

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ.

**Молочков Кирилл Игоревич**  
**Выпускная квалификационная работа бакалавра**  
**Исследование Национальной баскетбольной**  
**ассоциации с использованием аппарата**  
**производственных функций**

Направление 03.03.01  
Прикладная математика и физика

Научный руководитель,  
доктор физ.-мат. наук,  
Колбин Вячеслав Викторович

Рецензент  
кандидат физ.-мат. наук,  
доцент  
Мышков Станислав  
Константинович

Санкт-Петербург

2019

## Оглавление

<b>Введение.</b> .....	<b>1</b>
<b>Глава 1</b> .....	<b>2</b>
<b>Производственная функция</b> .....	<b>2</b>
§1.1 Основные определения. ....	2
§1.2 Виды производственных функций. ....	2
§1.3 Исключённые факторы .....	3
§1.4 Факторы, исследуемые в работе.....	4
§ 1.5 Цели работы.....	5
§ 1.6 Алгоритм построения производственных функций. ....	5
<b>Глава 2</b> .....	<b>6</b>
<b>Построение производственных функций.</b> .....	<b>6</b>
§2.1 Производственные функции команды <i>Indiana Pacers</i> . ....	6
§2.2 Производственные функции команды <i>Oklahoma City Thunder</i> . .....	16
§2.3 Производственные функции команды <i>San Antonio Spurs</i> . ....	22
§2.4 Производственные функции команды <i>Golden State Warriors</i> . .....	27
§2.5 Производственные функции команды <i>Toronto Raptors</i> . ....	34
§2.6 Оценка полученных результатов. ....	38
<b>Вывод.</b> .....	<b>39</b>
<b>Список литературы</b> .....	<b>40</b>

## **Введение.**

Вначале, хотелось бы сделать краткий экскурс в историю, исследуемой мной игры. Родиной баскетбола являются Соединенные Штаты Америки. Игру придумал в 1891 году преподаватель физкультуры Джеймс Нейсмит. И спустя больше 50 лет 3 августа 1949 года основывается Национальная баскетбольная ассоциация.

Теперь кратко правила, исследуемой игры: в течение 48 минут, то есть 4 четверти по 12 минут команды забрасывают друг другу мячи в корзину. За точные штрафные, которые дают за нарушения правил при броске, начисляют 1 очко. При точном попадании до пределов трёх очковой линии дают 2 очка, за её пределами, естественно, 3. Побеждает команда, набравшая большее количество очков за игру, если по истечению времени у команд равное количество очков, то назначается овертайм, где команды играют еще 5 минут и так пока не будет выявлен победитель.

В современной Национальной баскетбольной ассоциации участвуют 30 команд, которые распределены на 2 конференции, западную и восточную. Команды проводят 82 игры за регулярный сезон, который проходит в период с октября по март, данный промежуток я и взял для исследования.

# Глава 1

## Производственная функция.

### §1.1 Основные определения.

Эффективное использование математических методов одна из ключевых причин технологического прогресса. Результат любого процесса складывается из многочисленных факторов. Возникает логичный вопрос: «Как определить степень влияние факторов?»

Одним из лучших математических аппаратов описания зависимостей является аппарат производственных функций (ПФ).

Производственная функция – это математически выраженная зависимость результатов процесса от факторов, из которых складывается данный процесс.

Производственных функций огромное количество, из всего многообразия видов я выбрал 5.

### §1.2 Виды производственных функций.

Из всего многообразия видов производственных функций я выбрал 5.

*1) Линейная производственная функция:*

$$f(x_1 \dots x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

*2) Обратная производственная функция:*

$$f(x_1 \dots x_n) = \frac{1}{a_1 x_1 + \dots + a_n x_n}$$

3) *Логарифмическая производственная функция:*

$$f(x_1 \dots x_n) = a_1 \ln(x_1) + \dots + a_n \ln(x_n)$$

4) *Степенная производственная функция*

$$f(x_1 \dots x_n) = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$$

5) *Экспоненциальная производственная функция*

$$f(x_1 \dots x_n) = e^{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n}$$

$x_1 \dots x_n$  – рассматриваемые факторы.

