

Санкт-Петербургский государственный университет

**ПАК Нелли Вадимовна**

**Выпускная квалификационная работа**

**Управление маятником Фуруты с использованием обратной  
связи с многоцелевой структурой**

Уровень образования: бакалавриат

Направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Основная образовательная программа СВ.5005.2015 «Прикладная математика, фундаментальная информатика и программирование»

Профиль: «Исследование и проектирование систем управления и обработки сигналов»

Научный руководитель:

заведующий кафедрой компьютерных технологий и систем,

доктор физ.-мат. наук,

профессор Веремей Е.И.

Рецензент:

заведующий кафедрой моделирования экономических систем,

доктор физ.-мат. наук,

профессор Смирнов Н.В.

Санкт-Петербург

2019

# Содержание

Введение.....	3
Обзор литературы .....	4
1. Содержательная постановка задачи.....	5
2. Математическая постановка задачи синтеза .....	8
2.1. Математическая модель объекта управления.....	8
2.2. Декомпозиция общей задачи синтеза.....	11
3. Методы решения локальных задач синтеза .....	14
3.1. Синтез базового регулятора по состоянию .....	14
3.2. Построение асимптотического наблюдателя .....	17
3.3. Формирование динамического фильтра .....	18
4. Проведение практических расчетов .....	22
4.1. Моделирование динамической системы и её анализ.....	22
4.2. Выбор базового регулятора по состоянию .....	23
4.3. Построение асимптотического наблюдателя .....	30
4.4. Синтез динамического фильтра .....	31
4.5. Результаты компьютерного моделирования.....	33
Выводы.....	38
Заключение .....	39
Список литературы .....	40
Приложение 1 .....	41

## Введение

В последние годы существенное внимание в научной литературе уделяется методам синтеза законов управления для нелинейных систем. Существуют различные подходы, позволяющие обеспечивать устойчивость их отдельных движений с учетом требований к качеству динамических процессов. Однако до сих пор не существует универсальной методологии, позволяющей единообразно решать задачи для достаточно широких классов из возможных практических ситуаций. Это делает необходимым выполнение адаптации известных методов для конкретных объектов управления и предъявляемых к ним требований.

Одними из наиболее часто рассматриваемых движений нелинейных систем являются положения равновесия, которые без управления не устойчивы. Их стабилизация выступает в качестве одного из обязательных требований, предъявляемых к синтезируемому управлению. При этом реальные условия его работы требуют учета действия на замкнутую систему внешних возмущений, порождаемых средой функционирования.

В качестве одного из широко рассматриваемых нелинейных объектов, требующих особого подхода к синтезу управления, выступает так называемый маятник Фуруты. Его используют как тестовый пример для верификации различных идей и конкретных методов синтеза.

В данной работе для стабилизации маятника предлагается применить многоцелевой подход к синтезу обратной связи, который ранее практически не использовался для нелинейных объектов, функционирующих в различных режимах. Особое внимание уделяется экономии ресурсов стабилизирующего управления при действии на систему возмущений колебательного характера, в частности, определяемого морским волнением. Такая ситуация типична при установке маятника Фуруты на морских подвижных объектах.

## Обзор литературы

В книге [1] рассмотрены основные аспекты современных подходов к моделированию, анализу и синтезу линейных систем с обратной связью. Значительная роль отведена программной поддержке изучаемых вопросов.

Работа [2] посвящена вопросам, имеющим отношение к проблеме синтеза моделей оптимальных управляющих устройств динамическими объектами, функционирующими под воздействием внешней среды. В этой работе предложен ряд алгоритмов для программной реализации описанных методов синтеза управления.

Многоцелевые структуры законов управления в линейном варианте детально обсуждаются в работах [1], [2], [7], [8]. Здесь подробно представлены их особенности и методы настройки отдельных элементов. Основное преимущество многоцелевой структуры перед иными вариантами законов управления состоит в том, что общая задача синтеза декомпозируется на частные подзадачи поиска, которые решаются последовательно для каждого из возможных режимов движения.

Недостатком указанных работ служит ориентация только на линейные объекты, хотя в статье [7] намечены общие идеи применения многоцелевого подхода в многоцелевом варианте.

В монографии [3] представлены базовые принципы идеологии управления с прогнозирующими моделями (МРС) на примере маятника Фуруты, особое внимание уделено вопросам компенсации внешних возмущений. Однако применение МРС обратных связей требует очень мощных вычислительных ресурсов при их реализации.

Вопросы управления маятником Фуруты освещены в статьях [4] и [5], однако здесь используются традиционные законы управления типа ПИД, которые не обеспечивают желаемого качества стабилизации при работе в различных режимах.

# 1. Содержательная постановка задачи

В данном разделе представлено описание нелинейной механической системы, рассматриваемой в работе в качестве объекта автоматического управления. Здесь на содержательном уровне формулируются все требования, предъявляемые к динамическим процессам, протекающим в замкнутой системе, а также к структуре формируемой обратной связи.

Объектом управления служит так называемый маятник Фуруты, который широко используется в научной и учебной литературе [3, 4, 5] для проверки новых идей и предлагаемых подходов, связанных с синтезом обратных связей.

Маятник Фуруты – это перевернутый вертикальный маятник, размещенный на вращающемся основании. Вся система смонтирована на платформе, вращающейся в горизонтальной плоскости с помощью электромотора. На торце платформы шарнирно закреплен вертикальный стержень, который может вращаться в вертикальной плоскости. Схема рассматриваемой конструкции представлена на рис. 1:

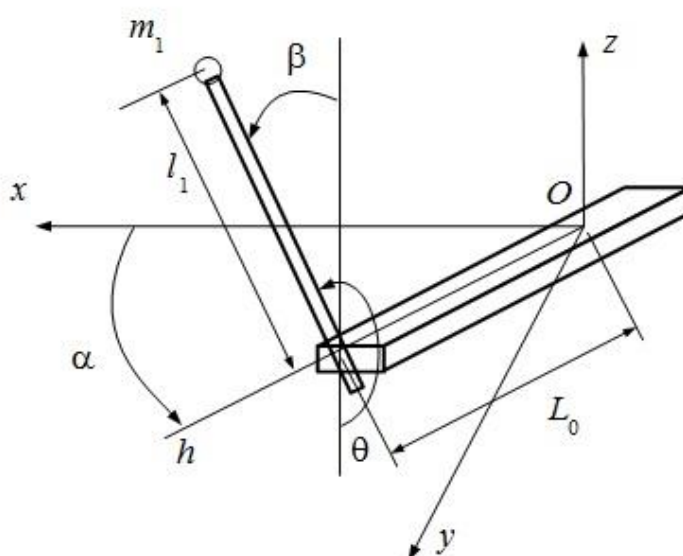


Рис. 1. Общая схема конструкции маятника Фуруты.

Для описания состояния системы, введем в рассмотрение неподвиж-

ную прямоугольную систему координат  $Oxyz$  (рис.1). Ее начало совмещено с неподвижной точкой  $O$ , вокруг которой происходит вращение платформы. Плоскость  $Oxy$  совпадает с горизонтальной плоскостью вращения платформы, а ось  $Oz$  направлена вертикально вверх.

Положение системы с маятником в пространстве однозначно определяется двумя углами: углом поворота платформы  $\alpha$  и углом отклонения маятника  $\beta$  от верхнего вертикального положения. Угол  $\alpha$  отсчитывается от оси  $Ox$ , причём положительным считается направление против часовой стрелки (если смотреть с конца оси  $Oz$ ). Маятник вращается вокруг подвижной оси платформы  $Oh$ , проходящей через начало координат  $O$  и точку крепления маятника к платформе. Угол  $\beta$  отсчитывается от верхнего вертикального положения: положительным считается направление отсчета против часовой стрелки (если смотреть с конца оси  $Oh$ ). В работе также приняты следующие обозначения (рис.1):  $L_0$  – длина платформы,  $l_1$  – длина маятника,  $m_1$  – масса маятника. Все размерности далее представляются в системе СИ.

Один из вариантов практической реализации маятника Фуруты изображен на рис. 2 ([3]).



Рис. 2. Практическая реализация маятника Фуруты.

В данной работе рассматривается многоцелевой подход к построению управления для нелинейной модели маятника Фуруты, основанный на решении задачи о стабилизации маятника в условиях наличия внешнего возмущения (например, морского волнения для маятника, установленного на морском подвижном объекте).

Ставится задача построения управления для нелинейного объекта с использованием обратной связи с многоцелевой структурой. Найденное управление должно удовлетворять конкретным условиям для каждого из базовых режимов функционирования объекта.

1. При собственном движении, определяемом не нулевым начальным отклонением от вертикали, управление должно возвращать маятник в нулевое положение равновесия с учетом определенных требований к качеству переходных процессов.

2. Для указанного режима движения должна быть учтена неполнота информации, поступающей с датчиков, о векторе состояния объекта. В данном случае измеряется только угол отклонения от вертикали.

3. При движении, определяемом воздействием колебательных возмущений (типа морского волнения), обратная связь должна удерживать систему в окрестности нулевого положения равновесия и подавлять колебания управляющего сигнала. Это экономит энергетические ресурсы и предотвращает износ деталей управляющего электродвигателя.

## 2. Математическая постановка задачи синтеза

В работе рассматривается центральный вопрос об аналитическом синтезе обратной связи, обеспечивающей управление маятником Фуруты во всех режимах его движения. При наличии широкой совокупности требований, предъявляемых к динамическим свойствам замкнутой системы, этот вопрос очень трудно рассматривать в рамках традиционных подходов типа ПИД регулирования или управления с прогнозом. В связи с этим, здесь принят подход, базирующийся на применении обратной связи с многоцелевой структурой, который позволяет декомпозировать задачу синтеза на последовательность локальных задач, относящихся к конкретным режимам движения. Их решениями являются модели настраиваемых элементов, позволяющих существенно повысить качество процессов управления.

### 2.1. Математическая модель объекта управления

Математическая модель маятника Фуруты представляется следующей системой обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений [3, 4, 5]:

$$M_0(q)\ddot{q} + M_1(q, \dot{q})\dot{q} + M_2(q) = Tu, \quad (1)$$

где  $q = (\alpha, \beta)'$  – вектор обобщённых координат системы,  $u$  – управляющий сигнал, представляемый напряжением, которое подается на привод электродвигателя. Здесь матрицы  $M_0, M_1, M_2, T$  определяются по формулам

$$M_0 = \begin{pmatrix} J_0 + m_1 L_0^2 + m_1 l_1^2 \sin^2 \beta & -m_1 L_0 l_1 \cos \beta \\ -m_1 L_0 l_1 \cos \beta & J_0 + m_1 l_1^2 \end{pmatrix},$$
$$M_1 = \begin{pmatrix} C_0 + \frac{K_t K_b}{R_a} + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\beta} \sin^2 2\beta & m_1 L_0 l_1 \dot{\beta} \sin \beta + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\alpha} \sin^2 2\beta \\ -\frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\alpha} \sin^2 2\beta & C_1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$



$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -m_1 g l_1 \sin \beta \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} \frac{K_t K_b}{R_a} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В приведенных выражениях использованы следующие обозначения:  $J_0$  и  $J_1$  – моменты инерции платформы и маятника, а  $C_0$  и  $C_1$  – коэффициенты сухого трения для этих элементов системы. Коэффициенты  $K_t, K_b, K_u, R_a$  для электромотора являются постоянными числами.

