Санкт-Петербургский Государственный Университет
Факультет прикладной математики – процессов управления
Кафедра математической теории игр и статистических решений

Магнитская Наталья Григорьевна

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Математические модели совместной разработки природных ресурсов с различными типами распределения случайной продолжительности процесса

Направление 01.03.02
Прикладная математика, фундаментальная информатика и программирование

Научный руководитель,
доктор.физ.-мат.н.,
профессор
Громова Е. В.

Санкт-Петербург
2019

Оглавление

Введение

Задача рационального природопользования, а именно разработка различных природных ресурсов, таких как полезные ископаемые, лес, биоресурсы и т.п., носит приоритетный характер для современной экономики. Для успешного решения данной задачи необходимо научиться строить математические модели изучаемого процесса, в которых должны учитываться а) динамическая структура развития процесса, б) стохастические элементы, соответствующие его реальному развитию. Дифференциальные игры представляют собой удобный математический аппарат, позволяющий изучать процесс разработки ресурсов несколькими сторонами (игроками). В моделях такого типа конфликтно-управляемый процесс развивается непрерывно во времени, причем в стандартной постановке игра заканчивается в фиксированный заранее момент времени, что существенно обедняет постановку задачи.

В данной работе предполагается, что игра заканчивается в случайный момент времени T, сформированный особым образом: случайная величина T является минимумом из случайных величин T_i, $i = 1, \ldots, n$, соответствующих случайным моментам выбытия из игры игроков $i = 1, \ldots, n$. Таким образом, игра останавливается в момент первого выбытия из игры одного из игроков. Использование такого подхода позволяет построить более реалистичную математическую модель.

Предполагается, что случайные величины T_i имеют различные типы распределения $F_i(t)$, которые непосредственно влияют на вид функционала выигрыша, под которым в данной работе понимается математическое ожидание интегрального выигрыша.

В I главе рассмотрен случай, когда функции распределения $F_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, имеют ступенчатый вид (соответствующий дискретному распределению вероятностей). Это означает, что для игроков $i = 1, \ldots, n$ известны вероятности окончания игры p_1^i, p_2^i, $\ldots$, p_k^i в конкретные моменты времени t_1^i, t_2^i, $\ldots$, t_k^i (которые различны для различных игроков). Задача разработки ресурсов сформулирована в общем случае для игры n лиц, а затем подробно изучен случай игры двух лиц. Игра рассмотрена в кооперативной форме, а управления для игроков предлагается искать в классе программных стратегий. Предложено два подхода, позволяющих найти управления для случая разрывной функции распределения ступенчатого вида. Первый подход основан на последовательном использовании принципа максимума Понтрягина: сначала задача решается на последнем интервале непрерывности функции распределения, затем - на предпоследнем, причем результат на последнем интервале записывается в виде терминального выигрыша, и т.д. Второй подход основан на параметризации данной задачи и с вычислительной точки зрения значительно проще. Продемонстрировано применение обоих подходов для случая 1 и 2 разрывов функции распределения. Показано, что применение обоих подходов дает одинаковые результаты, а следовательно, предлагается использовать для дальнейших вычислений подход, основанный на параметризации. Алгоритм сформулирован в общем виде для случая k разрывов первого рода.

Во II главе рассмотрена задача разработки полезных ископаемых для непрерывного типа распределения. Предполагается, что момент окончания игры имеет распределение Гумбеля. При помощи принципа максимума Понтрягина найдено решение задачи для случая n игроков.

Показано, что несмотря на то, что аппарат для решения непрерывных задач представляется более разработанным, применение дискретных распределений (в том числе для динамических игр с непрерывным временем) является более перспективным с точки зрения вычислительных затрат. Основным результатом работы является разработка подхода к решению дифференциальных игр со случайным моментом окончания дискретного типа и его применение к конкретным задачам рационального природопользования.

Обзор литературы

Одним из основателей теории дифференциальных игр является американский математик Р. Айзекс. В его работе [1] впервые были описаны игры преследования.

В нашей стране значительный вклад в развитие дифференциальных игр внесли Петросян Л. А. [2], Красовский Н. Н. [3], Субботин А. И. [4], Понтрягин Л. С. [5].

В классической теории дифференциальных игр продолжительность игры, как правило, задана и является детерминированной величиной [6].

Тем не менее, с точки зрения приложений, большую актуальность приобретают математические модели конфликта, который оканчивается в случайный момент времени. Впервые модели со случайным моментом окончания были рассмотрены в работе Yaari [7]. В работе [8] были впервые исследованы дифференциальные игры преследования двух лиц со случайной продолжительностью. В общем виде постановка дифференциальной игры со случайной продолжительностью была предложена в работе Петросяна Л. А., Шевкопляс Е. В. [9].

Дифференциальные игры со случайным моментом окончания являются расширением класса дифференциальных игр с предписанной продолжительностью и для случая абсолютно непрерывных случайных величин изучены в [10]. Кроме того, интерес представляют игры с асимметричными функциями выигрышей игроков [11], т. е. те, в которых игроки не являются идентичными.

Дифференциальные игры со случайным моментом окончания, подчиняющимся дискретному распределению, рассматриваются в работе [12].

Понятие случайного момента окончания вводится также в математической теории надежности для описания момента отказа системы технических элементов, используя непрерывные распределения: Вейбулла, экспоненциальное [13].

Особый интерес представляют работы, использующие методы дифференциальных игр в области конфликто-управляемых экономических процессов, в том числе в задачах оптимальной разработки ресурсов. Примерами данных работ являются [14, 15].

Постановка дифференциальной игры с разрывной функцией распределения впервые была сформулирована в работе [16]. Изучению проблемы динамической устойчивости кооперативного решения для задач такого типа посвящена работа [17]. Основной задачей данной выпускной квалификационной работы является построение методологического подхода для нахождения оптимальных управлений в задачах данного типа.

Дифференциальная игра разработки ресурсов со случайным моментом окончания

Рассмотрим дифференциальную игру n лиц [18]. Пусть игра начинается в известный момент времени t_0, а заканчивается в случайный момент времени T, где T представляет собой случайную величину с известной функцией распределения $F(t)$, $t \in [t_0, T_f]$, где T_f может быть бесконечным. Случайная величина T сформирована следующим образом. Пусть T_i — случайная величина с известной функцией распределения $F_i(t)$, $t \in [t_0, T_f]$, $i = \overline{1,n}$. T_i соответствует моменту окончания процесса для игрока i, $i = \overline{1,n}$. Предположим, что $\{T_i\}_{i=1}^n$ являются независимыми случайными величинами. Будем считать, что игра начинается в момент времени t_0 и заканчивается в момент остановки игры для первого из игроков, что означает

$$T = min\{T_1, T_2, ...T_n\}. \tag{1}$$

Динамика игры задается системой дифференциальных уравнений со стандартными предположениями на правую часть [19]:

$$\dot{x} = g(x, u_1, u_2, ...u_n), \quad x(t_0) = x_0. \tag{2}$$

В случае рассмотрения модели эксплуатации невозобновляемого ресурса, динамика описывает изменения доступного объема ресурса $x(t)$ при некоторой идеальной позиции и описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{x} = -g_e(x, u), \quad u_i \geq 0 \quad x(t_0) = x_0, \tag{3}$$

где управления u_i соответствуют “усилиям”, затрачиваемым i-тым игроком на извлечение ресурса, а функция $g(x, u)$ описывает скорость убывания ресурса.

Для адекватного описания процесса функция $g_e(x, u)$ должна удовлетворять ряду условий:

1. Ресурс может только убывать: $g_e(x, u) \geq 0$, $\forall x, u >0$,
2. Частные производные $\frac{\partial g_e(x,u)}{\partial u_j} > 0$,
3. Функция $g_e(x, u)$ вогнута по u: $\left|\left|\frac{\partial^2 g_e(x,u)}{\partial^2 u_j u_i}\right|\right| \leq 0$,

4. Процесс добычи оканчивается при исчерпании соответствующего ресурса: $x_i = 0 \Rightarrow (g_e)_i(x,u) = 0$.

Выигрыш i-ого игрока определяется математическим ожиданием интегрального выигрыша:

$$K_i(t_0, x, u) = E(\int\limits_{t_0}^{T_f} h_i(x(t), u(t))dt), \quad i = \overline{1,n}, \tag{4}$$

где $h_i(x, u_1 ... u_n)$—непрерывная по своим аргументам подынтегральная функция выигрыша (функция полезности) игрока i. Функция мгновенного выигрыша i-го игрока представляется в виде

$$h_i(x,u) = r_i(u) - d_i(x), \tag{5}$$

где $r_i(u)$ описывает мгновенный доход игрока, а $d_i(x)$ соответствует эксплуатационным расходам.

В работах [16, 20] была выведена формула для математического ожидания выигрыша:

$$K_i(\cdot) = \int\limits_{t_0}^{T_f} (1 - F(t)) h_i(\cdot) dt. \tag{6}$$

Глава 1.

Математическая модель разработки ресурсов со случайным моментом окончания дискретного типа

§ 1.1. Постановка задачи

Рассмотрим частный случай введенной выше игры, а именно, игру двух лиц ($n = 2$). Пусть T_1 и T_2 —дискретные случайные величины с известными функциями распределений $F_1(t)$ и $F_2(t)$ соответственно. Пусть $\{t_1, t_2, ..., t_k\}$ и $\{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_k\}$ — моменты времени, в которые происходят разрывы функций распределения $F_1(t)$, $F_2(t)$ соответственно. Пусть

$$P\{T_1 = t_m\} = p_m, \quad P\{T_2 = \tau_j\} = \varrho_j, \quad m, j = \overline{1, k}.$$

В данной задаче предполагаем, что игра заканчивается в момент первой остановки игры для какого-либо из игроков: $T = \min\{T_1, T_2\}$. Тогда из независимости случайных величин T_1, T_2 имеем следующий вид функции распределения для случайной величины T:

$$F(t) = 1 - \prod_{l=1}^{2}(1 - F_l(t)). \tag{1.1}$$

Рассмотрим частные случаи случайных величин T_1 и T_2.
I Пусть F_1=F_2 (Рис. 1.1)
Тогда

$$F(t) = 1 - \prod_{i=1}^{2}(1 - F_i(t)) = 1 - \prod_{i=1}^{2}(1 - F_1(t)) = 1 - (1 - F_1(t))^2.$$

Следовательно,

$$1 - (1 - p_1)^2 = (1 - 1 + p_1)(1 + 1 - p_1) = p_1(2 - p_1),$$

$$1 - (1 - (p_1 + p_2))^2 = (1 - 1 + p_1 + p_2)(1 + 1 - p_1 - p_2) = (p_1 + p_2)(2 - p_1 - p_2),$$

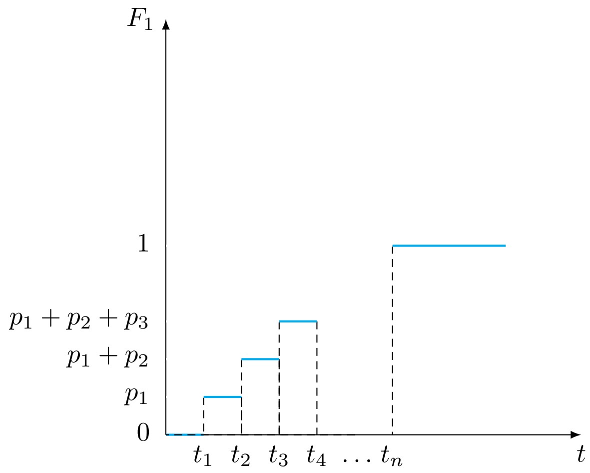

Рис. 1.1: Функции распределения F_1 и F_2

$$F(t)=\begin{cases} 0 & t\le t_1,\\ \tilde p_1 = p_1(2-p_1)=1-q_1^2 & t\in(t_1,t_2],\\ \tilde p_2=(p_1+p_2)(2-p_1-p_2) & t\in(t_2,t_3],\\ \tilde p_3=(p_1+p_2+p_3)(2-p_1-p_2-p_3) & t\in(t_3,t_4],\\ \dots & \\ \tilde p_{n-1}=\sum_{i=1}^{n-1}p_i(2-\sum_{i=1}^{n-1}p_i) & t\in(t_{n-1},t_n],\\ 1 & t{>}t_n. \end{cases}$$

II Пусть $t_i{=}\tau_j$, но $p\neq\varrho$ (Рис. 1.2, 1.3).

