

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

**Николаев Константин Игоревич**

**Выпускная квалификационная работа бакалавра**

**Математические модели хеджирования валютных  
рисков**

Направление 01.03.02

Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,  
кандидат физ.-мат. наук,  
доцент  
Лежнина Е.А.

Санкт-Петербург

2019

## Оглавление

<b>Введение .....</b>	<b>3</b>
<b>Цели и задачи .....</b>	<b>9</b>
<b>Обзор литературы .....</b>	<b>9</b>
<b>Методы оценки риска.....</b>	<b>17</b>
Дельта-нормальный метод .....	17
Метод исторического моделирования .....	18
Авторегрессионные модели условной гетероскедастичности .....	19
<b>Результаты.....</b>	<b>26</b>
<b>Расчет доходности хеджирования.....</b>	<b>28</b>
<b>Заключение.....</b>	<b>36</b>
<b>Список литературы .....</b>	<b>36</b>

## Введение

**Валютный риск** – это возможность появления события связанного с изменением курса валют, которое может привести к негативному или позитивному изменению экономического состояния субъекта предпринимательской деятельности.

Исходя из наиболее распространенной классификации Шапиро 3, существует три вида валютного риска:

1. Транзакционный (позиционный, операционный) валютный риск – это риск финансовых потерь в результате воздействия курса валют на ожидаемые потоки денежных средств; Этот вид валютного риска влияет как на движение денежных средств, так и на чистую прибыль. К примеру, повышение импортных цен, номинированных в иностранной валюте, влияет на деятельность импортера, что, может привести к снижению выплачиваемых дивидендов и потенциально отразится на стоимости организации.

2. Трансляционный (консолидированный риск) – это риск изменения балансовой стоимости, выраженной в иностранной валюте и подлежащих переоценке при составлении консолидированной отчетности;

3. Экономический (или рыночный) риск – это риск изменения экономического состояния организации в связи с колебаниями валютных курсов.

Последствия этого риска могут быть как прямыми так и косвенными. К прямым можно отнести риски, которые влияют на выручку и прибыль компании, к косвенным – риски, влияющие на конкурентоспособность компании. Затем, с течением времени, косвенные риски также приводят к изменению структуры издержек, выручки и прибыли. Также экономический риск может затронуть организации, которые не зависят от валютного рынка. К примеру, конкуренты могут снизить цены на

свою продукцию, что приведет к перераспределению доли рынка в пользу продукции конкурентов.

В данной работе в наибольшей степени представляет интерес транзакционный риск.

**Хеджирование валютных рисков** — это страхование риска получения убытков из-за неблагоприятного изменения валютного курса. Хеджирование заключается в фиксации курса валюты путем заключения сделок на валютном или срочном рынке. То есть производится покупка (продажа) валютных договоров (контрактов) на определенный срок одновременно с продажей (покупкой) валюты, имеющейся в наличии, с тем же сроком поставки. Затем, с наступлением срока поставки валюты, производится обратная операция.

Производный финансовый инструмент (ПФИ) или дериватив — договор (контракт), по которому стороны получают право или обязуются выполнить некоторые действия в отношении базового актива.

Хеджирование валютных рисков позволяет:

- Страховать риск неблагоприятного изменения курса иностранной валюты по отношению к базовой;
- Снять неопределенность в получении будущих доходов. Финансовые потоки становятся более прозрачными;
- Снизить стоимость привлекаемых кредитных ресурсов;
- Освободить средства компании, и повысить её управляемость.

Классификация ПФИ:

**Форвардный контракт** — обязательный для исполнения срочный договор, по которому покупатель и продавец соглашаются на обязательную поставку валюты или альтернативное денежное обязательство на определенную дату в будущем. Валютный курс и другие условия фиксируются в момент заключения сделки.

**Фьючерсный контракт** — биржевой ПФИ, при заключении которого стороны договариваются только об уровне цены и сроке поставки. Остальные параметры актива являются стандартными. Стороны несут обязательства перед биржей вплоть до исполнения договора.

Фьючерс можно рассматривать как стандартизированную разновидность форварда, который обращается на бирже.

Основное отличие форвардного и фьючерсного договора: форвардный договор представляет собой разовую внебиржевую сделку между сторонами, а фьючерсный договор — повторяющееся предложение, которым торгуют на бирже.

**Опцион** — контракт, по которому покупатель получает право, но не обязательство, совершить покупку или продажу данного актива по заранее оговорённой цене в определённый контрактном момент времени. При этом опциона обязан продать актив или купить его у покупателя опциона в соответствии с его условиями.

**Своп** — это комбинация двух противоположных конверсионных сделок на одинаковую сумму с разными датами валютирования (ближайшая дата — дата валютирования, удаленная дата — дата окончания свопа). Наиболее распространённый период заключения свопа — до 1 года.

#### **Стратегия хеджирования.**

При совершении сделок хеджирования необходимо заранее проработать стратегию хеджирования и основные этапы данного процесса,

представленные схематично на рисунке 1[1].

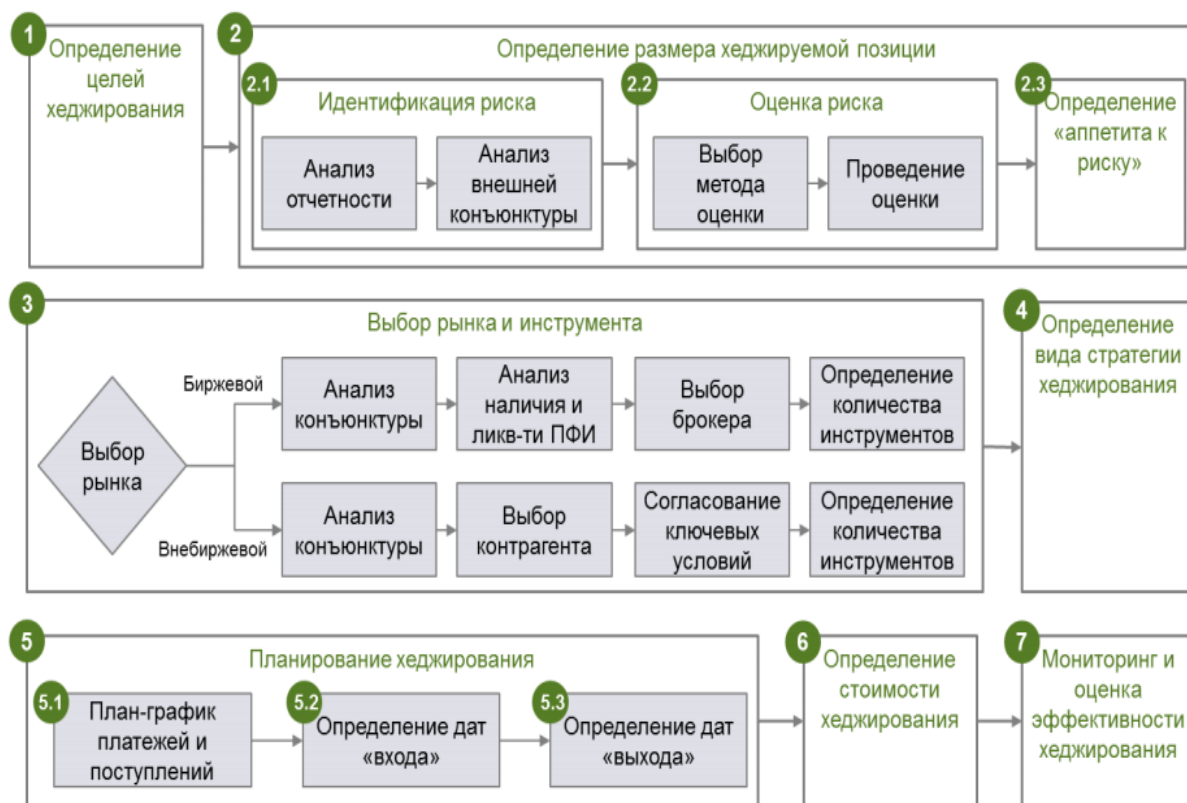


Рисунок 1. Стратегия хеджирования.

Наиболее распространенные цели хеджирования:

- Полное избавление от рисков.
- Частичное избавление от рисков. Получение приемлемого размера риска для достижения оптимального соотношения между стоимостью хеджирования и его положительным результатом.
- Снижение волатильности бизнес-результатов компании под воздействием колебаний валютного курса.
- Снижение неопределенности денежных потоков компании, что подразумевает хеджирование конкретных сделок.
- Полное нивелирование как положительных, так и отрицательных последствий реализации валютных рисков.
- Нивелирование только отрицательных последствий реализации рисков при сохранении возможности улучшения бизнес-результатов компании за счет положительных последствий реализации рисков.

