Санкт-Петербургский государственный университет
**Факультет прикладной математики – процессов управления**
Кафедра теории игр и статистических решений

**Серебрякова Виктория Олеговна**

**Выпусная квалификационная работа бакалавра**

# Моделирование контрактов в условиях асимметричной информации

Направление 01.03.02
«Прикладные математика и информатика»
Основная образовательная программа СВ.5005.2015
«Прикладная математика, фундаментальная информатика и программирование»

Научный руководитель,
кандидат физ.-мат. наук,
старший преподаватель Кумачева С.Ш.

Санкт-Петербург
2019

# Оглавление

# 1. Введение

**Теория принятия решений** – это раздел науки, который охватывает математические, экономические и статистические методы с целью выявления особенностей поведения индивидов при взаимодействии друг с другом [6]. Данная область помогает участникам отношений (агентам) найти точки соприкосновения с учетом их мотивации и предпочтений для установления компромисса. Так как агенты работают в условиях ограниченности ресурсов, их действия не всегда могут быть эффективными.

Часто данная теория рассматривает взаимоотношения внутри фирмы между директором (управляющим) и менеджером (подчиненным). В большинстве случаев агенты не являются постоянными сотрудниками фирмы, так как директор нанимает их для улучшения ключевых показателей, после чего их работа завершается. Для того, чтобы агенты выполняли свою работу, не отклоняясь от целей директора, которые в большинстве случаев связаны с максимизацией возможной прибыли и минимизацией затрат, между участниками сделки заключаются контракты. Подробное описание этого процесса было вынесено в отдельный раздел теории принятия решений - контрактную теорию [2].

**Контрактная теория** отражает все возможные бонусы и штрафы, которые должен установить директор, предлагая работу тому или иному агенту. Это требование способствует фирме избежать контрактных разногласий и помогает минимизировать угрозу искажения данных в работе, которая связана с так называемым моральным риском. Он возникает вследствие асимметричности информации, то есть неравномерного распределения информации между участниками сделки. В силу невозможности проверки качества работы непосредственно на этапе ее выполнения, агент может обладать сведениями, которые недоступны директору. Тем самым он использует их ради возможной личной выгоды, увеличивая собственную полезность в ущерб другим, также не исключается вероятность его ошибок [4]. Важно заметить, что контракты не всегда имеют письменный вид. Иногда они могут заключаться словесно или по договоренности. Если директор не будет фиксировать свои цели строго с помощью контрактов, это может привести к крупным издержкам, что является невыгодным для его предприятия.

Для того, чтобы лучше понять структуру данных взаимодействий, была изучена статья [9], в которой подробно описаны контракты между принципалом и агентом, отвечающим за правдивую информацию о скачках производительности. Скачки производительности – это показатель прибыльности производства какого-либо товара или услуги. Они зависят от многих факторов, в том числе, географических, социальных или политических. Информация о них складывается из информации о скачках, добытых из разных источников. В [9] работа агента делится на два этапа – непосредственно сбор информации о скачках и определение дальнейших операционных усилий для поиска их настоящего значения. Ключевым фактором при описании соглашений являлся пессимизм агента, то есть его склонность наблюдать слишком маленькие скачки или сбор чрезмерного количества информации, которая оказывается лишней. Причиной пессимизма является то, что принципал и агент имеют разные субъективные представления о ценности сбора информации. Для нахождения компромисса между директором и агентом была выбрана модель линейного контракта, при котором разобраны различные варианты выполнения работы на данных этапах – когда результаты могут быть проверены и когда нет. Также особое внимание уделялось моральному риску, а точнее вероятности того, что само наличие контракта изменит поведение одной из сторон. В статье была представлена общая математическая концепция, однако ничего не говорилось об оценке качества проведенной агентом работы.

**Текущая научно-исследовательская работа** связана с построением экономической модели вида «принципал-агент»[2]. В данной модели за итоговую прибыль проекта отвечают два агента, один из которых занимается сбором информации о всевозможных скачках производительности, а второй — определением истинного значения скачка путем необходимых операционных усилий, основанных на полученных данных. Такое разделение полномочий нужно для того, чтобы избежать уклонения от целей директора, относящихся к оптимизации прибыли. Также оно учитывает тот факт, что на практике чаще всего агенты являются специалистами в какой-то узкой области своей деятельности и не могут отвечать сразу за несколько сложных процессов. Будем считать, что агенты работают независимо. Тем самым исключается возможность сговора.

Первый раздел текущей работы посвящен изложению основных понятий. Второй раздел содержит в себе обзор используемой литературы. В третьем разделе дана словесная формулировка основной задачи. Определены цели каждого из участников сделки с учетом особенностей их профессиональных навыков. Четвертый раздел посвящен математическому описанию рассматриваемых процессов, получены стратегии первого и второго агентов, а также определена итоговая функция прибыли всего проекта. Пятый и шестой разделы основаны на построении функций выигрыша для информатора и аналитика соответственно. Вычисления выполнены с учетом специфики их работы. В седьмом разделе обобщены выводы, полученные в двух предыдущих главах и найдено оптимальное решение для всех участников, заключающих контракт. Восьмой раздел посвящен анализу всех полученных ранее результатов, осуществлена проверка требуемых условий заключения контракта, выявлены особенности поведения агентов. Девятый раздел описывает бонусы и штрафы, которые устанавливает принципал для рациональности действий агентов. Десятый раздел собирает все выводы и результаты по проделанной работе.

## 2. Обзор литературы

Областью исследования, затронутой в данной работе, является один из разделов современной теории принятия решений [6]. В источниках, посвященных основам экономического анализа и институциональной экономики [4], данная область определена как контрактная теория. Текущее исследование основано на модели «принципал-агент» [2],[4], имеющей постановку в теории принятия решений, экономике, и теории игр.

Стимулом к исследованию задач моделирования контрактов послужило ознакомление с работой [9], в которой были изложены основные теоретические принципы построения оптимального контракта. Более тщательного изучения и анализа потребовало одно из ключевых понятий статьи – скачки производительности. Для детальной проработки этого понятия была рассмотрена статья [8], отдельные разделы которой помогли сформировать понимание того, как полученная о производстве информация может влиять на оптимизацию проекта.

Для определения стратегии первого агента использовалось понятие информации Фишера, заимствованное из классической теории вероятностей [3]. Также дополнительно были изучены источники [1] и [5] для уточнения сведений про свойства непрерывной случайной величины и построение функции правдоподобия. Формирование функции операционных усилий второго агента, связанное с идеей поиска необходимой информации, основано на теории оптимального поиска [7].

# 3. Постановка задачи

**Основная цель работы** – построение модели взаимосвязанных согласованных механизмов принятия решений в условиях асимметричной информации при взаимодействии двух агентов и директора внутри фирмы. Решением проблемы согласованности действий и создания совместных стимулов является составление полного контракта.

Для достижения данной цели были обозначены следующие **задачи**:

1) Построить математическую модель, описывающую поведение участников.

2) Получить математическую интерпретацию стратегий информатора, аналитика и директора.

3) Определить функции выигрыша каждого агента, которые бы зависели от итоговой прибыли реализуемого проекта и проделанной ими работы.

4) Найти оптимальные в смысле максимизации прибыли решения для двух агентов, при этом необходимо, чтобы они удовлетворяли условию максимизации прибыли фирмы.

5) Провести параметрический анализ полученных результатов.

6) Выявить особенности выполнения работы на каждом этапе.

7) Установить требования директора к первому и второму агенту для достижения соглашения.

## 3.1. Определение целей участников

Перед дальнейшим формированием модели зададим следующие ключевые понятия:

$\boldsymbol{\theta}$ – скачки производительности, которые директор получает в результате работы его предприятия. Это тот показатель рентабельности, который передают ему сотрудники данной организации [8]. По предположению модели скачки распределены нормально с параметрами 0 и $\tilde{\sigma^2}$.

$\overline{\boldsymbol{\theta}}$ – это те скачки производительности, которые обнаружил первый агент; они также характеризуют рентабельность [8]. С математической точки зрения они представлены вектором, компонентами которого являются $N$ случайных величин, нормально распределенных с параметрами 0 и $\sigma^2$. Именно из $N$ данных $\overline{\theta}$ второй агент выбирает единственное значение истинного скачка.

**Цель первого агента (информатора)** – собрать необходимую информацию о скачках производительности, которые происходят внутри предприятия, и передать её второму агенту для дальнейшего анализа. При данной формулировке стратегией первого агента будут являться реальные скачки производительности а также объем информации, которую ему удастся найти. Его работу по сбору данных будем называть функцией информации и обозначать как $I(\overline{\theta})$.