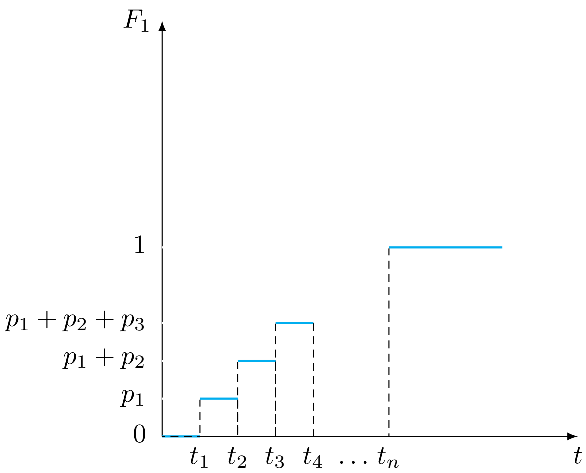

Рис. 1.2: Функция распределения F_1

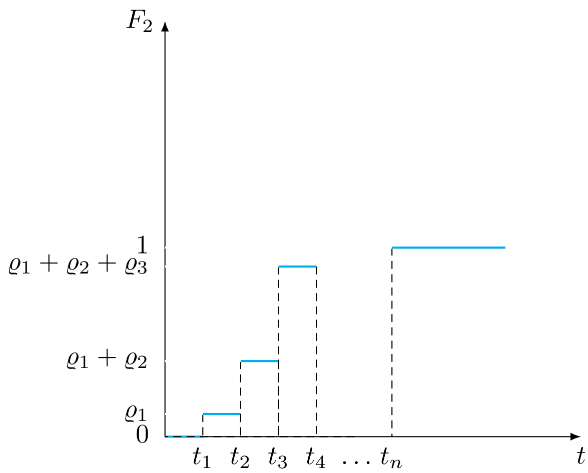

Рис. 1.3: Функция распределения F_2

Тогда

$$F(t)=1-\prod_{i=1}^{2}(1-F_i(t))=1-(1-F_1(t))(1-F_2(t)),$$

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t \leq t_1, \\ \tilde{p}_1 = 1 - (1-p_1)(1-\varrho_1) & t \in (t_1, t_2], \\ \tilde{p}_2 = 1 - (1-(p_1+p_2))(1-(\varrho_1+\varrho_2)) & t \in (t_2, t_3], \\ \tilde{p}_3 = 1 - (1-(p_1+p_2+p_3))(1-(\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3)) & t \in (t_3, t_4], \\ \dots \\ \tilde{p}_{n-1} = 1 - (1-\sum_{i=1}^{n-1} p_i)(1-\sum_{i=1}^{n-1} \hat{p}_i) & t \in (t_{n-1}, t_n], \\ 1 & t{>}t_n. \end{cases}$$

III Пусть $t_{i+1} > \tau_i{>}t_i$, $p \neq \varrho$ (Рис. 1.4, 1.5).

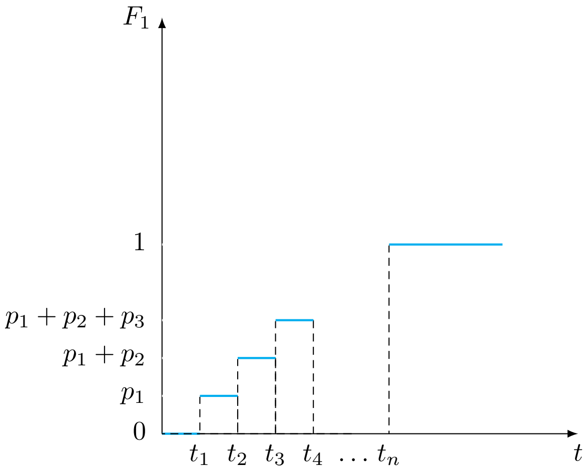

Рис. 1.4: Функция распределения F_1

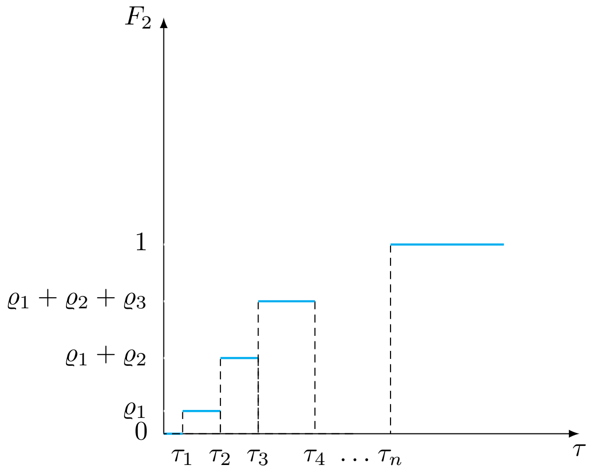

Рис. 1.5: Функция распределения F_2

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t \leq t_1, \\ \tilde{p}_1 = 1 - (1-p_1) & t \in (t_1, \tau_1], \\ \tilde{p}_2 = 1 - (1-p_1)(1-\varrho_1) & t \in (\tau_1, t_2], \\ \tilde{p}_3 = 1 - (1-(p_1+p_2))(1-\varrho_1) & t \in (t_2, \tau_2], \\ \tilde{p}_4 = 1 - (1-(p_1+p_2))(1-(\varrho_1+\varrho_2)) & t \in (\tau_2, t_3], \\ \tilde{p}_5 = 1 - (1-(p_1+p_2+p_3))(1-(\varrho+\varrho_2)) & t \in (t_3, \tau_3], \\ \dots \\ \tilde{p}_n = 1 - (1-\sum_{i=1}^{k} p_i)(1-\sum_{i=1}^{k} \varrho_i) & t \in (\tau_k, t_{k+1}] \text{ и n=2k}, \\ \tilde{p}_n = 1 - (1-\sum_{i=1}^{k+1} p_i)(1-\sum_{i=1}^{k} \varrho_i) \\ \text{если } t \in (t_{k+1}, \tau_{k+1}] \text{ и n=2k+1}, \quad k = \overline{0, n-1}, \\ 1 & t{>}t_n. \end{cases}$$

Последний случай можно обобщить на другие возможные значения t_i и τ_i.

§ 1.2. Решение задачи с одним скачком. Новый метод (параметризация)

Для простоты предположим, что $F_1(t)$, $F_2(t)$ имеют разрывы первого рода в точках $t_1 = \tau_1$, $t_2 = \tau_2$ (Рис. 1.6, 1.7).

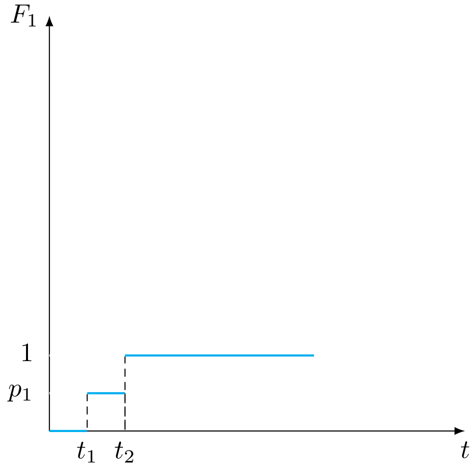

Рис. 1.6: Функция распределения F_1

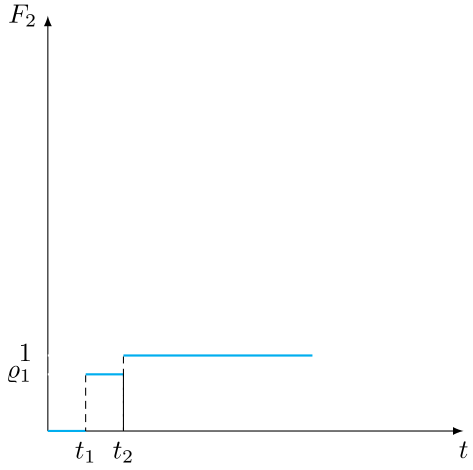

Рис. 1.7: Функция распределения F_2

Из (1.1) функция распределения случайной величины T имеет вид:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t \leq t_1, \\ \rho_1 = 1 - (1 - p_1)(1 - \varrho_1) & t_1 < t \leq t_2, \\ 1 & t > t_2. \end{cases}$$

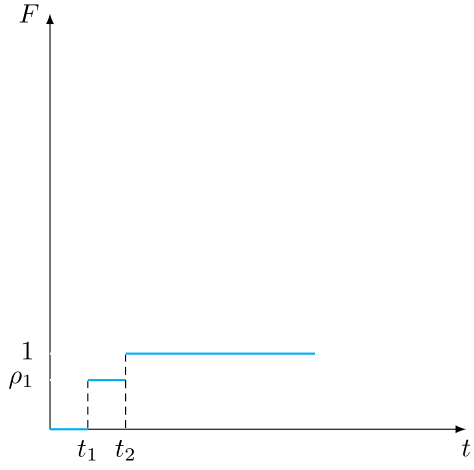

Рис. 1.8: Функция распределения $F(t)$

Имеем функцию выигрыша (6) игрока i, $i = 1, 2$:

$$K_i(\cdot) = \int\limits_{t_0}^{t_1} h_i(x(t), u(t))dt + (1 - \rho_1)\int\limits_{t_1}^{t_2} h_i(x(t), u(t))dt.$$

Будем полагать, что управляемый процесс описывается динамикой, заданной системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t) = -\sum_{i=1}^{2} u_i(t), \quad x(t_0) = x_0. \tag{1.2}$$

Система уравнений (1.2) используется для моделирования процесса добычи ресурсов.

Пусть функция мгновенного выигрыша является квадратичной относительно управления:

$$\begin{aligned} &h_i(x, u) = r_i(u) - d_i x, \quad r_i(u_i) = u_i(a_i - \frac{1}{2}u_i), \\ &a_i, d_i > 0, \quad \forall i = 1, 2. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Будем искать решение задачи в программных стратегиях [21]. Управления $u \in U$, где U — выпуклое компактное множество. Областью допустимых значений управлений является отрезок: $u_i \in [0; a_i]$. Пусть $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$. Рассмотрим кооперативную форму игры. Тогда задача оптимального управления заключается в максимизации суммарного выигрыша игроков:

$$\begin{aligned} \max_{u_1, u_2} \sum_{i=1}^{2} K_i(t_0, x_0, u_1, u_2) = \int_{t_0}^{t_1} (h_1(x^*(t), u^*(t)) + h_2(x^*(t), u^*(t))dt + \\ + (1 - \rho_1) \int_{t_1}^{t_2} (h_1(x^*(t), u^*(t)) + h_2(x^*(t), u^*(t))dt, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $x^*(t)$, $u^*(t)$ — оптимальные траектория и управления соответственно.

