$$\xi^2 = r^2 + 2\mu(1 - \varepsilon)(q - \varepsilon) + \tau(\xi)s^2, \quad 0 \leq \xi < \infty. \quad (5)$$

$$r^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2, \quad q \equiv \sqrt{\varepsilon^2 + z^2},$$

$$s^2 \equiv y^2 - x^2 \begin{cases} \geq 0, & |x| \leq |y|, \\ < 0, & |x| > |y|. \end{cases}$$

Коэффициент τ здесь считается функцией ξ и является параметром трехосности. В случае $\tau \equiv 0$ модель становится ротационно симметрической. В работе [13] $\tau(\xi)$ выражается через некоторую пропорциональную ему ограниченную функцию $\chi(\xi)$:

$$\tau(\xi) = (1 - \varepsilon)\chi(\xi). \quad (6)$$

Заметим еще, что параметр ξ задан через координаты x, y, z неявно. Для его вычисления необходимо решить уравнение (5), (6), например, методом последовательных приближений, полагая вначале $\chi(\xi) = 0$.

Согласно [13] можно рассмотреть следующие функции:

$$\chi_1(\xi) = \frac{A_1\xi}{1 + \xi^2}, \quad \chi_2(\xi) = \frac{A_2\xi^2}{1 + \xi^4},$$

$$A_i(1 - \varepsilon) < 1, \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

Проверим физическую корректность модели. Плотность ρ находим из уравнения Пуассона, которое в прямоугольных координатах имеет вид

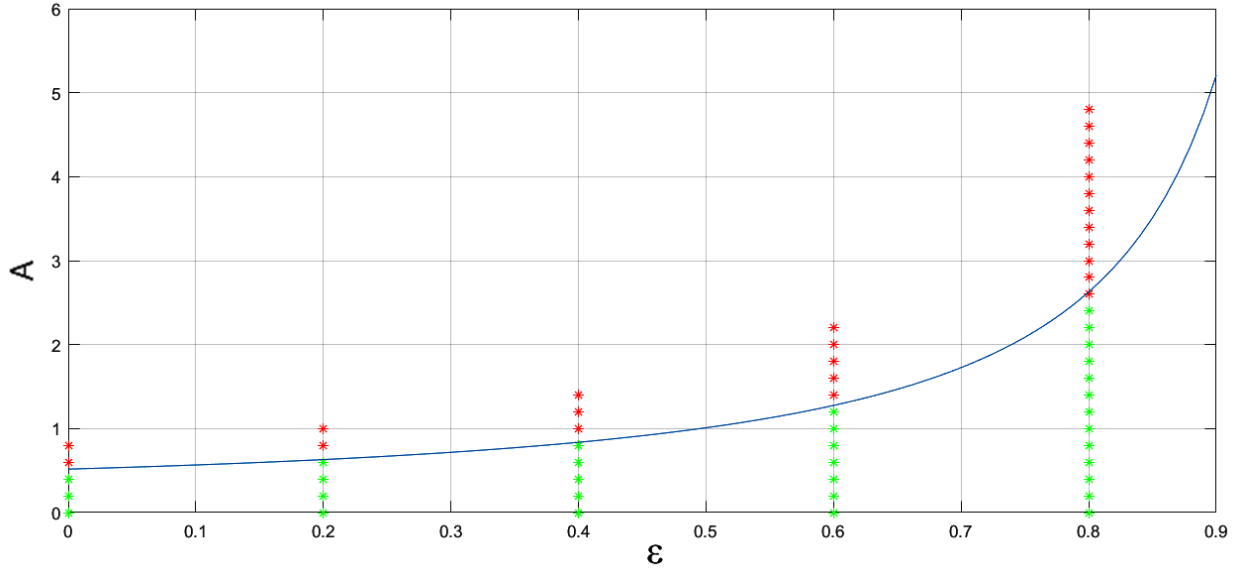
$$\rho(x, y, z) = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Положительность плотности проверяем численно для следующих наборов значений параметров: $p \in \{0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 4\}$, $\alpha \in \{2, 3, 4\}$, $\varepsilon \in [0, 0.8]$, $\mu \in \{0, 2\}$ в области $x \in [-10; 10]$, $y \in [-10; 10]$, $z \in [-10; 10]$.

Оценка (7) для A_1 дает большое количество наборов параметров, при которых плотность отрицательна. На плоскости (ε, A) отметим точки, для которых не выполняется условие физической корректности, красным цветом, и зеленым — для которых выполняется. На графике ниже видно, что большая часть красных точек лежит выше некоторой кривой. Подберем

для нее аналитическое выражение и получим более точное ограничение на параметр

$$A_1 < \frac{\exp \varepsilon}{4.6(1 - \varepsilon/1.01)}.$$



Значения параметров дающие отрицательную плотность (красный) и положительную плотность (зеленый)

Таким образом, построено две модели: с параметром A_1 (далее модель I) и с параметром A_2 (далее модель II).

1.3.2 Уравнения движения и выбор начальных условий

Для трехосной модели система дифференциальных уравнений задается аналогично ротационно симметрическому случаю. Теперь градиент потенциала будет иметь вид

$$\text{grad}(\varphi) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right).$$

Тогда получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x, & \dot{v}_x = \partial \varphi / \partial x, \\ \dot{y} = v_y, & \dot{v}_y = \partial \varphi / \partial y, \\ \dot{z} = v_z, & \dot{v}_z = \partial \varphi / \partial z. \end{cases} \quad (8)$$

В случае несферического распределения масс имеет место только один интеграл движения, а именно интеграл энергии

$$H = \frac{1}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - \varphi(\xi).$$

Будем задавать значения x, y, z, v_x, v_y, H в начальный момент времени. Учитывая сохранение интеграла энергии можем найти v_z .

Как и в предыдущем пункте будем накладывать ограничение на начальную скорость

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 < 2\varphi(x, y, z).$$

1.3.3 Сечения Пуанкаре

Как и в случае ротационной симметрии, будем исследовать характер орбит с помощью сечений Пуанкаре [2, 14]. Получим следующий алгоритм построения отображений:

1. Рассмотрим фазовое пространство (x, z, v_x, v_z) .
2. Исключим v_z используя закон сохранения интеграла энергии и перейдем в пространство (x, z, v_x) .
3. Определим плоскость $z = 0$, точки пересечения с орбитой обозначим на плоскости (x, v_x) . Будем брать только те точки, в которых $v_x < 0$.

Аналогично рассматривается фазовое пространство (y, z, v_y, v_z) . Тогда сечения Пуанкаре будут изображены на плоскости (y, v_y) .

2 Численные методы

Поставленную задачу Коши будем решать численно в среде программирования Intel Visual Fortran с помощью описанных ниже методов.

2.1 Вложенные методы Рунге-Кутты

Запишем системы (4) и (8) в общем виде

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}),$$

где $\mathbf{x} = (R, \theta, z, v_r, v_z)$ или $\mathbf{x} = (x, y, z, v_x, v_y, v_z)$, $f(t, \mathbf{x})$ — вектор-функция, задающая правую часть (4) или (8). Построим приближенное значение $\mathbf{x}(t)$ с помощью явных вложенных методов Рунге-Кутты [5]. Будем получать значения x_n , начиная с точки $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$, по итерационной формуле

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h_n(b_1k_1 + \dots + b_s k_s),$$

где h_n — переменный шаг интегрирования на n -ой итерации, b_i — некоторые численные коэффициенты, s — обозначает порядок метода или количество обращений к правой части системы на каждой итерации, k_i задаются по формулам:

$$k_1 = f(t_0, \mathbf{x}_0),$$

$$k_2 = f(t_0 + c_2 h_n, \mathbf{x}_0 + h_n a_{21} k_1),$$

$$k_3 = f(t_0 + c_3 h_n, \mathbf{x}_0 + h_n(a_{31} k_1 + a_{33} k_2)),$$

...

$$k_s = f(t_0 + c_s h_n, \mathbf{x}_0 + h_n(a_{s1} k_1 + \dots + a_{s,s-1} k_{s-1})),$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h_n(b_1 k_1 + \dots + b_s k_s),$$

здесь a_{ij} и c_i — численные коэффициенты. Вложенные методы подразумевают, что на каждой итерации вычисляются два решения, одно из которых служит оценкой другому. Поэтому посчитаем

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \hat{\mathbf{x}}_n + h_n(\hat{b}_1 k_1 + \dots + \hat{b}_s k_s),$$

здесь \hat{b}_i — численные коэффициенты отличные от b_i . В таком случае мы сможем посчитать ошибку метода как $\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|$. Чаще всего погрешность вычислений имеет тот же порядок, что и метод. То есть для метода порядка s получим ошибку пропорциональную 10^{-s} .