Стоит отметить, что при реализации данной цели агент сталкивается с издержками $\beta I$, зависящими непосредственно от объема собираемой информации и связанными с платой за доступ к производству. Другими словами, агенту не всегда удается собрать необходимые сведения бесплатно, так как работники фирмы могут быть против данного расследования.

**Цель второго агента (аналитика)** – поиск истинного значения скачка производительности среди всех данных, которые удалось получить информатору. Процесс поиска в дальнейшем будем называть операционными усилиями и обозначать $e(\overline{\theta})$. Данные усилия непосрдедственно зависят от $\overline{\theta}$, пришедших к нему от первого агента. Построение надлежащей функции будет основано на теории оптимального поиска [7].

При осуществлении своей деятельности второй агент не сталкивается напрямую с издержками, так как у него уже есть вся информация. Однако он может искать скачок слишком долго для того, чтобы получать фиксированные выплаты. В противном случае его деятельность будет медленной и малоэффективной, что не совпадает с планами принципала. В данной ситуации второй агент предоставит директору ложную информацию, которая никак не сможет помочь производству. Чтобы избежать таких искажений, при построении модели будет введен в рассмотрение коэффициент добросовестности $k$ второго агента.

Следует обозначить, что стратегией выигрыша аналитика является обработка информации, которую он получает от первого агента, то есть добросовестный поиск точного значения скачка производительности.

**Цель принципала (директора)** – максимизация прибыли от реализуемого проекта. Директор стремится понять, действительно ли сотрудники фирмы скрывают от него какую-то информацию о доходе, или же работают добросовестно. В данной модели принципал не рассматривается как отдельный член процесса, так как он не принимает участия непосредственно в решении поставленной цели. Он лишь устанавливает ограничения для агентов, выполнение которых ведет к достижению нужного ему результата.

Правильное построение функций выигрыша $U$ и $V$ для первого и второго агентов соответственно, а также учет сопутствующих требований, ведет к составлению полного контракта в условиях данной задачи. Таким образом будут учтены все возможные варианты развития событий как для агентов, так и для принципала.

# 4. Построение модели

Составление контрактов между участниками сделки требуется для обеспечения выполнения условий, которые выдвигает каждая сторона. Данная модель взаимоотношений требует математического описания с учетом приближения к реальным процессам для дальнейшего использования полученных выводов. Опираясь на значимость четкого управления процессами, можно облегчить директору выбор агентов и нанимать только тех, которые согласны на данный контракт.

Регулирование действий принципала и агентов будет представлено последовательно, с выявлением их характеристик и особенностей выполнения работы. В первой части данной главы рассмотрена деятельность первого агента, во второй – второго. Для достижения компромисса в третьей части главы введена функция итоговой прибыли от проекта. Последующие главы посвящены построению функций выигрыша информатора и аналитика, а также анализу полученных результатов.

## 4.1. Информация

Задача первого агента заключается в сборе информации о возможных скачках производительности $\overline{\theta}$. С целью устранения вероятности передачи неправильной информации, директор не сообщает информатору $\theta$. Текущий раздел посвящен математическому описанию данной деятельности с учетом пожеланий принципала. Для этого требется определить функцию информации $I(\overline{\theta})$, которая зависит от нескольких параметров:

1) *Объем информации*

Для того, чтобы понять, от чего будет заисеть данный параметр, воспользуемся информацией Фишера. Так как в предположении модели $\overline{\theta}$ распределена нормально с известным математическим оиданием, задача сводится к определению информации о неизвестном параметре – дисперсии.

**Определение.** *Информация Фишера* [3] – это объем информации о параметре распределения, содержащемся в наблюдении $\overline{\theta}$, который определяется следующим выражением:

$$I_N(p) = E_p\left[\left(\frac{\partial}{\partial p}\ln L(\overline{\theta}_1, ..., \overline{\theta}_N|p)\right)^2\right],$$

где $N$ – количество наблюдений, $p$ – совокупность параметров модели (в данном случае это $\mu$ и $\sigma^2$), $L$ – функция правдоподобия[5].

В случае, когда выборка представлена одним наблюдением, $I_N(p)$ может быть записана в виде

$$I(p) = E_p\left[\frac{\partial}{\partial p}\ln L(\overline{\theta}_1|p)\right]^2. \tag{1}$$

Также, если наблюдения независимы, то информация об одном наблюдении связана с информацией об $N$ наблюдениях следующим равенством:

$$I_N(p) = NI(p). \tag{2}$$

Перейдем непосредственно к нахождению функции $I(p)$. Так как первый агент собирает информацию о независимых скачках производительности, можно воспользоваться формулой (1) и найти информацию о дисперсии, содержащуюся в одном событии:

$L(\overline{\theta}_1|p) = f(\overline{\theta}_1)$, где $f(\overline{\theta}_1)$ – функция распределения.

В данном случае $f(\overline{\theta}_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-\overline{\theta}_1{}^2}{2\sigma^2}}$.

$$\ln f(\overline{\theta}_1) = -\ln(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{\overline{\theta}_1^2}{2\sigma^2} = -\ln(\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2}\ln\sigma^2 - \frac{\overline{\theta}_1^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\ln f(\overline{\theta}_1) = -\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{\overline{\theta}_1^2}{2\sigma^4}$$

$$I(\sigma^2) = E\left[\left(-\frac{1}{\sigma^2} + \frac{\overline{\theta}_1^2}{2\sigma^4}\right)^2\right] = \frac{1}{4\sigma^8}E\left[\left(-\sigma^2 + \overline{\theta}_1^2\right)^2\right] = \frac{1}{4\sigma^8}\left(E(\overline{\theta}_1^4) - \sigma^4\right).$$

Вычислять $E(\overline{\theta}_1^4)$ будем по определению математического ожидания для непрерывной случайной вечилины[1]:

$$E(\overline{\theta}_1^4) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{\theta}_1^4 f(\overline{\theta}_1) d\overline{\theta}_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{\theta}_1^4}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-\overline{\theta}_1^2}{2\sigma^2}} d\overline{\theta}_1 = \frac{2\sigma^4}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} \left(\frac{\overline{\theta}_1}{\sigma}\right)^4 e^{\frac{-\overline{\theta}_1^2}{2\sigma^2}} d\left(\frac{\overline{\theta}_1}{\sigma}\right) =$$

$$= \left[z = \frac{\overline{\theta}_1}{\sigma}\right] = \frac{2\sigma^4}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} z^4 e^{\frac{-z^2}{2}} dz = \frac{-2\sigma^4}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} z^3 de^{\frac{-z^2}{2}}.$$

Получившееся выражение будем интегрировать по частям:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} z^3 de^{\frac{-z^2}{2}} = \int uv = uv - \int vdu.$$

Для этого введем следующие замены переменных:

$$u = z^3, du = dz^3, v = e^{\frac{-z^2}{2}}, dv = de^{\frac{-z^2}{2}}.$$

Проведем операцию интегрирования по частям и получим:

$$\frac{-2\sigma^4}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} z^3 de^{\frac{-z^2}{2}} = \frac{-2\sigma^4}{\sqrt{2\pi}} \left( z^3 e^{\frac{-z^2}{2}} \Big|_0^{+\infty} - \int\limits_{0}^{+\infty} e^{\frac{-z^2}{2}} dz^3 \right) =$$

$$= \frac{-2\sigma^4}{\sqrt{2\pi}} \cdot 3 \int\limits_{0}^{+\infty} z^2 e^{\frac{-z^2}{2}} dz = 3\sigma^4 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^2}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz.$$

Интеграл в получившемся выражении является определением дисперсии непрерывной случайной величины, которая подчинена стандартному нормальному распределению, следовательно, данная дисперсия равна 1. Окончательное выражение для $E(\overline{\theta}_1^4)$ будет выглядеть следующим образом:

$$E(\overline{\theta}_1^4) = 3\sigma^4.$$

В результате получаем итоговый вид информации Фишера:

$$I(\sigma^2) = \frac{1}{4\sigma^8}(3\sigma^4 - \sigma^4) = \frac{1}{2\sigma^4}.$$

Теперь, воспользовавшись свойством (2), можно определить объем информации о параметре $\sigma^2$, содержащемся в $N$ наблюдениях:

$$I_N(\sigma^2) = NI(\sigma^2) = \frac{N}{2\sigma^4}.$$

2) *Бонус*

Для того, чтобы приблизить работу информатора к реальному проиводству, вводится показатель ценности собранной информации $(|\overline{\theta} - \theta| + 1)$. Данное выражение значит, что директор всячески поощряет агента, если он сможет найти такие скачки, которые бы отличались от показателей прибыли, сообщаемых ему работниками фирмы.