Для решения задачи применим принцип максимум Понтрягина [22], причем решение задачи найдем на двух интервалах $I_1 = [0; t_1]$ и $I_2 = [t_1; t_2]$, на первом из которых решается задача с двумя закрепленными концами, а на втором — с незакрепленным правым концом. В качестве параметра задачи введем $x(t_1) = x_1$, значение для которого найдем в конце решения из условия максимизации (1.4).

Интервал I_1.

Рассмотрим отдельно задачу максимизации $\int_{t_0}^{t_1} (h_1(x(t), u(t)) + h_2(x(t), u(t))dt$ для динамики (1.2) и начальных условий $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, где x_1 — параметр. Воспользуемся принципом максимума Понтрягина. Выпишем функцию Гамильтона:

$$H(x,u,\psi) = -\psi\sum_{i=1}^{2} u_i + h_1(x(t),u(t)) + h_2(x(t),u(t)) =$$

$$-\psi\sum_{i=1}^{2} u_i + u_1(a_1 - \frac{1}{2}u_1) + u_2(a_2 - \frac{1}{2}u_2) - d_1x - d_2x. \tag{1.5}$$

Найдем управление, максимизирующее функцию Гамильтона. Воспользуемся необходимым условием максимума:

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = -\psi + (a_i - u_i) = 0,$$

$$u_i^*(t) = -\psi + a_i.$$

Проверим функцию Гамильтона на выпуклость:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_i^2} = -1 < 0.$$

Следовательно, найденное управление будет являться единственной точкой максимума для Гамильтониана при $t \in [0; t_1]$. Уравнения для сопряженной переменной:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial H(x,u,\psi)}{\partial x} = \hat{d}, \quad \hat{d} = d_1 + d_2. \tag{1.6}$$

Следовательно,

$$\psi(t) = \psi_0 + \hat{d}t,$$

$$u_i^*(t) = -\psi_0 - \hat{d}t + a_i.$$

Тогда уравнение динамики:

$$\dot{x}(t) = -\sum_{i=1}^{2} u_i(t) = 2\psi_0 + 2\hat{d}t - \hat{a}, \quad \hat{a} = a_1 + a_2.$$

Воспользуемся краевыми условиями:

$$x(0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \tag{1.7}$$

$$x(t) = 2\psi_0 t + \hat{d}t^2 - \hat{a}t + x_0.$$

Найдем ψ_0 из краевого условия и $x(t)$:

$$\psi_0 = \frac{x_1 - \hat{d}t_1^2 + \hat{a}t_1 - x_0}{2t_1}.$$

Тогда искомая оптимальная траектория для интервала I_1:

$$x^*(t)_{I_1} = \frac{x_1 - \hat{d}t_1^2 + \hat{a}t_1 - x_0}{t_1}t + \hat{d}t^2 - \hat{a}t + x_0 =$$
$$(x_1 - x_0)\frac{t}{t_1} + \hat{d}t(t - t_1) + x_0. \tag{1.8}$$

Оптимальные управления игроков для интервала I_1:

$$u_i^*(t)_{I_1} = -\frac{x_1 - \hat{d}t_1^2 + \hat{a}t_1 - x_0}{2t_1} - \hat{d}t + a_i. \tag{1.9}$$

Интервал I_2.

Рассмотрим задачу максимизации $\int\limits_{t_1}^{t_2}(h_1(x(t), u(t)) + h_2(x(t), u(t))dt$ для динамики (1.2) и начального условия $x(t_1) = x_1$, где x_1 — параметр. Воспользуемся принципом максимума Понтрягина. Выпишем функцию Гамильтона:

$$H(x, u, \psi) = -\psi\sum_{i=1}^{2} u_i + (1 - \rho_1)h_1(x(t), u(t)) + (1 - \rho_1)h_2(x(t), u(t)) =$$
$$-\psi\sum_{i=1}^{2} u_i + (1 - \rho_1)u_1(a_1 - \frac{1}{2}u_1) + (1 - \rho_1)u_2(a_2 - \frac{1}{2}u_2) -$$
$$-(1 - \rho_1)d_1x - (1 - \rho_1)d_2x. \tag{1.10}$$

Найдем управление, максимизирующее функцию Гамильтона. Воспользуемся необходимым условием максимума:

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = -\psi + (1 - \rho_1)(a_i - u_i) = 0,$$

$$u_i^*(t) = \frac{-\psi + (1 - \rho_1)a_i}{(1 - \rho_1)}.$$

Проверим функцию Гамильтона на выпуклость:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_i^2} = -(1 - \rho_1) < 0.$$

Следовательно, найденное управление будет являться единственной точкой максимума для Гамильтониана при $t \in [t_1; t_2]$. Уравнения для сопряженной переменной:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial H(x, u, \psi)}{\partial x} = (1 - \rho_1)\hat{d}, \quad \hat{d} = d_1 + d_2, \tag{1.11}$$

$$\psi(t) = \int\limits_{t_1}^{t} (1-\rho_1)\hat{d}dt = (1-\rho_1)\hat{d}(t-t_1) + \psi_1.$$

Условие трансверсальности:

$$\psi(t_2) = 0.$$

Используя условие трансверсальности, получаем,

$$\psi(t) = (1-\rho_1)\hat{d}(t-t_2).$$

Тогда уравнение динамики:

$$\dot{x}(t) = -\sum_{i=1}^{2} u_i(t) = 2\frac{\psi(t)}{(1-\rho_1)} - \hat{a}, \quad \hat{a} = a_1 + a_2.$$

Краевое условие: $x(t_1) = x_1$,

$$x(t) = -2\hat{d}t_2 t + \hat{d}t^2 - \hat{a}t + 2\hat{d}t_2 t_1 - \hat{d}t_1^2 + \hat{a}t_1 + x_1.$$

Искомое оптимальное управление:

$$u_i^*(t)_{I_2} = -\hat{d}(t-t_2) + a_i. \tag{1.12}$$

Искомая оптимальная траектория:

$$x^*(t)_{I_2} = -2\hat{d}t_2 t + \hat{d}t^2 - \hat{a}t + 2\hat{d}t_2 t_1 - \hat{d}t_1^2 + \hat{a}t_1 + x_1. \tag{1.13}$$

Интервалы I_1, I_2

Найдем x_1 из условия максимизации суммарного выигрыша на интервале $[t_0; t_2]$, т. е.

$$\max_{x_1} \sum_{i=1}^{2} K_i(t_0, x_0, u^*(t, x_1)),$$

используя полученные результаты (1.8), (1.9), (1.12), (1.13) для оптимальных траектории и управлений на интервалах I_1, I_2 соответственно. Подставляя (1.8), (1.9), (1.12), (1.13) в подынтегральное выражение (1.4), после интегрирования получаем:

$$\int\limits_0^{t_1}(u_1^*(t)_{I_1}(a_1-\frac{1}{2}u_1^*(t)_{I_1})+u_2^*(t)_{I_1}(a_2-\frac{1}{2}u_2^*(t)_{I_1})-d_1x^*(t)_{I_1}-d_2x^*(t)_{I_1})dt+$$
$$+(1-\rho_1)\int\limits_{t_1}^{t_2}(u_1^*(t)_{I_2}(a_1-\frac{1}{2}u_1^*(t)_{I_2})+u_2^*(t)_{I_2}(a_2-\frac{1}{2}u_2^*(t)_{I_2})-d_1x^*(t)_{I_2}-$$
$$-d_2x^*(t)_{I_2})dt=-\frac{x_1^2}{4t_1}+\frac{x_1(-\hat{a}t_1+x_0)}{2t_1}-\frac{\hat{d}x_1t_1}{2}+(1-\rho_1)\hat{d}x_1(t_1-t_2)+$$
$$+C(t_1,t_2), \tag{1.14}$$

где $C(t_1,t_2)$—выражение, не зависящее от x_1.
Нетрудно проверить, что максимум в (1.14) достигается при

$$x_1=-\hat{a}t_1+x_0-\hat{d}t_1^2+2t_1(1-\rho_1)\hat{d}(t_1-t_2).$$

Подставляя полученное значение для x_1 в (1.8), (1.9), (1.12), (1.13), окончательно получаем выражения для оптимальных траектории и управлений на интервалах $I_1,\ I_2$:

$$\begin{aligned}
&x_{I_1}^*(t)=-\hat{a}t+2(1-\rho_1)\hat{d}(t_1-t_2)t+\hat{d}t(t-2t_1)+x_0,\\
&u_{i_{I_1}}^*(t)=\hat{d}t_1-(1-\rho_1)\hat{d}(t_1-t_2)-\hat{d}t+a_i, \quad t\in[t_0;t_1],\\
&x_{I_2}^*(t)=-2\hat{d}t_2t+\hat{d}t^2-\hat{a}t+2\hat{d}t_2t_1-2\hat{d}t_1^2+x_0+\\
&+2t_1(1-\rho_1)\hat{d}(t_1-t_2),\\
&u_{i_{I_2}}^*(t)=-\hat{d}(t-t_2)+a_i, \quad t\in(t_1;t_2].
\end{aligned}$$

§ 1.3. Решение задачи с одним скачком. Подход с использованием терминального выигрыша

Рассмотрим предыдущий пример, начиная поиск решения со второго интервала I_2. Значение $(1-\rho_1)\int\limits_{t_1}^{t_2}(h_1(x(t),u(t))+h_2(x(t),u(t))dt$ будем рассматривать в качестве терминального выигрыша для интервала I_1. Подставим (1.12), (1.13) и найдем значение терминального выигрыша:

$$\Phi(x_1) = (1-\rho_1)\int\limits_{t_1}^{t_2}(u_1^*(t)_{I_2}(a_1 - \frac{1}{2}u_1^*(t)_{I_2}) + u_2^*(t)_{I_2}(a_2 - \frac{1}{2}u_2^*(t)_{I_2}) -$$

$$-d_1 x^*(t)_{I_2} - d_2 x^*(t)_{I_2})dt =$$

$$= \frac{(t_1-t_2)(\rho_1-1)}{6}(3a_1^2 + 3a_2^2 + 2\hat{d}^2(t_1-t_2)^2 - 3\hat{a}\hat{d}t_1 + 3\hat{a}\hat{d}t_2 - 6x_1\hat{d}). \tag{1.15}$$

Интервал I_1.