Выбор шага интегрирования будем осуществлять по следующему алгоритму:

1. Задаем допустимую погрешность tol .
2. В случае больших значений x может возникать несоответствие порядков, поэтому будем использовать относительную оценку. Для этого выберем $\max(\|\mathbf{x}\|, \|\hat{\mathbf{x}}\|)$ и будем умножать на это число tol в случае больших $\|\mathbf{x}\|$.
3. Если ошибка $\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| > tol \cdot 2^{s-1}$, сделанный шаг не принимается и пересчитывается с заново с $h/2$.
4. Если же $\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| < tol \cdot 2^{-s}$, то можно увеличить шаг в 2 раза.
5. Нельзя допустить обнуления шага интегрирования, поэтому возможно увеличение tol в случае, когда h становится меньше допустимого значения (например 10^{-5}).

В литературе описано множество разновидностей вложенных методов Рунге–Кутты. В данной работе рассмотрим метод Мерсона 5(6), коэффициенты которого задаются таблицей 1 (см. Приложение 1), и метод Дормана–Принса 6(7) с коэффициентами из таблицы 2 (см. Приложение 1). При описании используется обозначение из [5]: после наименования метода сначала пишется порядок главного метода, а в скобках указывается порядок проверочного метода. Заданная точность tol для метода Мерсона составляет 10^{-5} и для метода Дормана–Принса — 10^{-7} .

2.2 Симплектические методы

Системы дифференциальных уравнений (4) и (8) являются гамильтоновыми, поэтому реализуем также методы, учитывающие сохранение интеграла энергии [4]. Рассмотрим такие методы на примере трехосной модели.

Симплектический метод Эйлера кратко может быть описан с помощью следующей схемы:

$$(q_{n+1}, p_{n+1}) = (q_n, p_n) + hf(q_n, p_{n+1}),$$

где $p = (v_x, v_y, v_z)$, $q = (x, y, z)$. Для p_{n+1} метод является неявным, поэтому сначала сделаем несколько итераций явного метода Эйлера:

$$(q_{n+1}, p_{n+1}) = (q_n, p_n) + hf(q_n, p_n).$$

Метод имеет первый порядок, поэтому для вычисления начального приближения достаточно точности 10^{-2} .

Явный метод Ньюстрёма первого порядка с учетом того, что правую часть системы (8) можно записать $f(q, p) = (p, f_1(q))$, будет иметь вид

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + hf_1(q_n + \frac{h}{2}p_n), \\ q_{n+1} &= q_n + \frac{h}{2}(p_n + p_{n+1}). \end{aligned}$$

Метод примечателен тем, что при первом порядке имеет второй порядок точности. Это обусловлено особенностью правой части системы.

Однако, в силу малого порядка, результаты вычислений с использованием описанных выше методов оказались менее точными, чем при реализации не симплектических вложенных методов Рунге–Кутты. Опишем симплектические методы более высоких порядков, а именно — методы Лобатто. Следует отметить, что при порядке метода s они дают точность порядка $2s - 2$. Общая схема вычислений выглядит следующим образом:

$$X_{ni} = \mathbf{x}_n + h_n \sum_{j=1}^s a_{ij} f(X_{nj}), \quad i = 1, \dots, s, \quad (9)$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h_n \sum_{j=1}^s b_j f(X_{nj}),$$

где $\mathbf{x} = (x, y, z, v_x, v_y, v_z)$, a_{ij} и b_i — коэффициенты метода. Здесь (9) является системой нелинейных уравнений, которую также приходится решать численно. Будем использовать пару IIIA–IIIB четвертого порядка, которые вместе образуют вложенный метод. Коэффициенты приведены в таблицах 3, 4 (см. Приложение 1).

2.3 Сравнение методов

Сравнение проведем на основе массового интегрирования орбит с различными значениями параметров и начальных данных. Для каждого метода считаем точность и время вычислений. Для вложенных методов точность считается известным образом, а для метода Эйлера и Нюстрема оценим ошибку, используя разность между решениями данных методов и метода Дормана–Принса (так как он имеет наибольшую точность из выбранных). Также посчитаем разность δH между максимальным и минимальным значениями интеграла энергии, вычисленными на одной траектории. На основании оценки δH будем судить насколько метод удовлетворяет закону сохранения интегралов движения. В качестве оценки метода используем произведение ошибки на время вычислений и просуммируем для всех орбит. Таким образом, чем меньше этот показатель, тем лучше метод. Посчитав среднее арифметическое по всем вычисленным орбитам получим следующие результаты:

Метод	Порядок метода	Порядок точности	Ошибка	δH	Время, с	Оценка
Дормана–Принса	7(8)	7	$9 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{-5}$	1.1	$2.8 \cdot 10^{-5}$
Мерсона	5(6)	5	$7.5 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-4}$	0.8	$2 \cdot 10^{-3}$
Лобатто	4(4)	6	$3.6 \cdot 10^{-6}$	$4.2 \cdot 10^{-8}$	1.4	$1.3 \cdot 10^{-3}$
Нюстрема	1	2	$1.4 \cdot 10^{-2}$	$3.9 \cdot 10^{-7}$	0.2	0.7
Эйлера	1	1	$3.7 \cdot 10^{-2}$	$7.1 \cdot 10^{-4}$	0.2	2

Из таблицы видно, что метод Дормана–Принса является наиболее точным и выполняет вычисления за более короткое время, чем метод Лобатто, который на несколько порядков ниже. Связано это с тем, что метод Лобатто является неявным и требует решения нелинейной системы (9). Для ее решения нужно делать $3n + 1$ обращений к правой части системы, где n — количество итераций, проводимых для решения системы. Более того этот метод является вложенным, то есть приходится решать две такие системы. Однако обратим внимание на изменение интеграла энергии. Для методов Дормана–Принса и Мерсона порядок δH выше, чем порядок ошибки. Иными словами, данные методы плохо обеспечивают сохранение интеграла энергии. В симплектических же методах порядок δH ниже.

Таким образом, метод Дормана–Принса является наиболее оптимальным в рамках поставленной задачи, несмотря на то, что он не обеспечивает хорошего сохранения интеграла энергии. Далее для вычисления орбит и построения сечений Пуанкаре будем использовать именно этот метод.

3 Орбиты и сечения Пуанкаре

Для каждого семейства моделей исследуется влияние начальных условий и параметров на движение пробной звезды в поле галактики. Все рисунки данной главы вынесены в Приложение 2.

3.1 Орбиты

3.1.1 Ротационно-симметрическая модель

В случае ротационной симметрии удобно изображать орбиты в меридиональной плоскости (R, z) , которая сопутствует звезде. Для каждой модели (1), (2) и (1), (3) проварьируем значения параметров, выбирая те из них, которые порождают физически корректную модель, и посмотрим, как изменятся орбиты.

На рисунке 1, 2 представлены траектории для каждого из семейств потенциалов. При этом рассмотрено влияние параметра, отвечающего за сплюснутость системы (ε для модели (1), (2) и Λ для модели (1), (3)). На рисунке 3, 4 рассмотрено влияние параметра p . Выбирались значения $0 < p < 2$. Как правило, при увеличении p орбиты становились более «лохматыми».