### §1.3 Исключённые факторы

В своей работе я рассматривал зависимость результатов команд от 25 факторов. После проведения автокорреляции я остановился на рассмотрении 15 факторов. Ниже приведены сначала факторы, исключённые автокорреляцией, затем оставшиеся факторы, которые были исследованы в работе.

$x_1(t)$  – количество выброшенных дальних трёх очковых.

$x_2(t)$  – количество точных дальних трёх очковых.

$x_3(t)$  – процент попадания дальних трёх очковых.

$x_4(t)$  – количество набранных очков дома.

$x_5(t)$  – количество набранных очков в гостях.

$x_6(t)$  – количество бросков сверху за игру.

$x_7(t)$  – количество персональных фолов дома.

$x_8(t)$  – количество персональных фолов в гостях.

$x_9(t)$  – стоимость клуба.

$x_{10}(t)$  – зарплаты 2 самых дорогих игроков.

### **§1.4 Факторы, исследуемые в работе.**

$x_1(t)$  – общий процент попадания двух очковых и трёх очковых мячей за всю игру.

$x_2(t)$  – количество точных трёх очковых.

$x_3(t)$  – количество выброшенных трёх очковых.

$x_4(t)$  – процент попадания трёх очковых.

$x_5(t)$  – количество точных штрафных.

$x_6(t)$  – количество выброшенных штрафных.

$x_7(t)$  – процент попадания штрафных.

$x_8(t)$  – количество подборов на чужом щите.

$x_9(t)$  – количество подборов на своем щите.

$x_{10}(t)$  – общее количество подборов, как на своем, так и на чужом щите.

$x_{11}(t)$  – количество результативных передач.

$x_{12}(t)$  – количество потерь.

$x_{13}(t)$  – количество перехватов.

$x_{14}(t)$  – количество заблокированных бросков.

$x_{15}(t)$  – количество персональных фолов.

$x(t) \in T$ , где  $T$  промежуток времени длиной в 5 сезонов (410 игр).

## **§ 1.5 Цели работы.**

В данной работе я поставил перед собой следующие цели:

- 1) Составить алгоритм построения производственных функций.
- 2) Построить 5 видов ПФ и графики зависимости функций от времени.
- 3) Оценить степень влияния факторов на результат команд.
- 4) Оценить погрешность построения.
- 5) Сделать прогноз.

## **§ 1.6 Алгоритм построения производственных функций.**

- 1) С сайта <https://stats.nba.com> собрать и структурировать статистические данные.
- 2) Вычислить коэффициенты производственной функции, провести автокорреляцию и сделать вывод о влиянии факторов друг на друга.
- 3) Проверить вычисленные коэффициенты и оценить погрешность измерений.
- 4) Составить сравнительную таблицу между построенными значениями и известными.
- 5) Построить графики зависимости производственных функций от времени.
- 6) Сделать вывод и прогноз.

## Глава 2

### Построение производственных функций.

#### §2.1 Производственные функции команды Indiana Pacers.

##### Линейные ПФ

На примере одной из исследуемых команд, в промежутке времени длиной 5 сезонов регулярного чемпионата (410 игр), продемонстрируем действия алгоритма.

Запишем аналитический вид линейной производственной функции:

$$f(x_1 \dots x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

Рассматриваем только регулярный сезон и 15 факторов, потому что остальные убраны автокорреляцией. С помощью языка программирования Matlab определим коэффициенты для функции.

##### *Линейная производственная функция для побед дома*

$$y = -0,2753x_3 - 2,5301x_4 - 3,06x_6 + 1,738x_7 + 1,3477x_{10}$$

Проверяя, полученную функцию подстановкой получаем среднюю относительная погрешность вычислений 0,002041 %.