Объединив полученные результаты, можно составить итоговую функцию информации, которая будет являться *стратегией первого агента*:

$$I(\overline{\theta}) = \frac{N\left(|\overline{\theta} - \theta| + 1\right)}{2\sigma^4}. \tag{3}$$

Можно заметить, что данная функция возрастает при трех условиях:

1) когда агент обходит как можно больше производств $N$, чтобы узнать истинные скачки. Данную работу можно определять по-разному, так как всё зависит от специфики конкретной фирмы. Он может опрашивать сотрудников, либо непосредственно следить за этапами функционирования производства. Также возможен вариант общения с внешними ивесторами, либо сбор информации на основе условий рынка производства той или иной продукции.

2) когда значение дисперсии случайной величины $\overline{\theta}$ не превосходит единицы. То есть агент, хоть и стремится найти максимальное расхождение, но действует рационально и собирает информацию вблизи нулевых скачков, так как математическое ожидание $\overline{\theta}$ равно нулю по предположению, лежащему в основе модели.

3) когда разница между $\overline{\theta}$ и $\theta$ максимальна. Это значит, что первый агент смог найти те пункты производства, которые не совпадают с тем, что сообщали работники фирмы принципалу.

## 4.2. Операционные усилия

Задача второго агента заключается в анализе информации, предварительно полученной информатором. Сама процедура выбора истинного значения скачка из множества значений $\overline{\theta}$ неизвестна и не может быть описана математически, так как она зависит от специфики производства. При выполнении своей работы аналитик опирается на предпочтения директора, если таковые есть. Также он может являться специалистом в узкой области, поэтому сам будет определять, какую действительно $\overline{\theta}$ выбрать, чтобы отразить реальную картину, происходящую внутри предприятия, не опираясь при этом на пожелания принципала. Директор также не сообщает второму агенту $\theta$, которые передали ему работники. Это необходимо для обеспечения компетентности выполнения поиска и избежания вероятности сговора агента и сотрудников для возможной общей выгоды или престижа.

Для того, чтобы понять характер функции $e(\overline{\theta})$, воспользуемся теорией оптимального поиска [7]. Сначала построим функцию $\phi(\overline{\theta}, t)$, описывающую усилия второго агента по поиску истинного значения скачка производительности и называемую стратегией поиска. Воспользуемся математическим инструментарием, полученным в [7], для описания поискового усилия.

Пусть $L(t)$ — функция, задающая поисковую систему. В рамках данной задачи в качестве поисковой системы рассматривается один агент. Будем считать эффективность его деятельности, зависящей от времени, затраченного агентом на поиск истинного значения скачка $\overline{\theta}$. Для упрощения дальнейших рассуждений в качестве $L(t)$ рассмотрим линейную функцию $L(t) = t$. Тогда, следуя [7], стратегия поиска принимает вид

$$\begin{gathered}\phi(\overline{\theta}, t) = \max\left(0, \frac{1}{2\sigma^2}\left(\sqrt{\frac{4\sigma^2}{\pi}\int_0^t L(\tau)d\tau} - \overline{\theta}^2\right)\right) = \\ = \max\left(0, \frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{2\sigma t}{\sqrt{2\pi}} - \overline{\theta}^2\right)\right) = \max\left(0, \frac{t}{\sigma\sqrt{2\pi}} - \frac{\overline{\theta}^2}{2\sigma^2}\right).\end{gathered} \tag{4}$$

Вероятность того, что цель не будет обнаружена, есть

$$Q(t) = \left(1 + \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}\sqrt{\int_0^t L(\tau)d\tau}\right)\exp\left(-\frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}\sqrt{\int_0^t L(\tau)d\tau}\right) = \\ = \left(1 + \frac{t}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)\exp\left(-\frac{t}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right). \tag{5}$$

Следовательно $P(t)$ – это вероятность того, что второй агент обнаружит истинный скачок:

$$P(t) = 1 - Q(t). \tag{6}$$

Тогда среднее время, необходимое для обнаружения нужного скачка производительности, вычсляется по формуле

$$Et = \int_0^{+\infty} Q(t)dt = 2\sigma\sqrt{2\pi}. \tag{7}$$

Агенты могут проявлять разный уровень добросовестности, характеризующийся коэффициентом усердия $k \in (0, 1]$. Его величина также влияет на скорость решения поставленной задачи, поэтому среднее время (7) необходимо скорректировать с учетом этого коэффициента:

$$\overline{t} = E[kt] = 2\sigma\sqrt{2\pi}k.$$

Тогда стратегия поиска (4) может быть определена следующим образом

$$\phi(\overline{\theta}, t) = \max\left(0, 2k - \frac{\overline{\theta^2}}{2\sigma^2}\right),$$

вероятность (5) – как $Q(t) = (1+2k)\exp(-2k)$, а вероятность обнаружения истинного скачка (6) примет вид

$$P(t) = 1 - (1 + 2k)\exp(-2k).$$

Тогда операционные усилия, которые необходимо затратить на обнаружение истинного скачка $\overline{\theta}$, могут быть получены в виде

$$e(\overline{\theta}) = \phi(\overline{\theta}, t)P(t) = \begin{cases} 0, & |\overline{\theta}| \geq 2\sigma\sqrt{k}, \\ \left(2k - \frac{\overline{\theta}^2}{2\sigma^2}\right)\left(1 - e^{-2k} + 2ke^{-2k}\right), & |\overline{\theta}| < 2\sigma\sqrt{k}. \end{cases} \quad (8)$$

Функция $\phi(\overline{\theta}, t)$ позволяет не рассматривать те скачки производительности, которые не удовлетворяют условию $|\overline{\theta}| < 2\sigma\sqrt{k}$. При этом вероятность $P(t)$ обнаружения скачка возрастает с увеличением $k$ и максимальна, когда выполняется соотношение $k = 1$, то есть второй агент добросовестно выполняет свою работу.

## 4.3. Прибыль проекта

Так как $\overline{\theta}$ и $\theta$ фактически не являются деньгами, а представляют собой показатель рентабельности производства, для денежных выплат агентам принципал вводит функцию итоговой прибыли от проекта, которая одновременно зависит от работы первого и второго агентов и выражается формулой:

$$y = I(\overline{\theta})e(\overline{\theta}). \quad (9)$$

Скачки $\overline{\theta}$, которые находит информатор, не могут быть проверены принципалом. Также он не может проверить итоговый скачок производительности, полученный аналитиком. Это значит, что невозможно разделить прибыль $y$, для того чтобы отдельно выплачивать заработную плату агентам. Директор видит только совокупность результатов труда, которая приводит его к доходу. В данном случае значение $y$ представлено в условных единицах, которые уже в дальнейшем обговариваются между участниками сделки.

С учетом всех полученных ранее выводов, итоговая прибыль проекта (9) приобретает вид

$$y = \begin{cases} 0, & |\overline{\theta}| \geq 2\sigma\sqrt{k}, \\ \frac{N}{2\sigma^4}\left(|\overline{\theta} - \theta| + 1\right)\left(2k - \frac{\overline{\theta}^2}{2\sigma^2}\right)\left(1 - e^{-2k} + 2ke^{-2k}\right), & |\overline{\theta}| < 2\sigma\sqrt{k}. \end{cases}$$

## 5. Функция выигрыша первого агента

Так как модель не предполагает возможность проверки правильности работы непосредственно на этапе сбора информации, выплаты первого агента будут зависеть от общей прибыли. Для него функция выигрыша представлена в виде

$$U = d_1 y - \beta I, \tag{10}$$

где $d_1$ — доля от итоговой прибыли для первого агента (будем предполагать ее постоянной $0 < d_1 < 0,5$), $\beta \in [0, 1)$ — коэффициент, характеризующий издержки сбора информации. Доля $d_1$, так же как и $\beta$, устанавливается директором и заранее оговаривается с информатором как часть контракта.