В работе [3] отмечено, что угол  $\alpha$  не входит в уравнения (1) и (2), т.е. на динамику системы, влияет только производная  $\dot{\alpha}$ .

Для приведения системы (1) к нормальной форме, введём вспомогательные векторы  $q_1 = q$  и  $q_2 = \dot{q}$ , что, с учетом  $\det(M_0) \neq 0$ , дает систему

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= q_2, \\ \dot{q}_2 &= M_0^{-1}(q_1)(-M_1(q_1, q_2)q_2 - M_2(q_1) + Tu). \end{aligned} \quad (3)$$

В итоге можно утверждать, что динамика маятника Фуруты представляется нелинейной системой дифференциальных уравнений (3), (2) с вектором состояния  $(q_1 \ q_2)' = (\alpha \ \beta \ \dot{\alpha} \ \dot{\beta})' \in E^4$ .

Отметим, что данная система имеет два вертикальных положения равновесия: верхнее и нижнее. Первое из них представляет особый интерес: ему соответствует вектор состояния  $(q_1 \ q_2)'$  с компонентами:

$$\alpha_0 = const, \dot{\alpha}_0 = 0, \beta_0 = 0, \dot{\beta}_0 = 0, \quad (4)$$

причем из физики следует, что это положение является неустойчивым.

Линеаризуем уравнения (1), (2) в окрестности точки (4), вводя для линейной системы вектор состояния  $x = (\dot{\alpha} \ \beta \ \dot{\beta})' = (\omega_\alpha \ \beta \ \omega_\beta)'$ , где  $\omega_\alpha, \omega_\beta$  – угловые скорости вращения платформы и маятника соответственно.

Таким образом, получаем линейную модель динамики маятника в пространстве состояний для верхнего вертикального положения равновесия (4):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu, \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (5)$$

с матрицами

$$A = \frac{1}{af - c^2} \begin{pmatrix} -df & ch & -cC_1 \\ 0 & 0 & af - c^2 \\ -cd & ah & -aC_1 \end{pmatrix}, \quad b = \frac{1}{af - c^2} \begin{pmatrix} ef \\ 0 \\ ce \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Здесь параметры  $a, b, c, d, e, f$  и  $h$  вычисляются по формулам:

$$a = J_0 + m_1 L_0^2, c = m_1 L_0 l_1, d = C_0 + \frac{K_t K_b}{R_a}, e = \frac{K_t K_b}{R_a}, f = J_1 + m_1 l_1^2, h = m_1 g l_1. \quad (7)$$

Согласно (6), измерению подлежат угловая скорость вращения основания  $\omega_\alpha = \dot{\alpha}$  и угол отклонения маятника  $\beta$ .

Конкретные значения физических параметров рассматриваемого маятника Фуруты сведены в табл. 1.

Таблица 1.

Параметр	Обозначение	Единицы измерения	Значение
Длина платформы	$L_0$	м	0.1370
Длина маятника	$l_1$	м	0.1572
Масса маятника	$m_1$	кг	0.0319
Момент инерции платформы	$J_0$	кг×м <sup>2</sup>	0.008591
Момент инерции маятника	$J_1$	кг×м <sup>2</sup>	0.000217
Коэффициент трения платформы	$C_0$	кг×м <sup>2</sup> /с	0.006408
Коэффициент трения маятника	$C_1$	кг×м <sup>2</sup> /с	0.000158
Параметр электромотора	$R_a$	Ом	0.9
Параметр электромотора	$K_t$	Н×м/А	0.0706
Параметр электромотора	$K_b$	В×с/рад	0.0707
Параметр электромотора	$K_u$	В/об/с	0.0636

## 2.2. Декомпозиция общей задачи синтеза

Для обеспечения выполнения комплекса требований, предъявляемых к динамике процессов управления маятником Фуруты, будем использовать обратную связь с многоцелевой структурой (МР), описанной в работах [1], [2], [7], [8], которая представляется следующими уравнениями:

$$\dot{z} = Az + bu + H(y - Cz), \quad (8)$$

$$u = Kz + \xi, \quad (9)$$

$$\xi = F(p)(y - Cz), \quad p = d/dt. \quad (10)$$

Первый элемент структуры является асимптотическим наблюдателем (8), который предназначен для восстановления информации о векторе состояния объекта по результатам измерений.

Второй элемент структуры формирует управляющий сигнал (9), подаваемый на электромотор. Основное назначение этого элемента состоит в обеспечении устойчивости замкнутой системы.

В качестве третьего элемента выступает динамический фильтр (10), поддерживающий устойчивость и обеспечивающий желаемые динамические свойства замкнутой системы при движении в условиях действия внешних возмущений. Здесь  $z \in E^n$  и  $\xi \in E^1$  – вектор состояния наблюдателя и выход фильтра соответственно.

Нетрудно показать, что если элементы передаточной матрицы фильтра являются строго правильными рациональными дробями, то его модель (10) может быть представлена уравнениями пространства состояний

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \alpha p + \beta(y - Cz), \\ \xi &= \gamma p, \end{aligned} \quad (10a)$$

где  $p \in E^l$  – вектор состояния фильтра, а его матрицы удовлетворяют тождеству  $\gamma(E_l s - \alpha)^{-1} \beta \equiv F(s)$ .

Заметим, что в совокупности уравнения (8) – (10) определяют динамический регулятор

$$u = W(s)y, \quad (11)$$

где  $W(s) = [1 - V(s)b]^{-1} [V(s)C + F(s)]$ ,  $V(s) := [K - F(s)C](Es - A + GC)^{-1}$ .

Существо задачи синтеза многоцелевого управления маятником Фуруты состоит в нахождении постоянных матриц  $K, H$  формирователя и наблюдателя, а также передаточной матрицы  $F(s)$  фильтра. Их поиск осуществляется исходя из желаемых требований к динамике замкнутой системы для соответствующих режимов движения.

Свойства и особенности МР структуры позволяют декомпозировать общую задачу синтеза, сводя ее к совокупности трех последовательно решаемых локальных задач.

1. Задача о выборе матрицы  $K$  для базового регулятора по состоянию

$$u = Kx. \quad (12)$$

Матрица  $K$  должна быть определена так, чтобы нулевое положение равновесия базовой замкнутой нелинейной системы (3), (12) было асимптотически устойчивым, и при этом выполнялись желаемые требования к качеству переходного процесса в этой системе, определяемого начальными условиями  $(q_1(0) \ q_2(0))' = (\alpha_0 \ \beta_0 \ 0 \ 0)'$ .

2. Задача о выборе матрицы  $H$  в наблюдателе (8). Эта задача рассматривается для движений замкнутой системы (3), (11) с измерениями  $y = Cx$  при выключенном фильтре. В качестве матрицы  $K$  принимается решение первой задачи. Начальные условия по наблюдателю (8) задаются нулевыми, а по объекту – такими же, как и для первой задачи. Матрица  $H$  должна быть определена так, чтобы нулевое положение равновесия указанной замкнутой системы было асимптотически устойчивым. Дополнительно должны выполняться требования по динамике переходного процесса.

3. Задача о выборе матрицы  $F(s)$  фильтра рассматривается на движениях замкнутой системы (3), (11) с измерениями  $y = Cx$ . Матрицы  $K$  и  $H$  принимаются как решения первых двух задач. Все начальные условия задаются нулевыми, но вводится внешнее аддитивное возмущающее воздействие колебательного характера, влияющее на движение маятника. Матрица  $F(s)$  должна быть выбрана так, чтобы минимизировать колебания управляющего сигнала  $u$  с целью экономии ресурсов управления. При этом отклонения маятника от положения равновесия должны быть ограниченными.

После решения указанных задач формируется обратная связь в виде

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + bu + H(y - Cz), \\ \dot{p} &= \alpha p + \beta(y - Cz), \\ u &= Kz + \gamma p, \end{aligned} \tag{13}$$

которая подлежит непосредственной реализации в системе управления маятником Фуруты.

### 3. Методы решения локальных задач синтеза

Нахождение собственных чисел матрицы линейной модели (5) – (7) для верхнего вертикального положения равновесия с математической точки зрения подтверждает его неустойчивость по Ляпунову: одно из собственных чисел находится в открытой правой полуплоскости.

Вычислив ранг матриц управляемости и наблюдаемости для системы (5) – (7), можно убедиться, что она является полностью управляемой и полностью наблюдаемой по выходу. Это позволяет говорить о применимости обратной связи с многоцелевой структурой для управления маятником.

#### 3.1. Синтез базового регулятора по состоянию

Первая задача состоит в построении управления в виде  $u = Kx$ , стабилизирующего верхнее неустойчивое положение равновесия, где  $K$  – числовая матрица, подлежащая поиску. Существует несколько регулярных способов решения этой задачи для линейной модели (5) – (7), среди которых будем использовать два варианта: синтез биномиального (или модального) регулятора и синтез линейно-квадратичного (LQR) регулятора.

Биномиальный регулятор обеспечивает биномиальное распределение корней характеристического полинома  $\Delta$  замкнутой системы, т.е. имеет место тождество  $\Delta(s) := \det(Es - A - BK) \equiv (s + \rho)^n$ ,  $\rho > 0$ .

LQR-регулятор [1], кроме стабилизации замкнутой системы, обеспечивает минимум интегрального квадратичного функционала

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^T Ru + 2x^T Nu) dt, \quad (14)$$

где  $Q \geq 0$ ,  $R > 0$  и  $N \geq 0$  – заданные симметрические матрицы. Матрица коэффициентов оптимального регулятора вычисляется по формуле

$$K = R^{-1} (b^T S + N^T) \quad (15)$$

где  $S$  – решение уравнения Риккати

$$A^T S + SA - (Sb + N)R^{-1}(b^T S + N^T) + Q = 0. \quad (16)$$

Заметим, что для линейной замкнутой системы оба регулятора обеспечивают глобальную асимптотическую устойчивость нулевого положения равновесия. Если же замыкать этими регуляторами исходный нелинейный объект (3), то обеспечивается лишь локальная асимптотическая устойчивость в некоторой окрестности нуля.

Для решения задачи 1 необходимо проанализировать область асимптотической устойчивости для указанных выше вариантов с целью выбора базового регулятора для многоцелевой структуры и настройки его параметров для конкретных исходных данных маятника Фуруты.

Вначале рассмотрим биномиальный регулятор, дающий кратный корень  $s = -\rho < 0$  характеристического полинома замкнутой системы.

В данной модели рассматриваются значения  $2 \leq \rho \leq 20$  параметра, характеризующие интенсивность работы биномиального регулятора. Очевидно, что чем больше величина параметра  $\rho$  для замкнутой линейной системы, тем интенсивнее функционирует управление.

Матрица  $K$  для биномиального регулятора здесь находится из тождества  $\det(A + bK) = (s + \rho)^3$ .