Более интересное влияние на орбиты оказывают изменения интегралов движения: интеграла энергии H (см. Рис. 5) и интеграла площадей I (см. Рис. 6, 7). Орбиты становятся более вытянутыми относительно оси R . Также при увеличении интеграла площадей наблюдается удаление от оси z точки, движущийся по траектории. На рисунке 5 представлены орбиты только для модели с эквипотенциалами Миямото–Нагаи, так как в случае эквипотенциалей Линден–Белла–Багина влияние H аналогично.

В результате интегрирования были получены различные типы орбит. В случае ненулевого интеграла площадей орбиты, как правило, оказывались ящичными для первого семейства (Рис. 1, 3, 5, 7) и трубкообразными для второго (Рис. 2, 4, 6).

3.1.2 Трехосная модель

Для трехосной модели проекции орбит на плоскость мало информативны, поэтому приведем здесь только несколько рисунков орбит (Рис. 8). При значении параметра $A = 0$ модели становятся ротационно-симметрическими. Тогда орбиты можно изображать в сопутствующей плоскости, как на рисунке 9.

Теперь исследуем влияние параметра трехосности на вид орбит. На одном графике построим две орбиты с одинаковыми начальными условиями и значениями параметров, за исключением параметра A . Для одной орбиты пусть $A = 0$, а для другой $A = 2$. В случае $A = 0$ орбиты ротационно-симметрическими, поэтому будем работать в меридиональной плоскости. Чтобы избежать наложений, одну орбиту отразим относительно оси R . Полученные графики показаны на рисунке 10. Видно, что при увеличении значения параметра трехосности орбиты становятся более «лохматыми». Следовательно, можно сделать вывод, что параметр A влияет на регулярность движения тела. Рассмотренный в работе [8] потенциал Кузмина–Маласидзе давал аналогичные результаты.

3.2 Сечения Пуанкаре

3.2.1 Ротационно-симметрическая модель

На плоскости (R, v_R) построим семейства сечений Пуанкаре для различных начальных условий R, z, v_R : $R \in [0.1; 1.1]$, $z \in [0.1; 1.3]$, $v_R \in [0; 2]$. Интегралы и параметры принимают следующие значения: $H \in [-1; -0.1]$, $I \in [0; 0.4]$, $p \in [0.5; 2]$, $\alpha \in [2; 4]$, $\varepsilon \in [0.2; 0.8]$, $\Lambda \in [0.5; 1.5]$. Под семейством сечений будем подразумевать множество отображений Пуанкаре для орбит с одинаковыми значениями $p, \alpha, \varepsilon (\Lambda)$ и различными значениями R, z, v_R из указанных интервалов. Регулярным семейством будем называть семейство, все орбиты которого регулярны.

В модели (1), (2) большая часть орбит является упорядоченными,

иногда появляются области хаотичности при приближении к центру системы, при нулевом интеграле площадей. Модель (1), (3) демонстрирует те же результаты. Примеры регулярных семейств показаны на рисунке 11. Появление областей нерегулярного движения для двух семейств показано на рисунках 12, 13.

3.2.2 Трехосная модель

Как и в ротационно-симметрической модели, рассмотрим семейства сечений. Однако в случае трехосной модели не было обнаружено регулярных семейств, большинство семейств содержат различные виды орбит, как на рисунках 14 и 15 (каждый рисунок содержит орбиты из одного семейства сечений Пуанкаре). В отличие от работы [8] зависимости от параметров обнаружено не было.

Для трехосной модели многие сечения Пуанкаре имеют более сложную структуру, чем в случае ротационной симметрии (Рис. 14(a), 15(b, c)). Если раньше для регулярных орбит сечения Пуанкаре представляли собой ровную линию, то теперь для многих орбит получаются более сложные рисунки. Их сложно назвать хаотическими, так как в расположении точек есть определенные закономерности, однако линию они уже не образуют. Более того меняется вид сечений в зависимости от рассмотренного фазового пространства. Так, например, на рисунке 15(b) в плоскости (x, v_x) точки образуют непрерывную линию, а в плоскости (y, v_y) получается более сложный рисунок.

При обобщении ротационно-симметрической модели многие траектории перестают быть регулярными (Рис. 14(b) и 15(a)). Данные траектории в обеих плоскостях образуют хаотическое скопление точек. Следует заметить, что такие сечения, как на рисунке 14(a) (в которых есть упорядоченный рисунок отличный от линии), при более малых интервалах интегрирования не представляли из себя никакой упорядоченной картины. Поэтому есть вероятность, что при значительном увеличении промежутка

интегрирования орбиты на рисунках 14(b) и 15(a) также приобретут более правильную форму.

Таким образом, в трехосном случае регулярность орбит следует исследовать, используя более точные методы такие, как показатели Ляпунова или метод фундаментальных частот Ласкара. Но это выходит за рамки данной работы и планируется осуществить в дальнейших исследованиях.

Выводы

В первой главе описана модель распределения масс в звездной системе, методы обобщения этой модели на несферический случай и способы исследования орбит.

- Получено семейство гравитационных потенциалов.
- Проверена физическая корректность модели для набора параметров.
- Поставлена задача Коши для моделирования движения в гравитационном поле данной модели.

В главе 2 рассмотрены различные численные методы для решения полученной системы дифференциальных уравнений и проведен их сравнительный анализ. Обобщив результаты, можно сделать следующие выводы:

- Симплектические методы действительно лучше сохраняют интеграл энергии, но требуют больше времени на вычисления.
- Явные методы Рунге–Кутты считают траектории за более короткое время и с наилучшей точностью, однако хуже сохраняют интеграл энергии.

В последней главе представлены результаты вычислений и на основании множественного интегрирования сделаны выводы о изменении вида орбит в зависимости от различных условий. Там же приведены сечения Пуанкаре для траекторий рассматриваемых моделей. Полученные результаты сравниваются с уже известными. Было выделено следующее:

- параметр ε (Λ) отвечает за сплюснутость системы;
- параметр p влияет на регулярность орбиты и отвечает за распределение масс в центральной части системы;
- при увеличении значения интегралов движения орбиты становятся более вытянутыми относительно оси R ;

- при увеличении значения интеграла площадей траектории удаляются от оси z ;
- в случае ненулевого интеграла площадей, орбиты оказывались ящичными (для модели (1), (2)) и трубкообразными (для модели (1), (4));
- параметр A влияет на регулярность орбит;
- большинство орбит ротационно-симметрической модели регулярны;
- области хаотичности возникают ближе к центру системы при нулевом интеграле площадей;
- трехосная модель дает больше нерегулярных траекторий;
- сечения Пуанкаре не могут дать однозначный ответ на вопрос о регулярности траекторий в трехосной модели.

Из вышесказанного следует, что была достигнута сформулированная цель и выполнены поставленные задачи.

Заключение

В данной работе была рассмотрена задача изучения модели гравитационного потенциала с помощью построения траекторий движения пробных тел в задаваемом поле. Для полученных моделей были определены допустимые значения параметров и для них поставлена и решена задача Коши. Были изучены численные методы и применены те, что наиболее подходят к данной задаче. На основании результатов массового численного интегрирования по области допустимых начальных условий определено их влияние на характер орбит, проанализирована чувствительность орбит к выбору значений структурных параметров и интегралов движения.

Некоторые результаты работы были представлены на конференциях:

- 47-ая студенческая научная конференция "Физика Космоса";
- 49-ая международная научная конференция «Процессы управления и устойчивость»;
- 50-ая международная научная конференция «Процессы управления и устойчивость»

и вошли в публикации трудов перечисленных конференций.