С учетом функций (3), (8) и общим видом (10), получаем функцию выигрыша информатора:

$$U = d_1 I(\overline{\theta}) e(\overline{\theta}) - \beta I = \begin{cases} \frac{-\beta N\left(|\overline{\theta}-\theta|+1\right)}{2\sigma^4}, & |\overline{\theta}| \geq 2\sigma\sqrt{k}, \\ \frac{d_1 N}{2\sigma^4}\left(|\overline{\theta}-\theta|+1\right)\left(2k - \frac{\overline{\theta}^2}{2\sigma^2}\right) \times \\ \times \left(1 - e^{-2k} + 2ke^{-2k}\right) - \frac{\beta N\left(|\overline{\theta}-\theta|+1\right)}{2\sigma^4}, & |\overline{\theta}| < 2\sigma\sqrt{k}. \end{cases} \tag{11}$$

Целью первого агента является увеличение собственной прибыли, то есть получение $U^*$:

$$U^* = \max_{\overline{\theta}} U = \max_{\overline{\theta}}[d_1 y - \beta I]. \tag{12}$$

Решение поставленной задачи будем проводить с помощью дифференцирования функции $U$ и дальнейшего анализа полученных точек экстремума для выявления необходимого максимума.

- При условии $|\overline{\theta}| \geq 2\sigma\sqrt{k}$ :

<u>*1 случай:* $\overline{\theta} > \theta$</u>

$$U = \frac{-\beta N(\overline{\theta} - \theta + 1)}{2\sigma^4} \Rightarrow U'_{\overline{\theta}} = \frac{-\beta N}{2\sigma^4} = 0 \Rightarrow N = 0$$

<u>*2 случай:* $\overline{\theta} < \theta$</u>

$$U = \frac{-\beta N(-\overline{\theta} + \theta + 1)}{2\sigma^4} \Rightarrow U'_{\overline{\theta}} = \frac{\beta N}{2\sigma^4} = 0 \Rightarrow N = 0$$

*3 случай:* $\overline{\theta} = \theta$

Данный вариант аналогичен первому случаю, следовательно $N = 0$. Отметим, что при любых $\overline{\theta}$, не попадающих в интервал $(-2\sigma\sqrt{k}; 2\sigma\sqrt{k})$, первому агенту невыгодно собирать информацию и обходить $N$ производств. Это значит, что он стремится собрать только те $\overline{\theta}$, которые удовлетворяют другому ограничению:

- При условии $|\overline{\theta}| < 2\sigma\sqrt{k}$ :

*1 случай:* $\overline{\theta} > \theta$

$$U = \frac{N(\overline{\theta} - \theta + 1)}{2\sigma^4}\left(d_1\left(2k - \frac{\overline{\theta}^2}{2\sigma^2}\right)\left(1 - e^{-2k} + 2ke^{-2k}\right) - \beta\right)$$

$$\begin{gathered}\Rightarrow U'_{\overline{\theta}} = \overline{\theta}^2\left(-\frac{3}{2} + \frac{3e^{-2k}}{2} - 3ke^{-2k}\right) + \overline{\theta}(\theta - 1 + e^{-2k} - \theta e^{-2k} - \\ -2ke^{-2k} + 2k\theta e^{-2k}) + 2k\sigma^2 - 2k\sigma^2 e^{-2k} + 4k^2\sigma^2 e^{-2k} - \frac{\beta\sigma^2}{d_1} = 0\end{gathered} \tag{13}$$

Корни получившегося квадратного уравнения выражаются формулой

$$\overline{\theta}^*_{1,2} = \frac{-\theta + 1 - e^{-2k} + \theta e^{-2k} + 2ke^{-2k} - 2k\theta e^{-2k} \pm \sqrt{D_{U_1}}}{-3 + 3e^{-2k} - 6ke^{-2k}},$$

где

$$\begin{gathered}D_{U_1} = \left(\theta - 1 + e^{-2k} - \theta e^{-2k} - 2ke^{-2k} + 2k\theta e^{-2k}\right)^2 - 2(-3+ \\ +3e^{-2k} - 6ke^{-2k})\left(2k\sigma^2 - 2k\sigma^2 e^{-2k} + 4k^2\sigma^2 e^{-2k} - \frac{\beta\sigma^2}{d_1}\right).\end{gathered} \tag{14}$$

Найденные $\overline{\theta}^*_{1,2}$ являются точками экстремума функции $U$. Для нахождения максимума данной функции требуется проанализировать параболу (13) на возрастание/убывание, чтобы взять $\sqrt{D_{U_1}}$ с нужным знаком. Для этого определим знак при $\overline{\theta}^2$:

$$-\frac{3}{2} + \frac{3e^{-2k}}{2} - 3ke^{-2k} < 0, \qquad \forall k. \tag{15}$$

Из полученного неравенства можно сделать вывод, что ветви параболы направлены вниз, следовательно условие (12) выполняется при

$$\overline{\theta}^* = \frac{-\theta + 1 - e^{-2k} + \theta e^{-2k} + 2ke^{-2k} - 2k\theta e^{-2k} + \sqrt{D_{U_1}}}{-3 + 3e^{-2k} - 6ke^{-2k}}. \tag{16}$$

<u>*2 случай:* $\overline{\theta} < \theta$</u>

$$U = \frac{N(-\overline{\theta} + \theta + 1)}{2\sigma^4} \left( d_1 \left( 2k - \frac{\overline{\theta}^2}{2\sigma^2} \right) \left(1 - e^{-2k} + 2ke^{-2k}\right) - \beta \right)$$

$$\Rightarrow U'_{\overline{\theta}} = \overline{\theta}^2 \left( \frac{3}{2} - \frac{3e^{-2k}}{2} + 3ke^{-2k} \right) + \overline{\theta}(-\theta - 1 + e^{-2k} + \theta e^{-2k} -$$

$$-2ke^{-2k} - 2k\theta e^{-2k}) - 2k\sigma^2 + 2k\sigma^2 e^{-2k} - 4k^2\sigma^2 e^{-2k} + \frac{\beta\sigma^2}{d_1} = 0$$

Корни получившегося квадратного уравнения выражаются формулой

$$\overline{\theta}^*_{1,2} = \frac{\theta + 1 - e^{-2k} - \theta e^{-2k} + 2ke^{-2k} + 2k\theta e^{-2k} \pm \sqrt{D_{U_2}}}{3 - 3e^{-2k} + 6ke^{-2k}},$$

где

$$D_{U_2} = \left(-\theta - 1 + e^{-2k} + \theta e^{-2k} - 2ke^{-2k} - 2k\theta e^{-2k}\right)^2 - 2(3-$$

$$-3e^{-2k} + 6ke^{-2k}) \left( -2k\sigma^{+} 2k\sigma^2 e^{-2k} - 4k^2\sigma^2 e^{-2k} + \frac{\beta\sigma^2}{d_1} \right).$$

Процедура поиска максимума функции $U$ остается такой же, как и в первом случае:

$$\frac{3}{2} - \frac{3e^{-2k}}{2} + 3ke^{-2k} > 0, \qquad \forall k. \tag{17}$$

Из полученного неравенства можно сделать вывод, что парабола вогнутая, следовательно условие (12) выполняется при

$$\overline{\theta}^* = \frac{\theta + 1 - e^{-2k} - \theta e^{-2k} + 2ke^{-2k} + 2k\theta e^{-2k} - \sqrt{D_{U_2}}}{3 - 3e^{-2k} + 6ke^{-2k}}. \tag{18}$$

<u>*3 случай:* $\overline{\theta} = \theta$</u>

Теперь формула (11) примет вид

$$U = \frac{d_1 N}{2\sigma^4}\left(2k - \frac{\overline{\theta}}{2\sigma^2}\right)\left(1 - e^{-2k} + 2ke^{-2k}\right) - \frac{\beta N}{2\sigma^4}.$$

Дифференциируя данное выражение по $\overline{\theta}$, получим

$$U'_{\overline{\theta}} = \frac{-d_1 N \overline{\theta}}{4\sigma^8}\left(1 - e^{-2k} + 2ke^{-2k}\right) = 0$$

Следовательно, $\overline{\theta}^* = 0$. Это значит, что первый агент собрал информацию, которая представляет собой нулевые скачки производительности.

# 6. Функция выигрыша второго агента

Второй агент не знает механизма получения скачков производительности $\overline{\theta}$ или $\theta$, но у него есть инструкции получения реального значения от директора, а также от настоящих условий рынка производства. Принципал не может проверить, правильно ли второй агент обрабатывает информацию, поэтому его выплаты будут зависеть от общей прибыли. Для него функция выигрыша представима в виде

$$V = d_2 y, \tag{19}$$

где $d_2$ — доля от итоговой прибыли для аналитика ($0 < d_2 < 0.5$). Она так же заранее оговаривается с директором в форме контракта.