Для исследования устойчивости введём в рассмотрение кандидата на роль функции Ляпунова (LFC) в виде квадратичной формы

$$V(x) = x^T Sx. \quad (17)$$

Здесь матрица  $S$  является решением матричного уравнения Ляпунова, сформированного для гурвицевой матрицы  $A + bK$  замкнутой системы

$$(A + bK)^T S + S(A + bK) = -E, \quad (18)$$

где  $E$  – единичная матрица размера  $3 \times 3$ . Из теории устойчивости [6] из-

вестно, что уравнение (18) имеет единственное симметрическое положительно определенное решение.

Находим скорость изменения LFC  $V(x)$  на движениях нелинейной системы (3):

$$\tilde{W}(x) = \left. \frac{dV(x)}{dt} \right|_{(3)} = \dot{x}^T Sx + x^T S\dot{x} = F^T(x, Kx)Sx + x^T SF(x, Kx). \quad (19)$$

Здесь векторная функция  $F(x, Kx)$  в привычных обозначениях представляет собой правую часть замкнутой нелинейной системы с объектом (3) и регулятором  $u = Kx$ :

$$\dot{x} = F(x, u), \quad u = Kx. \quad (20)$$

Если найдется такая окрестность  $B \subset E^n$  нулевой точки, в пределах которой функция  $\tilde{W}(x)$  строго отрицательная, то функция  $V(x)$  становится управляющей функцией Ляпунова для данной системы. Максимальная из указанных окрестностей будет областью асимптотической устойчивости замкнутой системы.

Теперь обратимся к LQR регулятору, для которого матрица  $K$  обеспечивает устойчивость и минимум функционала (14). В рамках принятого подхода в данной работе матрица  $Q$  берётся единичной,  $N$  – нулевой, а матрица  $R = \gamma$  представляется скалярным параметром  $0.1 \leq \gamma \leq 1$ . Этот параметр аналогично параметру  $\rho$  характеризует интенсивность управления: чем меньше значение параметра, тем интенсивность выше.

Как и для биномиального варианта, для исследования устойчивости берется кандидат на роль функции Ляпунова (LFC) в виде (17), однако, в отличие от предшествующей ситуации, в качестве матрицы  $S$  принимается решение уравнения Риккати (16). Доказано, что это решение является симметрическим и положительно определенным.

Далее аналогично предыдущему случаю ищется производная для дан-



ной LFC в силу системы (3) по формуле (19). Исследуя скорость  $\tilde{W}(x)$  изменения функции  $V(x)$ , делаем выводы об области асимптотической устойчивости объекта при замыкании системы LQR-регулятором.

Сравнивая полученные результаты, выбираем один из описанных выше регуляторов в качестве базовой обратной связи для закона управления с многоцелевой структурой.

Проводя ряд экспериментов с объектом и действующим выбранным регулятором, настраиваем обратную связь, полностью определяя ее параметры, в смысле соответствия управления выдвигаемым требованиям к качеству процесса.

### 3.2. Построение асимптотического наблюдателя

Для решения второй задачи будем рассматривать обратную связь вида (8) – (10) с выключенным фильтром, т.е. регулятор

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + bu + H(y - Cz), \\ u &= Kz. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь матрица  $K$  принимается, как решение первой задачи, а матрица  $H$  наблюдателя выбирается из условия его асимптотической устойчивости, т.е. гурвицевости матрицы  $A - HC$ .

Как известно ([1], [2], [7], [8]), при этом характеристический полином замкнутой линейной системы (5), (21) будет равен произведению полиномов  $\Delta_a(s) = \det(Es - A + HC)$  и  $\Delta_0(s) = \det(Es - A - BK)$ , т.е. указанная замкнутая система будет асимптотически устойчивой.

Для обеспечения устойчивости наблюдателя, как и для базового закона управления, можно применить биномиальный синтез или оптимальную фильтрацию по Калману. Здесь остановимся на биномиальном варианте, назначая матрицу  $H$  так, чтобы выполнилось тождество  $\Delta_a(s) \equiv (s + \rho)^3$ .

Теперь рассмотрим функционирование нелинейного объекта в режиме невозмущённого движения с заданным начальным отклонением маятника от

вертикали. Соответствующая схема замкнутой нелинейной системы (3), (21) показана на рис. 3.

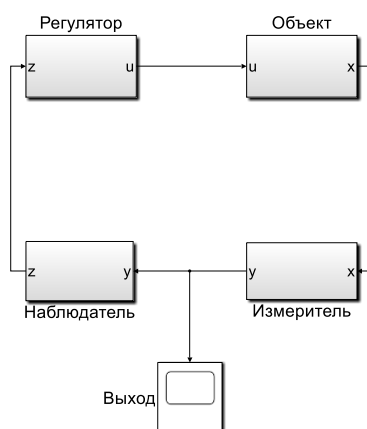


Рис. 3. Схема замкнутой системы с наблюдателем

Проанализировав результаты экспериментов для замкнутой динамической системы с наблюдателем в контуре обратной связи, можно осуществить коррекцию параметров асимптотического наблюдателя, подбирая значения корней его характеристического полинома. При этом, как и ранее, будем исходить из требований сохранения асимптотической устойчивости и динамического качества замкнутой системы.

### 3.3. Формирование динамического фильтра

Следующая задача состоит в нахождении передаточной матрицы дополнительного динамического объекта с математической моделью (10), входящего в состав многоцелевой структуры и именуемого фильтром.

Передаточную матрицу фильтра формируют в общем виде

$$F(s) \equiv D(s)/\Phi(s),$$

где  $D$  – полиномиальная матрица, а  $\Phi$  – гурвицев полином.

В работах [1], [2], [7], [8] показано, что характеристический полином замкнутой системы при включенном фильтре будет иметь вид  $\Delta(s) = \Delta_a(s)\Delta_0(s)\Phi(s)$ , т.е. устойчивость не зависит от выбора матрицы  $D$  и обеспечивается только гурвицевостью полинома  $\Phi$ .

В данном случае ограничимся рассмотрением скалярной ситуации, с измерением только угла  $\beta$  отклонения маятника от вертикали, т.е. примем

$$C = (0100). \quad (22)$$

Тогда матрица  $F$  обратится в скалярную функцию

$$F(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s}{s^2 + a_1 s + a_0}, \quad (23)$$

где  $a_0, a_1, b_1, b_2$  – параметры, подлежащие определению.

При этом передаточная функция  $F(s)$ , решающая сформулированную задачу, должна удовлетворять двум условиям:

а) условию, определяемому требованием астатизма:

$$F(0) = 0; \quad (24)$$

б) частотному условию

$$H_{du}(F, j\omega_0) = 0 \quad (25)$$

где  $\omega_0$  – заданная частота, а  $H_{du}(F, s)$  – передаточная функция замкнутой линейной системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu + ld(t), \\ y &= Cx, \\ \dot{z} &= Az + bu + H(y - Cz), \\ \xi &= F(s)(y - Cz), \\ u &= Kz + \xi, \end{aligned} \quad (26)$$

блок-схема которой изображена на рис. 4.

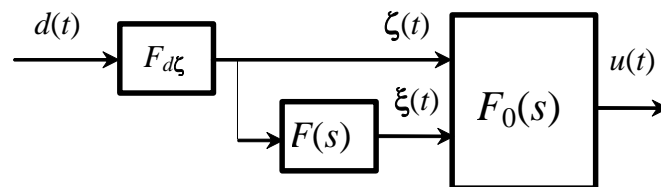


Рис. 4. Блок-схема замкнутой линейной системы

Очевидно, что функция (23) удовлетворяет первому требованию.

Таким образом, условием, определяющим значение параметров функции (23), является равенство (25).

Коэффициенты  $a_0, a_1$  полинома, стоящего в знаменателе искомой

функции (23), определяются, исходя из биномиального распределения его корней. Они задаются на основании требований к качеству переходных процессов при отсутствии внешнего возмущения.

Для определения значений параметров  $b_1$  и  $b_2$  введём величину

$$\varepsilon = x - z, \quad (27)$$

определяющую ошибку оценивания для асимптотического наблюдателя.

Тогда математическая модель замкнутой линейной системы может быть представлена следующими уравнениями:

$$\dot{z} = Az + bu + hC\varepsilon, \quad (27)$$

$$\dot{\varepsilon} = (A - hC)\varepsilon + ld, \quad (28)$$

$$\xi = F(s)C\varepsilon, \quad (29)$$

$$u = Kz + F(s)\varepsilon. \quad (30)$$

Для преобразования этих уравнений введем переменную  $\zeta = C\varepsilon$  и рассмотрим уравнение (28), считая эту переменную ее выходом:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= (A - hC)\varepsilon + ld, \\ \zeta &= C\varepsilon = \varepsilon_2, \end{aligned} \quad (31)$$

т.е. выходом подсистемы (31) будет вторая компонента вектора  $\varepsilon$ .

Представим модель этой подсистемы в tf-форме:

$$\zeta = F_{d\zeta}(s)d \quad (32)$$

Зная все числовые параметры для подсистемы (31), найдём её передаточную функцию  $F_{d\zeta}(s)$ , указанную на рис. 4.

Теперь рассмотрим совместно уравнения асимптотического наблюдателя (27) и формирователя (30) с учетом введенной переменной  $\zeta$ :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (A + bK)z + b\xi + h\zeta, \\ u &= Kz + \xi. \end{aligned} \quad (33)$$

Записав эти уравнения в стандартной ss-форме, получим:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= (A + bK)z + (b \quad h) \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}, \\ u &= Kz + (1 \quad 0) \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{34}$$

Введем передаточную матрицу  $F_0(s) = (F_{01}(s) \quad F_{02}(s))$  линейной системы (34) с двумя входами  $\xi, \zeta$  и выходом  $u$ . Тогда выходная переменная подсистемы (34) представляется в виде

$$u = F_{01}(s)\zeta + F_{02}(s)\xi.\tag{35}$$

Перепишывая уравнение фильтра (29) с учётом переменной  $\zeta$  в виде

$$\xi = F(s)\zeta,\tag{36}$$

имеем из (35), (36) и (32):  $u = [F_{01}(s) + F_{02}(s)F(s)]F_{d\zeta}(s)d$ .

Тогда функция  $H_{du}$ , указанная в условии (25), будет иметь вид

$$H_{du} = (F_{01} + F_{02})F_{d\zeta}.\tag{37}$$

Обеспечение выполнения условия (25) приводит к соотношениям

$$\begin{aligned}H_{du}(j\omega_0) = 0 &\Leftrightarrow F_{01}(j\omega_0) + F_{02}(j\omega_0)F(j\omega_0) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow F(j\omega_0) = -F_{01}(j\omega_0)/F_{02}(j\omega_0) := p_1 + jp_2,\end{aligned}\tag{38}$$

где  $p_1$  и  $p_2$  – вещественная и мнимая части числа  $F(j\omega_0)$  соответственно.