Список литературы

1. *An J. H., Evans N. W.* Galaxy Models with Tangentially Anisotropic Velocity Distributions // *Astron. J.* 2006. Vol. 131. No 2. 2006. P. 433–436.
2. *Binney J. and Tremaine S.* Galactic Dynamics. 2nd ed. Princeton: Princeton University Press, 2008. 920 p.
3. *Davydenko A. A., Raspopova N. V., Ustimenko S. S.* On mass simulations of dynamical models of galaxy // International Conference on “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov. 2015. P. 42–44.
4. *Hairer E., Lubich C., Wanner G.* Geometric Numerical Integration. Berlin: Springer Series, 2006. 644 p.
5. *Hairer E., Norsett S. P., Wanner G.* Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problem. Berlin: Springer Series, 2008. 528 p.
6. *Lindel-Bell D.* Exact solution of the self-gravitating equation. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 1962. Vol. 123. P. 447–458.
7. *Miyamoto M., Nagai R.* Three-dimensional models for the distribution of mass in galaxies. // *Publ. Astron. Soc. Japan.* 1962. Vol. 123. P. 447–458.
8. *Raspopova N. V., Kutuzov S. A.* Some orbits in various models of galactic gravitational field // arxiv.org/abs/0906.4410v1. 2009.
9. *Raspopova N. V., Ossipkov L. P., Jiang Z.* A new model for dark matter of spherical galaxies // *Astronomical and Astrophysical Transactions.* 2012. Vol. 27. Iss. 3. P. 433–436.
10. *Багин В. М.* Об одной модели звездных скоплений с осевой симметрией и однородным по массе звездным составом. // *Астрон. журн.* 1972. Т. 49. № 6. С. 1249–1257.

11. *Громов А. О.* Сравнение штеккелевских моделей с моделями, полученными методом эквипотенциалей. // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 163–167.
12. *Кутузов С. А., Осипков Л. П.* Моделирование пространственного гравитационного потенциала звездных систем. // Астрон. журн. 1980. Т. 57. № 1. С. 28–37.
13. *Кутузов С. А.* Трехосная модель распределения масс в Галактике с эквипотенциалами четвертого порядка // Письма в Астрон. журн. Т. 24. № 10. 1998. С. 748–753.
14. *Мюррей К. , Дермотт С.* Динамика Солнечной системы. Пер. с англ. Шевченко И. И. М: Физматлит., 2010. 588 с.
15. *Огородников К. Ф.* Динамика звездных систем. М: Физматлит., 1958. 627 с.

Приложение 1

c_i	a_{ij}					
0						
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$					
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$				
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$			
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-3}{2}$	2		
x	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-3}{2}$	2	0	b_j
\hat{x}	$\frac{1}{6}$	0	6	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{6}$	\hat{b}_j

Таблица 1. Метод Мерсона 5(6)

c_i	a_{ij}							
0								
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$							
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$						
$\frac{4}{5}$	$\frac{44}{45}$	$\frac{-56}{15}$	$\frac{32}{9}$					
$\frac{8}{9}$	$\frac{19372}{6561}$	$\frac{-25360}{2187}$	$\frac{64448}{6561}$	$\frac{-212}{729}$				
1	$\frac{9017}{3168}$	$\frac{-355}{33}$	$\frac{46732}{5247}$	$\frac{49}{176}$	$\frac{-5103}{18656}$			
1	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$\frac{-2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$		
x	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$\frac{-2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	b_j	
\hat{x}	$\frac{5179}{57600}$	0	$\frac{7571}{16695}$	$\frac{393}{640}$	$\frac{-92097}{339200}$	$\frac{187}{2100}$	$\frac{1}{40}$	\hat{b}_j

Таблица 2. Метод Дормана–Принса 6(7)

c_i	a_{ij}				
0	0	0	0	0	
$\frac{5-\sqrt{5}}{10}$	$\frac{11+\sqrt{5}}{120}$	$\frac{25-\sqrt{5}}{120}$	$\frac{25-13\sqrt{5}}{120}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{120}$	
$\frac{5+\sqrt{5}}{10}$	$\frac{11-\sqrt{5}}{120}$	$\frac{25+13\sqrt{5}}{120}$	$\frac{25+\sqrt{5}}{120}$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{120}$	
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	
x	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	b_j

Таблица 3. Метод Лобатто IIIA

c_i	a_{ij}				
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{120}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{120}$	0	
$\frac{5-\sqrt{5}}{10}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{25+\sqrt{5}}{120}$	$\frac{25-13\sqrt{5}}{120}$	0	
$\frac{5+\sqrt{5}}{10}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{25+13\sqrt{5}}{120}$	$\frac{25-\sqrt{5}}{120}$	0	
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{11-\sqrt{5}}{24}$	$\frac{11+\sqrt{5}}{24}$	0	
x	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	b_j

Таблица 4. Метод Лобатто IIIB

Приложение 2

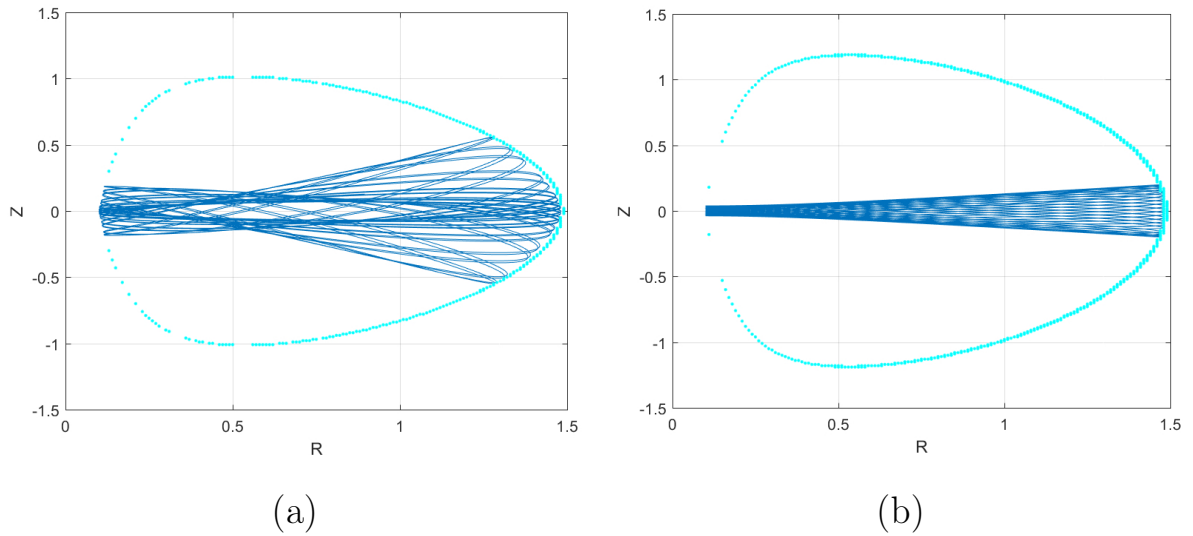


Рис. 1. Проекция орбит на сопутствующую плоскость в модели (1), (2). Меняется параметр ε : $\varepsilon = 0.5$ (a); $\varepsilon = 0.8$ (b). Фиксированные параметры: $\alpha = 2$; $p = 1$. Начальные условия: $r = 0.1$; $z = 0$; $\theta = 0$; $v_r = 0$. Интегралы движения: $I = 0.1$; $H = -0.4$