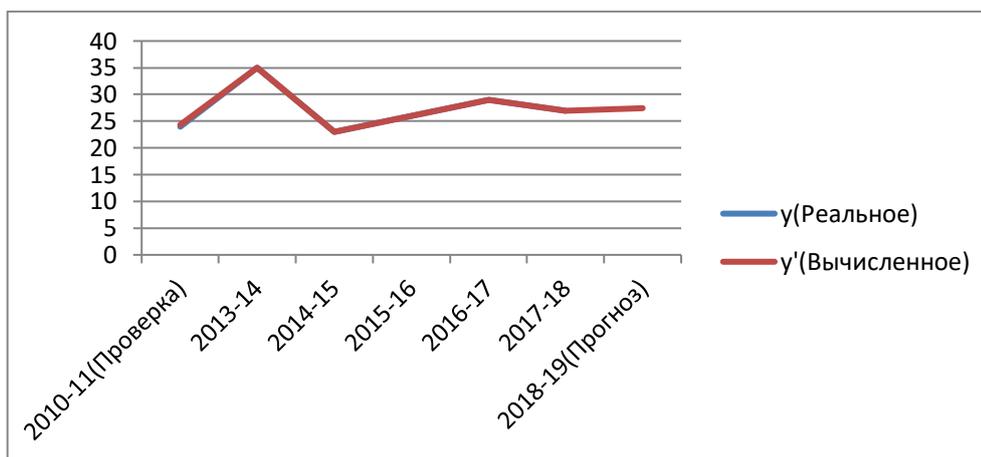
Отрицательные коэффициенты получились из-за того, что я выделил 5 основных факторов, влияющих на результат команды и они скорректировались, чтобы погрешность была минимальной. Прямого физического смысла нет, так как, при увеличении количества выброшенных штрафных, фактора ( $x_6$ ), функция уменьшается. Это неверно напрямую, но факторы взаимосвязаны между собой и поэтому их нельзя рассматривать обособленно от всей функции.

Коэффициенты  $x_1 = x_2 = x_5 = x_8 = x_9 = x_{11} = x_{12} = x_{13} = x_{14} = x_{15} = 0$  значит, данные факторы мало влияют на результаты матчей в сезоне.

В итоге получили факторы, напрямую влияющие на функцию, в дальнейшем именуемые главными факторы:  $x_3$  – количество выброшенных трёх очковых;  $x_4$  – процент попадания трёх очковых;  $x_6$  – количество выброшенных

штрафных;  $x_7$  – процент попадания штрафных;  $x_{10}$  – общее количество подборов.

Построим график зависимости  $y$  и  $y'$  от времени, где  $y$  – реальное значение, взятое с сайта <https://stats.nba.com>, а  $y'$  – вычисленное с помощью производственных функций.



*Рис 1. Линейная производственная функция для побед дома.*

На графике, видно, что для сезона 2012-13 функции  $y$  и  $y'$  практически не различаются, значит, вероятность точного прогноза увеличивается. Для 5 сезонов, которыми мы строили  $y$  и  $y'$  совпали, это подтверждает точность нашего построения. Прогноз на сезон показал, что результат для побед дома не изменится.

### *Линейная производственная функция для поражений дома*

$$y = 0,4912x_3 + 2,7112x_4 + 3,25x_6 - 1,6423x_7 - 0,9387x_{10}$$

Средняя относительная погрешность вычислений 0,042087 %.

Главные факторы совпадают с предыдущей функцией.

Прогноз: результат команды не изменится.

График в приложение **Рис 1**.

### *Линейная производственная функция для побед в гостях*

$$y = 0,3671x_3 + 2,8388x_4 - 2,29x_6 - 1,6282x_7 + 1,9929x_{10}$$

Средняя относительная погрешность вычислений 0,026463 %.