Поскольку справедливо равенство

$$F(j\omega_0) = \frac{-b_2\omega_0^2 + b_1j\omega_0}{-\omega_0^2 + a_1j\omega_0 + a_0},$$

приравнивая действительные и мнимые части в (38), получим линейную систему, состоящую из двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{pmatrix} a_1\omega_0^2 & \omega_0^2(\omega_0^2 - a_0) \\ \omega_0(a_0 - \omega_0^2) & a_1\omega_0^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(a_1^2\omega_0^2 + (a_0 - \omega_0^2)^2) \\ p_2(a_1^2\omega_0^2 + (a_0 - \omega_0^2)^2) \end{pmatrix}\tag{39}$$

Заметим, что параметры  $a_0, a_1, b_1, b_2$ , однозначно определяющие искомую функцию (23), зависят от заранее заданных корней знаменателя  $F(s)$ .

## 4. Проведение практических расчетов

В данном разделе приводятся результаты применения описанного подхода к синтезу обратной связи с многоцелевой структурой для управления маятником Фуруты с конкретными числовыми параметрами, указанными в табл. 1. Проведение всех необходимых вычислений и имитационного моделирования процессов управления осуществляется в среде MATLAB с привлечением прикладного пакета Simulink.

### 4.1. Моделирование динамической системы и её анализ

Компьютерная модель, построенная в соответствии с нелинейными уравнениями (2), (3) динамики маятника, представлена на рис. 7.

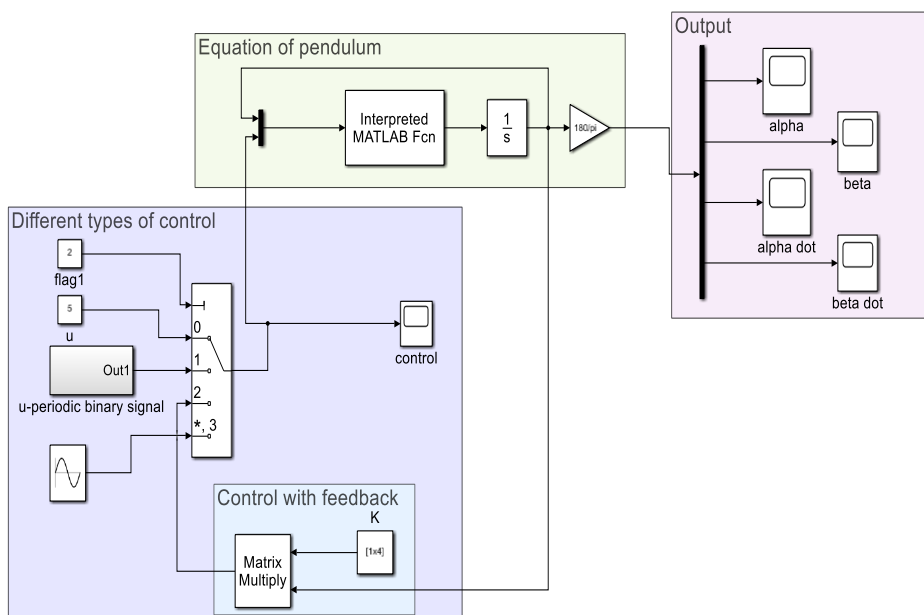


Рис. 7. Simulink- модель системы управления маятником Фуруты

В данной модели в блоке «Interpreted MATLAB Fcn» формируются правые части указанных уравнений. Исходный код соответствующей программной функции на языке MATLAB приведен в Приложении 1. Далее все вычисления осуществляются с привлечением этого блока.

Прежде всего, определим собственные числа матрицы линейной модели (5) – (7) для верхнего вертикального положения равновесия, как корни ее

характеристического уравнения

$$\Delta(s) = \det(Es - A) = 0. \quad (40)$$

Решение уравнения (40) для указанных значений параметров (табл. 1) дает собственные числа:

$$s_1 = -7.3040, s_2 = -1.2984, s_3 = 7.0660.$$

Видно, что одно из них находится в правой полуплоскости, следовательно, верхнее положение равновесия является неустойчивым по Ляпунову.

Исследуем свойства управляемости и наблюдаемости для линейной модели. Вычисленный ранг матрицы управляемости оказывается равным трём, то есть линейная система (5) – (7) с данными параметрами является полностью управляемой.

Теперь проверим свойство наблюдаемости системы по выходу (6). Построив матрицу наблюдаемости для системы (5) – (7), убеждаемся, что её ранг так же равен трём. Таким образом, двух введённых измерений достаточно для того, чтобы оценить полный вектор состояния  $x$ . Это же справедливо и для ситуации с измерением только одного угла  $\beta$ .

## 4.2. Выбор базового регулятора по состоянию

Для выбора базового регулятора в составе многоцелевой структуры сначала определим параметры обоих регуляторов (биномиального и LQR) таким образом, чтобы примерно уравнивать их по интенсивности. Эксперименты показывают, что это достигается для значений  $\rho = 5$  и  $\gamma = 1$ .

Проанализируем поведение управления и динамических переменных нелинейной модели (2) – (3), замкнутой биномиальным (рис. 8) и LQR (рис. 9) регуляторами. Движение определяется заданием начальных условий по вектору состояния, где все координаты, кроме  $\beta(0) = 5^\circ$ , являются нулевыми. Из рисунков можно сделать вывод о том, что в нелинейной модели LQR-регулятор затрачивает меньшие усилия для обеспечения стабилизации.

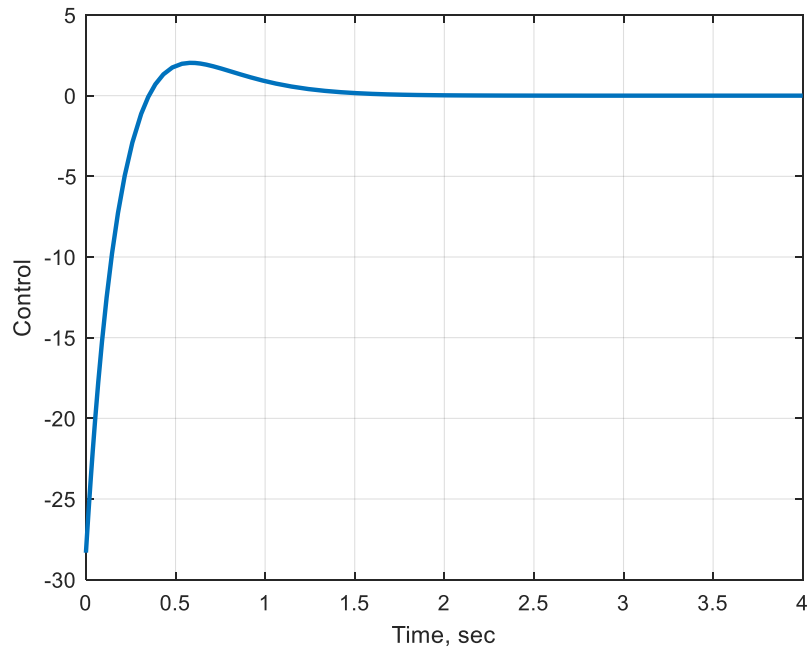


Рис. 8. Процесс по управлению для биномиального регулятора

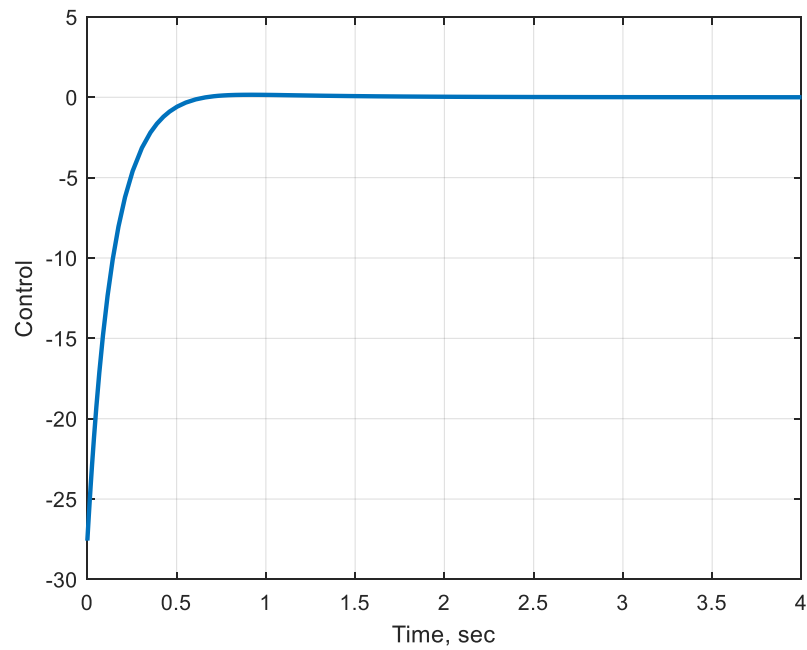


Рис. 9. Процесс по управлению для LQR регулятора

Теперь проанализируем поведение угла  $\beta$  в обоих случаях в процессах, представленных на рис. 10 и рис. 11.



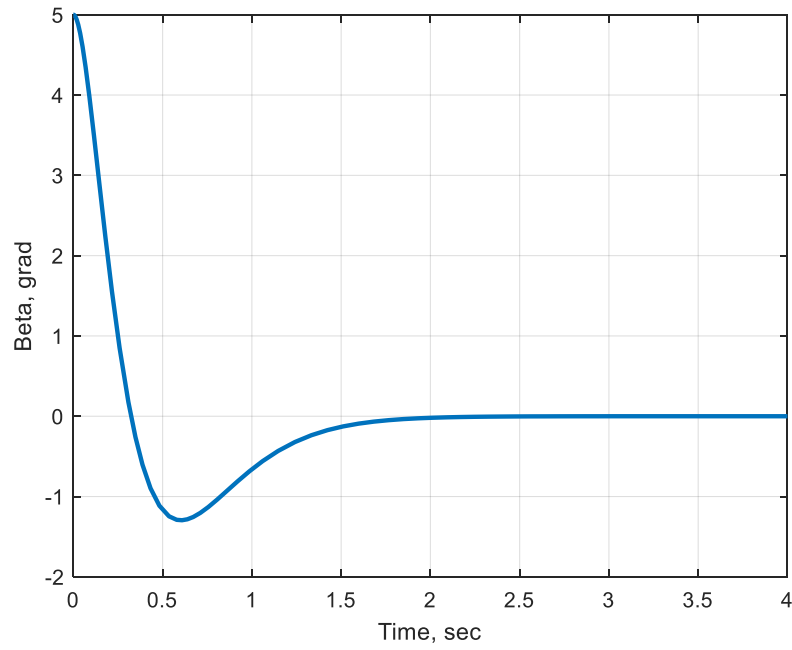


Рис. 10. Процесс по углу  $\beta$  для биномиального регулятора

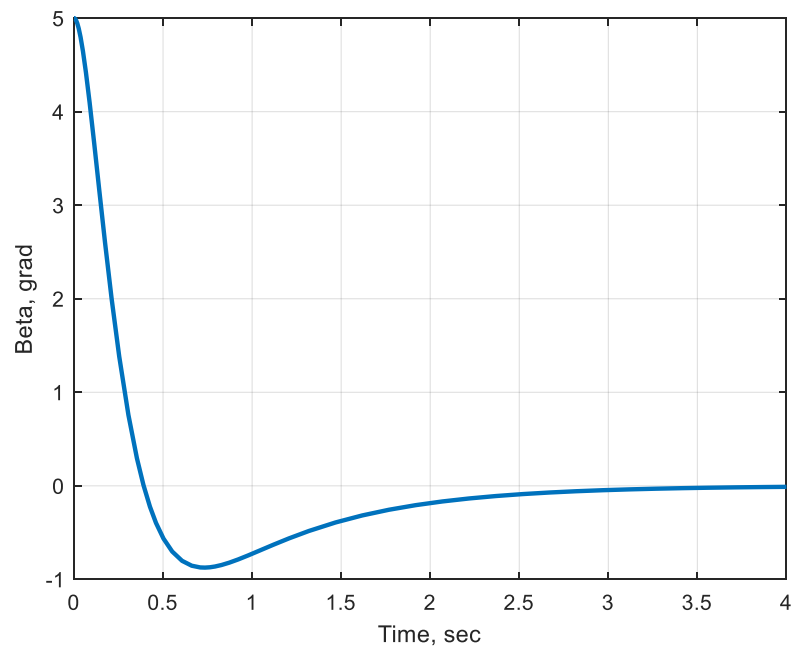


Рис. 11. Процесс по углу  $\beta$  для LQR регулятора

Из сравнения двух графиков можно сделать вывод, что во втором случае системе требуется больше времени, чтобы вернуться в нулевое положение равновесия.