Как отмечалось ранее, второй вгент не сталкивается с издержками напрямую, поэтому они не присутствуют в явном виде в формуле (19). За возможные издержки в данном случае и отвечает коэффициент добросовестности $k$, который уже присутствует в функции прибыли $y$.

С учетом функций (3), (8) и общим видом (19), получаем функцию выигрыша второго агента:

$$V = d_2 y = \begin{cases} 0, & |\overline{\theta}| \geq 2\sigma\sqrt{k}, \\ \frac{d_2 N}{2\sigma^4}\left(|\overline{\theta} - \theta| + 1\right)\left(2k - \frac{\overline{\theta}^2}{2\sigma^2}\right)\left(1 - e^{-2k} + 2ke^{-2k}\right), & |\overline{\theta}| < 2\sigma\sqrt{k} \end{cases} \tag{20}$$

Его целью также является увеличение собственной прибыли, то есть получение $V^*$:

$$V^* = \max_{\overline{\theta}} V = \max_{\overline{\theta}} [d_2 y].$$

Чтобы решить данную задачу, как и в случае с первым агентом, будем находить производную функции $V$, приравнивать её к нулю и искать точки экстремума, среди которых нужно будет выбрать максимум.

Условие $|\overline{\theta}| \geq 2\sigma\sqrt{k}$ не рассматривается отдельно, так как при нем прибыль по определению равна нулю. Другими словами, данное ограничение позволяет принципалу диктовать, в каких именно промежутках аналитику следует искать истинное значение скачка.

- При условии $|\overline{\theta}| < 2\sigma\sqrt{k}$ :

*1 случай: $\overline{\theta} > \theta$*

$$V = \frac{Nd_2(\overline{\theta} - \theta + 1)}{2\sigma^4}\left(2k - \frac{\overline{\theta}^2}{2\sigma^2}\right)\left(1 - e^{-2k} + 2ke^{-2k}\right)$$

$$\Rightarrow V'_{\overline{\theta}} = \overline{\theta}^2\left(-\frac{3}{2} + \frac{3e^{-2k}}{2} - 3ke^{-2k}\right) + \overline{\theta}(\theta - 1 + e^{-2k} - \theta e^{-2k} - \\ -2ke^{-2k} + 2k\theta e^{-2k}) + 2k\sigma^2 - 2k\sigma^2 e^{-2k} + 4k^2\sigma^2 e^{-2k} = 0 \tag{21}$$

Корни получившегося квадратного уравнения выражаются формулой

$$\overline{\theta}^*_{1,2} = \frac{-\theta + 1 - e^{-2k} + \theta e^{-2k} + 2ke^{-2k} - 2k\theta e^{-2k} \pm \sqrt{D_{V_1}}}{-3 + 3e^{-2k} - 6ke^{-2k}},$$

где

$$D_{V_1} = \left(\theta - 1 + e^{-2k} - \theta e^{-2k} - 2ke^{-2k} + 2k\theta e^{-2k}\right)^2 - \\ -2\left(-3 + 3e^{-2k} - 6ke^{-2k}\right)\left(2k\sigma^2 - 2k\sigma^2 e^{-2k} + 4k^2\sigma^2 e^{-2k}\right).$$

Найденные $\overline{\theta}^*_{1,2}$ являются точками экстремума функции $V$ и отличаются от экстремумов функции $U$ всего лишь на одно слагаемое в $D_{V_1}$ : $\frac{-\sigma^2\beta}{d_1}$. Нахождение максимума аналогично процедуре, описанной для информатора. Коэффициенты перед $\overline{\theta}^2$ в формулах (13) и (21) совпадают, следовательно выполняется соотношение (15). Таким образом, оптимальное решение находится по формуле

$$\overline{\theta}^* = \frac{-\theta + 1 - e^{-2k} + \theta e^{-2k} + 2ke^{-2k} - 2k\theta e^{-2k} + \sqrt{D_{V_1}}}{-3 + 3e^{-2k} - 6ke^{-2k}}. \tag{22}$$

*2 случай: $\overline{\theta} < \theta$*

$$V = \frac{Nd_2(-\overline{\theta} + \theta + 1)}{2\sigma^4}\left(2k - \frac{\overline{\theta}^2}{2\sigma^2}\right)\left(1 - e^{-2k} + 2ke^{-2k}\right)$$

$$\Rightarrow V'_{\overline{\theta}} = \overline{\theta}^2\left(\frac{3}{2} - \frac{3e^{-2k}}{2} + 3ke^{-2k}\right) + \overline{\theta}(-\theta - 1 + e^{-2k} + \theta e^{-2k} - \\ -2ke^{-2k} - 2k\theta e^{-2k}) - 2k\sigma^2 + 2k\sigma^2 e^{-2k} - 4k^2\sigma^2 e^{-2k} = 0$$

Решением данного равенства будут два значения $\overline{\theta}$:

$$\overline{\theta}^*_{1,2} = \frac{\theta + 1 - e^{-2k} - \theta e^{-2k} + 2ke^{-2k} + 2k\theta e^{-2k} \pm \sqrt{D_{V_2}}}{3 - 3e^{-2k} + 6ke^{-2k}},$$

где

$$D_{V_2} = \left(-\theta - 1 + e^{-2k} + \theta e^{-2k} - 2ke^{-2k} - 2k\theta e^{-2k}\right)^2 - \\ -2\left(3 - 3e^{-2k} + 6ke^{-2k}\right)\left(-2k\sigma^+ 2k\sigma^2 e^{-2k} - 4k^2\sigma^2 e^{-2k}\right).$$

Поиск максимума осуществляется точно так же, как раньше. Коэффициент перед $\overline{\theta}^2$ в формуле (21) равен коэффициенту в формуле (13), поэтому и в этом случае выполняется (17). В итоге,

$$\overline{\theta}^* = \frac{\theta + 1 - e^{-2k} - \theta e^{-2k} + 2ke^{-2k} + 2k\theta e^{-2k} - \sqrt{D_{V_2}}}{3 - 3e^{-2k} + 6ke^{-2k}}. \tag{23}$$

*3 случай: $\overline{\theta} = \theta$*

В данный момент формула (20) примет вид

$$V = \frac{d_2 N}{2\sigma^4}\left(2k - \frac{\overline{\theta}}{2\sigma^2}\right)\left(1 - e^{-2k} + 2ke^{-2k}\right).$$

Дифференциируя данное выражение по $\overline{\theta}$, получим

$$V'_{\overline{\theta}} = \frac{-d_2 N\overline{\theta}}{4\sigma^8}\left(1 - e^{-2k} + 2ke^{-2k}\right) = 0.$$

Следовательно, $\overline{\theta}^* = 0$. Это значит, что информатор сообщил второму агенту о том, что скачки производительности равны нулю. Аналитик в таком случае, конечно, тоже получит истинное значение скачка, которое будет равно нулю.

# 7. Нахождение оптимальных решений

Так как функции выигрыша $U, V$ первого и второго агентов зависят от скачков производительности $\overline{\theta}$, так же, как и итоговая прибыль $y$ для принципала, для достижения компромисса между всеми участиниками, следует найти значения параметров $\sigma, k, \theta$ таким образом, чтобы оптимальные значения $\overline{\theta}^*$, полученные в предыдущем разделе, были равны между собой. Другими словами, требуется найти соотношения указанных выше параметров, которые бы одновременно доставляли максимум функции $U$ и $V$, а, следовательно, и $y$.

Сначала рассмотрим вариант, при котором проект не принесет прибыли:

- $|\overline{\theta}| \geq 2\sigma\sqrt{k}$

Для первого агента было выяснено, что оптимальная схема при данных значениях $\overline{\theta}$ – не собирать информацию ($N = 0$), так как второй агент просто не будет её обрабатывать. Такая модель поведения может быть рискованной для директора, потому что, если реальные скачки $\overline{\theta}$ все-таки лежат в заданных промежутках, он не сможет узнать об этом, чтобы скорректировать производство внутри своей фирмы. Из этого следует, что важнейшим условием данного проекта является предположение, что $\overline{\theta}$ распределены нормально. Можно отметить, что данное условие напоминает «правило $3\sigma$», только границы сужаются до значения $2\sigma\sqrt{k}$. Для обобщения полученного результата сформулируем следующее утверждение:

**Утверждение 1.** При ограничении $|\overline{\theta}| \geq 2\sigma\sqrt{k}$ не сущестует решения $\overline{\theta}^*$, оптимального в смысле максимизации прибыли первого и второго агентов, а так же принципала.