Главные факторы совпадают с предыдущей функцией.

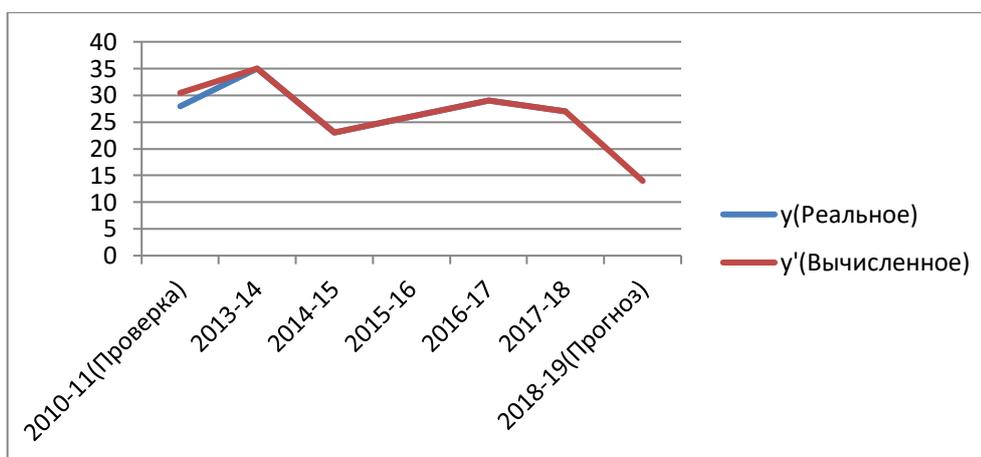
Прогноз: результат команды уменьшится.

График в приложение **Рис 2**.

### *Линейная производственная функция для поражений в гостях*

$$y = -0,3776x_3 - 2,6048x_4 + 2,1955x_6 + 1,81x_7 - 1,5121x_{10}$$

График функции.



*Рис 2. Линейная производственная функция для поражений в гостях.*

На графике видно, функция введёт себя, непредсказуема.

Данную функцию не будем использовать для прогноза результата.

## **Обратные ПФ**

Запишем аналитический вид обратной производственной функции, которую мы рассматриваем:

$$f(x_1 \dots x_n) = \frac{1}{a_1 x_1 + \dots + a_n x_n}$$

Сделаем всё аналогично случаю построения линейных производственных функций.

Главные факторы одинаковы во всех случаях:  $x_3$  – количество выброшенных трёх очковых;  $x_4$  – процент попадания трёх очковых;  $x_6$  – количество выброшенных штрафных;  $x_7$  – процент попадания штрафных;  $x_{10}$  – общее количество подборов.

***Обратная производственная функция для побед дома***

$$y = \frac{1}{0,0004x_3 + 0,0036x_4 + 0,004x_6 - 0,0021x_7 - 0,0007x_{10}}$$

Средняя относительная погрешность вычислений 3,4946 %.

Прогноз: результат команды увеличится.

График в приложение **Рис 3**.

***Обратная производственная функция для поражений дома***

$$y = \frac{1}{-0,0064x_3 - 0,0241x_4 - 0,03x_6 + 0,0147x_7 + 0,0153x_{10}}$$

Средняя относительная погрешность вычислений 2,059 %.

Прогноз: результат команды увеличится.

График в приложение **Рис 4**.

***Обратная производственная функция для побед в гостях***

$$y = \frac{1}{-0,0015x_3 - 0,0089x_4 + 0,01x_6 + 0,0065x_7 - 0,0063x_{10}}$$

График функции.