Для дальнейшего сравнения построим грубую оценку области асимп-

тотической устойчивости маятника при замыкании его биномиальным и LQR- регуляторами.

С этой целью проанализируем поведение функции  $\tilde{W}(x)$ , представленной формулами (19), (20) в области

$$B = \{x = (\alpha \ \beta \ \dot{\alpha} \ \dot{\beta}) \in X : \alpha = 0, 0 \leq \beta \leq 2\pi, \dot{\alpha} = 0, \dot{\beta} = 0\}, \quad (41)$$

определяемой начальным значением угла  $\beta$  отклонения маятника.

Графики зависимостей  $\tilde{W}(\beta)$  для биномиального и линейно-квадратичного управления, приведены на рис. 12 и рис. 13 соответственно.

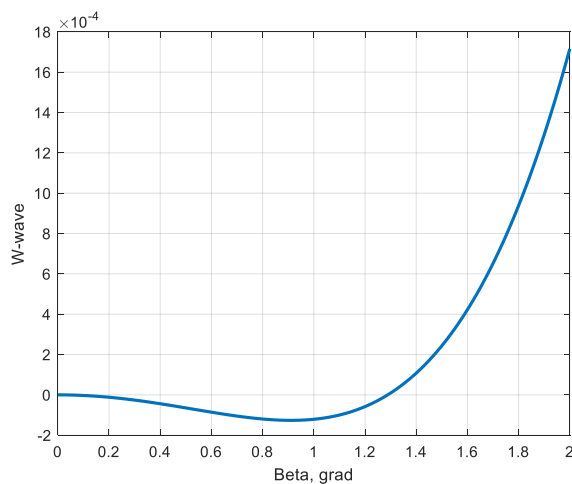


Рис. 12. Производная функции Ляпунова для биномиального регулятора

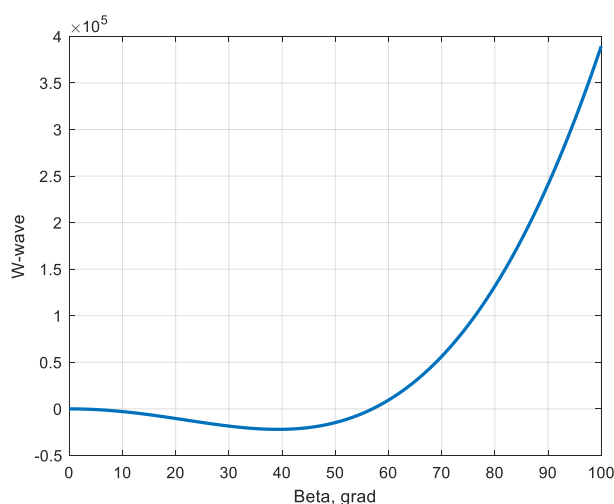


Рис. 13. Производная функции Ляпунова для LQR регулятора

Заметим, что точки пересечения графиков с горизонтальной осью дают максимальное отклонение, для которых гарантирована стабилизация соответствующим управлением. Эти точки в данном случае и будем принимать в качестве границ для оценок областей асимптотической устойчивости.

Из сравнения видно, что область устойчивости при заданной интенсивности при биномиальном регуляторе – около 1.2 градуса, а при LQR-регуляторе составляет примерно 57 градусов. Таким образом, оценка области асимптотической устойчивости в биномиальном варианте значительно уже, чем в случае использования LQR регулятора.

При проведении экспериментов с имитационным моделированием оказалось, что биномиальный регулятор требует несколько больших энергетических затрат, но стабилизирует линейную систему быстрее, чем LQR. При этом области асимптотической устойчивости замкнутой нелинейной системы при работе обоих регуляторов сравнимы по размеру.

Теперь сравним границы оценок для области устойчивости при уменьшении интенсивности работы регуляторов, графики которых представлены на рис.14 и рис.15.

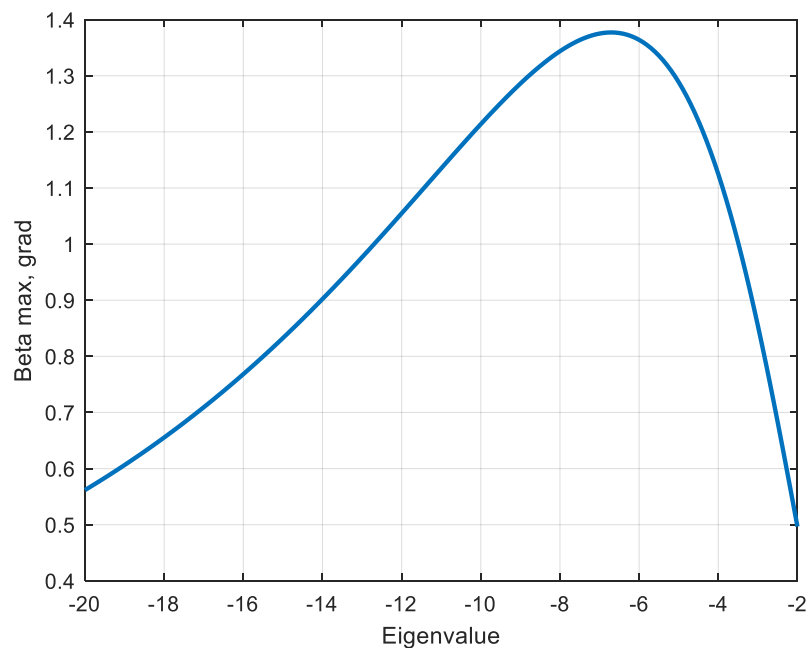


Рис. 14. Граница для величины  $\beta(0)$  для биномиальных регуляторов

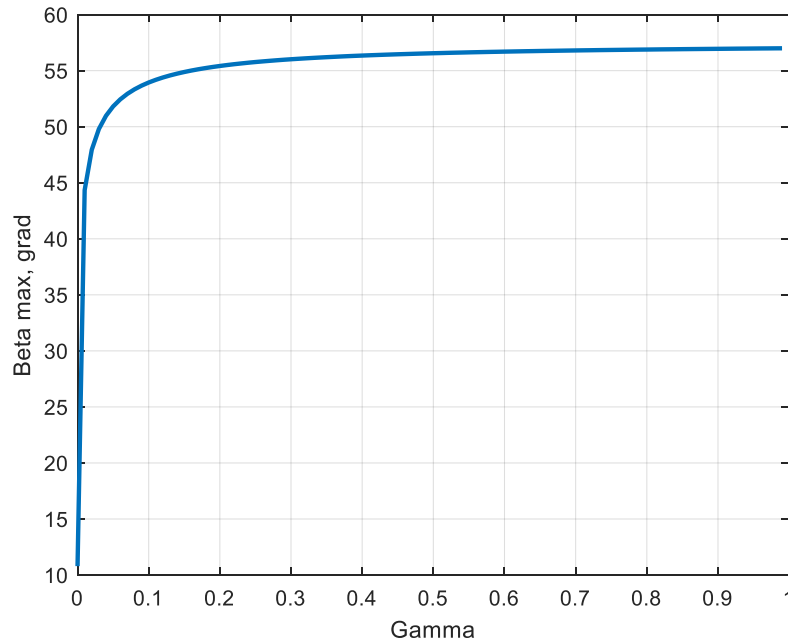


Рис. 15. Граница для величины  $\beta(0)$  для LQR регуляторов

График для LQR регулятора (рис. 15) показывает, что с уменьшением интенсивности управления, область асимптотической устойчивости увеличивается. Особенно явно данная закономерность заметна при  $\gamma \leq 0.1$ .

Изменение же области устойчивости при использовании биномиального регулятора с указанной выше функцией Ляпунова (рис. 14) более интересно: оно не является монотонным. На графике имеется явно выраженный максимум, то есть точка ( $\rho = 6.7$ ), в которой оценка области наибольшая. Естественно, что соответствующий биномиальный регулятор следует принять в качестве рабочего.

Заметим, что если найти LQR-регулятор ( $\gamma = 0.01$ ), который сопоставим по интенсивности с рабочим (рис. 17), то оценки области асимптотической устойчивости для обоих регуляторов оказываются почти одинаковыми. Это иллюстрируется на рис. 16, где представлены графики переходных процессов по углу  $\beta$  при начальном значении  $\beta(0) = 10^\circ$ . Видно, что качество процессов практически одинаково.