Рассмотрим отдельно задачу максимизации $\int\limits_{t_0}^{t_1}(h_1(x(t),u(t)) + h_2(x(t),u(t))dt +$ $\Phi(x_1)$ для динамики (1.2), начального условия $x(t_0) = x_0$ и терминального выигрыша (1.15). Воспользуемся принципом максимума Понтрягина. Выпишем функцию Гамильтона:

$$H(x,u,\psi) = -\psi\sum_{i=1}^{2}u_i + h_1(x(t),u(t)) + h_2(x(t),u(t)) =$$

$$-\psi\sum_{i=1}^{2}u_i + u_1(a_1 - \frac{1}{2}u_1) + u_2(a_2 - \frac{1}{2}u_2) - d_1x - d_2x. \tag{1.16}$$

Найдем управление, максимизирующее функцию Гамильтона. Воспользуемся необходимым условием максимума:

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = -\psi + (a_i - u_i) = 0,$$

$$u_i^*(t) = -\psi + a_i.$$

Проверим функцию Гамильтона на выпуклость:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_i^2} = -1 < 0.$$

Следовательно, найденное управление будет являться единственной точкой максимума для Гамильтониана при $t \in [0; t_1]$. Уравнения для сопряженной переменной:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\partial H(x,u,\psi)}{\partial x} = \hat{d}, \quad \hat{d} = d_1 + d_2. \tag{1.17}$$

Следовательно,

$$\psi(t) = \psi_0 + \hat{d}t,$$

$$u_i^*(t) = -\psi_0 - \hat{d}t + a_i.$$

Тогда уравнение динамики:

$$\dot{x}(t) = -\sum_{i=1}^{2} u_i(t) = 2\psi_0 + 2\hat{d}t - \hat{a}, \quad \hat{a} = a_1 + a_2.$$

Воспользуемся краевым условием:

$$x(0) = x_0, \tag{1.18}$$

$$x(t) = 2\psi_0 t + \hat{d}t^2 - \hat{a}t + x_0.$$

Воспользуемся условием терминального выигрыша: (1.15)

$$\psi(t_1) = \frac{\partial \Phi(x_1)}{\partial x_1},$$

$$\psi(t_1) = (t_1 - t_2)(1 - \rho_1)\hat{d}.$$

Тогда

$$\psi_0 = \hat{d}(-t_1\rho_1 - t_2 + t_2\rho_1).$$

Оптимальные управления игроков для интервала I_1:

$$u_i^*(t)_{I_1} = -\hat{d}(-t_1\rho_1 - t_2 + t_2\rho_1) - \hat{d}t + a_i. \tag{1.19}$$

Оптимальная траектория игроков для интервала I_1:

$$x_{I_1}^*(t) = 2\hat{d}(-t_1\rho_1 - t_2 + t_2\rho_1)t + \hat{d}t^2 - \hat{a}t + x_0. \tag{1.20}$$

Подставим найденные оптимальные управления и траекторию в

$$\int_{t_0}^{t_1} (h_1(x(t), u(t)) + h_2(x(t), u(t))dt + \Phi(x_1).$$

После интегрирования получаем:

$$\int_0^{t_1} (u_1^*(t)_{I_1}(a_1 - \frac{1}{2}u_1^*(t)_{I_1}) + u_2^*(t)_{I_1}(a_2 - \frac{1}{2}u_2^*(t)_{I_1}) - d_1 x^*(t)_{I_1} - d_2 x^*(t)_{I_1})dt +$$

$$+\Phi(x_1) = \Phi(x_1) + C(t_1, t_2), \tag{1.21}$$

где $C(t_1, t_2)$— выражение, не зависящее от x_1.
Известно, что

$$x_{I_1}^*(t_1) = x_1.$$

Тогда искомое x_1:

$$x_1 = 2\hat{d}(-t_1\rho_1 - t_2 + t_2\rho_1)t_1 + \hat{d}t_1^2 - \hat{a}t_1 + x_0 = \\ = -\hat{a}t_1 + x_0 - \hat{d}t_1^2 + 2t_1(1-\rho_1)\hat{d}(t_1 - t_2). \qquad (1.22)$$

Подставим (1.22) в (1.12), (1.13) и окончательно получаем выражения для оптимальных траекторий и управлений:

$$\begin{aligned}
&x^*_{I_1}(t) = 2\hat{d}(-t_1\rho_1 - t_2 + t_2\rho_1)t + \hat{d}t^2 - \hat{a}t + x_0 = \\
&= -\hat{a}t + 2(1-\rho_1)\hat{d}(t_1 - t_2)t + \hat{d}t(t - 2t_1) + x_0, \\
&u^*_{i_{I_1}}(t) = -\hat{d}(-t_1\rho_1 - t_2 + t_2\rho_1) - \hat{d}t + a_i = \\
&= \hat{d}t_1 - (1-\rho_1)\hat{d}(t_1 - t_2) - \hat{d}t + a_i, \quad t \in [t_0; t_1], \\
&x^*_{I_2}(t) = -2\hat{d}t_2t + \hat{d}t^2 - \hat{a}t + 2\hat{d}t_2t_1 - 2\hat{d}t_1^2 + x_0 + 2t_1(1-\rho_1)\hat{d}(t_1 - t_2), \\
&u^*_{i_{I_2}}(t) = -\hat{d}(t - t_2) + a_i, \quad t \in (t_1; t_2].
\end{aligned}$$

§ 1.4. Сравнение результатов, анализ

При помощи метода параметризации и метода терминального выигрыша были получены одинаковые выражения для оптимальных управлений и траекторий для задачи с одним разрывом функции распределения. В обоих подходах был применен принцип максимума Понтрягина.

§ 1.5. Решение задачи с двумя скачками. Новый метод (параметризация)

Рассмотрим более сложный случай дискретного распределения. Предположим, что $F_1(t)$, $F_2(t)$ имеют разрывы первого рода в точках $t_1 = \tau_1$, $t_2 = \tau_2$, $t_3 = \tau_3$ (Рис. 1.9, 1.10).

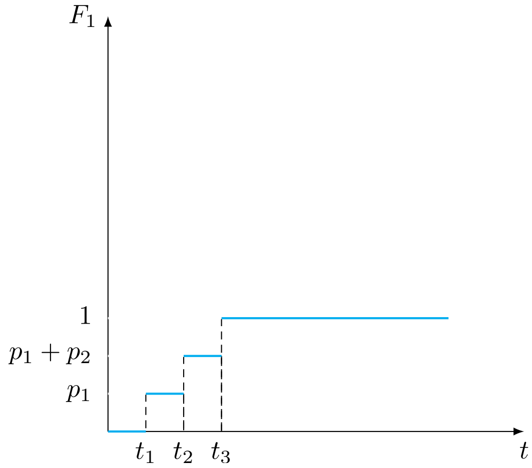

Рис. 1.9: Функция распределения F_1

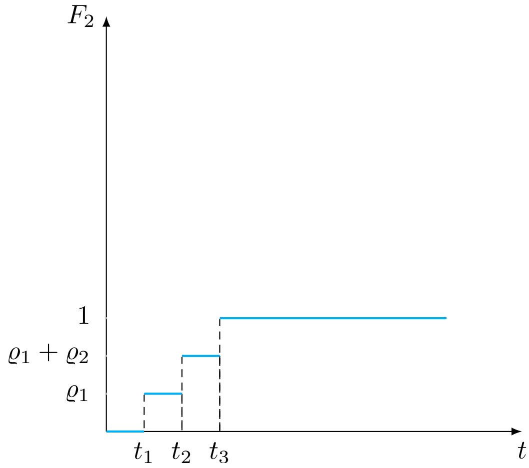

Рис. 1.10: Функция распределения F_2

Тогда

$$F(t) = 1 - \prod_{i=1}^{2}(1 - F_i(t)) = 1 - (1 - F_1(t))(1 - F_2(t)),$$

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t \le t_1, \\ \rho_1 = 1 - (1 - p_1)(1 - \varrho_1) & t_1 < t \le t_2, \\ \rho_2 = 1 - (1 - p_1 - p_2)(1 - \varrho_1 - \varrho_2) & t_2 < t \le t_3, \\ 1 & t > t_3. \end{cases}$$

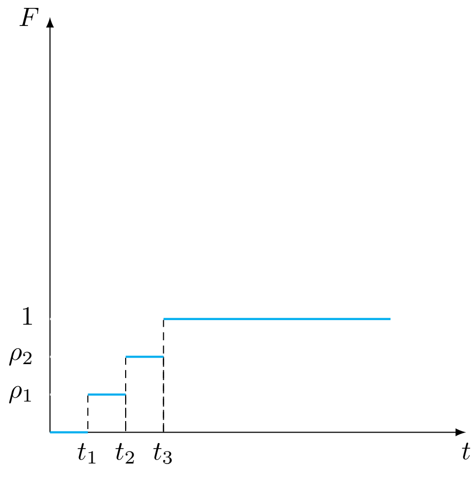

Рис. 1.11: Функция распределения $F(t)$

Имеем функцию выигрыша (6) игрока $i,\ i=1,2$:

$$K_i(\cdot)=\int\limits_{t_0}^{t_1} h_i(x(t),u(t))dt+(1-\rho_1)\int\limits_{t_1}^{t_2} h_i(x(t),u(t))dt+$$

$$+(1-\rho_2)\int\limits_{t_2}^{t_3} h_i(x(t),u(t))dt.$$

Рассмотрим кооперативную форму игры. Тогда задача оптимального управления заключается в максимизации суммарного выигрыша игроков:

$$\max_{u_1,u_2}\sum_{i=1}^{2} K_i(t_0,x_0,u_1,u_2)=\int\limits_{t_0}^{t_1}(h_1(x^*(t),u^*(t))+h_2(x^*(t),u^*(t))dt+$$

$$+(1-\rho_1)\int\limits_{t_1}^{t_2}(h_1(x^*(t),u^*(t))+h_2(x^*(t),u^*(t))d+$$

$$+(1-\rho_2)\int\limits_{t_2}^{t_3}(h_1(x^*(t),u^*(t))+h_2(x^*(t),u^*(t))dt, \tag{1.23}$$

где $x^*(t),\ u^*(t)$ — оптимальные траектория и управления соответственно. Для решения задачи применим принцип максимум Понтрягина, причем решение задачи найдем на трех интервалах $I_1=[0;t_1]$, $I_2=[t_1;t_2]$, $I_3=[t_2;t_3]$, на первых двух интервалах решается задача с двумя закрепленными концами, а на третьем — с незакрепленным правым концом. В качестве параметров задачи введем $x(t_1)=x_1$, $x(t_2)=x_2$, значения для которых найдем в конце решения из условия максимизации (1.23).

Интервал I_1.