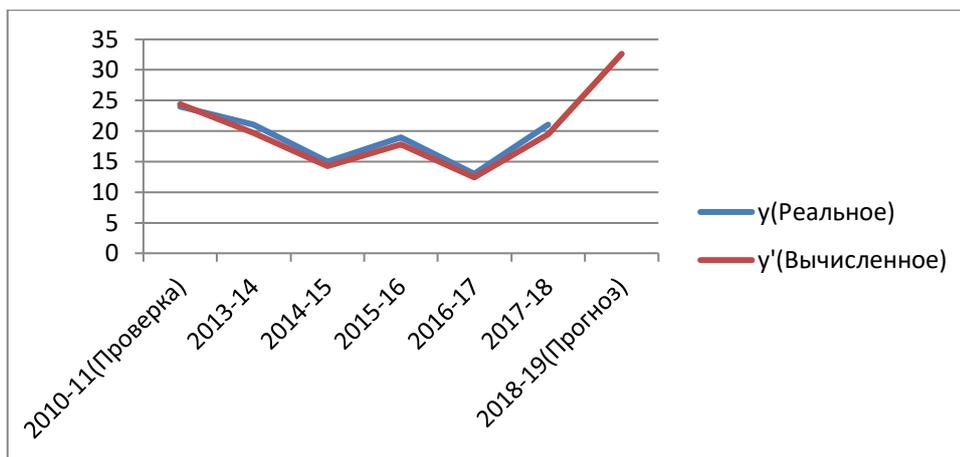


Рис 3. Обратная производственная функция для побед в гостях.

На графике видно, функция введёт себя, непредсказуема.

Данную функцию не будем использовать для прогноза результата.

### ***Обратная производственная функция для поражений в гостях***

$$y = \frac{1}{0,0005x_3 + 0,0053x_4 - 0,0042x_6 - 0,0028x_7 + 0,0035x_{10}}$$

Средняя относительная погрешность вычислений 8,5368 %.

Прогноз: результат команды увеличится.

График в приложение **Рис 5**.

## **Логарифмические ПФ**

Запишем аналитический вид логарифмической производственной функции, которую мы рассматриваем:

$$f(x_1 \dots x_n) = a_1 \ln(x_1) + \dots + a_n \ln(x_n)$$

### ***Логарифмическая производственная функция для побед дома***

$$y = -49,189 \ln(x_2) - 75,98 \ln(x_6) + 74,5626 \ln(x_7) + 4,1373 \ln(x_8) + 15,7797 \ln(x_{13})$$

Средняя относительная погрешность вычислений 6,61E-05 %.

Главные факторы:  $x_2$  – количество точных трёх очковых;  $x_6$  – количество выброшенных штрафных;  $x_7$  – процент попадания штрафных;  $x_8$  – количество подборов на чужом щите;  $x_{13}$  – количество перехватов.

Прогноз: результат команды уменьшится.

График функции в приложение **Рис 6**.

***Логарифмическая производственная функция для поражений дома***

$$y = 51,3757 \ln(x_2) + 78,02 \ln(x_6) - 68,9976 \ln(x_7) - 1,0412 \ln(x_8) - 16,3544 \ln(x_{13})$$

Средняя относительная погрешность вычислений 0,001392 %.

Главные факторы: совпадают с предыдущей функцией.

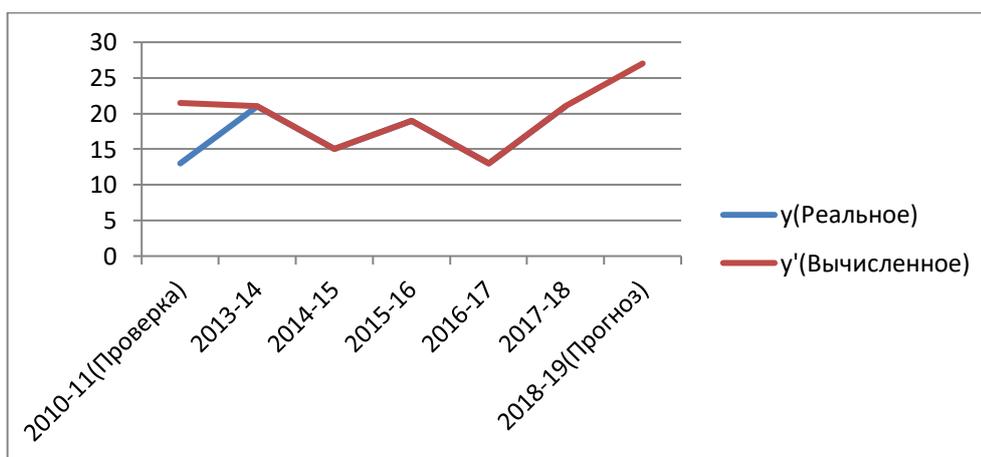
Прогноз: результат команды увеличится.