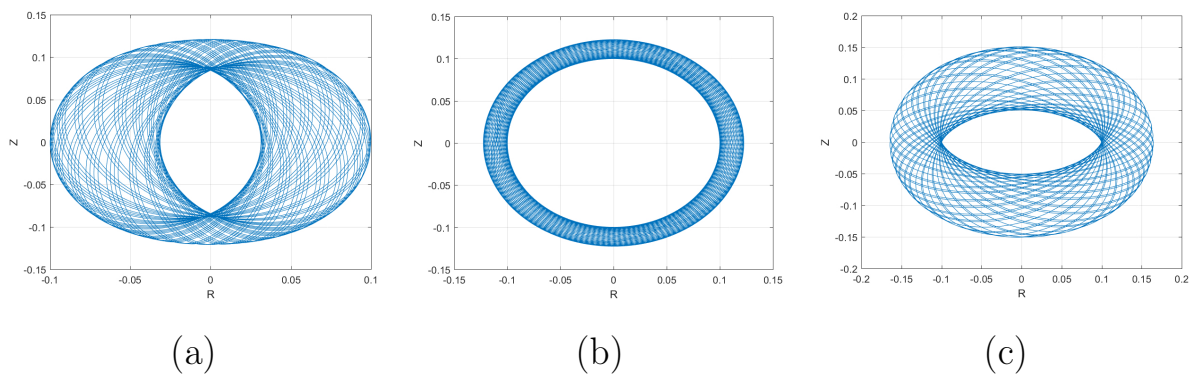


Рис. 2. Проекция орбит на сопутствующую плоскость в модели (1), (3). Меняется параметр Λ : $\Lambda = 0.5$ (a); $\Lambda = 1$ (b); $\Lambda = 1.5$ (c). Фиксированные параметры: $\alpha = 3$; $p = 0.5$. Начальные условия: $r = 0.1$; $z = 0$; $\theta = 0$; $v_r = 0$. Интегралы: $I = 0$; $H = -0.6$

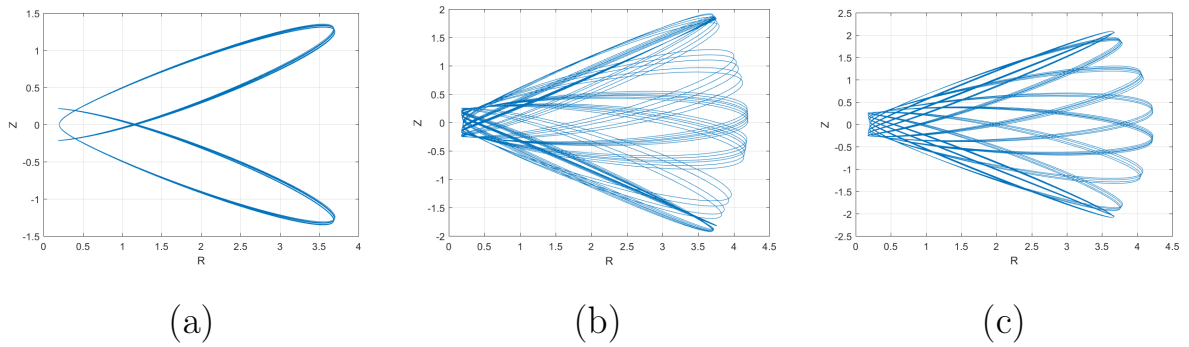


Рис. 3. Проекция орбит на сопутствующую плоскость в модели (1), (2). Меняется параметр p : $p = 1$ (a); $p = 1.5$ (b); $p = 2$ (c). Фиксированные параметры: $\alpha = 3$; $\varepsilon = 0.8$. Начальные условия: $r = 0.2$; $z = 0$; $\theta = 0$; $v_r = 0$. Интегралы: $I = 0.2$; $H = -0.2$

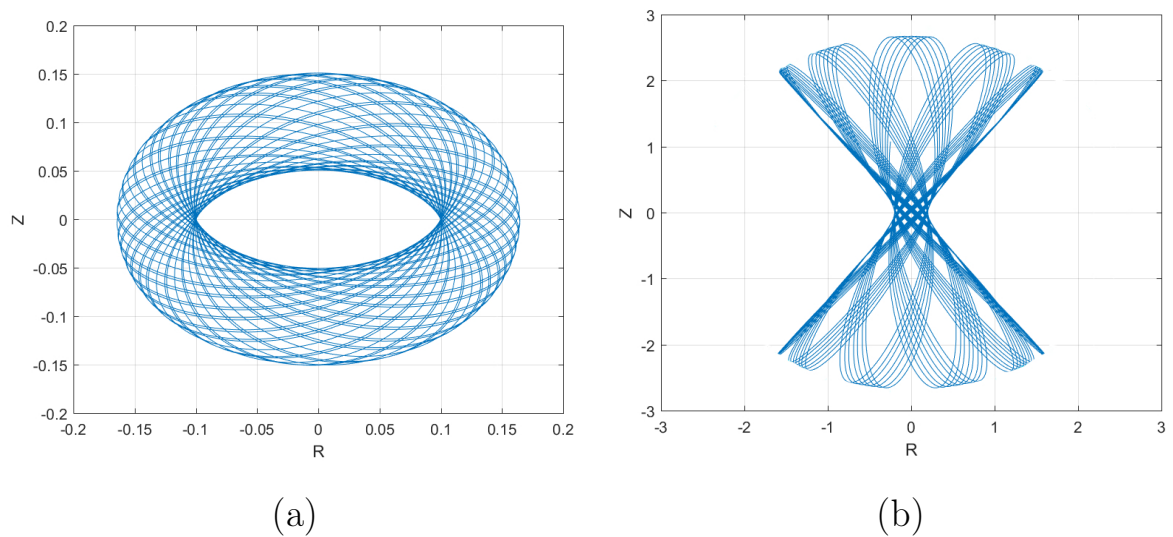


Рис. 4. Проекция орбит на сопутствующую плоскость в модели (1), (3). Меняется параметр p : $p = 0.5$ (a); $p = 2$ (b). Фиксированные параметры: $\alpha = 3$; $\Lambda = 0.8$. Начальные условия: $r = 0.2$; $z = 0$; $\theta = 0$; $v_r = 0$. Интегралы: $I = 0.1$; $H = -0.3$

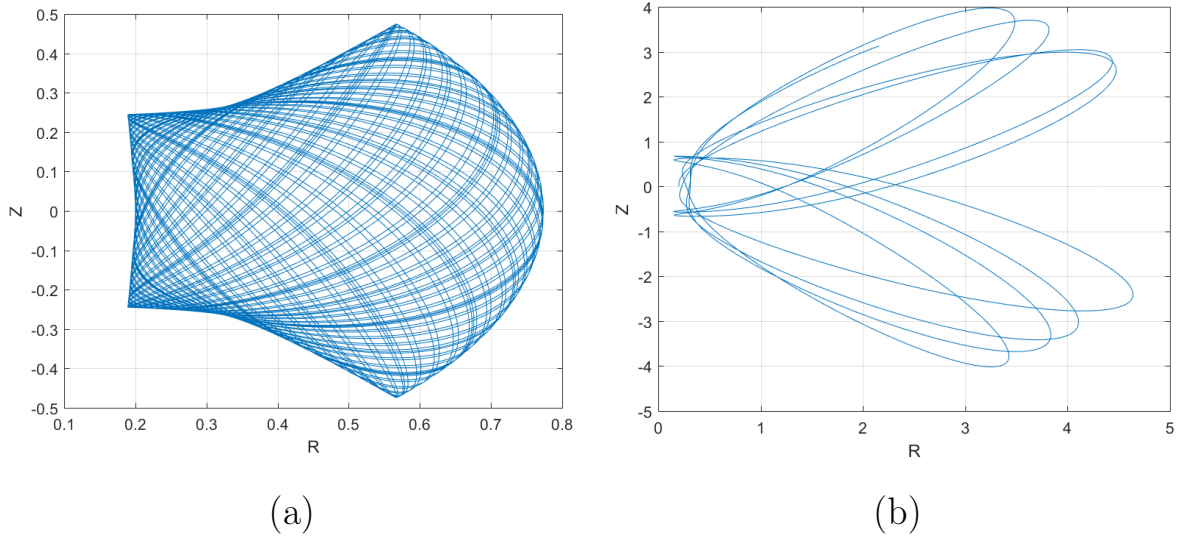


Рис. 5. Проекция орбит на сопутствующую плоскость в модели (1), (2). Меняется интеграл H : $H = -0.3$ (a); $H = -0.1$ (b). Фиксированные параметры: $\alpha = 2$; $\varepsilon = 0.5$; $p = 0.5$. Начальные условия: $r = 0.2$; $z = 0$; $\theta = 0$; $v_r = 0$. Интеграл $I = 0.1$