Рассмотрим отдельно задачу максимизации $\int\limits_{t_0}^{t_1}(h_1(x(t),u(t))+h_2(x(t),u(t))dt$ для динамики (1.2) и начальных условий $x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$, где x_1 — параметр. Воспользуемся принципом максимума Понтрягина. Выпишем функцию Гамильтона:

$$H(x,u,\psi)=-\psi\sum_{i=1}^{2}u_i+h_1(x(t),u(t))+h_2(x(t),u(t))=$$

$$-\psi\sum_{i=1}^{2}u_i+u_1(a_1-\frac{1}{2}u_1)+u_2(a_2-\frac{1}{2}u_2)-d_1x-d_2x. \tag{1.24}$$

Найдем управление, максимизирующее функцию Гамильтона. Воспользуемся необходимым условием максимума:

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = -\psi + (a_i - u_i) = 0,$$

$$u_i^*(t) = -\psi + a_i.$$

Проверим функцию Гамильтона на выпуклость:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_i^2} = -1 < 0.$$

Следовательно, найденное управление будет являться единственной точкой максимума для Гамильтониана при $t \in [0; t_1]$. Уравнения для сопряженной переменной:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial H(x, u, \psi)}{\partial x} = \hat{d}, \quad \hat{d} = d_1 + d_2. \tag{1.25}$$

Следовательно,

$$\psi(t) = \psi_0 + \hat{d}t,$$

$$u_i^*(t) = -\psi_0 - \hat{d}t + a_i.$$

Тогда уравнение динамики:

$$\dot{x}(t) = -\sum_{i=1}^{2} u_i(t) = 2\psi_0 + 2\hat{d}t - \hat{a}, \quad \hat{a} = a_1 + a_2.$$

Воспользуемся краевыми условиями:

$$x(0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \tag{1.26}$$

$$x(t) = 2\psi_0 t + \hat{d}t^2 - \hat{a}t + x_0.$$

Найдем ψ_0 из краевого условия и $x(t)$:

$$\psi_0 = \frac{x_1 - \hat{d}t_1^2 + \hat{a}t_1 - x_0}{2t_1}.$$

Тогда искомая оптимальная траектория для интервала I_1:

$$x^*(t)_{I_1} = \frac{x_1 - \hat{d}t_1^2 + \hat{a}t_1 - x_0}{t_1} t + \hat{d}t^2 - \hat{a}t + x_0 =$$

$$= (x_1 - x_0)\frac{t}{t_1} + \hat{d}t(t - t_1) + x_0. \tag{1.27}$$

Оптимальные управления игроков для интервала I_1:

$$u_i^*(t)_{I_1} = -\frac{x_1 - \hat{d}t_1^2 + \hat{a}t_1 - x_0}{2t_1} - \hat{d}t + a_i. \tag{1.28}$$

Интервал I_2.

Рассмотрим отдельно задачу максимизации $\int\limits_{t_1}^{t_2}(h_1(x(t), u(t)) + h_2(x(t), u(t))dt$ для динамики (1.2) и начальных условий $x(t_1) = x_1$, $x(t_2) = x_2$, где x_1, x_2 — параметры. Воспользуемся принципом максимума Понтрягина. Выпишем функцию Гамильтона:

$$H(x, u, \psi) = -\psi \sum_{i=1}^{2} u_i + (1 - \rho_1)h_1(x(t), u(t)) + (1 - \rho_1)h_2(x(t), u(t)) =$$
$$-\psi \sum_{i=1}^{2} u_i + (1 - \rho_1)u_1(a_1 - \frac{1}{2}u_1) + (1 - \rho_1)u_2(a_2 - \frac{1}{2}u_2) +$$
$$-(1 - \rho_1)d_1 x - (1 - \rho_1)d_2 x. \tag{1.29}$$

Найдем управление, максимизирующее функцию Гамильтона. Воспользуемся необходимым условием максимума:

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = -\psi + (1 - \rho_1)(a_i - u_i) = 0,$$

$$u_i^*(t) = \frac{-\psi + (1 - \rho_1)a_i}{(1 - \rho_1)}.$$

Проверим функцию Гамильтона на выпуклость:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_i^2} = -(1 - \rho_1) < 0.$$

Следовательно, найденное управление будет являться единственной точкой максимума для Гамильтониана при $t \in [t_1; t_2]$. Уравнения для сопряженной переменной:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial H(x, u, \psi)}{\partial x} = (1 - \rho_1)\hat{d}, \quad \hat{d} = d_1 + d_2. \tag{1.30}$$

Следовательно,

$$\psi(t) = \int_{t_1}^{t} (1 - \rho_1)\hat{d}dt = (1 - \rho_1)\hat{d}(t - t_1) + \psi_1.$$

Тогда уравнение динамики:

$$\dot{x}(t) = -\sum_{i=1}^{2} u_i(t) = 2\frac{\psi(t)}{(1-\rho_1)} - \hat{a}, \quad \hat{a} = a_1 + a_2,$$

$$x(t) = \hat{d}t^2 - 2\hat{d}t_1 t + \frac{2\psi_1 t}{1-\rho_1} - \hat{a}t.$$

Воспользуемся краевыми условиями:

$$x(t_1) = x_1, \quad x(t_2) = x_2,$$

$$x(t) = \hat{d}t^2 - 2\hat{d}t_1 t + \frac{2\psi_1 t}{1-\rho_1} - \hat{a}t - \hat{d}t_1^2 + 2\hat{d}t_1^2 - \frac{2\psi_1 t_1}{1-\rho_1} + \hat{a}t_1 + x_1.$$

Найдем ψ_1 из краевого условия и $x(t)$:

$$\psi_1 = (1-\rho_1)\frac{x_2 - x_1 + \hat{a}(t_2 - t_1) - \hat{d}(t_2^2 - t_1^2) + 2\hat{d}t_1(t_2 - t_1)}{2(t_2 - t_1)}.$$

Следовательно,

$$\psi(t) = (1-\rho_1)\frac{x_2 - x_1 + \hat{a}(t_2 - t_1) - \hat{d}(t_2^2 - t_1^2)}{2(t_2 - t_1)} + (1-\rho_1)\hat{d}t.$$

Тогда искомая оптимальная траектория для интервала I_2:

$$x^*(t)_{I_2} = \frac{(x_2 - x_1 + \hat{a}(t_2 - t_1) - \hat{d}(t_2^2 - t_1^2))(t - t_1)}{t_2 - t_1} + \hat{d}(t^2 - t_1^2) - \\ -\hat{a}(t - t_1) + x_1. \tag{1.31}$$

Оптимальные управления игроков для интервала I_2:

$$u_i^*(t)_{I_2} = -\frac{x_2 - x_1 + \hat{a}(t_2 - t_1) - \hat{d}(t_2^2 - t_1^2)}{2(t_2 - t_1)} - \hat{d}t + a_i. \tag{1.32}$$

Интервал I_3.

Рассмотрим задачу максимизации $\int\limits_{t_2}^{t_3}(h_1(x(t), u(t)) + h_2(x(t), u(t))dt$ для динамики (1.2) и начального условия $x(t_2) = x_2$, где x_2 — параметр. Воспользуемся принципом максимума Понтрягина. Выпишем функцию Гамильтона:

$$H(x,u,\psi) = -\psi\sum_{i=1}^{2} u_i + (1-\rho_2)h_1(x(t),u(t)) + (1-\rho_2)h_2(x(t),u(t)) =$$

$$-\psi\sum_{i=1}^{2} u_i + (1-\rho_2)u_1(a_1 - \frac{1}{2}u_1) + (1-\rho_2)u_2(a_2 - \frac{1}{2}u_2) +$$

$$-(1-\rho_2)d_1x - (1-\rho_2)d_2x. \tag{1.33}$$

Найдем управление, максимизирующее функцию Гамильтона. Воспользуемся необходимым условием максимума:

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = -\psi + (1-\rho_2)(a_i - u_i) = 0,$$

$$u_i^*(t) = \frac{-\psi + (1-\rho_2)a_i}{(1-\rho_2)}.$$

Проверим функцию Гамильтона на выпуклость:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_i^2} = -(1-\rho_2) < 0.$$

Следовательно, найденное управление будет являться единственной точкой максимума для Гамильтониана при $t \in [t_2; t_3]$. Уравнения для сопряженной переменной:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\partial H(x,u,\psi)}{\partial x} = (1-\rho_2)\hat{d}, \quad \hat{d} = d_1 + d_2. \tag{1.34}$$

Следовательно,

$$\psi(t) = \int\limits_{t_2}^{t} (1-\rho_2)\hat{d}dt = (1-\rho_2)\hat{d}(t-t_2) + \psi_2.$$

Условие трансверсальности:

$$\psi(t_3) = 0.$$

Используя условие трансверсальности, получаем,

$$\psi(t) = (1-\rho_2)\hat{d}(t-t_3).$$

Тогда уравнение динамики:

$$\dot{x}(t) = -\sum_{i=1}^{2} u_i(t) = 2\frac{\psi(t)}{(1-\rho_2)} - \hat{a}, \quad \hat{a} = a_1 + a_2.$$

Краевое условие: $x(t_2) = x_2$,

$$x(t) = -2\hat{d}t_3t + \hat{d}t^2 - \hat{a}t + 2\hat{d}t_3t_2 - \hat{d}t_2^2 + \hat{a}t_2 + x_2.$$

Искомое оптимальное управление:

$$u_i^*(t)_{I_3} = -\hat{d}(t - t_3) + a_i. \tag{1.35}$$

Искомая оптимальная траектория:

$$x^*(t)_{I_3} = -2\hat{d}t_3t + \hat{d}t^2 - \hat{a}t + 2\hat{d}t_3t_2 - \hat{d}t_2^2 + \hat{a}t_2 + x_2. \tag{1.36}$$

Интервалы I_1, I_2, I_3
Найдем x_1, x_2 из условия максимизации суммарного выигрыша на интервале $[t_0; t_3]$, т. е.

$$\max_{x_1,x_2} \sum_{i=1}^{2} K_i(t_0, x_0, u^*(t, x_1)),$$

используя полученные результаты (1.27), (1.28), (1.31), (1.32), (1.35), (1.36) для оптимальных траектории и управлений на интервалах I_1, I_2, I_3 соответственно. Подставляя (1.27), (1.28), (1.31), (1.32), (1.35), (1.36) в подынтегральное выражение (1.23), после интегрирования получаем:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^{t_1} (u_1^*(t)_{I_1}(a_1 - \frac{1}{2}u_1^*(t)_{I_1}) + u_2^*(t)_{I_1}(a_2 - \frac{1}{2}u_2^*(t)_{I_1}) - d_1x^*(t)_{I_1} - d_2x^*(t)_{I_1})dt + \\
&(1-\rho_1)\int\limits_{t_1}^{t_2} (u_1^*(t)_{I_2}(a_1 - \frac{1}{2}u_1^*(t)_{I_2}) + u_2^*(t)_{I_2}(a_2 - \frac{1}{2}u_2^*(t)_{I_2}) - \hat{d}x^*(t)_{I_2}dt + \\
&(1-\rho_2)\int\limits_{t_2}^{t_3} (u_1^*(t)_{I_3}(a_1 - \frac{1}{2}u_1^*(t)_{I_3}) + u_2^*(t)_{I_3}(a_2 - \frac{1}{2}u_2^*(t)_{I_3}) - \hat{d}x^*(t)_{I_3}dt = \\
&= -\frac{x_1^2}{4t_1} + \frac{x_1(-\hat{a}t_1 + x_0)}{2t_1} - \frac{\hat{d}x_1t_1}{2} + (1-\rho_1)\left(-\frac{(-x_2 + x_1)^2}{4(t_2 - t_1)} + \frac{\hat{a}(-x_2 + x_1)}{2}\right) + \\
&+ (1-\rho_1)\left(\frac{\hat{d}(x_2 - x_1)(t_1 - t_2)}{2} - \hat{d}x_1(t_2 - t_1)\right) + (1-\rho_2)\hat{d}x_2(t_2 - t_3) + \\
&+ C(t_1, t_2, t_3, x_0),
\end{aligned} \tag{1.37}$$