График функции в приложение **Рис 7**.

***Логарифмическая производственная функция для побед в гостях***

$$y = -29,9512 \ln(x_3) - 48,16 \ln(x_5) + 44,3295 \ln(x_7) + 2,6546 \ln(x_{13}) + 32,8554 \ln(x_{14})$$

График функции.



**Рис 4.** Логарифмическая производственная функция для побед в гостях.

На графике видно, функция введёт себя, непредсказуема.

Данную функцию не будем использовать для прогноза результата.

### ***Логарифмическая производственная функция для поражений в гостях***

$$y = 30,564 \ln(x_3) + 46,85 \ln(x_5) - 34,8521 \ln(x_7) - 3,8508 \ln(x_{13}) - 30,2738 \ln(x_{14})$$

График функции.

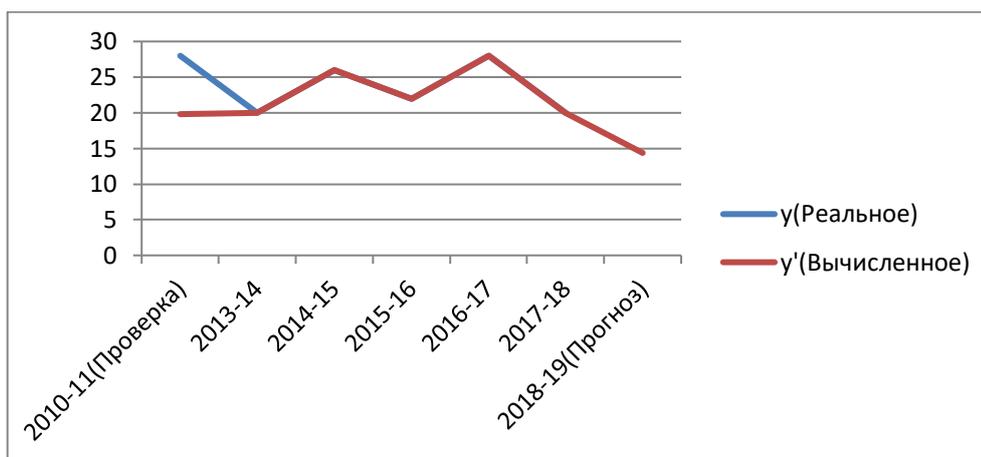


Рис 5. Логарифмическая производственная функция для поражений в гостях.

На графике видно, функция введёт себя, непредсказуема.

Данную функцию не будем использовать для прогноза результата.

## **Экспоненциальные ПФ**

Запишем аналитический вид экспоненциальной производственной функции, которую мы рассматриваем:

$$f(x_1 \dots x_n) = e^{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n}$$

Главные факторы одинаковы во всех случаях:  $x_3$  – количество выброшенных трёх очковых;  $x_4$  – процент попадания трёх очковых;  $x_6$  – количество выброшенных штрафных;  $x_7$  – процент попадания штрафных;  $x_{10}$  – общее количество подборов.

### ***Экспоненциальная производственная функция для побед дома***

$$y = e^{0,0064x_3 - 0,0797x_4 - 0,0941x_6 + 0,0672x_7 + 0,0672x_{10}}$$

Средняя относительная погрешность вычислений 0,329426 %.