Перейдем теперь к более интересному варианту развития событий:

- $|\overline{\theta}| < 2\sigma\sqrt{k}$

<u>*1 случай: $\overline{\theta} > \theta$*</u>

Для того чтобы найти соотношения $k, \sigma, d_1$, приравняем формулы (16) и (22). Так как данные соотношения практически совпадают, строгое равенство будет выполняться при условии, что издержки $\beta$ первого агента, которые содержатся в (14), будут равны нулю. Они в свою очередь смогут быть нулевыми в случае, когда директор безпрепятственно впускает информатора на свое производство и дает ему собирать нужную информацию, либо когда директор готов оплачивать все расходы, связанные с таким сбором.

На основе полученных результатов можно сформулировать второе утверждение:

**Утверждение 2.** Существует решение $\overline{\theta}^*$, оптимальное в смысле максимизации прибыли первого и второго агентов, а так же принципала, которое выражается формулой (22). При этом необходимо выполнение следующих условий:

1)$|\overline{\theta}^*| < 2\sigma\sqrt{k}$

2)$\overline{\theta}^* > \theta$

3)$D_{V_1} \geq 0$

4)$\beta = 0$

Проверка данного утверждения и нахождение численных значений для полученных формул будет осуществлена в следующем разделе.

<u>*2 случай: $\overline{\theta} < \theta$*</u>

При данных соотношениях $\overline{\theta}$ и $\theta$, нужно приравнять значения, полученные по формулам (18) и (23). Данные значения практически идентичны, поэтому единственный вариант равенства возможен при $\beta = 0$, как и в первом случае. Отсюда втекает третье утверждение:

**Утверждение 3.** Существует решение $\overline{\theta}^*$, оптимальное в смысле максимизации прибыли первого и второго агентов, а так же принципала, которое выражается формулой (23). При этом необходимо выполнение следующих условий:

1)$|\overline{\theta}^*| < 2\sigma\sqrt{k}$

2)$\overline{\theta}^* < \theta$

3)$D_{V_2} \geq 0$

4)$\beta = 0$

Исследование сформулированного утверждения также будет рассмотрено далее.

<u>*3 случай: $\overline{\theta} = \theta$*</u>

Так же, как и ранее, требуется соотнести выводы из предыдущих глав. В следствие того, что они получились одинаковыми, можно сразу сформировать следующее утверждение:

**Утверждение 4.** При выполнении условия $\overline{\theta} = \theta$, существует решение $\overline{\theta}^*$, оптимальное в смысле максимизации прибыли первого и второго агентов, а так же принципала : $\overline{\theta}^* = 0$.

В данном утверждении в явном виде показана зависимость между $\overline{\theta}$ и $\theta$. Иными словами, если первый агент смог каким то образом узнать у сотрудников, что $\theta = 0$, то он передаст второму агенту такое же значение $\overline{\theta}$. Это значит что агенты могут получить нулевой скачок производительности, только в случае если он действительно был равен нулю и для сотрудников. Во всех остальных случаях скачки будут ненулевыми.

**Замечание.** Стратегии информатора и аналитика, полученные в соответствии с Утерждениями 1-4 являются равновестными по Нэшу.

# 8. Параметрический анализ

В предыдущем разделе были получены четыре утверждения, некоторые из них требуют дальнейшего анализа. Утверждение 1 и Утверждение 4 не предполагают последующих пояснений, так как несут в себе полную инфорацию об оптимальных решениях. Утверждения 2 и 3 требуют дальнейшей проверки в связи с тем, что получившиеся оптимальные решения $\overline{\theta}^*$ зависят от многих параметров, таких как $k, \sigma, \theta$, и исследовать выполнение необходимых условий существования такого решения вручную не представляется возможным. Для разрешения этой проблемы было принято решение проверить достоверность полученных выводов с помощью задания числовых значений неизвестных параметров и дальнейшего вычисления значения оптимального решения, которое должно удовлетворять введенным ограничениям. Другими словами, требуется найти конкретные значения параметров, при которых рассматриваемые утверждения будут выполняться.

**Анализ Утверждения 2.**

В приложении 1 представлена программная реализация Утверждения 2. При задании параметров были выбраны следующие величины:

1) $k \in (0, 1]$

2) $\sigma \in [1, 10]$

3) $\theta \in [-10, 10]$

После выполнения работы программы с введенными характеристиками выяснилось, что полученные значения не удовлетворяют условию $|\overline{\theta}| < 2\sigma\sqrt{k}$. Все $\overline{\theta}^*$, которые были найдены, оказались меньше $-2\sigma\sqrt{k}$. Данное ограничение вытекает из того факта, что аналитик ищет истинное значение скачка производительности за среднее время, которое равно $2\sigma\sqrt{2\pi}k$. В приложении 1 представлена таблица 1, в которой были найдены все оптимальные значения $\overline{\theta}$, при этом для данных числовых значений параметров время было увеличено с 18.05 до 70.4. Это значит, что аналитик в четыре раза дольше будет искать положительный скачок производительности во время своей работы. В данном случае время представлено в условных единицах.

Стоит упомянуть, что условие $\overline{\theta} > \theta$ означает оптимизм агентов. Он заключается в том, что на самом деле производство имеет большую рентабельность, чем ту, которую сообщают принципалу сотруднки. Для того, чтобы результаты были более оптимистичными, требуется гораздо больше усилий аналитика для данного поиска, поэтому за среднее время поиска он не сможет добиться нужных результатов. Если директор сможет пойти на уступки и увеличить данное время, то второй агент найдет реальные $\overline{\theta}^*$.

Анализ результатов с допущением увеличения среднего времени поиска показал, что полученные числовые характеристики для коэффициента добросовестности $k$ второго агента не принимают значения, равного единице. То есть аналитик не может наилучшим образом выполнять свою работу, однако возможен вариант достаточно усердной деятельности.

Также заметно, что большинство значений получено при $\sigma = 1$, что характеризует небольшие отклонения от нулевой эффективности работы предприятия.

**Вывод:** Утверждение 3 не выполняется ни при каких значениях параметров $k, \sigma, \theta$. Агенты могут прийти к компромиссу, только если принципал увеличит время поиска реального скачка. При таких допущениях заявленная производительность может быть меньше реальной.

**Анализ Утверждения 3.**

В приложении 2 представлена программная реализация утверждения 3. При задании параметров были выбраны такие же величины $k, \sigma, \theta$, которые фигурировали в предыдущем пункте. Полученные результаты представлены в отдельной таблице 2.

После выполнения работы программы были получены оптимальные решения $\overline{\theta}^*$, которые удовлетворяют всем ограничениям, необходимым для их существования. Это значит, что если $\overline{\theta} < \theta$, то два агента всегда смогут получить и обработать нужную информацию. Данное условие характеризует пессимизм агентов, то есть предпосылки о том, что производство работает с меньшей рентабельностью, чем с той, которую сообщают принципалу сотрудники. Тем самым, агенты всегда способны найти те пункты производства, которые работают не так хорошо, как хотелось бы директору.

Как и в предыдущем случае, не удалось найти оптимального значения при $k = 1$. Это значит, что аналитик будет работать не так усердно, как хотелось бы директору, но всё равно достаточно добросовестно.

**Вывод:** Утверждение 3 выполняется при любых значениях параметров $k, \sigma, \theta$. Агенты могут прийти к компромиссу, в результате которого значения $\overline{\theta}^*$ получаются меньше $\theta$, то есть заявленная производительность больше реальной.

# 9. Условия принципала

Структурируя все выводы, полученные в предыдущих разделах, можно описать контракт, который принципал предлагает агентам, для того чтобы узнать реальные скачки производительности на своем предприятии. Он может быть представлен набором данных, характеризующих прибыль агентов в зависимости от того, какие сведения им удалось собрать и проанализировать. Так как директор не выступает в данных взаимоотношениях как отдельный игрок, его стратегия будет присутствовать в роли ограничений, накладываемых на стратегии информатора и аналитика:

1) Выигрыши $U$ и $V$ должны быть неотрицательны.

2) Первому агенту невыгодно не наблюдать скачки производства: $U(d_1 I(\overline{\theta})e(\overline{\theta}) - \beta I(\overline{\theta})) > U(d_1 I_0 e(I_0) - \beta I_0)$, где $I_0$ – любая информация, которую передает первый агент аналитику в случае отсутствия нужной информации о скачках $\overline{\theta}$.

3) Второму агенту невыгодно не искать истинное значение скачка производительности: $V(d_2 I(\overline{\theta})e(\overline{\theta})) > V(d_2 I(\overline{\theta})e_0)$, где $e_0$ — любое усилие, которое задает второй агент в случае отсутствия своей деятельности на ее втором этапе.