## **Определение размера хеджируемой позиции.**

При решении о хеджировании валютных рисков компании необходимо определить величину хеджируемой позиции. Для её определения, необходимо провести оценку риска, а также определить «аппетит к риску» (порог толерантности) компании.

Существует несколько способов оценки рисков, грубо их можно разделить на две категории: методы экспертных оценок и статистические методы (которые далее рассмотрим). Среди статистических методов оценки процентного и валютного рисков выделяют такие методы как VaR и Expected Shortfall.

**VaR (Value-at-Risk, стоимость под риском)** показывает наибольший уровень убытков на временном горизонте в нормальных рыночных условиях при заданном уровне доверительной вероятности. Это величина потерь, которая с вероятностью, равной уровню доверия (К примеру, 99 %), не будет превышена. В 1 % случаев убыток составит величину, большую чем VaR. Наиболее популярный метод оценки риска.

**Expected Shortfall (Ожидаемы дефицит)** показывает средний ожидаемый размер потерь (с данным уровнем доверия, на данном горизонте), при условии, что он превысит соответствующее значение VaR. Показывает, что произойдет в 1% случаев, не отраженных в VaR.

Для получения этих оценок популярны следующие методы: Дельта-нормальный метод, метод исторического моделирования и метод имитационного моделирования Монте-Карло.

В зависимости от состояния на рынке рекомендуется использовать:

- В период рыночной стабильности – методы VaR.
- В период сильной волатильности рынка – метод Expected Shortfall.

После проведения действий по оценке рисков необходимо определить порог толерантности компании к риску. Порог толерантности компании к

риску – это максимальный размер возможных потерь, которые компания выдержит без значительного ущерба для своей основной деятельности. Оценка порога толерантности может быть выражена как в виде абсолютного значения (к примеру, млн. руб.), так и в виде относительного значения (к примеру, процент от прибыли). Нахождение этого параметра позволяет получить, по итогу, значение хеджируемой позиции, так как ко всем потенциальным потерям свыше установленного порога должно применяться хеджирование, или иные методы устранения риска.

### **Выбор рынка и инструментов хеджирования.**

Есть два варианта выбора рынка ПФИ: биржевой и внебиржевой. На биржевом рынке обращаются только фьючерсы и биржевые опционы, на внебиржевом рынке – форварды, внебиржевые опционы, свопы. Внебиржевой рынок характеризуется наличием более широкого набора финансовых инструментов и их вариаций. Также инструменты внебиржевого рынка позволяют учесть все специфические условия по части объемов, типов базового актива и сроков. Основное преимущество биржевого рынка заключается в наличии высоколиквидных инструментов, которые позволяют в любой момент времени с наименьшими затратами произвести коррекцию хеджируемой позиции. Описание основных инструментов хеджирования было предоставлено выше.

### **Расчет стоимости хеджирования.**

Затраты на хеджирование состоят из: комиссий (брокеру, бирже и т.д.), неустоек в связи с нарушением условий договора, налоговых последствий совершения сделок и отвлеченных средств для обеспечения хеджируемой позиции (гарантийное обеспечение позиции и резерв обеспечения убытка с вариационной маржи).

### **Эффективность хеджирования.**



В процессе реализации сделок необходимо осуществлять мониторинг позиций по финансовым инструментам, с целью оценки эффективности стратегии хеджирования.

## Цели и задачи

Цель работы - исследование методов оценки валютного риска путем расчета характеристики Value-at-Risk. По результатам оценки, на примере реальной компании (в которой проходила практика), произведение расчёта доходности по стратегии хеджирования с использованием фьючерсных контрактов за период с 01.01.2018 по 01.03.2019.

## Обзор литературы

**VaR (Value-at-Risk)** — это статистическая оценка, выраженная в денежных единицах базовой валюты, которую не превысят, с заданной вероятностью  $k$  (обычно  $k = 0,95$ ), ожидаемые максимальные убытки за заданный интервал времени.

Методы оценки стоимости являются наиболее передовыми современными методами, позволяющими измерять валютный риск. Эти методы охватывают инструменты измерения чувствительности и волатильности вместе с отрицательной неопределенностью, влияющей на возможности измерения.

Методы стоимости под риском начали применяться в финансовых учреждениях и крупных компаниях. В 1994 году концепция ценности в отношении риска была применена в J. P. Morgan.

Эта концепция получила широкое распространение, и такие компании, как «Хероx», «Enron», «General Motors» и другие, создали свои собственные методологии (Berkowitz, 2002) [2]. Математически эта методология была определена Duffie, D., Pan, J (1997) [3].

$$P(\text{VaR} \geq x) = \alpha$$

Эта методология является сравнительно новой, но широко принятой в мире. Хотя есть некоторые теоретические исследования о недостатке VaR из-за его недостаточной аддитивности и выпуклости (Cheng, S., Liu, Y., & Wang, S. 2004) [4], но до сих пор нет лучшей меры для количественной оценки риска (Orhan & Köksal, 2012) [5]

Основными компонентами при вычислении рисковой стоимости являются длина временного интервала, в продолжение которого измеряется VaR, и доверительный уровень, на котором измеряется рисковая стоимость. Например, если временной период составляет один день, а доверительный уровень равен 99%, то дневные потери, более крупные, чем VaR, могут случиться не чаще 1%.

Методология стоимости под риском позволяет применять общие метрики оценки риска для финансовых активов с использованием программного обеспечения для управления рисками. Результаты, полученные с использованием этой методологии, вполне понятны, однако их может быть сложно рассчитать. Стоимость под риском - это самый современный метод, используемый в различных финансовых институтах.

В Базельском комитете банковского надзора, Федеральной резервной системе США и Фондовом комитете США в 1995 году в Директиве о требованиях к капиталу Европейского союза в 1996 году было предложено использовать метод оценки стоимости под риском в качестве одного из методов управления рыночным риском.

Концепция стоимости под риском (VaR) основана на статистических методах и используется для определения возможных потерь для торговой позиции или портфеля, на которые влияют рыночный курс и колебания цен, с использованием определенного доверительного интервала (обычно от 95 до 99 процентов) в течение определенного периода. (Bessis, 1998) [6].

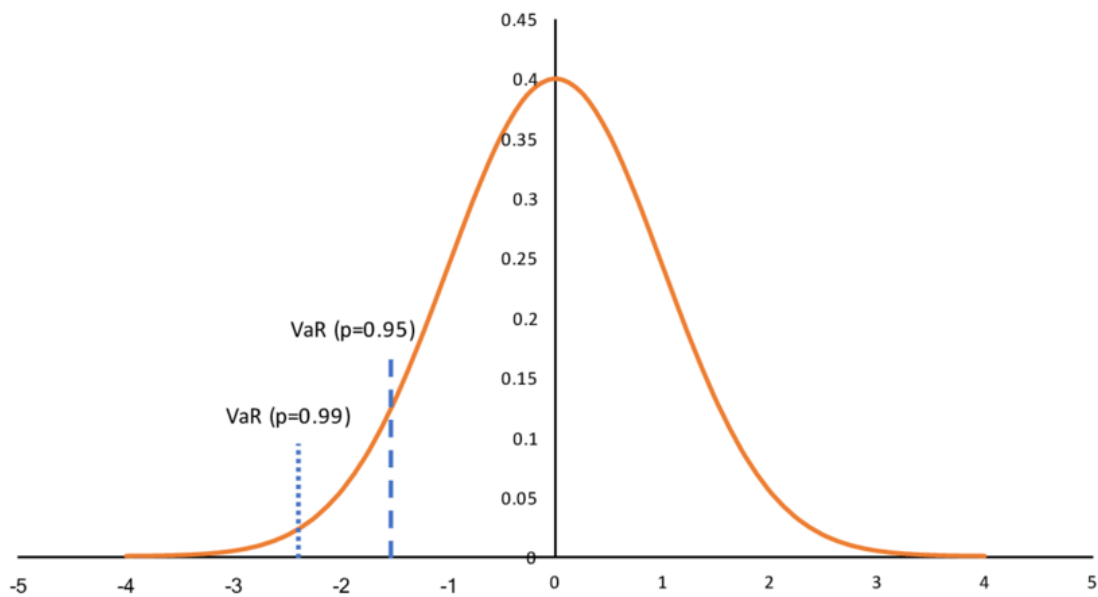


Рисунок 2. Value-at-Risk

В 1996 году была опубликована работа [7], описывающая идею VaR, а также подходы к его измерению. В ней рассматриваются два основных подхода к измерению VaR, которые и сегодня являются наиболее распространенными: параметрический (вариационно-корреляционный метод) и непараметрический (историческая симуляция и метод Монте-Карло).