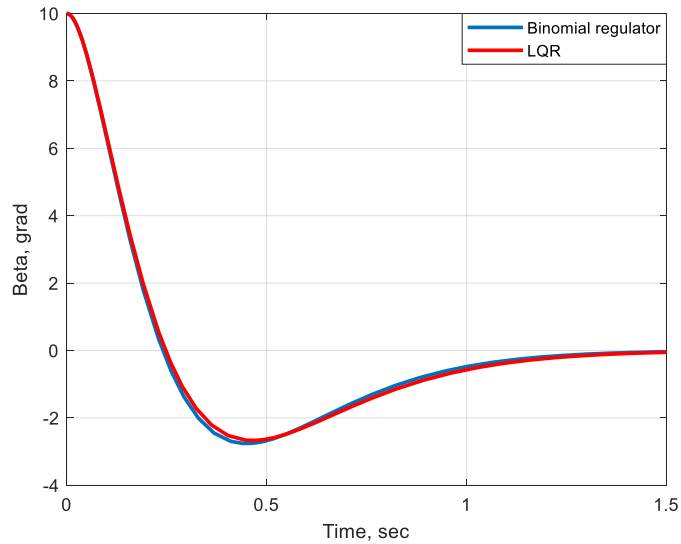


Рис. 16. Сравнение процессов по углу  $\beta$  для биномиального и LQR регуляторов

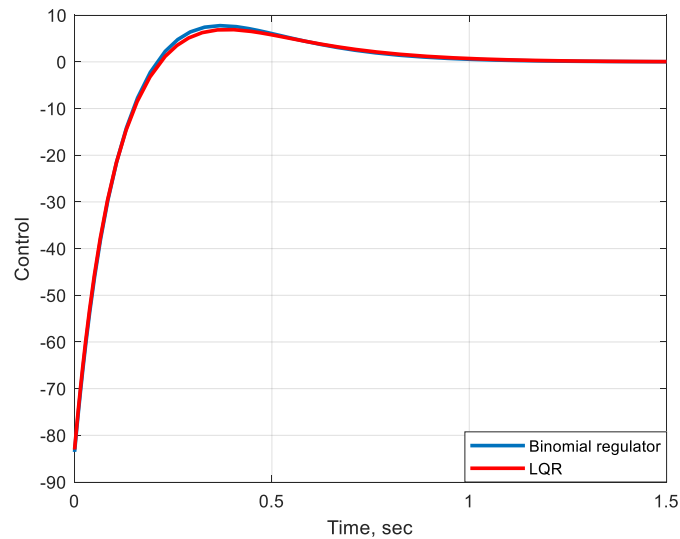


Рис. 27. Сравнение процессов по сигналу  $u$  для биномиального и LQR регуляторов

Поскольку оба варианта по качеству управления почти идентичны, примем в качестве базового регулятора для обратной связи с многоцелевой структурой указанный LQR-регулятор и всю дальнейшую работу будем проводить с его использованием:

$$u = Kx,$$

$$K = (0 \quad -475.8 \quad 12.70 \quad -67.05)$$

### 4.3. Построение асимптотического наблюдателя

Блок-схема компьютерной модели для системы управления маятником Фуруты представлена на рис. 18. В отличие от первой задачи, здесь управляющий сигнал формируется по оценкам для вектора состояния, т.е. по выходу линейного асимптотического наблюдателя.

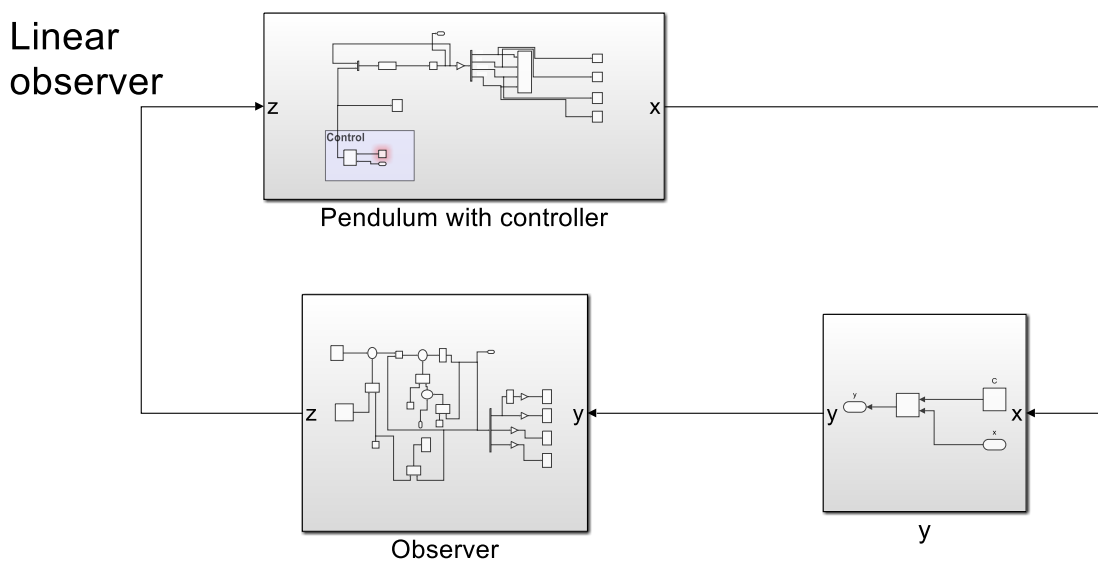


Рис. 18. Блок-схема Simulink-модели с регулятором по состоянию наблюдателя

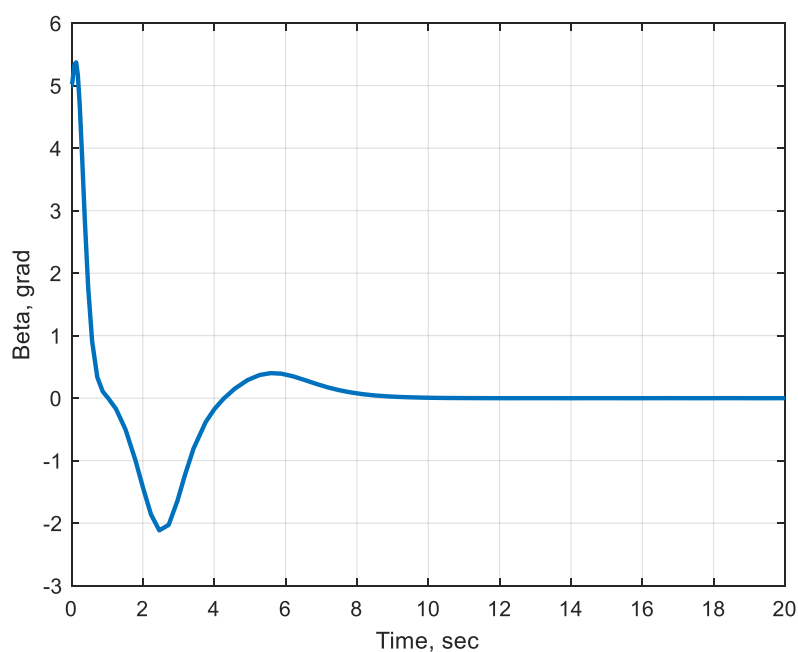


Рис. 19. Движение маятника при управлении  $u = Kz$

Осуществим настройку регулятора по состоянию наблюдателя, выбирая матрицу  $H$  его коэффициентов. Для этого зададим начальное отклонение  $\beta_0 = \beta(0) = 10^\circ$  и проведем имитационное моделирование с помощью данной Simulink-модели, принимая в качестве базового регулятора управление, синтезированное выше.

В ходе проведения экспериментов получено значение  $\rho = 1$  для биномиального характеристического полинома наблюдателя, что обеспечивается следующей матрицей коэффициентов:

$$H = (3.900 \quad 1.500 \quad 52.10)'$$

Соответствующий переходный процесс показан на рис. 19, свидетельствуя о хорошем динамическом качестве системы.

#### 4.4. Синтез динамического фильтра

Зададим частоту  $\omega_0 = 0.5 \text{ рад/с}$  колебаний для внешнего гармонического воздействия. Заметим, что эта частота характерна для морского волнения с интенсивностью около 5 баллов по шкале Бофорта.

Решая систему линейных алгебраических уравнений (39), получаем значения параметров числителя  $b_1 = b_1(a_0, a_1)$ ,  $b_2 = b_2(a_0, a_1)$ , как функции от коэффициентов знаменателя  $a_0 = a_0(\rho_1, \rho_2)$ ,  $a_1 = a_1(\rho_1, \rho_2)$ , где  $\rho_1, \rho_2$  – заданные корни знаменателя передаточной функции  $F(s)$  (23).

Для выбранных выше матриц  $K$  и  $H$  базового регулятора и асимптотического наблюдателя, с помощью Simulink-модели в ходе экспериментов определим значения  $\rho_1 = \rho_2 = -0.5$ . На рис. 20 представлена частотная характеристика  $A(\omega) = |H_{d\beta}(j\omega_0)|$  замкнутой системы с полностью настроенной многоцелевой обратной связью.

Найденные коэффициенты передаточной функции (23) динамического фильтра имеют значения  $a_1 = 1$ ,  $a_0 = 0.25$ ,  $b_1 = -578.6$ ,  $b_2 = -82.41$ .

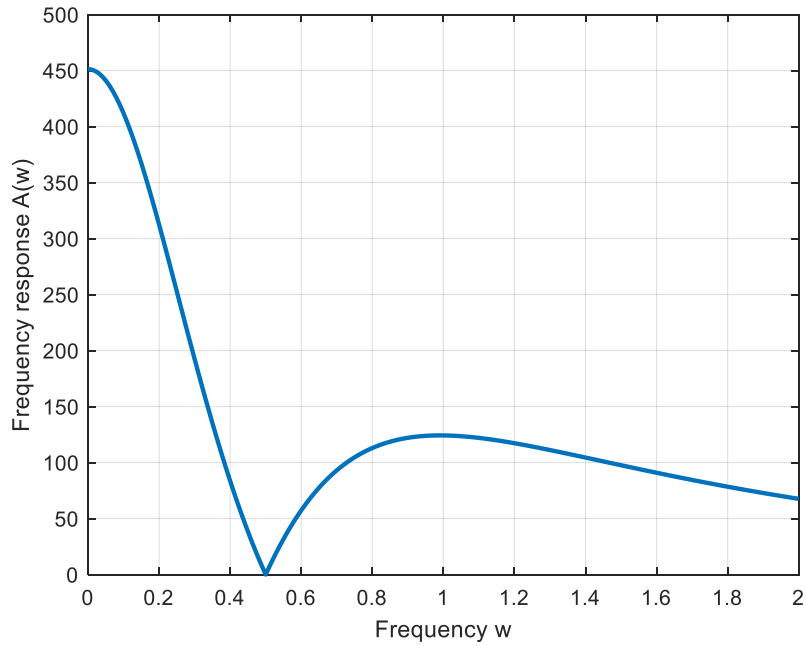


Рис. 20. Частотная характеристика замкнутой системы

Для введения синтезированного фильтра в компьютерную модель воспользуемся блок-схемой, изображенной на рис. 21, которая реализует полный регулятор (27) – (30) с многоцелевой структурой, учитывая наличие внешнего возмущения.

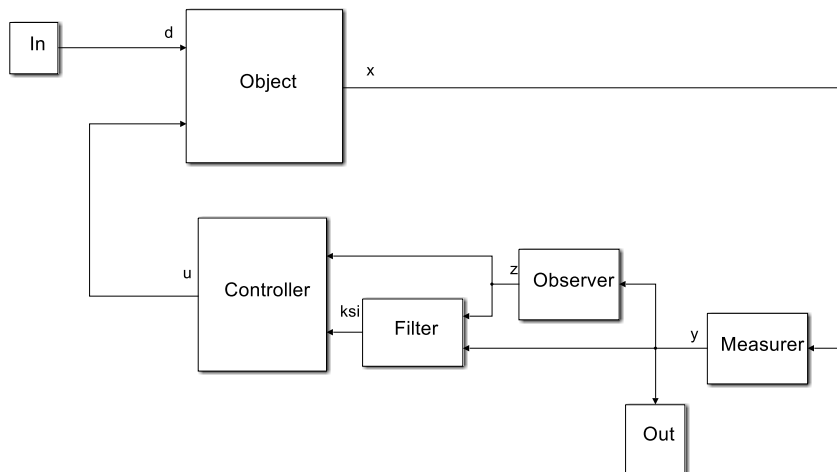


Рис. 21. Схема замкнутой модели с многоцелевой структурой управления



## 4.5. Результаты компьютерного моделирования

Введём в нелинейную математическую модель маятника (2) – (3) внешнее возмущение:

$$\dot{x} = F(x, u) + ld(t),$$

где  $l = (0.1 \ 0 \ 1)'$  – заданный вектор-столбец, а  $d(t)$  – скаляр, характеризующий внешнее воздействие колебательного характера.