где $C(t_1, t_2, t_3, x_0)$—выражение, не зависящее от x_1, x_2.
Нетрудно проверить, что максимум в (1.37) достигается при

$$x_1 = -\hat{a}t_1 + x_0 - \hat{d}t_1^2 + 2t_1(1-\rho_2)\hat{d}(t_2 - t_3) + 2t_1(1-\rho_1)\hat{d}(t_1 - t_2),$$

$$x_2 = -\hat{a}(t_2 - t_1) - \hat{d}(t_1 - t_2)^2 + \frac{2(1-\rho_2)\hat{d}(t_2 - t_3)(t_2 - t_1)}{1-\rho_1} + x_1.$$

Тогда искомые оптимальные управления и траектории:

$$x^*(t)_{I_1} = 2t\hat{d}(-t_1 + (1-\rho_1)(t_1 - t_2) + (1-\rho_2)(t_2 - t_3)) + \hat{d}t^2 - \hat{a}t + x_0,$$
$$u_i^*(t)_{I_1} = \hat{d}(t_1 - (1-\rho_1)(t_1 - t_2) - (1-\rho_2)(t_2 - t_3)) - \hat{d}t + a_i, \quad t \in [t_0; t_1],$$
$$x^*(t)_{I_2} = \left(-2\hat{d}t_2 + \frac{2(1-\rho_2)\hat{d}(t_2 - t_3)}{1-\rho_1}\right)(t - t_1) + \hat{d}t^2 - \hat{a}t - 2\hat{d}t_1^2 + x_0 +$$
$$+ 2t_1(1-\rho_2)\hat{d}(t_2 - t_3) + 2t_1(1-\rho_1)\hat{d}(t_1 - t_2),$$
$$u_i^*(t)_{I_2} = \hat{d}t_2 - \frac{(1-\rho_2)\hat{d}(t_2 - t_3)}{1-\rho_1} - \hat{d}t + a_i, \quad t \in (t_1; t_2],$$
$$x^*(t)_{I_3} = \hat{d}t^2 - \hat{a}t - 2\hat{d}t_3 t + 2\hat{d}t_3 t_2 - 2\hat{d}t_2^2 - 2\hat{d}t_1^2 + 2\hat{d}t_1 t_2 + x_0 +$$
$$+ \frac{2(1-\rho_2)\hat{d}(t_2 - t_3)(t_2 - t_1)}{1-\rho_1} + 2t_1(1-\rho_2)\hat{d}(t_2 - t_3) + 2t_1(1-\rho_1)\hat{d}(t_1 - t_2),$$
$$u_i^*(t)_{I_3} = -\hat{d}(t - t_3) + a_i, \quad t \in (t_2; t_3].$$

§ 1.6. Решение задачи с двумя скачками. Подход с использованием терминального выигрыша

Теперь рассмотрим предыдущий пример с точки зрения терминального выигрыша. Начнем поиск решения, начиная с интервала I_3. Значение $(1-\rho_2)\int\limits_{t_2}^{t_3}(h_1(x(t), u(t)) + h_2(x(t), u(t))dt$ будем рассматривать в качестве терминального выигрыша для интервала I_2. Подставим (1.35), (1.36) и найдем значение терминального выигрыша:

$$\Phi_3(x_2) = (1-\rho_2)\int\limits_{t_2}^{t_3}(u_1^*(t)_{I_3}(a_1 - \frac{1}{2}u_1^*(t)_{I_3}) + u_2^*(t)_{I_3}(a_2 - \frac{1}{2}u_2^*(t)_{I_3}) -$$
$$- d_1 x^*(t)_{I_2} - d_2 x^*(t)_{I_2})dt =$$
$$\frac{(t_2 - t_3)(\rho_2 - 1)}{6}(3a_1^2 + 3a_2^2 + 2\hat{d}^2(t_2 - t_3)^2 - 3\hat{a}\hat{d}t_2 + 3\hat{a}\hat{d}t_3 - 6x_2\hat{d}). \quad (1.38)$$

Интервал I_2

Рассмотрим отдельно задачу максимизации $\int\limits_{t_1}^{t_2}(h_1(x(t), u(t)) + h_2(x(t), u(t))dt$ для динамики (1.2), начального условия $x(t_1) = x_1$ и терминального выигрыша (1.38). Воспользуемся принципом максимума Понтрягина. Выпишем функцию Гамильтона:

$$H(x,u,\psi) = -\psi\sum_{i=1}^{2} u_i + (1-\rho_1)h_1(x(t),u(t)) + (1-\rho_1)h_2(x(t),u(t)) =$$

$$-\psi\sum_{i=1}^{2} u_i + (1-\rho_1)u_1(a_1 - \frac{1}{2}u_1) + (1-\rho_1)u_2(a_2 - \frac{1}{2}u_2) +$$

$$-(1-\rho_1)d_1x - (1-\rho_1)d_2x. \tag{1.39}$$

Найдем управление, максимизирующее функцию Гамильтона. Воспользуемся необходимым условием максимума:

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = -\psi + (1-\rho_1)(a_i - u_i) = 0,$$

$$u_i^*(t) = \frac{-\psi + (1-\rho_1)a_i}{(1-\rho_1)}.$$

Проверим функцию Гамильтона на выпуклость:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_i^2} = -(1-\rho_1) < 0.$$

Следовательно, найденное управление будет являться единственной точкой максимума для Гамильтониана при $t \in [t_1; t_2]$. Уравнения для сопряженной переменной:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\partial H(x,u,\psi)}{\partial x} = (1-\rho_1)\hat{d}, \quad \hat{d} = d_1 + d_2. \tag{1.40}$$

Следовательно,

$$\psi(t) = \int\limits_{t_1}^{t}(1-\rho_1)\hat{d}dt = (1-\rho_1)\hat{d}(t-t_1) + \psi_1.$$

Воспользуемся условием терминального выигрыша: (1.38)

$$\psi(t_2) = \frac{\partial\Phi_3(x_2)}{\partial x_2},$$

$$\psi(t_2) = (t_2 - t_3)(1-\rho_2)\hat{d}.$$

Тогда

$$\psi_1 = \hat{d}(t_2 - t_3)(1-\rho_2) - \hat{d}(1-\rho_1)(t_2 - t_1),$$

$$\psi(t) = \hat{d}(t_2 - t_3)(1-\rho_2) - (1-\rho_1)\hat{d}t_2 + \hat{d}t(1-\rho_1).$$

Тогда уравнение динамики:

$$\dot{x}(t) = -\sum_{i=1}^{2} u_i(t) = 2\frac{\psi}{(1-\rho_1)} - \hat{a}, \quad \hat{a} = a_1 + a_2.$$

Воспользуемся краевым условием: $x(t_1) = x_1$. Тогда искомая оптимальная траектория для интервала I_2:

$$x^*(t)_{I_2} = \frac{2\hat{d}(t_2-t_3)(1-\rho_2)(t-t_1)}{1-\rho_1} + \hat{d}(t^2-t_1^2) - \\ -\hat{a}(t-t_1) - 2\hat{d}t_2(t-t_1) + x_1. \tag{1.41}$$

Оптимальные управления игроков для интервала I_2:

$$u_i^*(t)_{I_2} = -\frac{\hat{d}(t_2-t_3)(1-\rho_2)}{(1-\rho_1)} + \hat{d}t_2 - \hat{d}t + a_i. \tag{1.42}$$

При этом $x^*(t_2)_{I_2} = x_2$, следовательно

$$x_2 = -\hat{a}(t_2-t_1) - \hat{d}(t_1-t_2)^2 + \frac{2(1-\rho_2)\hat{d}(t_2-t_3)(t_2-t_1)}{1-\rho_1} + x_1. \tag{1.43}$$

Теперь значение $(1-\rho_1)\int\limits_{t_1}^{t_2}(h_1(x(t),u(t)) + h_2(x(t),u(t))dt + \Phi_3(x_2)$ будем рассматривать в качестве терминального выигрыша для интервала I_1. Подставим (1.41), (1.42), (1.43) и найдем значение термильного выигрыша:

$$\Phi_2(x_1) = (1-\rho_1)\int\limits_{t_1}^{t_2}(u_1^*(t)_{I_2}(a_1 - \frac{1}{2}u_1^*(t)_{I_2}) + u_2^*(t)_{I_2}(a_2 - \frac{1}{2}u_2^*(t)_{I_2}) - d_1 x^*(t)_{I_2} + \\ -d_2 x^*(t)_{I_2})dt = \\ = (1-\rho_1)\hat{d}x_1(t_1-t_2) + (1-\rho_2)(t_2-t_3)\hat{d}x_1 + C(t_1,t_2,t_3), \tag{1.44}$$

где $C(t_1,t_2,t_3)$ — выражение, не зависящее от x_1.

Интервал I_1

Рассмотрим отдельно задачу максимизации $\int\limits_{t_0}^{t_1}(h_1(x(t),u(t)) + h_2(x(t),u(t))dt +$ $\Phi_2(x_1)$ для динамики (1.2), начального условия $x(t_0) = x_0$ и терминального выигрыша (1.44). Воспользуемся принципом максимума Понтрягина. Выпишем функцию Гамильтона:

$$H(x,u,\psi) = -\psi\sum_{i=1}^{2} u_i + h_1(x(t),u(t)) + h_2(x(t),u(t)) =$$
$$-\psi\sum_{i=1}^{2} u_i + u_1(a_1 - \frac{1}{2}u_1) + u_2(a_2 - \frac{1}{2}u_2) - d_1 x - d_2 x. \tag{1.45}$$

Найдем управление максимизирующее, функцию Гамильтона. Воспользуемся необходимым условием максимума:

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = -\psi + (a_i - u_i) = 0,$$

$$u_i^*(t) = -\psi + a_i.$$

Проверим функцию Гамильтона на выпуклость:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_i^2} = -1 < 0.$$

Следовательно, найденное управление будет являться единственной точкой максимума для Гамильтониана при $t \in [0; t_1]$. Уравнения для сопряженной переменной:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial H(x,u,\psi)}{\partial x} = \hat{d}, \quad \hat{d} = d_1 + d_2. \tag{1.46}$$

Следовательно,

$$\psi(t) = \psi_0 + \hat{d}t,$$

$$u_i^*(t) = -\psi_0 - \hat{d}t + a_i.$$

Тогда уравнение динамики:

$$\dot{x}(t) = -\sum_{i=1}^{2} u_i(t) = 2\psi_0 + 2\hat{d}t - \hat{a}, \quad \hat{a} = a_1 + a_2.$$

Воспользуемся краевым условием:

$$x(0) = x_0, \tag{1.47}$$

$$x(t) = 2\psi_0 t + \hat{d}t^2 - \hat{a}t + x_0.$$

Воспользуемся условием терминального выигрыша: (1.44)

$$\psi(t_1) = \frac{\partial \Phi(x_1)}{\partial x_1},$$

$$\psi(t_1) = (t_1 - t_2)(1-\rho_1)\hat{d} + (t_2 - t_3)(1-\rho_2)\hat{d}.$$

Тогда
$$\psi_0 = (t_1 - t_2)(1-\rho_1)\hat{d} + (t_2 - t_3)(1-\rho_2)\hat{d} - \hat{d}t_1.$$

Оптимальные управления игроков для интервала I_1:

$$u_i^*(t)_{I_1} = -(t_1 - t_2)(1-\rho_1)\hat{d} - (t_2 - t_3)(1-\rho_2)\hat{d} + \hat{d}t_1 - \hat{d}t + a_i. \quad (1.48)$$