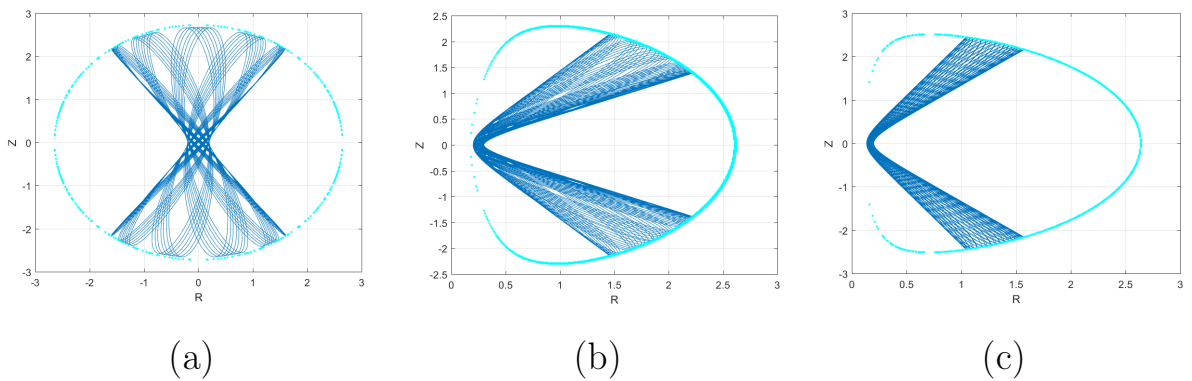


Рис. 6. Проекция орбит на сопутствующую плоскость в модели (1), (3). Меняется интеграл I : $I = 0$ (a); $I = 0.1$ (b); $I = 0.2$ (c). Фиксированные параметры: $\alpha = 3$; $\Lambda = 1.5$; $p = 2$. Начальные условия: $r = 0.2$; $z = 0$; $\theta = 0$; $v_r = 0$. Интеграл $H = -0.3$

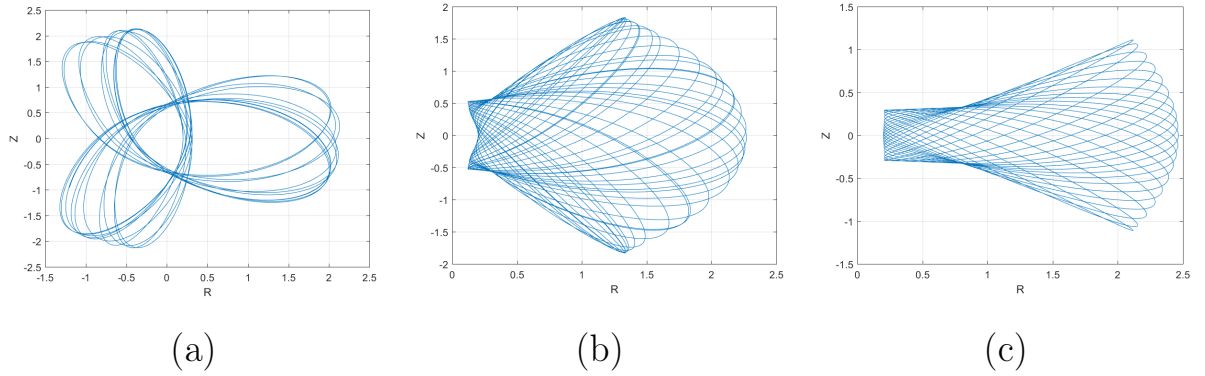


Рис. 7. Проекция орбит на сопутствующую плоскость в модели (1), (2). Меняется интеграл I : $I = 0$ (a); $I = 0.1$ (b); $I = 0.2$ (c). Фиксированные параметры: $\alpha = 3$; $\varepsilon = 0.5$; $p = 1.5$. Начальные условия: $r = 0.2$; $z = 0$; $\theta = 0$; $v_r = 0$. Интеграл $H = -0.3$

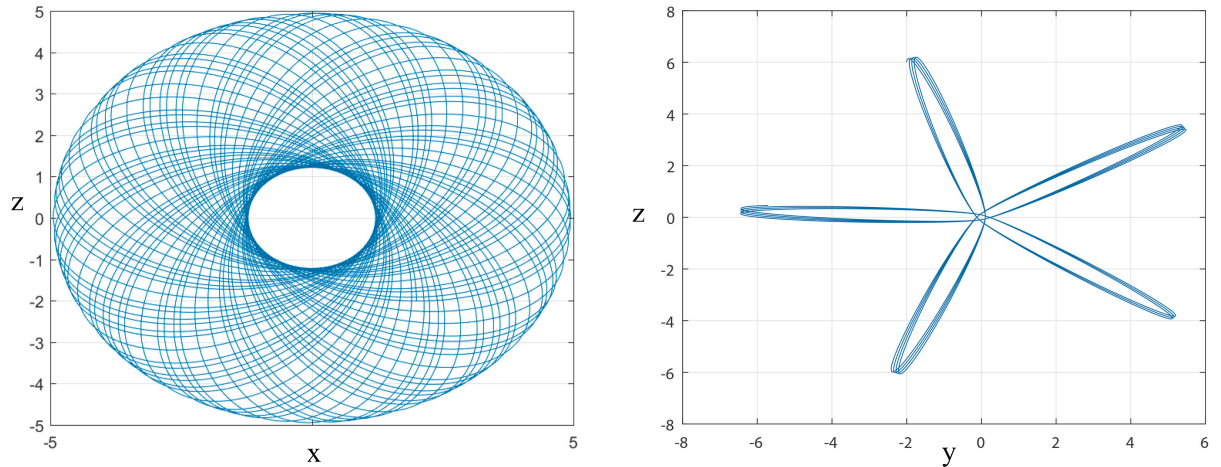


Рис. 8. Слева — траектория звезды в модели I со значениями параметров $\alpha = 2$, $p = 0.5$, $A = 0$, $\mu = 0$, $\varepsilon = 0$ в плоскости $y = 0$. Справа — траектория звезды в модели II с параметрами $\alpha = 4$, $p = 0.5$, $A = 0.2$, $\mu = 0$, $\varepsilon = 0.8$ в плоскости $x = 0$

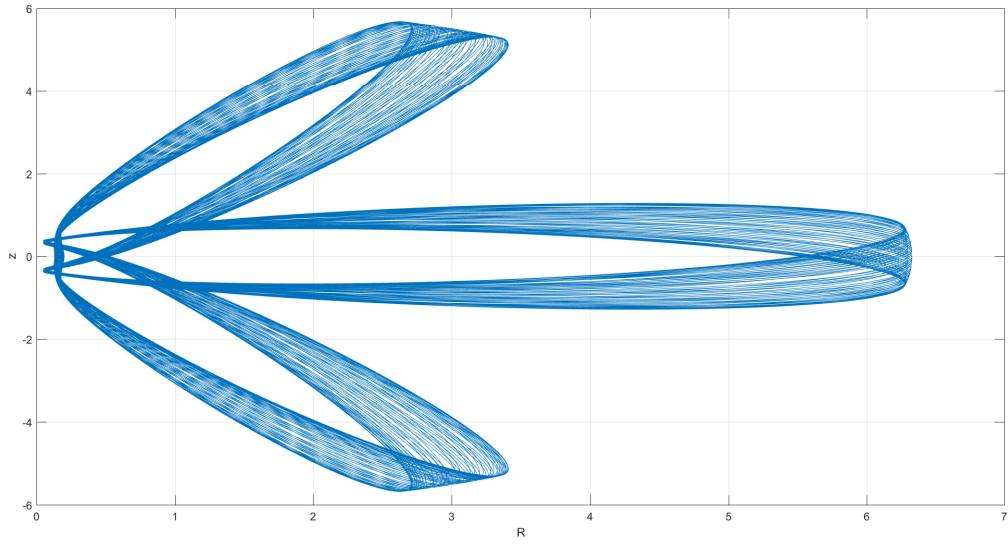


Рис. 9. Орбиты модели II в сопутствующей плоскости (R, z) с параметрами $\alpha = 4$, $p = 0.5$, $A = 0$, $\mu = 1$, $\varepsilon = 0.8$