Реализация модели в среде MATLAB Simulink с учётом нескольких вариантов внешнего воздействия показана на рис. 22.

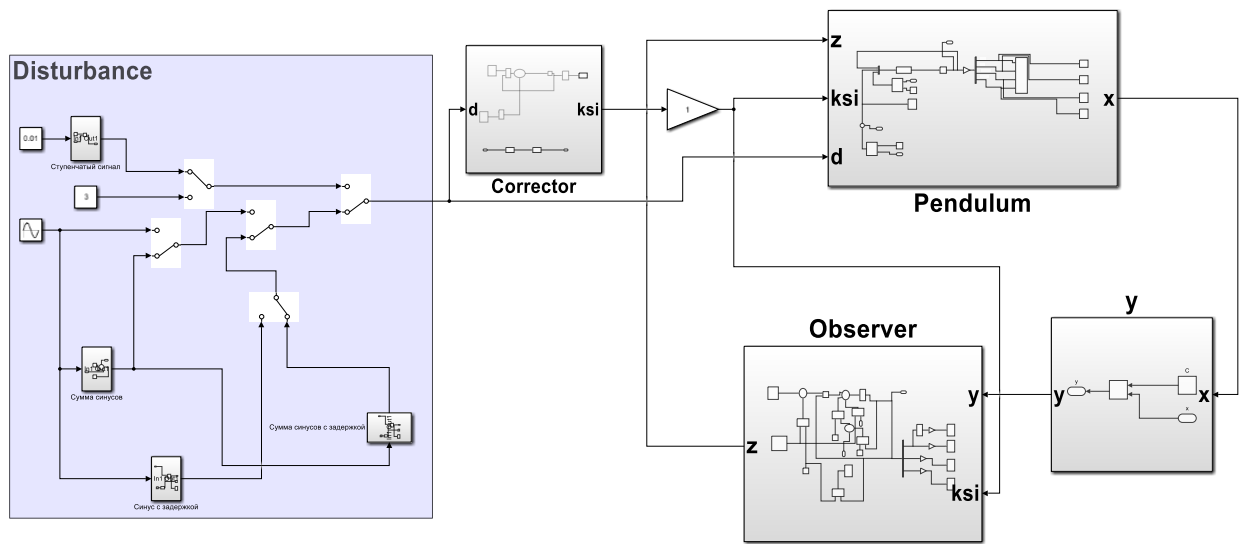


Рис. 22. Замкнутая модель с внешним возмущением

Проведём эксперименты, подавая в систему различные типы возмущающего воздействия. При этом начальное отклонение маятника от положения равновесия считаем нулевым.

Сначала подадим на возмущающий вход гармонические колебания

$$d(t) = A \sin \omega_{0_k} t$$

с заданной амплитудой  $A = 0.025 \text{ рад}$  и частотой колебаний  $\omega_{0_k} = \omega_0 = 0.5 \text{ рад/с}$ .

Рассмотрим динамику процессов по углу  $\beta$  и управляющему сигналу

при включённом фильтре, представленную на рис. 23 и рис. 24.

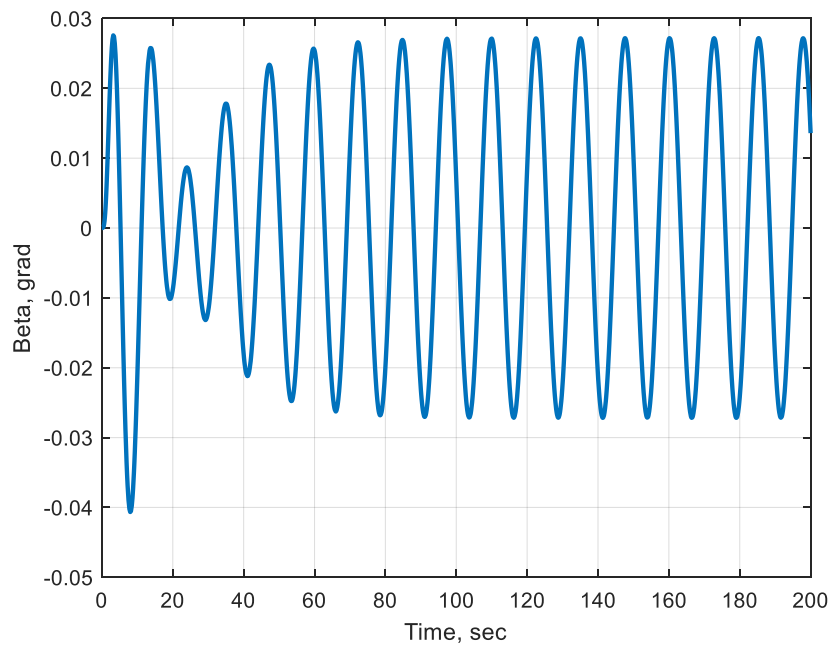


Рис. 23. Процесс по углу  $\beta$  при включённом фильтре

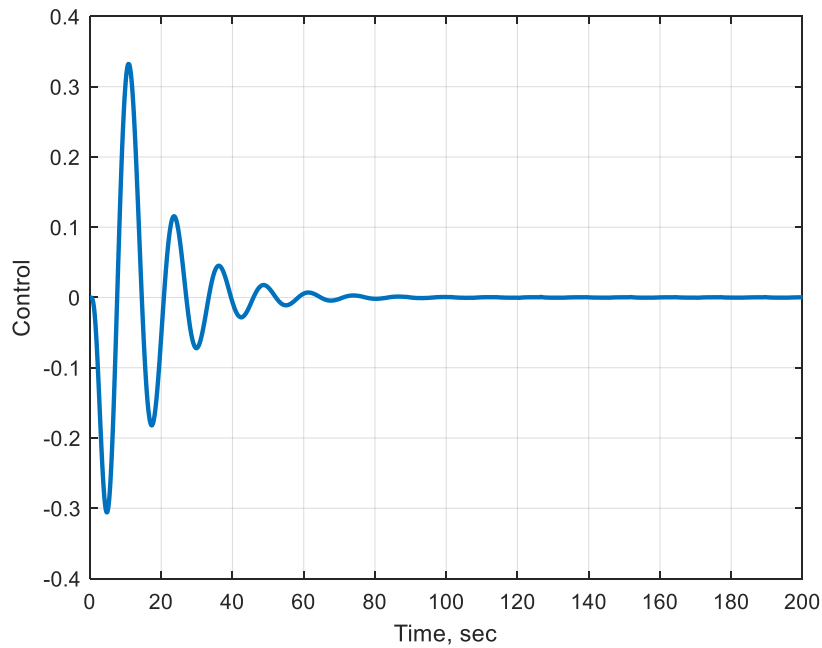


Рис. 24. Процесс по управляющему сигналу при включённом фильтре

Сравним графики с аналогичными процессами, но при выключенном фильтре изображёнными на рис. 26, рис. 27.

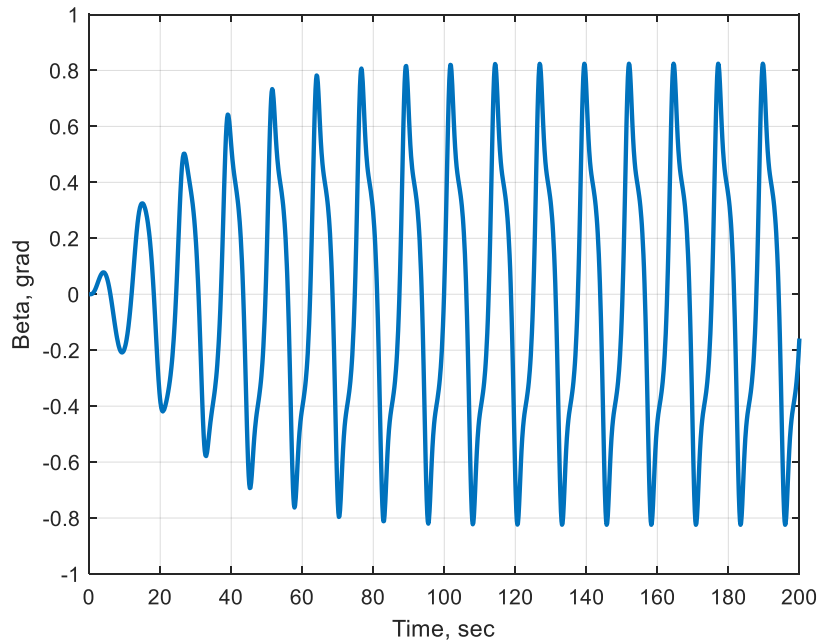


Рис. 26. Процесс по углу  $\beta$  при выключённом фильтре

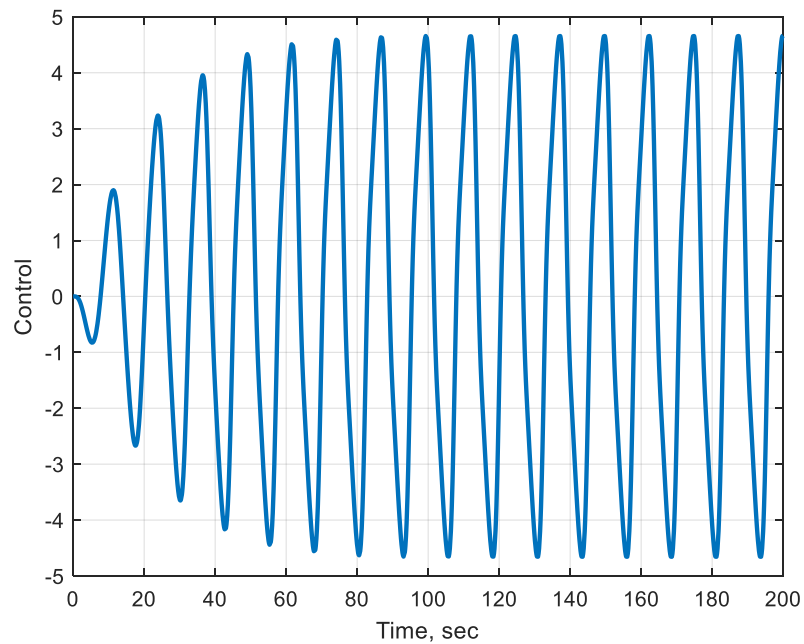


Рис. 27. Процесс по управляющему сигналу при выключённом фильтре

Из рис. 25 и рис. 26 видно, что построенный фильтр подавляет колебания маятника (уменьшая их амплитуду с  $0.8^\circ$  до  $0.03^\circ$ ) и полностью компенсирует колебания управляющего сигнала, сводя затраты на управление к ну-

лю, что и является целью введения динамического фильтра в структуру многоцелевого закона управления.