Преимущества VaR-методов по Neffernan (2005) [8], Kudinska (2003) [9] и др.:

1. Легко понять.
2. Легко применять расчет различной сложности.
3. Результаты легко сравниваются, позволяя измерить эффективность деятельности.

Недостатки методов VaR по Miller, С. Е. (2001) [10], Neffernan (2005) [8] и другим:

1. Методология расчета может быть очень сложной и трудной для понимания по сравнению с полученными результатами.
2. Обширные блоки данных необходимые для расчетов;

3. Методы основаны на предположении, что доходность распределяется в соответствии с нормальной функцией распределения, однако это не является правдой во всех случаях.

4. Методы основаны на предположении, что будущее может быть отражено в исторических данных для прогнозирования, но это не всегда правда.

5. Оценка риска не работает, если происходят неожиданные колебания цен, это означает, что методы используются в «нормальных» условиях.

В общем, VaR - это оценка хвостов эмпирического распределения. Многие приложения предполагают, что возврат активов обычно распределяется, хотя широко документировано, что они демонстрируют асимметрию и избыточный эксцесс, что приводит к недооценке или переоценке истинного VaR. Venkataraman (1996) [11] и Zangari (1996) [12] предложили использовать смесь нормальных распределений, которая откармливается хвостом и способна легче фиксировать экстремальные события по сравнению с «классическими» подходами.

Hendricks (1996) [13] и Vlaar (2000) [14] подтвердили, что увеличение размера выборки приводит к более точным оценкам VaR. Норре, R. (1998) [15] также рассмотрел вопрос о размере выборки и утверждал, что использование меньшего размера выборки приведет к более точным оценкам VaR, чем более длинные. Frey, R. and Michaud, P. (1997) [16] в своем исследовании поддержали использование коротких размеров выборки для того, чтобы фиксировать структурные изменения с течением времени из-за изменений в торговом поведении. Таким образом, выбор подходящего объема выборки, а также адекватной модели для прогнозирования волатильности следует считать не решенным.

В научной литературе широко признается, что цены на финансовые активы трудно, если не невозможно, предсказать, во многом из-за их, казалось

бы, случайного характера. Эмпирические исследования пришли к выводу, что финансовые инструменты имеют гетероскедастичность в дисперсии. Однако с тех пор, как в 1982 году Engle [17] внес основной вклад в систему авторегрессии условной гетероскедастичности, был достигнут значительный прогресс в моделировании динамики условной волатильности. Такое моделирование вызвало значительный интерес среди ученых и практиков финансового рынка, так как волатильность является основной мерой риска, связанного с владением финансовым активом. Точное прогнозирование волатильности играет важную роль в принятии обоснованных решений по управлению рисками и имеет значение для многих областей финансовой экономики.

Несмотря на то, что волатильность финансовых активов ненаблюдаема и по своей природе изменяется во времени, она хорошо документирована для отображения последовательной зависимости [кластеризация волатильности], что означает, что она обладает предсказуемыми свойствами. Преобладающая методология моделирования и прогнозирования волатильности активов вытекает из концепции ARCH Engle (1982) [17] и множества вариантов, которые с тех пор последовали. В частности, обобщенная ARCH (GARCH) Bollerslev T. (1986) [18] стала стандартной практикой во многих финансовых учреждениях. Формально обозначается как GARCH (p, q), где q - это ARCH-термин, который относится к числу авторегрессионных задержек, используемых моделью, а p относится к GARCH-термину, то есть к числу запаздывающих скользящих средних, которые будет включать модель. Семейство моделей GARCH отражает изменяющуюся волатильность во времени, поскольку они зависят от гетероскедастичности (Orhan and Köksal, 2011) [19].

Модель авторегрессии с условной гетероскедастичностью (ARCH), разработанная Engle (1982) [17], не предназначалась непосредственно для финансовых рынков, но вскоре было осознано, что она имеет потенциал в этой

области. Модели ARCH рассчитывают дисперсию в предположении гетероскедастичности в невязках в отличие от большинства других моделей, которые требуют гомоскедастичности для получения несмещенных оценок. Модель ARCH была новаторской и оказалась настолько полезной, что Энгл получил Нобелевскую премию в 2003 году. Модели ARCH используют тот факт, что кластеризация волатильности приводит к автокорреляции, которая может быть смоделирована путем включения прошлых значений в качестве весов для прогноза оценки. Тем самым предполагается, что условная дисперсия зависит от дисперсии предыдущих дней.

Весы чаще всего рассчитываются с помощью оценки максимального правдоподобия, которая даст наиболее точные оценки для данной выборки. Но поскольку волатильность не является переменной, наблюдаемой непосредственно, модели ARCH используют квадрат прошлых доходностей в качестве входных данных, и поскольку дневные доходности не содержат информации о волатильности в течение дня, существует предел того, насколько точные оценки может дать модель. Тем не менее, он превзошел скользящую модель стандартного отклонения, которая использовалась регулярно до того, как Engle обнаружил приложение ARCH для финансовых данных. С момента первоначального введения ARCH и GARCH появилось более 300 новых их разновидностей (Bollerslev, 2010) [20].

Стандартное отклонение и распределение, а также параметры и критическое значение распределения являются ключевыми составляющими VaR. Модели GARCH зарекомендовали себя как лучшие методы для получения стандартного отклонения, и известно, что оценки GARCH чувствительны к величине стандартного отклонения и используемому распределению (Nwogugu, 2006) [21]. Несмотря на то, что исследователи использовали традиционное нормальное распределение моделей GARCH в течение длительного времени из-за легкости их практического использования, доказано, что высокочастотные финансовые данные имеют толстые хвосты, а

t-распределение Стьюдента предназначено для того, чтобы лучше представлять эти серии. Но тем не менее, литература о более подходящем распределении показывает смешанные выводы.

Другое эмпирическое наблюдение заключается в том, что дисперсия обычно выше во времена отрицательных шоков. Модель EGARCH (Exponential GARCH) (Nelson 1991) [22] задает условную дисперсию в логарифмической форме, что означает, что нет необходимости вводить ограничение оценки, чтобы избежать отрицательной дисперсии. Модель EGARCH ( $p, q$ ) фиксирует асимметричный эффект на дисперсию из позитивных и негативных новостей. При соответствующем кондиционировании параметров эта спецификация отражает факт, что отрицательный шок приводит к более высокой условной дисперсии в последующий период, чем положительный шок.

Другими моделями, которые допускают несимметричные зависимости, являются TGARCH (пороговый GARCH), который похож на GJRGARCH (Glosten, L. R., Jagannathan, R., & Runkle, D. 1993) [23], и различные другие нелинейные GARCH, рассмотренные в Philip Franses и Dick van. Dijk. (2000) [24].

Обе модели ARCH и GARCH были реализованы с помощью структуры переключения режимов Джеймса Гамильтона (1989), в которой устойчивость волатильности может принимать различные значения в зависимости от того, находится ли она в режимах высокой или низкой волатильности. Наиболее обобщенной формой модели переключения режимов является модель RS-GARCH (1,1), используемая в Stephen Gray (1996) [25] и Franc Klaassen (2002) [26].

Как упоминалось ранее, устойчивость волатильности - это особенность, которую многие модели временных рядов предназначены для захвата. Модель GARCH имеет экспоненциальный спад в автокорреляции условных дисперсий. Тем не менее, было отмечено, что абсолютная доходность

финансовых активов, как правило, имеют последовательные корреляции, которые медленно затухают, аналогично таковым в процессе  $I(d)$ . Кажется, что шок в ряду волатильности имеет очень «долгую память» и влияет на будущую волатильность в течение длительного горизонта времени. Интегрированная модель GARCH (IGARCH) Bollerslev, T. (1986) [18] улавливает этот эффект, но шок в этой модели влияет на будущую волатильность на бесконечном горизонте, и безусловной дисперсии для этой модели не существует. Это приводит к появлению FIGARCH (p, d, q) в Richard Baillie, Bollerslev и Hans Mikkelsen (1996) [27] и FIEGARCH (p, d, q) в Bollerslev и Mikkelsen (1996) [28] с  $d \geq 0$ . При условии, что  $d < 0,5$ , дробная интегрированная модель является ковариантной стационарной. Однако, как указывают Soosung Hwang и Satchell (1998) [29], положительный процесс  $I(d)$  имеет положительный дрейфовый член или временную тенденцию в уровне волатильности, которая не наблюдается на практике. Это главная слабость частично интегрированной модели, которая должна быть принята в качестве теоретически обоснованной модели волатильности.