Оптимальная траектория игроков для интервала I_1:

$$x_{I_1}^*(t) = 2((t_1 - t_2)(1-\rho_1)\hat{d} + (t_2 - t_3)(1-\rho_2)\hat{d} - \hat{d}t_1)t + \hat{d}t^2 - \hat{a}t + x_0. \quad (1.49)$$

Знаем, что $x_{I_1}^*(t_1) = x_1$, следовательно,

$$x_1 = 2((t_1 - t_2)(1-\rho_1)\hat{d} + (t_2 - t_3)(1-\rho_2)\hat{d})t_1 - \hat{d}t_1^2 - \hat{a}t_1 + x_0. \quad (1.50)$$

Подставляя (1.43), (1.50) в (1.35), (1.36), (1.41), (1.42) получаем искомые оптимальные управления и траектории:

$$\begin{aligned}
&x^*(t)_{I_1} = 2t\hat{d}(-t_1 + (1-\rho_1)(t_1 - t_2) + (1-\rho_2)(t_2 - t_3)) + \hat{d}t^2 - \hat{a}t + x_0,\\
&u_i^*(t)_{I_1} = \hat{d}(t_1 - (1-\rho_1)(t_1 - t_2) - (1-\rho_2)(t_2 - t_3)) - \hat{d}t + a_i, \quad t \in [t_0; t_1],\\
&x^*(t)_{I_2} = \left(-2\hat{d}t_2 + \frac{2(1-\rho_2)\hat{d}(t_2 - t_3)}{1-\rho_1}\right)(t - t_1) + \hat{d}t^2 - \hat{a}t - 2\hat{d}t_1^2 + x_0+\\
&+ 2t_1(1-\rho_2)\hat{d}(t_2 - t_3) + 2t_1(1-\rho_1)\hat{d}(t_1 - t_2),\\
&u_i^*(t)_{I_2} = -\frac{\hat{d}(t_2 - t_3)(1-\rho_2)}{(1-\rho_1)} + \hat{d}t_2 - \hat{d}t + a_i, \quad t \in (t_1; t_2],\\
&x^*(t)_{I_3} = \hat{d}t^2 - \hat{a}t - 2\hat{d}t_3 t + 2\hat{d}t_3 t_2 - 2\hat{d}t_2^2 - 2\hat{d}t_1^2 + 2\hat{d}t_1 t_2 + x_0+\\
&+ \frac{2(1-\rho_2)\hat{d}(t_2 - t_3)(t_2 - t_1)}{1-\rho_1} + 2t_1(1-\rho_2)\hat{d}(t_2 - t_3) + 2t_1(1-\rho_1)\hat{d}(t_1 - t_2),\\
&u_i^*(t)_{I_3} = -\hat{d}(t - t_3) + a_i, \quad t \in (t_2; t_3].
\end{aligned}$$

§ 1.7. Сравнение результатов, анализ

При помощи метода параметризации и метода терминального выигрыша были получены одинаковые выражения для оптимальных управлений и траекторий для задачи с двумя разрывами функции распределения. В обоих подходах был применен принцип максимума Понтрягина.
Ввиду того, что метод параметризации с точки зрения вычислений проще, это делает его приоритетным при решении задач данного типа.

§ 1.8. Обобщение алгоритма

На основе полученных выше результатов, можно сделать вывод, что использование параметров и разбиение задачи на интервалы позволяет проще вычислить оптимальные управления и траектории для дифференциальной игры со случайным моментом окончания, подчиняющимся дискретному распределению. В таком случае решение задачи можно разбить на несколько этапов.

Пусть $\{t_1, t_2, ..., t_k\}$ — моменты времени, в которые происходят разрывы функций распределения для обоих игроков,

1. Нахождение функции распределения $F(t)$.
2. Решение на интервале $I_1 = [t_0; t_1]$ с помощью принципа максимума Понтрягина задачи с закрепленными концами: $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, где x_1 — введенный параметр.
3. Решение на интервале $I_i = [t_{i-1}; t_i]$ с помощью принципа максимума Понтрягина задачи с закрепленными концами: $x(t_{i-1}) = x_{i-1}$, $x(t_i) = x_i$, $i = \overline{2, k-1}$, где x_{i-1}, x_i — введенные параметры.
4. Решение на интервале $I_k = [t_{k-1}; t_k]$ задачи с незакрепленным правым концом: $x(t_{k-1}) = x_{k-1}$, где x_{k-1} — введенный параметр.
5. Нахождение параметров $x_1, \ldots, x_{k-1}$ из условия максимизации суммарного выигрыша.
6. Получение окончательных выражений для оптимальных траекторий и управлений на интервалах.

В общем случае, параметры, оптимальные управления и траектории имеют вид:

$$x_1 = -\hat{a}t_1 + x_0 - \hat{d}t_1^2 + \sum_{i=1}^{k-1} 2t_1(1-\rho_i)\hat{d}(t_i - t_{i+1}),$$

$$x_i = -\hat{a}(t_i - t_{i-1}) - \hat{d}(t_{i-1} - t_i)^2 + \frac{2(1-\rho_i)\hat{d}(t_i - t_{i+1})(t_i - t_{i-1})}{1-\rho_{i-1}} + x_{i-1},$$
$$i = \overline{2, k-1}.$$

$$x^*(t)_{I_1} = \hat{d}(t^2 - 2t_1 t) - \hat{a}t + x_0 + \sum_{i=1}^{k-1} 2\hat{d}(1-\rho_i)(t_i - t_{i+1})t,$$

$$u_i^*(t)_{I_1} = -\sum_{i=1}^{k-1} \hat{d}(1-\rho_i)(t_i - t_{i+1}) - \hat{d}(t - t_1) + a_i, \quad t \in [t_0; t_1],$$

$$x^*(t)_{I_i} = \left(-2\hat{d}t_i + \frac{2(1-\rho_i)\hat{d}(t_i - t_{i+1})}{1-\rho_{i-1}}\right)(t - t_{i-1}) + \hat{d}t^2 - \hat{a}t - \sum_{l=1}^{i-1} 2\hat{d}t_l^2 +$$

$$+ x_0 + \sum_{l=1}^{i} 2t_1(1-\rho_l)\hat{d}(t_l - t_{l+1}),$$

$$u_i^*(t)_{I_i} = -\frac{\hat{d}(t_i - t_{i+1})(1-\rho_i)}{(1-\rho_{i-1})} + \hat{d}t_i - \hat{d}t + a_i, \quad t \in (t_{i-1}; t_i], \quad i = \overline{2, k-1}$$

$$x^*(t)_{I_k} = \hat{d}t^2 - \hat{a}t - 2\hat{d}t_k t + \sum_{i=1}^{k-1} 2\hat{d}t_i t_{i+1} - \sum_{i=1}^{k-1} 2\hat{d}t_i^2 + x_0 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k-1} 2t_1(1-\rho_i)\hat{d}(t_i - t_{i+1}) + *,$$

$$u_i^*(t)_{I_k} = -\hat{d}(t - t_k) + a_i, \quad t \in (t_{k-1}; t_k],$$

$$* = \begin{cases} 0 & k = 2, \\ \frac{2(1-\rho_{k-1})\hat{d}(t_{k-1} - t_k)(t_{k-1} - t_{k-2})}{1-\rho_{k-2}} & k > 2. \end{cases}$$

Данный алгоритм можно применять для других математических моделей схожего типа.

Глава 2.

Математическая модель разработки ресурсов со случайным моментом окончания непрерывного типа

§ 2.1. Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальную игру n лиц, в которой моменты окончания процесса для игроков подчиняются непрерывному распределению. В этом случае интегральный выигрыш i-ого игрока, $i = \overline{1, n}$, может быть представлен в виде:

$$K_i(x_0, t_0, u_1, \dots, u_n) = \int\limits_0^{\infty} \int\limits_0^{t} h_i(\tau) d\tau dF(t) = \int\limits_0^{\infty} (1 - F(\tau)) h_i(\tau) d\tau, \tag{2.1}$$

если выполняются следующие условия [20]:

1. $$\lim_{T_f \to \infty} (1 - F(T_f)) \int\limits_0^{T_f} h_i(x(t), u(t)) dt = 0,$$

2. $$\int\limits_{t_0}^{\infty} \left| \int\limits_{t_0}^{t} h_i(x(\tau), u(\tau)) d\tau \right| dF(t) < +\infty.$$

Рассмотрим дифференциальную игру, в которой момент окончания T — случайная величина с функцией распределения $F(t) = 1 - e^{-e^t}$, что соответствует распределению Гумбеля [24] (Рис. 2.1). Динамика игры задается системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t) = -\sum_{i=1}^{2} u_i(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 = 0. \tag{2.2}$$

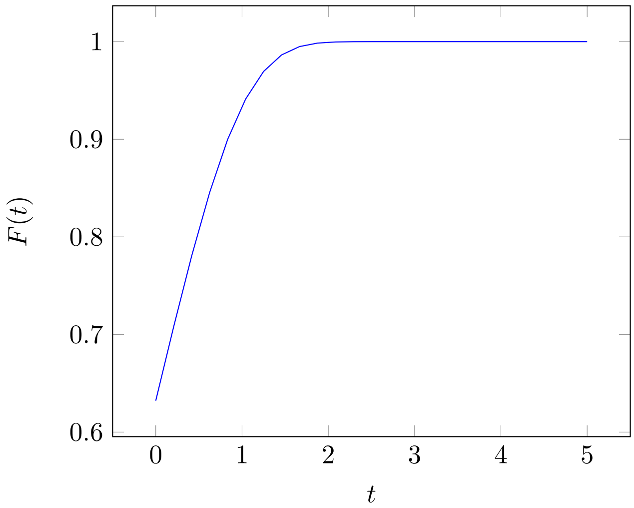

Рис. 2.1: Функция распределения $F(t)$

Рассмотрим квадратичную функцию мгновенного выигрыша:

$$h_i(x,u) = r_i(u(t)) - d_i x(t), \quad r_i(u_i(t)) = u_i(t)(a_i - \frac{1}{2}u_i(t)), \tag{2.3}$$
$$a_i, d_i > 0, \quad \forall i = \overline{1,n}.$$

Будем искать решение задачи в программных стратегиях. Управления $u \in U$, где U — выпуклое компактное множество. Областью допустимых значений управлений является отрезок: $u_i \in [0; a_i]$. Пусть $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))$. Ожидаемый выигрыш игрока i для рассматриваемой модели имеет вид:

$$K_i(0, x_0, u) = \int\limits_0^{\infty} \int\limits_0^{t} (r_i(u(\tau)) - d_i x(\tau)) d\tau e^{t-e^t} dt, \tag{2.4}$$

который может быть представлен в виде (2.1), при условии, что будут выполнены два условия, введенные выше. Для проверки существования интеграла используем следующие оценки:

$$|x(t)| \leq x_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i t = x_0 + At, \quad A = \sum_{i=1}^{n} a_i, \quad r_i(u) \leq \frac{a_i^2}{2}.$$

Проверим условие сходимости интеграла:

$$\int\limits_0^\infty \left|\int\limits_0^t h_i(x(t),u(t))\right| dF(t) = \int\limits_0^\infty \left|\int\limits_0^t r_i(u(\tau)) - d_i x(\tau) d\tau\right| e^{t-e^t} dt \leq$$

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^t |r_i(u(\tau)) - d_i x(\tau)| d\tau e^{t-e^t} dt \leq \int\limits_0^\infty \int\limits_0^t |r_i(u(\tau))| + |d_i x(\tau)| d\tau e^{t-e^t} dt \leq$$

$$\leq \int\limits_0^\infty (\frac{a_i^2}{2} t + d_i(x_0 t + \frac{At^2}{2})) e^{t-e^t} dt. \tag{2.5}$$

Для определения сходимости интеграла рассмотрим отдельно интеграл

$$\int\limits_0^\infty t e^{t-e^t} dt.$$

Используем метод интегрирования по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du, \quad u = t, \quad du = dt, \quad dv = e^{t-e^t}, \quad v = -e^{-e^t}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^\infty t e^{t-e^t} dt = -t e^{-e^t}|_0^\infty + \int\limits_0^\infty e^{-e^t} dt.$$

Оба слагаемых стремятся к 0 на бесконечности(второй – из квадратурной формулы Лобатто [25]). Следовательно данный интеграл является сходящимся.