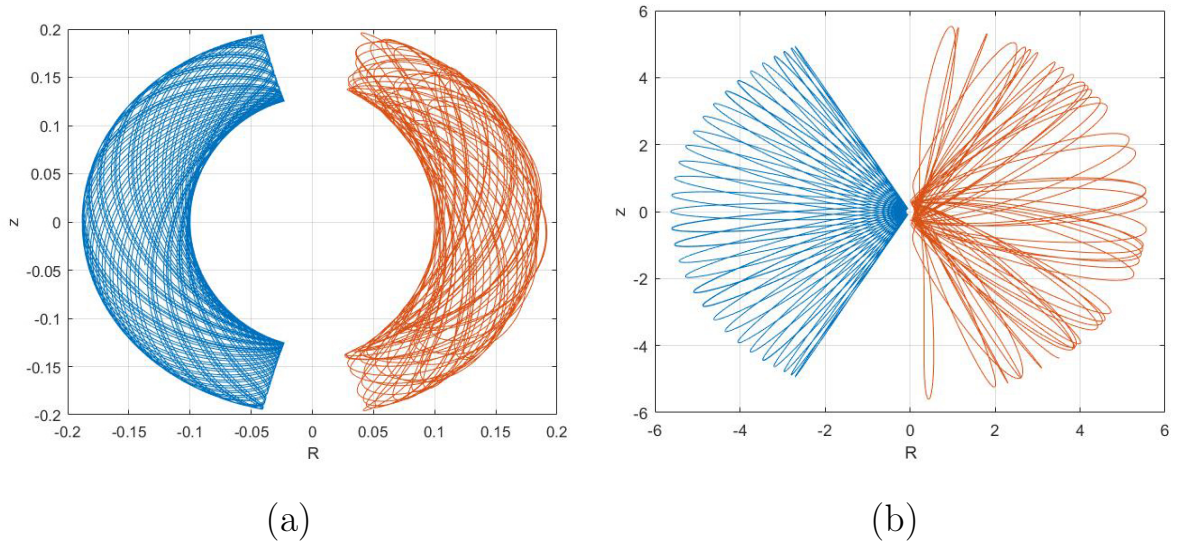


Рис. 10. Влияние параметра трехосности. Для орбит в левой полуплоскости $A = 0$, в правой — $A = 2$. Значения остальных параметров для модели I (a): $\alpha = 2$, $p = 0.5$, $\varepsilon = 0.8$, $H = -0.5$, $\mu = 1$. И для модели II (b): $\alpha = 2$, $p = 0.5$, $\varepsilon = 0.8$, $H = -0.5$, $\mu = 0$

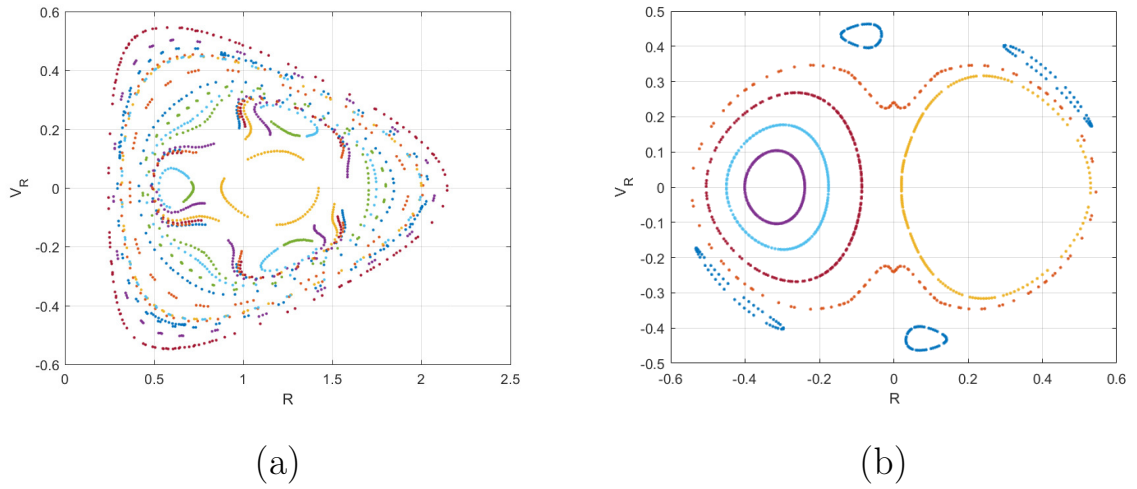


Рис. 11. Сечения Пуанкаре для регулярных семейств орбит в модели (1), (2) — (а), с параметрами $\alpha = 4$; $p = 0.5$; $\varepsilon = 1.5$; $I = 0$; $H = -0.3$ и в модели (1), (4) — (б), с параметрами $\alpha = 3$; $p = 1$; $\Lambda = 0.6$; $I = 0$; $H = -0.6$

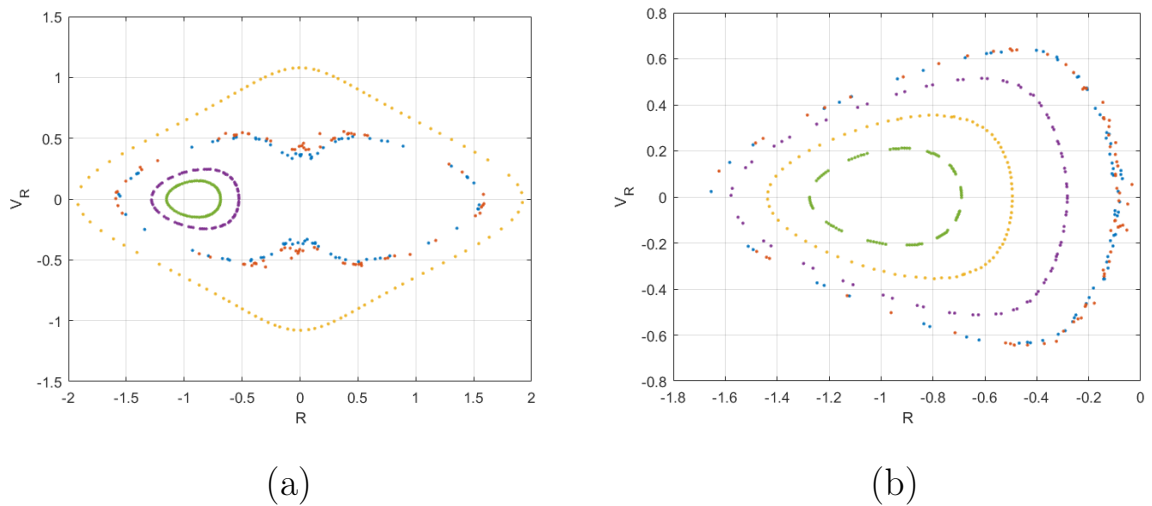


Рис. 12. Появление областей нерегулярного движения на сечениях Пуанкаре для модели (1), (2) с параметрами $\alpha = 3$, $p = 2$, $\varepsilon = 0.8$, $I = 0$, $H = -0.4$ (а); и параметрами $\alpha = 2$, $p = 2$, $\varepsilon = 0.5$, $I = 0$, $H = -0.4$ (б)