Важно отметить, что существует много процессов генерации данных, кроме процесса  $I(d)$ , которые также имеют длинную память в ковариациях. Примером может служить стационарная серия с короткой памятью со случайными перерывами в среднем у Granger, Namwon (2000) [30]. Diebold и Atsushi Inoue (2001) [31] показывают, что стохастическое переключение режимов можно легко спутать с длинной памятью, если происходит только небольшое переключение режимов. Gilles Zumbach (2002) [32], с другой стороны, захватывает длинную память, используя IGARCH (2) (то есть сумму двух IGARCH) и модель LM, которая объединяет высокочастотные возведения в квадрат с набором весовых коэффициентов.



# Методы оценки риска

## Дельта-нормальный метод

Для вычисления VaR чаще всего используют дельта-нормальный метод. Его широкое использование связано с тем, что он прост в использовании, а точность расчета оказывается на высоком уровне.

Дельта-нормальный метод базируется на предположении о нормальном распределении темпов роста курса валют.

Логарифм темпа роста курса  $i$ -й валюты в момент  $t$  рассчитывается следующим образом:

$$R_t = \ln \left( \frac{r_t}{r_{t-1}} \right), i \in \overline{1, n},$$
$$r_t \sim N(\mu, \sigma^2).$$

$r_t$  — курс валюты в момент  $t$ ;

$r_{t-1}$  — курс валюты в предыдущий момент времени.

$R_t$  показывает интенсивность изменения валютного курса и является случайной величиной, распределение которой предполагается близким к нормальному.

Волатильность (изменчивость) часто принимается в качестве одного из измерителей риска, данный показатель ещё называют среднеквадратическим отклонением, который измеряется в единицах измерения оцениваемого показателя:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2}$$

где  $r_i$  — курс валюты, где  $i \in \overline{1, n}$ ;

$\bar{r}$  — средний курс валюты за  $n$  периодов.

Формула расчета VaR:

$$VaR = P_t(e^{-\alpha\sigma_t} - 1)$$

Величину  $e^{-\alpha\sigma_t}$  аппроксимируют до  $-\alpha\sigma$  на основании разложения исходной функции в ряд Тейлора и берут абсолютное значение.

$$VaR = P_t(e^{-\alpha\sigma_t} - 1) \approx P_t\alpha\sigma_t$$

Справедливо для малых значений  $\sigma$ .

- $\alpha$  – квантиль нормального распределения для выбранного доверительного уровня. Квантиль показывает положение искомого значения случайной величины относительно среднего, выраженное в количестве стандартных отклонений курса. При 99% вероятности отклонения, квантиль нормального распределения равен 2,326, при 95% – 1,645;

- $P_t$  – текущая стоимость открытой позиции,

- $\sigma_t$  - волатильность курса валюты.

Величина VaR с временным горизонтом  $T$  дней может быть рассчитана следующим образом:

$$VaR = P_t\alpha\sigma_t\sqrt{T}$$

## **Метод исторического моделирования**

Метод исторического моделирования для получения характеристики VaR достаточно прост и не требует допущений о распределениях в отличие

от дельно-нормального метода. Однако для получения точных результатов, необходимы исторические данные достаточно больших объемов.

Шаги подсчета VaR:

1. Собрать исторические данные о темпе изменения курса за определенный период;
2. Отсортировать данные по возрастанию;
3. Выбрать порог, с которым мы хотим делать прогноз и “отрезать” наихудшее значение зная порог;

Главным преимуществом метода является то, что он полностью непараметрический (не имеем дело с параметрами модели) и не зависит от допущений о нормальном распределении темпов изменения курса и их независимости от времени.

Непараметрический характер метода устраняет необходимость оценки таких параметров, как волатильность и корреляция. Они уже отражены в наборе исторических данных. Историческое моделирование также не создает проблем совмещения с "тяжелыми хвостами" распределения, так как исторические данные уже отражают фактические синхронные изменения значений для всех факторов риска.

Главным недостатком метода является полная зависимость от ретроспективных данных и от их особенностей. Мы допускаем, что прошлое, которое охватывают ретроспективный набор данных, – это надежное представление будущего. Это предполагает, что события, соответствующие ретроспективным данным, снова произойдут. Однако некоторые события исторического периода могут не повторятся в будущем. Исходя из этого, важной задачей является правильный подбор и анализ исторических данных.

## **Авторегрессионные модели условной гетероскедастичности**

**Гетероскедастичность** — неоднородность наблюдений, выражающуюся в непостоянной дисперсии случайной ошибки модели регрессии.

Рассмотрим ряд темпов изменения курса  $R_t = \ln\left(\frac{r_t}{r_{t-1}}\right), i \in \overline{1, n}$ . Построим диаграмму.

Заметим, что изображение процесса напоминает белый шум с некоторыми периодами всплесков. Это явление отражает такое понятие как **кластеризация волатильности**. Оно показывает, что финансовый показатель ведет себя либо непостоянно, либо относительно спокойно. То есть за промежутком времени с низкой волатильностью следует промежуток с низкой волатильностью, а за промежутком с высокой волатильностью, следует - идентичный. Например, если курс вчера сильно колебался, то и сегодня, вероятнее всего, будет колебаться так же сильно, и наоборот.



Модель **ARCH**, то есть модель с авторегрессионной условной гетероскедастичностью предназначена для моделирования кластеризации волатильности. Она представляет условную дисперсию как линейную функцию квадратов прошлых возмущений.

Простейшая модель выглядит следующим образом:

$$\sigma_t^2 = \omega + \gamma_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

- $\omega$  - взвешенная долгосрочная дисперсия - базовый уровень волатильности;
- $\varepsilon_{t-1}^2$  - случайные возмущения в прошлом

Процесс ARCH  $q$ -го порядка, задается следующими соотношениями:

$$\varepsilon_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \gamma_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \gamma_q \varepsilon_{t-q}^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \gamma_i \varepsilon_{t-i}^2$$

Где  $\Omega_{t-1} = (\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots)$  – предыстория процесса  $\{\varepsilon_t\}$ .

$\sigma_t^2$  - условная дисперсия  $\varepsilon_t$ , то есть  $\sigma_t^2 = \text{var}(\varepsilon_t | \Omega_{t-1}) =$

$E(\varepsilon_t | \Omega_{t-1})$ .  $\sigma_t^2$  также называется волатильностью процесса. Для сохранения положительности условная дисперсии, необходимо выполнение ограничений на коэффициенты  $\omega > 0, \gamma_1, \dots, \gamma_q \geq 0$ .

Запишем модель иначе:

$$\xi_t \sim \text{NID}(0,1)$$

$$\varepsilon_t = \xi_t \sigma_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \gamma_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \gamma_q \varepsilon_{t-q}^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \gamma_i \varepsilon_{t-i}^2$$

NID означает, что  $\xi_t$  нормально распределены и независимы. Такая запись удобна тем, что нормированный случайный процесс  $\xi_t$  не зависит от прошлого.

Смысл модели ARCH состоит в инерционности условной дисперсии (кластеризацией волатильности). То есть, если абсолютная величина  $\varepsilon_t$  оказывается большой, то это приводит к увеличению условной дисперсии в следующие периоды. Также, при высокой условной дисперсии более вероятно появление больших значений  $\varepsilon_t$ . Наоборот, если значения  $\varepsilon_t$  в течение какого-то времени близки к 0, то это влечет за собой понижение условной дисперсии в будущем вплоть до уровня  $\omega$ . Также, при маленькой условной дисперсии более вероятно появление низких значений  $\varepsilon_t$ .

Рассмотрим усовершенствованную модель авторегрессионной условной гетероскедастичности - модель GARCH (обобщенная модель). Её преимуществом является получение более длинных кластеров при меньшем числе параметров. Она усовершенствуется путем предположения о том, что условная дисперсия зависит также от её прошлых значений, а не только от квадратов прошлых значений временного ряда, как это было в ARCH.

Выведем модель GARCH, используя в модели ARCH бесконечный геометрический лаг:

$$\sigma_t^2 = \omega + \gamma \sum_{j=1}^{\infty} \delta^{j-1} \varepsilon_{t-j}^2 = \omega + \frac{\gamma}{1 - \delta L} \varepsilon_{t-1}^2$$

С помощью преобразования Койка, получаем:

$$\sigma_t^2 = (1 - \delta)\omega + \delta\sigma_{t-1}^2 \rightarrow +\gamma\varepsilon_{t-1}^2$$

Поменяв обозначения, получим модель **GARCH(1, 1)**:

$$\sigma_t^2 = \omega + \gamma \varepsilon_{t-1}^2 + \delta \sigma_{t-1}^2$$

Условная дисперсия представлена как функция от:

- константы  $\omega$  (взвешенная долгосрочная дисперсия - базовый уровень волатильности);
- $\varepsilon_{t-1}^2$  случайные возмущения в прошлом [ARCH-компонент];
- $\sigma_{t-1}^2$  значение условной дисперсии в прошлом [GARCH-компонент]

Параметры  $\gamma$  и  $\delta$ :

- $\gamma$ -коэффициент - отвечает за реакцию текущего значения волатильности на предыдущий шок (под шоком имеется ввиду сильное отклонение от нормы);
- $\delta$ -коэффициент - отвечает за сохранение эффекта высокой/низкой волатильности, т.е. насколько продолжительными будут те или иные её периоды.