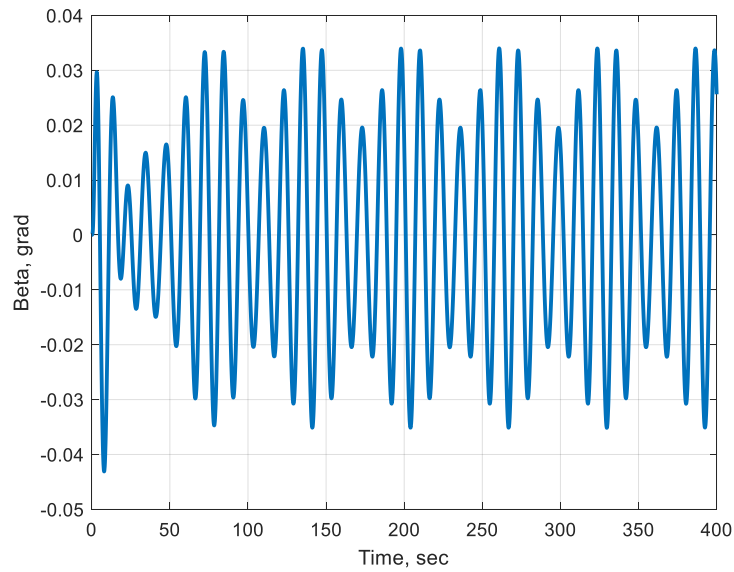


Рис. 28. Процесс по углу  $\beta$  при сложных колебаниях с включённым фильтром

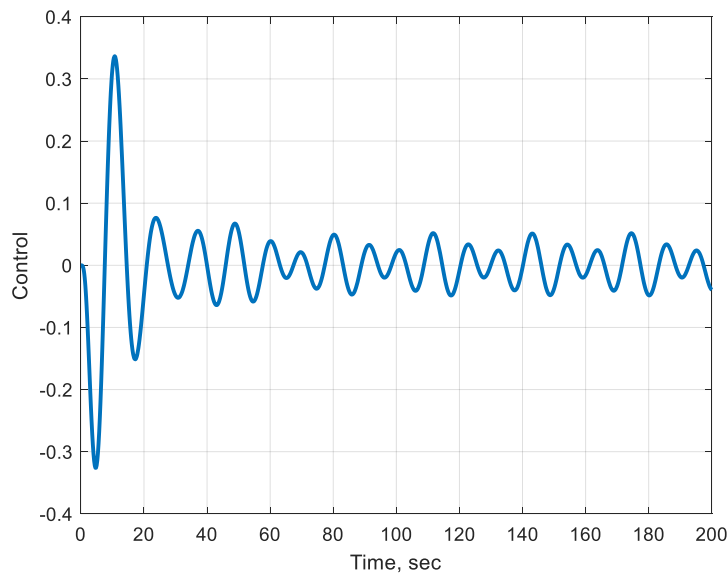


Рис. 29. Процесс по управляющему сигналу при композиции гармоник с включённым фильтром

Необходимо отметить, что в реальных условиях гармонические возмущения не встречаются, поэтому в качестве более реалистичного внешнего возмущения, рассмотрим сумму трёх гармоник с разными частотами:

$$d(t) = \sum_{i=1}^3 A_i \sin \omega_{0_i} t ,$$

$$\omega_{0_1} = 0.4, \omega_{0_2} = 0.5, \omega_{0_3} = 0.6, A_1 = 0.0005, A_2 = 0.025, A_3 = 0.0015.$$

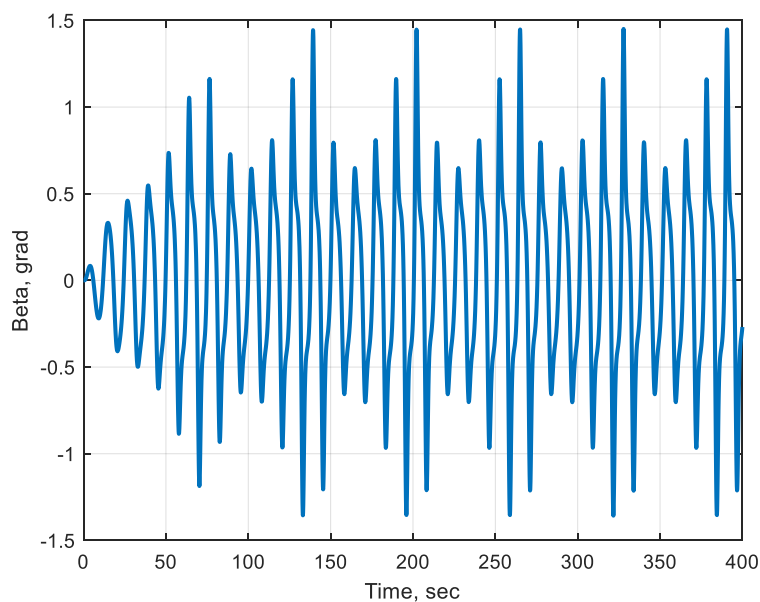


Рис. 30. Процесс по углу  $\beta$  при сложных колебаниях с выключённым фильтром

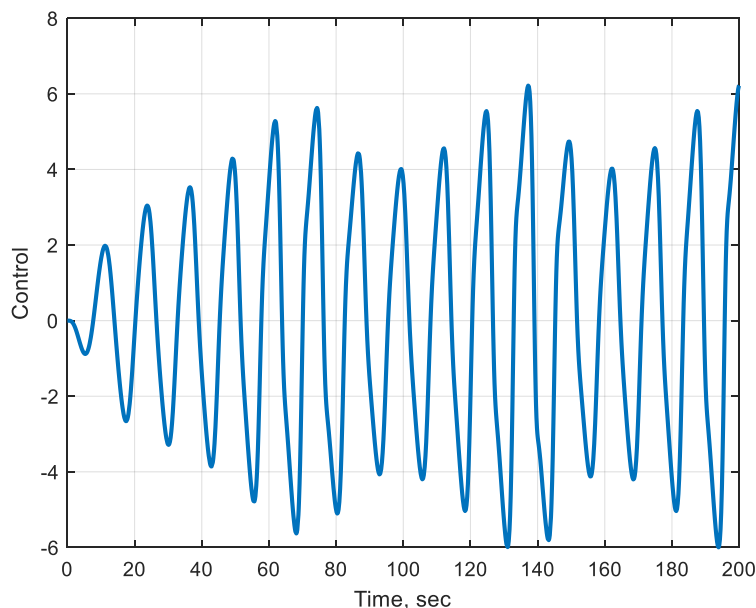


Рис. 31. Процесс по управлению при сложных колебаниях с выключённым фильтром

Сравним процессы по углу  $\beta$  и управляющему сигналу при включённом и выключенном фильтре, динамика которых показана на рис. 28 – 31. В данном случае, фильтр подавляет колебания по углу от  $1.4^\circ$  до  $0.033^\circ$ , а по управлению – от 6 градусов до 0.08. Как видно из рис. 29 и рис. 30, в ситуации, приближенной к реальной, фильтр хоть не компенсирует колебания регулятора полностью, но подавляет их до небольших величин.

## Выводы

В ходе проделанной работы рассмотрены вопросы построения стабилизирующих законов управления для вертикального маятника с вращающимся основанием (маятник Фуруты). В отличие от известных подходов, синтез обратной связи осуществлен на множестве законов управления с многоцелевой структурой. При выборе ее элементов основное внимание уделено двум режимам функционирования системы. Первый из них является собственным движением, порождаемым ненулевым начальным отклонением маятника от вертикали. Второй режим определяется воздействием на систему внешнего аддитивного возмущения колебательного характера.

Для первого режима с использованием методов анализа нелинейной динамики осуществлена настройка базового закона управления и асимптотического наблюдателя.

Для второго режима выполнен синтез динамического фильтра, входящего в структуру, который минимизирует отклонения управления, порождаемые внешним возмущением, что обеспечивает экономию ресурсов привода, управляющего системой.

Для подтверждения работоспособности и эффективности принятого подхода выполнены практические расчеты и проведено имитационное моделирование динамики синтезированной замкнутой системы. Результаты расчетов и моделирования, сопоставимые с материалами других авторов, свидетельствуют о достижении поставленных целей работы.

## Заключение

В процессе проведённого исследования получены следующие результаты, которые выносятся на защиту:

1. Сформулирована задача синтеза многоцелевой структуры управления маятником и предложены способы нахождения ее элементов с обеспечением желаемой динамики процессов.
2. Разработан имитационно-моделирующий комплекс в среде MATLAB-Simulink для проведения исследований и экспериментов.
3. Проведено численное решение задачи синтеза многоцелевого регулятора для маятника Фуруты, показавшее работоспособность и эффективность принятого подхода.

## Список литературы

1. Веремей Е. И. Линейные системы с обратной связью. СПб.: Лань, 2013. — 448 с.
2. Веремей Е.И. Среднеквадратичная многоцелевая оптимизация. СПб: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2016. — 408 с.
3. Веремей Е.И., Сотникова М.В. Управление с прогнозирующими моделями. Воронеж: Изд-во "Научная книга", 2016. — 214 с.
4. Arnolds B.M. Identification and control of the Rotary Inverted Pendulum. – Technical Traineeship Report, University of Eindhoven, 2003. – DCT report No: 2003.100. — 60 p.
5. Furuta K., Iwase M. Swing-up time analysis of pendulum // Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences. – 2004. – Vol. 52, № 3. – P. 153 – 163.
6. H. K. Khalil. Nonlinear Systems. Third edition. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2002.
7. Evgeny I. Veremey. Separate Filtering Correction of Observer-Based Marine Positioning Control Laws, International Journal of Control. – August 2017, Volume 90, Issue 8, pp. 1561 – 1575.
8. Evgeny I. Veremey. Optimization of filtering correctors for autopilot control laws with special structures // Optimal Control Applications and Methods. Volume 37, Issue 2, pages 323 – 339.



# Приложение 1

Ниже представлен код для реализации нелинейной математической модели (2) – (3) маятника Фуруты:

```
function [ dx ] = eqns_of_mayatnik( x )
global L0 l1 m1 J0 J1 C0 C1 Ra Kt Kb Ku g;
g=9.8;
beta=x(2);
wal=x(3);
wb=x(4);
u=x(5);
M0=[J0+m1*L0^2+m1*l1^2*(sin(beta))^2, -m1*L0*l1*cos(beta);
    -m1*L0*l1*cos(beta), J1+m1*l1^2];
M1=[C0+Kt*Kb/Ra+0.5*m1*l1^2*wb*sin(2*beta),
    m1*L0*l1*wb*sin(beta)+0.5*m1*l1^2*wal*sin(2*beta);
    -0.5*m1*l1^2*wal*sin(2*beta), C1];
M2=[0; -m1*g*l1*sin(beta)];
T=[Kt*Ku/Ra; 0];
dx=[x(3);x(4);inv(M0)*(-M1*x(3:4)-M2+T*u)];
end
```