4) Первому агенту невыгодно выполнять работу второго агента: $U_1 > V_1$ (индексы снизу означают, что работу выполнял первый агент).

5) Аналитику невыгодно выполнять работу за информатора: $V_2 > U_2$ (индексы снизу означают, что работу выполнял второй агент).

Выполнение данных условий ведет к сотрудничеству между всеми участниками соглашения, которое должно быть строго прописано в контракте.

# 10. Выводы

Проведенное исследование дало следующие результаты **результаты**:

1) Построена модель сбора и анализа данных в условиях асимметричной информации.

2) Получены функции выигрыша для двух агентов.

3) Доказаны условия, при которых информатор и аналитик достигнут соглашения. Также доказаны условия, при которых они не смогут договориться.

4) Обнаружены допущения, на которые должен пойти принципал в ходе подписания контракта с агентами.

5) Проведен параметрический анализ выявленных особенностей стратегий агентов.

6) Задана система ограничений, устанавливаемых директором.

По данным результатам можно сформулировать следующие **выводы:**

1) Контракт должен быть зафиксирован в письменной форме и содержать все возможные варианты развития событий для всех участников, вытекающих из асимметричности информации.

2) Для определения стратегий агентов требуется знать природу и характер распределения рассматриваемых скачков производительности.

3) Директор должен обеспечить возможность беспрепятственно собирать информацию первому агенту, то есть взять на себя расходы по данному сбору.

4) Доказано, что достижение пессимистичных результатов не требует дополнительных затрат агентов и принципала.

5) Для достижения оптимистичных прогнозов должно быть увеличено время поиска нужного скачка для второго агента.

# Литература


1. Буре В.М., Парилина Е.М. Теория вероятностей и математическая статистика/СПб.:Лань, 2013. 416 с.

2. Васильцова В.М., Тертышный С.А. Институциональная экономика/ Питер, 2013. 256 с.

3. Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики, учебное пособие/ М.: Макс-пресс, 2005. 278 с.

4. Корнейчук Б.В. Институциональная экономика: учебник для академического бакалавра, 4-е изд./ М.: Юрайт, 2018. 274 с.

5. Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики/ Гл. ред. физ.-мат. лит. М.: Наука., 1982. 256 с.

6. Теория принятия решений. Том 2 : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / Под ред. В. Г. Халина. М.:Юрайт, 432 с.

7. Хеллман О. Введение в теорию оптимального поиска / Пер. с англ. / под ред. Н. Н. Моисеева. М.: Наука, 1985. 245 с.

8. Evans Ch. L., Productivity shocks and real business cycles // Journal of Monetary Economics. 1992. Vol. 29, Issue 2. P. 191–208

9. Iossaa E., Martimortd D. Pessimistic information gathering // Games and Economic Behavior. 2015. Vol. 91. P. 75–96.

# Приложения

## Приложение 1.

Программа написана на языке программирования Python для расчета параметров $k, \sigma, \theta, \overline{\theta}^*$, с учетом ограничений из Утверждения 2:

```
import math
import numpy
from numpy import arange
for k in arange (0.1,1,0.1):
for sigma in arange(1, 10, 3):
for theta in arange(-10,10,3):
D=(theta-1+math.exp(-2*k)-theta*math.exp(-2*k)-
2*k*math.exp(-2*k)+2*k*theta*math.exp(-2*k))**2-
-2*(3*math.exp(-2*k)-3-6*k*math.exp(-2*k))*
*(2*k*sigma**2-2*k*sigma**2*math.exp(-2*k)+
+4*k**2*sigma**2*math.exp(-2*k))
if D>=0:
thetaopt=(-theta+1+math.exp(-2*k)*theta-math.exp(-2*k)+
+2*k*math.exp(-2*k)-2*k*theta*math.exp(-2*k)+
+math.sqrt(D))/(-3+3*math.exp(-2*k)-6*k*math.exp(-2*k))
if thetaopt > theta:
if abs(thetaopt)>2*sigma*math.sqrt(k):
print( k, sigma, theta, thetaopt)
```

Результаты работы программы:

Таблица 1.

| $k$ | $\sigma$ | $\theta$ | $\overline{\theta}^*$ |
|---|---|---|---|
| 0.1 | 1 | -10 | -7.351470294782792 |
| 0.1 | 1 | -7 | -5.35821723175818 |
| 0.1 | 1 | -4 | -3.3728645189426305 |
| 0.1 | 4 | -10 | -7.613536030830847 |
| 0.1 | 4 | -7 | -5.707134466931035 |
| 0.1 | 4 | -4 | -3.8827693518126214 |
| 0.1 | 4 | 2 | -0.7701224063135671 |

| $k$ | $\sigma$ | $\theta$ | $\overline{\theta}^*$ |
|---|---|---|---|
| 0.2 | 1 | -10 | -7.369518420533014 |
| 0.2 | 1 | -7 | -5.382873171661782 |
| 0.2 | 1 | -4 | -3.4115003104403194 |
| 0.2 | 4 | -10 | -7.875123760556432 |
| 0.2 | 4 | -7 | -6.039762837512938 |
| 0.2 | 7 | -10 | -8.815560830573233 |
| 0.3 | 1 | -10 | -7.3874790033002204 |
| 0.3 | 1 | -7 | -5.407307305479263 |
| 0.3 | 1 | -4 | -3.4492989276161246 |
| 0.3 | 4 | -10 | -8.121377032610164 |
| 0.3 | 4 | -7 | -6.342413000557393 |
| 0.3 | 7 | -10 | -9.415096403946617 |
| 0.4 | 1 | -10 | -7.405353304749318 |
| 0.4 | 1 | -7 | -5.431525513777029 |
| 0.4 | 1 | -4 | -3.4863125418608236 |
| 0.4 | 4 | -10 | -8.35471293113311 |
| 0.4 | 4 | -7 | -6.621972526451019 |
| 0.4 | 7 | -10 | -9.95775383644724 |
| 0.5 | 1 | -10 | -7.423142556528215 |
| 0.5 | 1 | -7 | -5.4555334217802525 |
| 0.5 | 1 | -4 | -3.522588120943341 |
| 0.5 | 4 | -10 | -8.576973287552079 |
| 0.5 | 4 | -7 | -6.883036880224506 |
| 0.6 | 1 | -10 | -7.440847961258178 |
| 0.6 | 1 | -7 | -5.479336414630532 |
| 0.6 | 1 | -4 | -3.5581681278814816 |
| 0.6 | 4 | -10 | -8.789599854250168 |
| 0.7 | 1 | -10 | -7.458470693482635 |
| 0.7 | 1 | -7 | -5.50293965149102 |
| 0.7 | 1 | -4 | -3.5930911035733186 |
| 0.7 | 4 | -10 | -8.993746333592796 |
| 0.8 | 1 | -10 | -7.476011900576441 |
| 0.8 | 1 | -7 | -5.526348078603628 |
| 0.8 | 1 | -4 | -3.627392155980366 |
| 0.8 | 4 | -10 | t -9.190353036393963 |
| 0.9 | 1 | -10 | -7.493472703617643 |
| 0.9 | 1 | -7 | -5.5495664413919545 |
| 0.9 | 1 | -4 | -3.661103373553545 |
| 0.9 | 4 | -10 | -9.380198362950887 |

## Приложение 2.

Программа написана на языке программирования Python для расчета параметров $k, \sigma, \theta, \overline{\theta}^{*}$, с учетом ограничений из Утверждения 3:

```
import math
import numpy
from numpy import arange
for k in arange (0.1,1,0.1):
for sigma in arange(1, 10, 3):
for theta in arange(-10,10,3):
D=(-theta-1+math.exp(-2*k)+theta*math.exp(-2*k)-
-2*k*math.exp(-2*k)-2*k*theta*math.exp(-2*k))**2-
-2*(-3*math.exp(-2*k)+3+6*k*math.exp(-2*k))*
*(-2*k*sigma**2+2*k*sigma**2*math.exp(-2*k)-
-4*k**2*sigma**2*math.exp(-2*k))
if D>=0:
thetaopt=(theta+1-math.exp(-2*k)*theta-math.exp(-2*k)+
+2*k*math.exp(-2*k)+2*k*theta*math.exp(-2*k)-
-math.sqrt(D))/(3-3*math.exp(-2*k)+6*k*math.exp(-2*k))
if thetaopt<theta:
if abs(thetaopt)<2*sigma*math.sqrt(k):
print( k, sigma, theta, thetaopt)
```