Модель **GARCH(p, q)** обобщает эту формулу:

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \omega + \delta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \delta_p \sigma_{t-p}^2 + \gamma_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \gamma_q \varepsilon_{t-q}^2 \\ &= \omega + \sum_{i=1}^p \delta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \gamma_j \varepsilon_{t-j}^2. \end{aligned}$$

Вводятся следующие ограничения  $\omega > 0, \delta_1, \dots, \delta_p \geq 0$  и  $\gamma_1, \dots, \gamma_p \geq 0$

Как и в модели ARCH  $\sigma_t^2$  является условной дисперсией процесса:

$$\varepsilon_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

Его безусловная дисперсия имеет вид:

$$\sigma^2 = \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^p \delta_j - \sum_{j=1}^q \gamma_j}$$

С точки зрения безусловной дисперсии GARCH-процесс гомоскедастичен.

Для того чтобы дисперсия была конечной, необходимо выполнение:

$$\sum_{j=1}^p \delta_j + \sum_{j=1}^q \gamma_j < 1.$$

Для модели GARCH(1, 1) требуется:

$$\delta_j + \gamma_j < 1.$$

Стандартным методом для нахождения параметров модели GARCH является метод максимального правдоподобия (ММП). Функция правдоподобия для ряда  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_T$ , который подчиняется GARCH-процессу, находится как произведение плотностей условных нормальных распределений:

$$L = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} e^{\frac{-\varepsilon_t^2}{2\sigma_t^2}}$$

Для нахождения оценки ММП для GARCH необходимо максимизировать функцию правдоподобия по неизвестным параметрам.



Основным преимуществом GARCH-моделей является её свойство быстрого реагирования на различные изменения и такого же быстрого восстановления после сильных колебаний. Существующих различных модификаций GARCH-моделей насчитывается уже более 300. Рассмотрим некоторые из них.

Например, **EGARCH(q, p)** (Экспоненциальная авторегрессионная модель условной гетероскедастичности):

$$\log(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{i=1}^q |\alpha_i \varepsilon_{t-i} + \gamma_i (|\varepsilon_{t-i}| - E|\varepsilon_{t-i}|)| + \sum_{j=1}^p \beta_j \log(\sigma_{t-j}^2)$$

$$\ln \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i g(z_{t-i}) + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2,$$

$$g(z_t) = \delta_1 z_t + \delta_2 \left( |z_t| - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right),$$

$$z_t \sim \text{iid } N(0,1)$$

Задаёт условную дисперсию в логарифмической форме, что означает, что нет необходимости вводить ограничение оценки для положительности дисперсии. Модель EGARCH (p, q) фиксирует асимметричный эффект на дисперсию из позитивных и негативных шоков (сильных отклонений). Также модель отражает факт того, что отрицательный шок приводит к более высокой условной дисперсии в последующий период, чем положительный шок.

Отметим, что кроме EGARCH-модели, существуют другие модели, которые при сохранении свойств GARCH фиксируют ассиметричную зависимость. Примером такой модели является модель TGARCH

**TGARCH:**

$$\sigma_t = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i [(1 - \gamma_i) \varepsilon_{t-i}^+ - (1 + \gamma_i) \varepsilon_{t-i}^-] + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}$$

Фактически в модели предполагаются разные коэффициенты для отрицательных и положительных прошлых значений ряда. Используют условные стандартные отклонения.

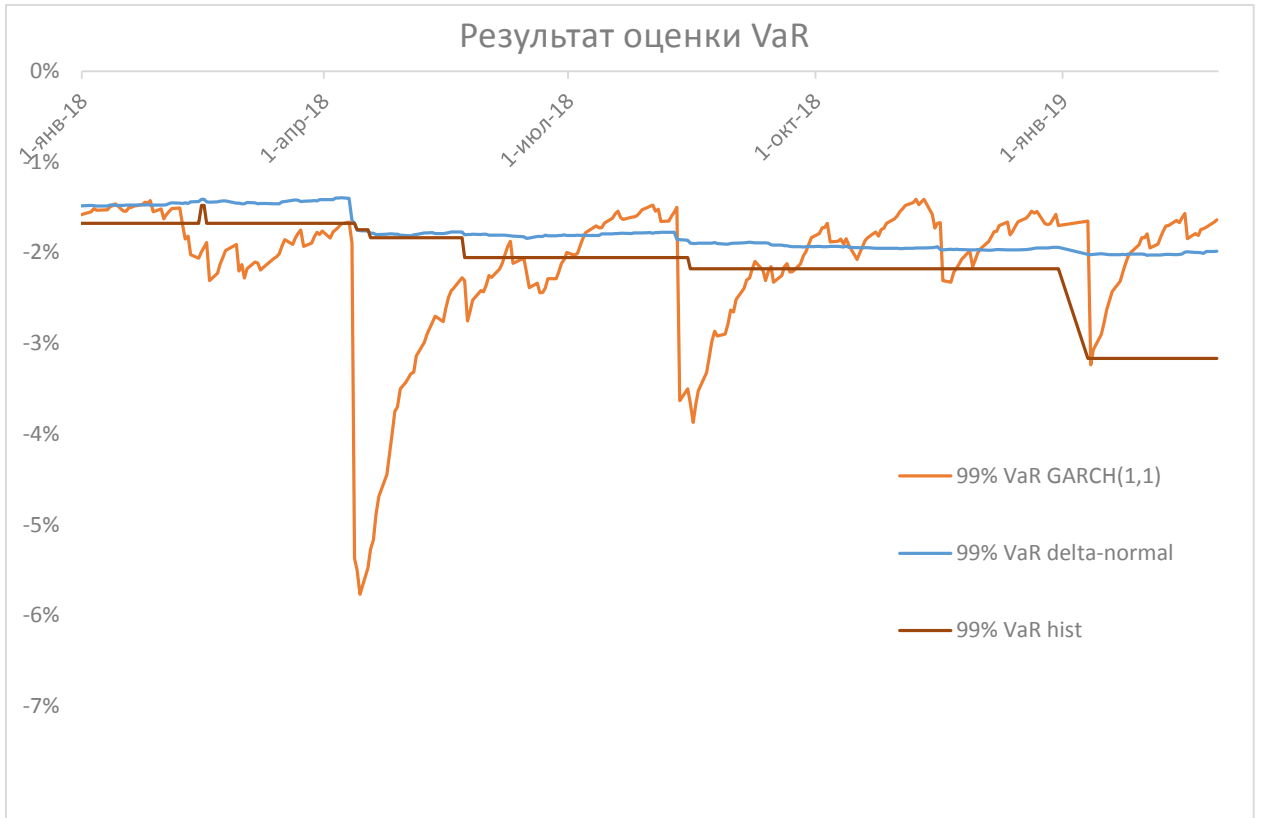
В статье Hansen, Lunde (2004) [33] был получен вывод о том, что модель GARCH(1,1) не сильно уступает различным лучшим модификациям авторегрессионных моделей.

Представленная здесь оценка VaR будет строится на стандартной модели GARCH(1,1).