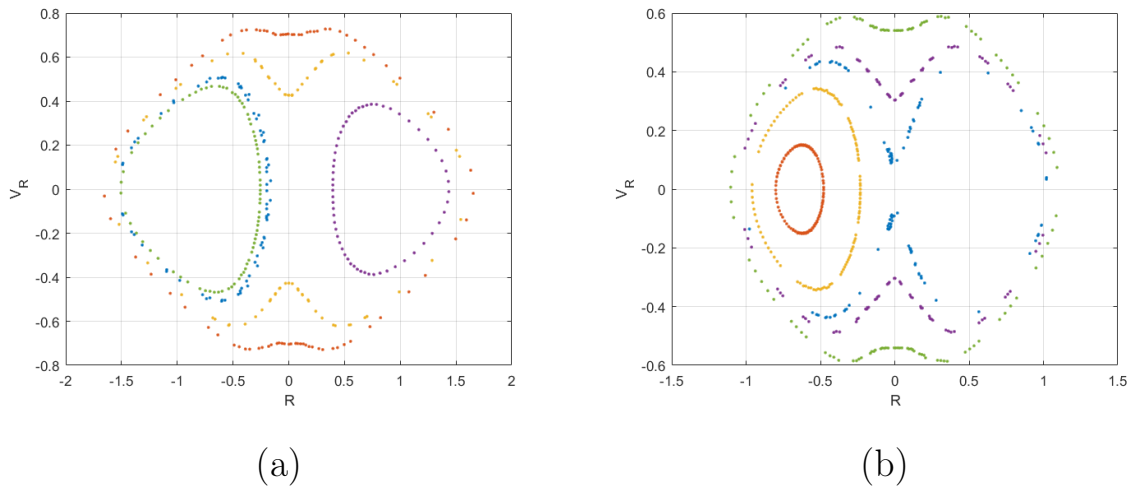


Рис. 13. Появление областей нерегулярного движения на сечениях Пуанкаре для модели (1), (3) с параметрами $\alpha = 4, p = 2, \Lambda = 0.5, I = 0, H = -0.5$ (a); и параметрами $\alpha = 3, p = 1.5, \Lambda = 0.5, I = 0.1, H = -0.4$ (b)

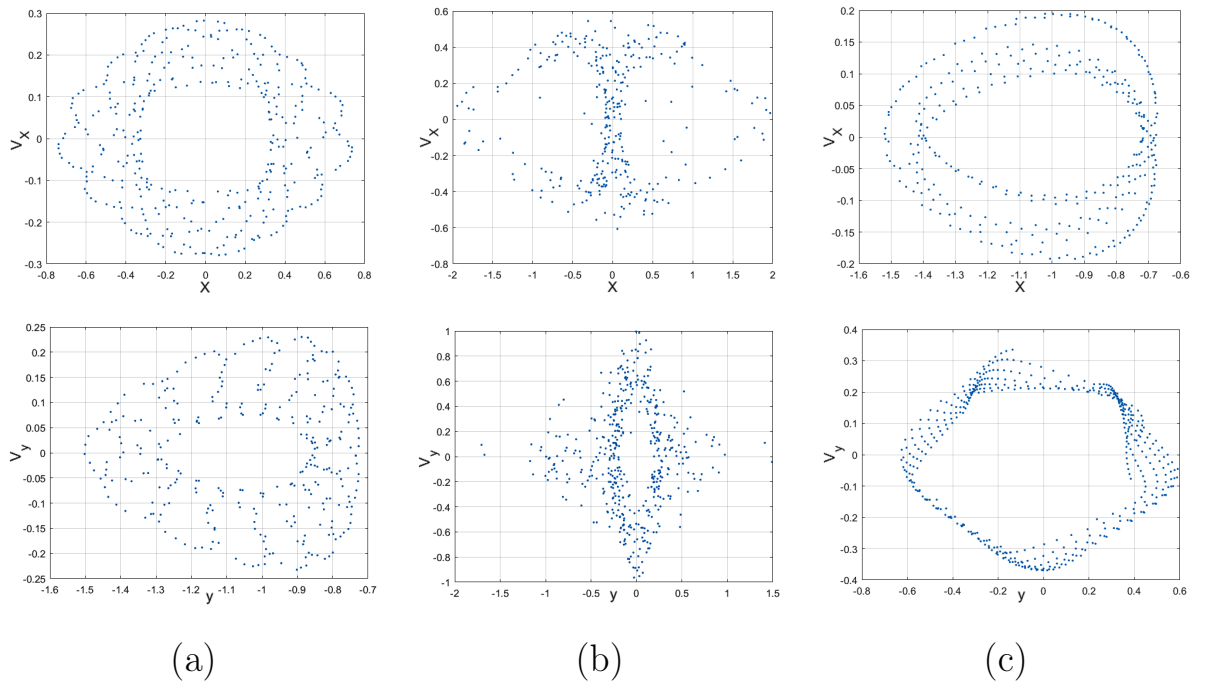


Рис. 14. Сечения Пуанкаре для модели модели I с параметрами $\alpha = 2, p = 0.5, A = 1, \mu = 0, \varepsilon = 0.6$

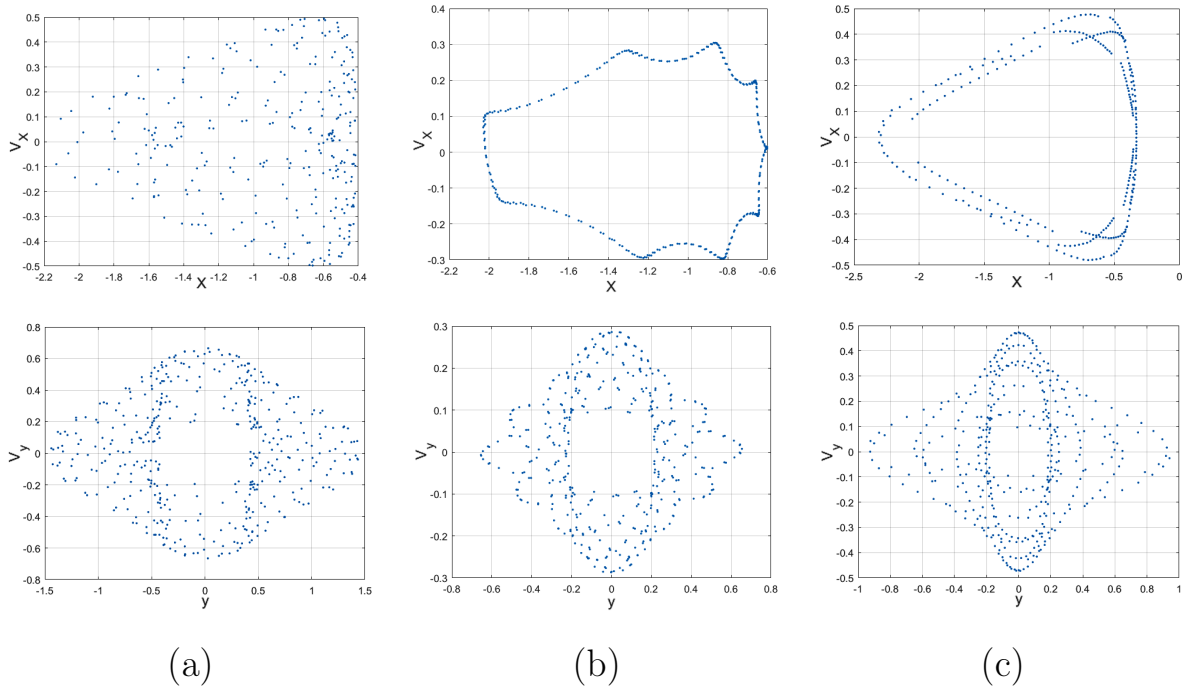


Рис. 15. Сечения Пуанкаре для модели модели II с параметрами $\alpha = 4$, $p = 0.5$, $A = 0.2$, $\mu = 0$, $\varepsilon = 0.8$