Аналогичным образом проверяется сходимость

$$\int\limits_0^\infty t^2 e^{t-e^t} dt.$$

Следовательно, интеграл (2.5) является сходящимся.

Проверим выполнение первого условия:

$$\lim_{T_f\to\infty} (1 - F(T_f)) \int\limits_0^{T_f} h_i(x(t), u(t) dt = \lim_{T_f\to\infty} e^{-e^{T_f}} \int\limits_0^{T_f} r_i(u(t)) - d_i x(t) dt.$$

Применим полученные ранее оценки:

$$\left| e^{-e^{T_f}} \int_0^{T_f} r_i(u(t)) - d_i x(t) dt \right| \leq e^{-e^{T_f}} \left(\frac{a_i^2}{2} T_f + d_i(x_0 T_f + \frac{AT_f^2}{2}) \right).$$

Заметим, что

$$\lim_{T_f \to \infty} e^{-e^{T_f}} \left(\frac{a_i^2}{2} T_f + d_i(x_0 T_f + \frac{AT_f^2}{2}) \right) = 0,$$

следовательно, верно:

$$\lim_{T_f \to \infty} e^{-e^{T_f}} \int_0^{T_f} r_i(u(t)) - d_i x(t) dt = 0,$$

Таким образом, оба условия выполнены, и выигрыш (2.4) имеет вид

$$K_i(0, x_0, u) = \int_0^{\infty} (r_i(u(t)) - d_i x(t)) e^{-e^t} dt. \tag{2.6}$$

§ 2.2. Кооперативная форма игры

Рассмотрим кооперативную форму игры. Тогда задача оптимального управления заключается в максимизации суммарного выигрыша игроков:

$$\max_{u_1,\dots,u_n} \sum_{i=1}^{2} K_i(t_0, x_0, u_1, u_2) = \int_{t_0}^{\infty} e^{-e^t} ((r_1(u^*(t)) - d_1 x^*(t)) +$$
$$+ (r_2(u^*(t)) - d_2 x^*(t)) + \dots + (r_n(u^*(t)) - d_n x^*(t))) dt \tag{2.7}$$

где $x^*(t)$, $u^*(t)$ — оптимальные траектория и управления соответственно. Воспользуемся принципом максимума Понтрягина. Выпишем функцию Гамильтона:

$$H(x, u, \psi) = -\psi \sum_{i=1}^{2} u_i + (u_1(a_1 - \frac{1}{2}u_1) - d_1 x + u_2(a_2 - \frac{1}{2}u_2) - d_2 x + \dots +$$
$$+ u_n(a_n - \frac{1}{2}u_n) - d_n x) e^{-e^t}. \tag{2.8}$$

Найдем управление, максимизирующее функцию Гамильтона. Воспользуемся необходимым условием максимума:

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = -\psi + (a_i - u_i)e^{-e^t} = 0,$$

$$u_i^*(t) = \frac{-\psi}{e^{-e^t}} + a_i.$$

Проверим функцию Гамильтона на выпуклость:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_i^2} = -e^{-e^t} < 0.$$

Следовательно, найденное управление будет являться единственной точкой максимума для Гамильтониана.
Тогда уравнение динамики:

$$\dot{x}(t) = -\sum_{i=1}^{2} u_i(t) = \frac{2\psi}{e^{-e^t}} - \hat{a}, \quad \hat{a} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Уравнения для сопряженной переменной:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial H(x,u,\psi)}{\partial x} = \hat{d}e^{-e^t}, \quad \hat{d} = d_1 + d_2 + \cdots + d_n, \tag{2.9}$$

$$\psi(t) = \int_0^t \hat{d}e^{-e^t}dt.$$

Для нахождения интеграла воспользуемся заменой переменных:

$$t = \ln q, \quad \psi(t) = \hat{d}\int_1^{e^t} e^{-e^{\ln q}} d\ln q = \hat{d}\int_1^{e^t} \frac{e^{-q}}{q} dq = \hat{d}(Ei(-e^t) - Ei(-1)) + C,$$

где C — константа.
Условие трансверсальности:

$$\psi(\infty) = 0.$$

Известно, что

$$\lim_{x\to\infty} Ei(-x) = 0,$$

следовательно $\psi(t) = \hat{d}Ei(-e^t)$.
Искомое оптимальное управление:

$$u_i^*(t) = \frac{-\hat{d}Ei(-e^t)}{e^{-e^t}} + a_i, \quad i = \overline{1,n}, \quad Ei(-e^t) = \int \frac{e^{-q}}{q} dq|_{-e^t}.$$

Таким образом, были получены оптимальные управления для дифференциальной игры с функцией распределения, подчиняющейся распределению Гумбеля. Предполагаем, что параметры модели a_i, d_i накладывают ограничения, обеспечивающие, что $u_i^*(t)$ находятся в $[0; a_i]$.
График оптимального управления при $\hat{d} = 5$, $a_i = 10$ (Рис. 2.2).

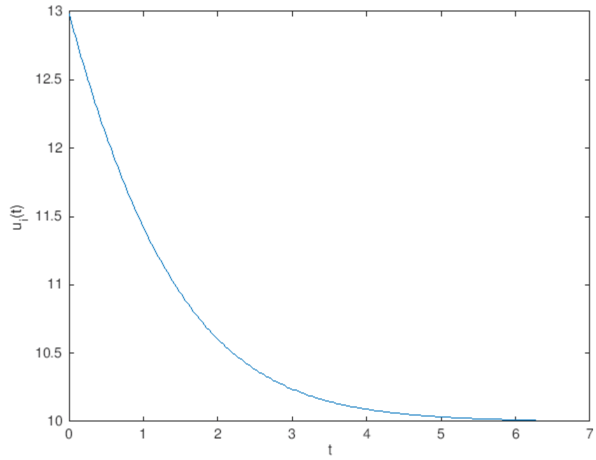

Рис. 2.2: Оптимальное управление $u_i^*(t)$

Вывод

В работе был исследован новый класс дифференциальных игр со случайной продолжительностью. Были рассмотрены игры с дискретным моментом окончания, имеющим разрывы первого рода. Также была исследована игра с непрерывным моментом окончания. В исследовании задачи нахождения оптимальных управлений и траекторий был применен принцип максимума Понтрягина.

При исследовании примера, в котором момент окончания подчиняется распределению Гумбеля, были выявлены сложности с получением аналитического решения задачи. Из чего можно сделать вывод, что при моделировании процесса следует использовать модели из 1 части данной работы.

Дальнейшее исследование может заключаться в рассмотрении задачи с бесконечным числом разрывов функции распределения для различных математических моделей.

Заключение

В данной работе была описана модель игры, которая может быть использована для решения задач разработки невозобновляемых природных ресурсов.

В ходе проделанной работы были построены модели для различных типов функции распределения моментов окончания игры.

Для задач с дискретным распределением был применен новый метод решения — параметризация. С помощью данного метода были найдены оптимальные управления, а также проведено сравнение полученных результатов с выражениями, полученными при решении задач, используя подход с использованием терминального выигрыша.

Также в работе был предложен обобщенный алгоритм решения задачи с конечным числом разрывов ступенчатой функции распределения.

Кроме того, в работе была изучена модель, в которой момент окончания подчиняется непрерывному распределению. Были проверены условия возможности представления интегрального выигрыша в упрощенном виде. В качестве распределения для случайного момента окончания игры было использовано распределение Гумбеля.

Список литературы

[1] Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.

[2] Петросян Л. А. Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977.

[3] Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.

[4] Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1974. 456 с.

[5] Понтрягин Л. С. К теории дифференциальных игр // Успехи математических наук, 21, 4 (130), 1966. С. 219–274.

[6] Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е. В. Теория игр. СПб.: БХВ-Петербург, 2012. 432 с.

[7] Yaari M. E. Uncertain lifetime, life insurance and the theory of the consumer. Review of Economic Studies, vol. 32, № 2, 1965, p. 137–150.

[8] Петросян Л. А., Мурзов Н. В. Теоретико-игровые задачи механики // Литовский математический сборник. Вильнюс. 1966. С. 423–432.

[9] Петросян Л. А., Шевкопляс Е. В. Кооперативные дифференциальные игры со случайной продолжительностью // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2000. № 4. С. 14–18.

[10] Шевкопляс Е. В. Устойчивая кооперация в дифференциальных играх со случайной продолжительностью // Управление большими системами. 2010. № 31-1. С. 162–190.

[11] Малахова А. П. О динамической устойчивости принципов оптимальности в одной дифференциальной игре со случайным моментом окончания // Процессы управления и устойчивость. 2017. Т. 4. № 1. С. 652–656.

[12] Gromova E. V., Malakhova A. P. Strongly Time-Consistent Core in Differential Games with Discrete Distribution of Random Time Horizon// MATHEMATICA APPLICANDA, 2018. P. 197–209.

[13] Finkelstein M. Failure Rate Modelling for Reliability and Risk, 2008. 290 p.

[14] Dockner E. J., Jorgensen S., Long N. V., Sorger G. Differential Games in Economics and Management Science, Cambridge Books, 2000. 396 p.

[15] Haurie A., Krawczyk J. B., Zaccour G. Games and Dynamic Games, 2012. 488 p.

[16] Gromova E. V., Tur A. V. On the form of integral payoff in differential games with random duration //XXVI International Conference on Information, Communication and Automation Technologies (ICAT), IEEE, 2017.

[17] Малахова А. П. Дифференциальные игры с разрывной функцией распределения момента окончания, 2018.

[18] Gromova E. V., Tur A. V, Balandina L. I. A game-theoretic model of pollution control with asymmetric time horizons // Contributions to Game Theory and Management, V. 9, 2016. P. 170–179.

[19] Петросян Л. А., Данилов Н. А. Устойчивые решения неантагонистических дифференциальных игр с транзитивными выигрышами // Вестник ЛГУ, 1979. №1. С. 46–54.

[20] Костюнин С. Ю., Шевкопляс Е. В. Об упрощении интегрального выигрыша в дифференциальных играх со случайной продолжительностью // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2011. № 4. С. 47–56.

[21] Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003. 617 с.

[22] Понтрягин Л. С. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961. 392 с.

[23] Буре В. М., Парилина Е. М. Теория вероятностей и математическая статистика. СПб.: Лань, 2013, 416 с. С. 151–152.

[24] Гумбель Э. Статистика экстремальных значений. М.: Мир, 1965. 453 с.

[25] Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. 6 изд. М.: Бином, 2008. 636 с.