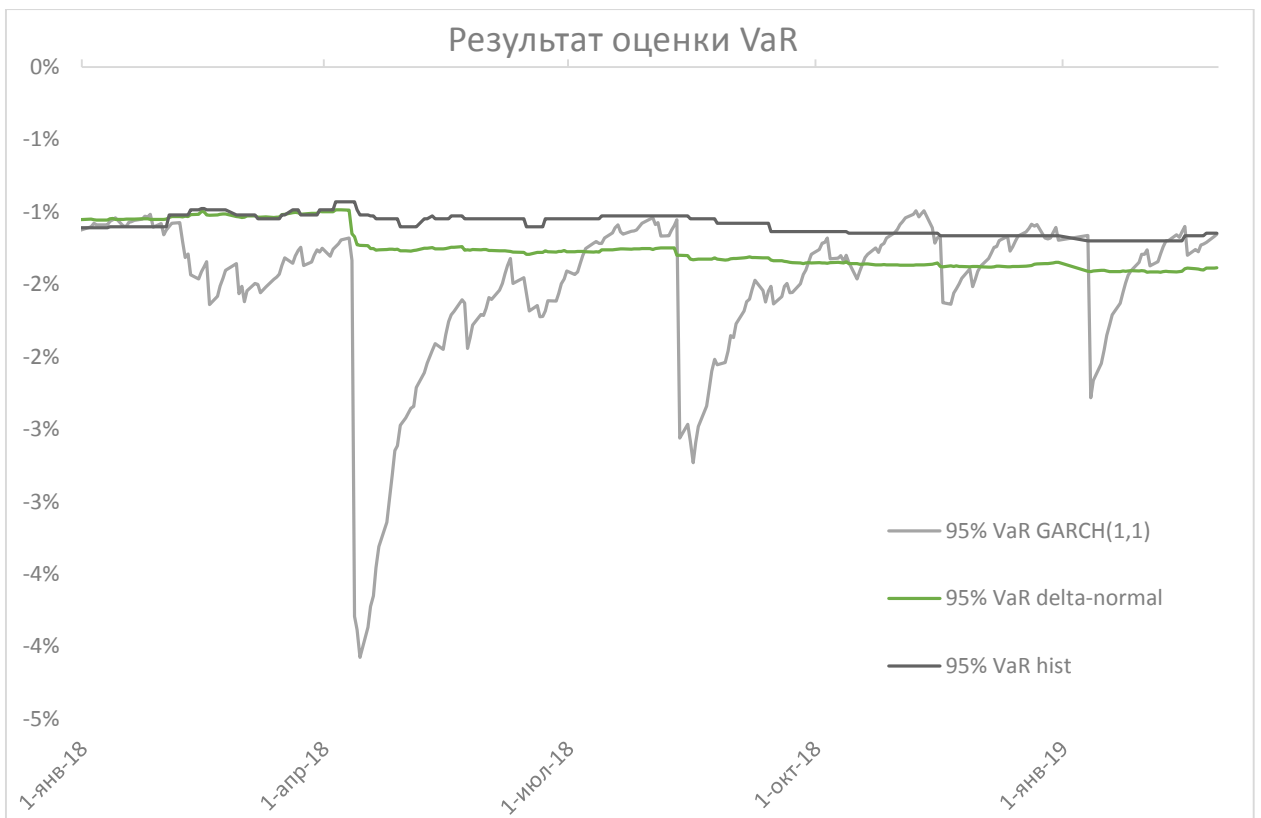
Суть расчета VaR на базе модели GARCH(1,1) заключается в том что, используемый при расчете характеристики Value-at-Risk стандартный показатель риска, выраженный выборочным стандартным отклонением, заменяется на условное стандартное отклонение рассчитываемое в рамках GARCH-модели.

## Результаты

Для уровня значимости 99%:



Для уровня значимости 95%:



На основе графиков можно сделать несколько выводов. Вычисление VaR на базе GARCH-модели даёт нам более адекватную оценку валютного риска, по сравнению с его традиционными способами расчета: стандартным дельта-нормальным методом и методом исторического моделирования.

Полученные значения VaR моделью GARCH(1,1) в периоды высокой волатильности заметно превышают по модулю VaR-значения, рассчитанные обычными способами (дельта-нормальный и метод исторического моделирования). В данном случае, можно говорить о том, что GARCH-модель демонстрирует куда более реальную картину возможных потенциальных убытков.

В тоже время в периоды низкой волатильности они напротив имеют значения значительно меньшие по модулю, чем рассчитанные традиционным способом. А это, в свою очередь, позволяет не закладывать под возможные убытки суммы существенно большие, чем могут быть в действительности.

## **Расчет доходности хеджирования**

На основе полученной оценки валютного риска на примере реальной компании (в которой проходила практика) был произведен расчет возможной прибыли от хеджирования за период с 01.01.2018 по 01.03.2019.

Для проведения хеджирования в качестве производного финансового инструмента был выбран фьючерсный контракт. Он обладает следующими преимуществами:

- Высокая степень ликвидности так как он свободно обращается на бирже. То есть при возникшей необходимости, хеджируемую сумму можно получить обратно в компанию.
- Плечо. При покупке фьючерсного контракта не нужно вносить всю сумму, достаточно внести гарантийное обеспечение.

Существует два вида фьючерсных контрактов – поставочный и расчетный.

- Поставочный фьючерс предполагает, что на дату экспирации договора покупатель обязан приобрести, а продавец продать установленное количество базового актива.
- Расчетный фьючерс предполагает, что между сторонами производятся только денежные расчёты равные разнице между ценой контракта и фактической ценой актива на дату экспирации контракта. Обычно используется для хеджирования рисков или в спекулятивных целях.

Будем использовать расчетный фьючерсный контракт.

У фьючерсного договора указываются следующие параметры:

- Наименование контракта
- Условное наименование (сокращение), к примеру, в случае фьючерса на валютную пару доллар-рубли – Si-6.19 (дата экспирации фьючерса)
- Тип контракта (расчетный или поставочный)
- Размер контракта (количество базового актива для фьючерса доллар-рубли стандартизировано и составляет 1000 долларов за лот).
- Дата исполнения (экспирации) – момент окончания обращения на биржевом рынке стандартного срочного биржевого контракта. Датой экспирации фьючерсного контракта считается последняя дата, когда этим контрактом можно торговать.

**Вариационная маржа (ВМ)** – это сумма, отражающая финансовый результат по итогам торгов срочного рынка. То есть это и есть ежедневная прибыль или убыток на фьючерсном счете.

Если в результате торгов была получена прибыль, то сумма вариационной маржи будет положительной. Если получен убыток, то маржа будет отрицательной и по итогам торгов спишется со счета. Поэтому на

торговом счете должна находиться сумма обеспечивающая отрицательные значения вариационной маржи. В случае, если по итогу торгов получен убыток, превышающий значение суммы, обеспечивающей вариационную маржу, хеджируемая позиция закрывается.

Величина хеджируемой позиции на каждую дату была получена путем оценки риска и дальнейшего определения порога толерантности к рынку на основании анализа финансовой отчетности.

Вариационная маржа рассчитывается по следующим соотношениям:

$$M_0 = \frac{(R_{Pt} - P_0)W}{R}$$
$$M_t = \frac{(R_{Pt} - R_{Pt-1})W}{R}$$

$M_0$  – ВМ по договору, по которому расчет ВМ ранее не осуществлялся;

$M_t$  – ВМ по договору, по которому расчет ВМ осуществлялся ранее;

$P_0$  – цена заключения договора;

$R_{Pt}$  – текущая расчетная цена договора;

$R_{Pt-1}$  – предыдущая расчетная цена договора (или начальная);

$W$  – стоимость минимального шага цены = 1;

$R$  – минимальный шаг цены = 1.

**Гарантийное обеспечение (ГО) или депозитная маржа** — это возвращаемый страховой взнос, взимаемый биржей и обеспечивающий открытую позицию по фьючерсному договору. Как правило, составляет 2—20 % (в зависимости от срока экспирации и волатильности на рынке) от текущей рыночной стоимости базового актива.

Фьючерсная цена — это текущая рыночная цена фьючерсного договора, с заданным сроком окончания действия.

Разница между текущей ценой базового актива и соответствующей фьючерсной ценой называется спред фьючерсного контракта. Есть два состояния фьючерсного контракта по отношению к спот – курсу:

- Когда цена фьючерса выше цены базового актива, такое состояние называется контанго. В этом случае спред положителен, не ожидается падения цен базового актива.
- Когда фьючерс торгуется ниже цены базового актива, такое состояние называют бэквордацией. В этом состоянии базис отрицательный, ожидается падение цен базового актива.