Результаты работы программы:

Таблица 2.

| $k$ | $\sigma$ | $\theta$ | $\overline{\theta}^{*}$ |
|---|---|---|---|
| 0.1 | 1 | 2 | -0.06458129484475429 |
| 0.1 | 1 | 5 | -0.033060090930254374 |
| 0.1 | 1 | 8 | -0.02214052177150235 |
| 0.1 | 4 | -1 | -1.460593486680443 |
| 0.1 | 4 | 2 | -0.7701224063135671 |
| 0.1 | 4 | 5 | -0.4765567494675615 |
| 0.1 | 4 | 8 | -0.3366650016645857 |
| 0.1 | 7 | -10 | -8.136317411163127 |

| $k$ | $\sigma$ | $\theta$ | $\overline{\theta}^*$ |
|---|---|---|---|
| 0.1 | 7 | 8 | -0.9412350010286539 |
| 0.2 | 1 | 2 | -0.12546286774227536 |
| 0.2 | 1 | 5 | -0.06559111797728895 |
| 0.2 | 1 | 8 | -0.04412001515489971 |
| 0.2 | 4 | -1 | -2.065591117977289 |
| 0.2 | 4 | 2 | -1.2949219304078003 |
| 0.2 | 4 | 5 | -0.8751811537130432 |
| 0.2 | 4 | 8 | -0.6423435679060625 |
| 0.2 | 7 | -4 | -4.750555514409387 |
| 0.2 | 7 | -1 | -3.614784456460255 |
| 0.2 | 7 | 2 | -2.7505555144093874 |
| 0.2 | 7 | 5 | -2.131182235954578 |
| 0.2 | 7 | 8 | -1.6975170746540846 |
| 0.3 | 1 | 2 | -0.18321595661992315 |
| 0.3 | 1 | 5 | -0.09761769634030354 |
| 0.3 | 1 | 8 | -0.06594194335117812 |
| 0.3 | 4 | -1 | -2.5298221281347035 |
| 0.3 | 4 | 2 | -1.7202941017470887 |
| 0.3 | 4 | 5 | -1.22490309931942 |
| 0.3 | 4 | 8 | -0.9242833740697167 |
| 0.3 | 7 | -4 | -5.538722287164087 |
| 0.3 | 7 | -1 | -4.427188724235731 |
| 0.3 | 7 | 2 | -3.538722287164087 |
| 0.3 | 7 | 5 | -2.8579831205964483 |
| 0.3 | 7 | 8 | -2.3478967828483754 |
| 0.4 | 1 | 2 | -0.2382783747337808 |
| 0.4 | 1 | 5 | -0.12916258968950836 |
| 0.4 | 1 | 8 | -0.08760964717584303 |
| 0.4 | 4 | -4 | -4.087609647175842 |
| 0.4 | 4 | -1 | -2.921186973360886 |
| 0.4 | 4 | 2 | -2.087609647175843 |
| 0.4 | 4 | 5 | -1.5402448126271346 |
| 0.4 | 4 | 8 | -1.187282332651255 |
| 0.4 | 7 | -7 | -7.48938369339704 |
| 0.4 | 7 | -4 | -6.208966628164681 |
| 0.4 | 7 | -1 | -5.11207720338155 |
| 0.4 | 7 | 2 | -4.208966628164682 |
| 0.4 | 7 | 5 | -3.4893836933970412 |
| 0.4 | 7 | 8 | -2.927337794772063 |

| $k$ | $\sigma$ | $\theta$ | $\overline{\theta}^*$ |
|---|---|---|---|
| 0.5 | 1 | 2 | -0.29099444873580566 |
| 0.5 | 1 | 5 | -0.1602468994692868 |
| 0.5 | 1 | 8 | -0.10912635102960522 |
| 0.5 | 4 | -4 | -4.415650255319866 |
| 0.5 | 4 | -1 | -3.2659863237109037 |
| 0.5 | 4 | 2 | -2.415650255319866 |
| 0.5 | 4 | 5 | -1.8297084310253524 |
| 0.5 | 4 | 8 | -1.4347115652166902 |
| 0.5 | 7 | -7 | -8.055300708194983 |
| 0.5 | 7 | -4 | -6.802298395176404 |
| 0.5 | 7 | -1 | -5.715476066494083 |
| 0.5 | 7 | 2 | -4.802298395176404 |
| 0.5 | 7 | 5 | -4.0553007081949835 |
| 0.5 | 7 | 8 | -3.454972243679028 |
| 0.6 | 1 | 2 | -0.34164078649987384 |
| 0.6 | 1 | 5 | -0.19089023002066458 |
| 0.6 | 1 | 8 | -0.1304951684997058 |
| 0.6 | 4 | -4 | -4.714835124201342 |
| 0.6 | 4 | -1 | -3.577708763999664 |
| 0.6 | 4 | 2 | -2.714835124201342 |
| 0.6 | 4 | 5 | -2.0987803063838397 |
| 0.6 | 4 | 8 | -1.669047011971501 |
| 0.6 | 7 | -7 | -8.572670690061994 |
| 0.6 | 7 | -4 | -7.340346993658944 |
| 0.6 | 7 | -1 | -6.260990336999411 |
| 0.6 | 7 | 2 | -5.340346993658943 |
| 0.6 | 7 | 5 | -4.572670690061994 |
| 0.6 | 7 | 8 | -3.9426219830839133 |
| 0.7 | 1 | 2 | -0.390443574307614 |
| 0.7 | 1 | 5 | -0.22111083319435743 |
| 0.7 | 1 | 8 | -0.15171910761941726 |
| 0.7 | 4 | -4 | -4.991657967979388 |
| 0.7 | 4 | -1 | -3.8643671323171844 |
| 0.7 | 4 | 2 | -2.9916579679793878 |
| 0.7 | 4 | 5 | -2.351245032554859 |
| 0.7 | 4 | 8 | -1.892170615721956 |

| $k$ | $\sigma$ | $\theta$ | $\overline{\theta}^*$ |
|---|---|---|---|
| 0.7 | 7 | -10 | -10.398197978787358 |
| 0.7 | 7 | -7 | -9.052186422190877 |
| 0.7 | 7 | -4 | -7.8361782695694355 |
| 0.7 | 7 | -1 | -6.762642481555073 |
| 0.7 | 7 | 2 | -5.836178269569435 |
| 0.7 | 7 | 5 | -5.052186422190875 |
| 0.7 | 7 | 8 | -4.398197978787358 |
| 0.8 | 1 | -1 | -1.0327955589886446 |
| 0.8 | 1 | 2 | -0.43759057685652186 |
| 0.8 | 1 | 5 | -0.2509257354845508 |
| 0.8 | 1 | 8 | -0.17280107581087842 |
| 0.8 | 4 | -4 | -5.250490167812021 |
| 0.8 | 4 | -1 | -4.1311822359545785 |
| 0.8 | 4 | 2 | -3.2504901678120217 |
| 0.8 | 4 | 5 | -2.5898438608156016 |
| 0.8 | 4 | 8 | -2.105552532945545 |
| 0.8 | 7 | -10 | -10.827302643099133 |
| 0.8 | 7 | -7 | -9.501111028818777 |
| 0.8 | 7 | -4 | -8.298401651503339 |
| 0.8 | 7 | -1 | -7.229568912920512 |
| 0.8 | 7 | 2 | -6.2984016515033385 |
| 0.8 | 7 | 5 | -5.501111028818777 |
| 0.8 | 7 | 8 | -4.827302643099133 |
| 0.9 | 1 | -1 | -1.0954451150103321 |
| 0.9 | 1 | 2 | -0.48323969741913264 |
| 0.9 | 1 | 5 | -0.2803508501982758 |
| 0.9 | 1 | 8 | -0.19374388453426253 |
| 0.9 | 4 | -4 | -5.494441010848846 |
| 0.9 | 4 | -1 | -4.381780460041329 |
| 0.9 | 4 | 2 | -3.4944410108488464 |
| 0.9 | 4 | 5 | -2.8166378315169185 |
| 0.9 | 4 | 8 | -2.310367218940702 |
| 0.9 | 7 | -10 | -11.23407554009556 |
| 0.9 | 7 | -7 | -9.92464510246358 |
| 0.9 | 7 | -4 | -8.733045971672482 |
| 0.9 | 7 | -1 | -7.668115805072326 |
| 0.9 | 7 | 2 | -6.733045971672483 |
| 0.9 | 7 | 5 | -5.924645102463581 |
| 0.9 | 7 | 8 | -5.234075540095561 |