Данные по хеджируемой позиции и плановые даты хеджирования (Столбец «Хеджируемая позиция на момент времени» показывает сумму, которая захеджирована на отчетную дату. Столбцы «+» и «-» отражают необходимую к хеджированию или снятию с хеджирования сумму соответственно):

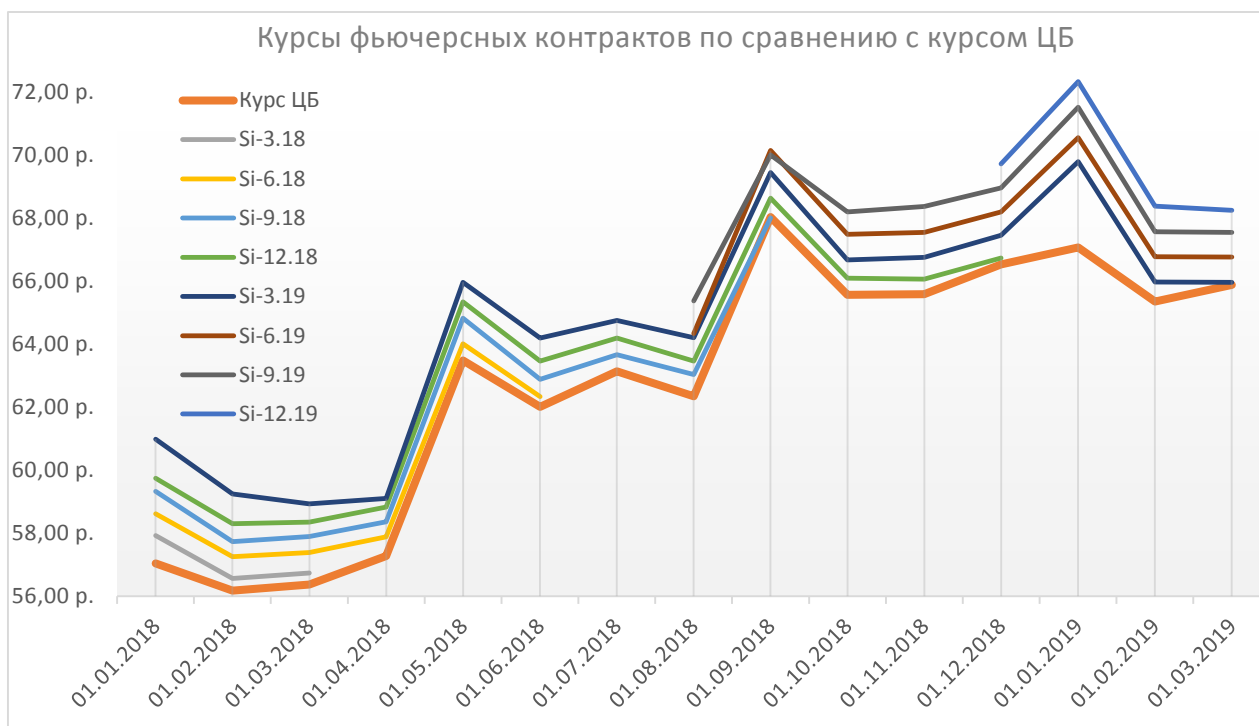
Отчетная дата	Хеджируемая позиция на момент времени	+	-	Курс ЦБ	Кол-во фьючерсных контрактов
01.01.2018	\$ 12 203 000,00	\$ 12 203 000,00		57,05 р.	12203
01.02.2018	\$ 18 322 000,00	\$ 6 119 000,00		56,18 р.	6119
01.03.2018	\$ 17 578 000,00		-\$ 744 000,00	56,37 р.	744
01.04.2018	\$ 17 540 000,00		-\$ 38 000,00	57,29 р.	38
01.05.2018	\$ 13 270 000,00		-\$ 4 270 000,00	63,49 р.	4270
01.06.2018	\$ 11 358 000,00		-\$ 1 912 000,00	62,02 р.	1912
01.07.2018	\$ 5 093 000,00		-\$ 6 265 000,00	63,14 р.	6265
01.08.2018	\$ 8 768 000,00	\$ 3 675 000,00		62,35 р.	3675
01.09.2018	\$ 10 321 000,00	\$ 1 553 000,00		68,04 р.	1553
01.10.2018	\$ 9 568 000,00		-\$ 753 000,00	65,57 р.	753
01.11.2018	\$ 5 773 000,00		-\$ 3 795 000,00	65,60 р.	3795
01.12.2018	\$ 5 940 000,00	\$ 167 000,00		66,53 р.	167
01.01.2019	\$ 7 812 000,00	\$ 1 872 000,00		67,08 р.	1872
01.02.2019	\$ 9 180 000,00	\$ 1 368 000,00		65,36 р.	1368
01.03.2019	\$ 9 722 000,00	\$ 542 000,00		65,89 р.	542

Результат от применения стратегии хеджирования за 15 месяцев в зависимости от выбора фьючерсных контрактов с различным сроком исполнения. Также стоит отметить, что при хеджировании фьючерсными контрактами со сроком исполнения от 9 до 12 месяцев возможен недостаток открытых позиций на бирже для больших сумм хеджирования.

	Хеджирование фьючерсными контрактами со сроком исполнения от 1 до 3 месяцев	Хеджирование фьючерсными контрактами со сроком исполнения от 3 до 6 месяцев
Общая прибыль от хеджирования	79 417 753,10 р.	86 473 535,90 р.
Затраты на хеджирование (комиссии биржи и брокера, % по кредитам на размер ГО+ВМ)	20 848 620,35 р.	20 723 050,81 р.
Налог на прибыль	15 883 550,62 р.	17 294 707,18 р.
<b>ИТОГО:</b>	<b>42 685 582,13 р.</b>	<b>48 455 777,91 р.</b>
	Хеджирование фьючерсными контрактами со сроком исполнения от 6 до 9 месяцев	Хеджирование фьючерсными контрактами со сроком исполнения от 9 до 12 месяцев
Общая прибыль от хеджирования	89 778 460,10 р.	95 367 950,50 р.
Затраты на хеджирование (комиссии биржи и брокера, % по кредитам на размер ГО+ВМ)	-20 603 328,22 р.	-19 880 936,89 р.
Налог на прибыль	-17 955 692,02 р.	-19 073 590,10 р.
<b>ИТОГО:</b>	<b>51 219 439,86 р.</b>	<b>56 413 423,51 р.</b>

График отражающий фьючерсные курсы различных контрактов и курс ЦБ:



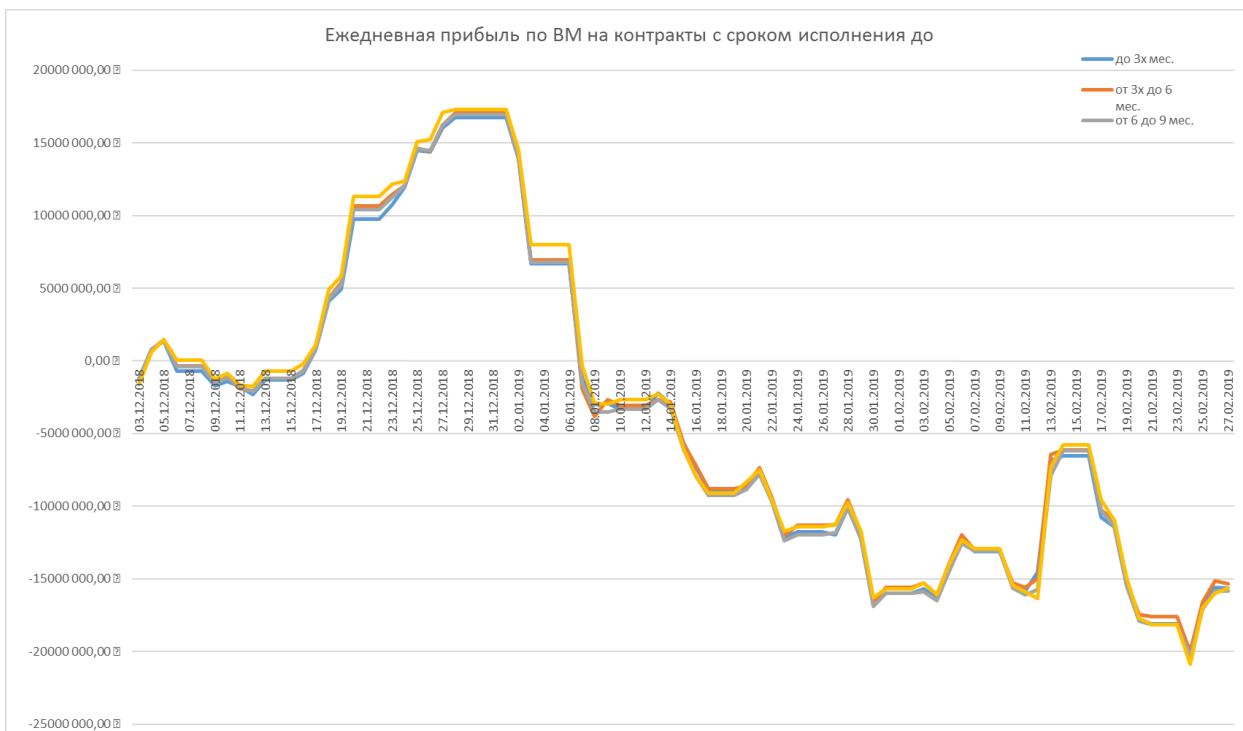


Расходная часть применения стратегии хеджирования с использованием фьючерсных контрактов:

Дата	ГО на момент времени	ГО+ВМ на момент времени	% ГО+ВМ	Комиссия брокера	Комиссия биржи
01.01.2018	48 848 389,35 p.	121 756 433,15 p.	1 420 491,72 p.	12 203,00 p.	11 227,84 p.
01.02.2018	72 751 865,11 p.	181 336 738,41 p.	2 115 595,28 p.	6 119,00 p.	5 494,23 p.
01.03.2018	69 842 835,53 p.	174 085 873,63 p.	2 031 001,86 p.	744,00 p.	668,64 p.
01.04.2018	69 693 051,80 p.	173 712 532,10 p.	2 026 646,21 p.	38,00 p.	34,43 p.
01.05.2018	50 998 500,75 p.	127 115 666,05 p.	1 483 016,10 p.	4 270,00 p.	4 296,96 p.
01.06.2018	42 867 355,56 p.	106 848 483,26 p.	1 246 565,64 p.	1 912,00 p.	1 868,95 p.
01.07.2018	15 919 084,56 p.	39 678 912,26 p.	462 920,64 p.	6 265,00 p.	6 194,08 p.
01.08.2018	31 762 678,41 p.	79 169 661,11 p.	923 646,05 p.	3 675,00 p.	3 641,66 p.
01.09.2018	39 047 705,12 p.	97 327 862,02 p.	1 135 491,72 p.	1 553,00 p.	1 674,47 p.
01.10.2018	35 712 894,02 p.	89 015 720,92 p.	1 038 516,74 p.	753,00 p.	766,51 p.
01.11.2018	18 913 605,47 p.	47 142 867,37 p.	550 000,12 p.	3 795,00 p.	3 861,33 p.
01.12.2018	26 454 925,08 p.	65 939 887,88 p.	769 298,69 p.	712,00 p.	764,55 p.
01.01.2019	35 527 971,81 p.	88 554 795,41 p.	1 033 139,28 p.	1 872,00 p.	2 085,45 p.
01.02.2019	41 795 959,03 p.	104 177 987,43 p.	1 215 409,85 p.	1 368,00 p.	1 440,70 p.

01.03.2019	44 318 910,49 р.	110 466 538,09 р.	1 288 776,28 р.	542,00 р.	579,90 р.
------------	------------------	-------------------	-----------------	-----------	-----------

Трехмесячный срез (01.12.2018 – 01.03.19) отражающий результат хеджирования в виде прибыли (убытка) с вариационной маржи на контрактах с различным сроком исполнения:



Сравнение ежемесячного результата хеджирования в виде прибыли (убытка) с вариационной маржи и необходимой величины гарантийного обеспечения для поддержания хеджируемой позиции для 12 месячных контрактов (наиболее прибыльных по результатам расчета).



Для контрактов со сроком исполнения от 9 до 12 месяцев (Самый прибыльный вид контракта по результатам расчета) был посчитан улучшенный результат в случае, когда прибыль с вариационной маржи покрывает размер гарантийного обеспечения, тем самым, с определенного момента, не требуется отвлечения средств (которые берутся под процент) на обеспечение гарантийного обеспечения и поддержание вариационной маржи. Тем самым мы уменьшаем расходную часть и в результате получаем следующую прибыль от хеджирования:

Для 12мес. Контрактов:	
Прибыль с хеджирования, в случае когда мы берем кредит(под 14%) для обеспечения суммы убытков с вариационной маржи и поддержания гарантийного обеспечения.	<b>56 413 423,51 р.</b>

<p>Прибыль с хеджирования, в случае когда мы прибыль с VM гасим затраты на ГО, при этом счет обеспечения VM пополняется только в момент необходимости, на необходимую сумму</p>	<p><b>71 016 570,04 р.</b></p>
---	--------------------------------

## **Заключение**

В данной работе была описана структура хеджирования валютных рисков, проведено исследование современных математических методов, позволяющих оценить валютный риск, а именно характеристику стоимость под риском (Value-at-Risk, VaR). Рассмотрены и реализованы следующие методы: дельта-нормальный, метод исторического моделирования и методы авторегрессии условной гетероскедастичности. По результатам оценки риска, на примере компании, в которой была пройдена научно-исследовательская практика, был произведен расчет доходности, возможных издержек со стратегии хеджирования с использованием фьючерсных контрактов с различными сроками исполнения за период с 01.01.2018 по 01.03.2019.

## **Список литературы**

1. Дмитриева М. А. Стратегия хеджирования процентного и валютного рисков в компаниях нефинансового сектора.
2. Berkowitz, J. How Accurate Are Value-at-Risk Models at Commercial Banks? // The Journal of Finance, Volume 57 Issue 3, p. 1093–1111, 2002
3. Duffie, D., Pan, J. An overview of value at risk. // The journal of derivatives, 1997, p 7–49.
4. Cheng, S., Liu, Y., & Wang, S. Progress in risk measurement. // Advanced Modelling and Optimization, 6(1), 1–20, 2004.

5. Orhan, M., & Köksal, B. A comparison of GARCH models for VaR estimation. // *Expert Systems with Applications*, 39, 3582–3592, 2012
6. Bessis, J. Risk management in banking. England. 1998, 430 p.
7. Linsmeier T. J., Pearson N. D. Risk management: An Introduction to Value at Risk, 1996.
8. Heffernan, S. Modern banking. // John Wiley & Sons Ltd. 2005, 496 p.
9. Kudinska, M. The usage of VaR methods in valuating market risks of a commercial bank, 2003
10. Miller, C. E. Pseudo Securities for Technical Analysts. *Technical Analysis of Stocks & Commodities*. 2001. Volume 17: June.
11. Venkataraman, S. Value at risk for a mixture of normals distributions: The use of quasi-Bayesian estimation techniques. // *Economic Perspective*, 1996
12. Zangari, P. An improved methodology for measuring VAR. // *RiskMetrics Monitor*, Reuters/JP Morgan, 1996.
13. Hendricks, D. Evaluation of value-at-risk models using historical data. // *Federal Reserve Bank of New York. Economic Policy Review* 2, 39-70, 1996
14. Vlaar, P. Value at Risk models for Dutch bond portfolios. // *Journal of Banking and Finance* 24, 131-154, 2000.
15. Hoppe, R. VAR and the Unreal World. *Risk* 11, 45-50, 1998.
16. Frey, R. and Michaud, P. The Effect of GARCH-type Volatilities on Prices and Payoff Distributions of Derivative Assets - a Simulation Study // Working Paper, ETH Zurich, 1997.
17. Engle, RF. Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation. // *Econometrica* 45: 987– 1007, 1982.
18. Bollerslev, T. Generalized autoregressive heteroskedasticity. // *Journal of Econometrics* 31: 307– 327, 1986
19. Orhan, M., & Köksal, B. A comparison of GARCH models for VaR estimation. // *Expert Systems with Applications*, 39, 3582–3592, 2012.
20. Bollerslev, T., 2010. Glossary to ARCH (GARCH)

21. Nwogugu, M. Further critique of GARCH/ARMA/VAR/EVT stochasticvolatility models and related approaches. // *Applied Mathematics and Computation*, 182, 1735–1748, 2006.
22. Nelson, D. Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach. // *Econometrica*, 59, 347-370, 1991.
23. Glosten, L. R., Jagannathan, R., & Runkle, D. On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. // *Journal of Finance*, 48, 1779–1801, 1993.
24. Franses and Van Dijk. *Non-Linear Time Series Models in Empirical Finance*, 2000
25. Stephen F. Gray. Modeling the conditional distribution of interest rates as a regime-switching process. // *Journal of Financial Economics*, vol. 42, issue 1, 27-62, 1996
26. Franc Klaassen. *Has the Euro Increased Trade?* // University of Amsterdam, 2002.
27. Richard Baillie, Bollerslev и Hans Mikkelsen. Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroscedasticity. // *Journal of Econometrics*, vol. 74, issue 1, 3-30, 1996.
28. Bollerslev, Mikkelsen. Modeling and pricing long memory in stock market volatility. // *Journal of Econometrics*, vol. 73, issue 1, 151-184, 1996.
29. Soosung Hwang, Satchell. *GARCH model with cross-sectional volatility: GARCHX models*, 1998.
30. Granger, Namwon. A bivariate causality between stock prices and exchange rates: evidence from recent Asianflu. // *The Quarterly Review of Economics and Finance*, vol. 40, issue 3, 337-354, 2000.
31. Diebold, Atsushi Inoue. Long memory and regime switching. // *Journal of Econometrics*, vol. 105, issue 1, 131-159, 2001.
32. Gilles Zumbach. *Volatility Processes and Volatility Forecast with Long Memory*. // University of Applied Sciences Western Switzerland, 2002.

33. Peter R. Hansen, Asger Lunde. A comparison of volatility models: Does anything beat a GARCH(1,1), 2004.