Прогноз: результат команды увеличится.

График функции в приложение **Рис 8**.

***Экспоненциальная производственная функция для поражений дома***

$$y = e^{0,0692x_3 + 0,2515x_4 + 0,32x_6 - 0,1419x_7 - 0,0959x_{10}}$$

Средняя относительная погрешность вычислений 0,169188 %.

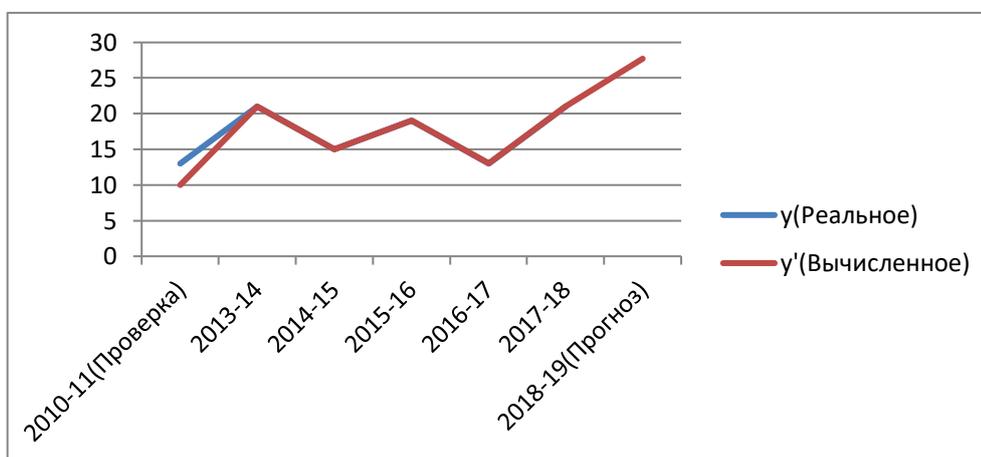
Прогноз: результат команды увеличится.

График функции в приложение **Рис 9**.

***Экспоненциальная производственная функция для побед в гостях***

$$y = e^{0,0233x_3 + 0,1741x_4 - 0,14x_6 - 0,0895x_7 + 0,1442x_{10}}$$

График функции.



**Рис 6.** Экспоненциальная производственная функция для побед в гостях.

На графике видно, функция введёт себя, непредсказуема.

Данную функцию не будем использовать для прогноза результата.

***Экспоненциальная производственная функция для поражений в гостях***

$$y = e^{-0,0148x_3 - 0,0955x_4 + 0,09x_6 + 0,0851x_7 - 0,0364x_{10}}$$

Средняя относительная погрешность вычислений 0,095607 %.

Прогноз: результат команды увеличится.

График функции в приложение **Рис 10**.

## Степенные ПФ

Запишем аналитический вид степенной производственной функции, которую мы рассматриваем:

$$f(x_1 \dots x_n) = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$$

### *Степенная производственная функция для побед дома*

$$y = x_2^{-1,5757} * x_6^{-2,53} * x_7^{2,9188} * x_8^{0,2769} * x_{13}^{0,5548}$$

Средняя относительная погрешность вычислений 0,018515 %.

Главные факторы:  $x_2$  — количество точных трёх очковых;  $x_6$  — количество выброшенных штрафных;  $x_7$  — процент попадания штрафных;  $x_8$  — количество подборов на чужом щите;  $x_{13}$  — количество перехватов.

Прогноз: результат команды уменьшится.

График в приложение **Рис 11**.

### *Степенная производственная функция для поражений дома*

$$y = x_2^{4,913} * x_6^{7,28} * x_7^{-6,1357} * x_8^{-0,3579} * x_{13}^{-1,3599}$$

Средняя относительная погрешность вычислений 0,023716 %.

Главные факторы совпадают с предыдущей функцией.

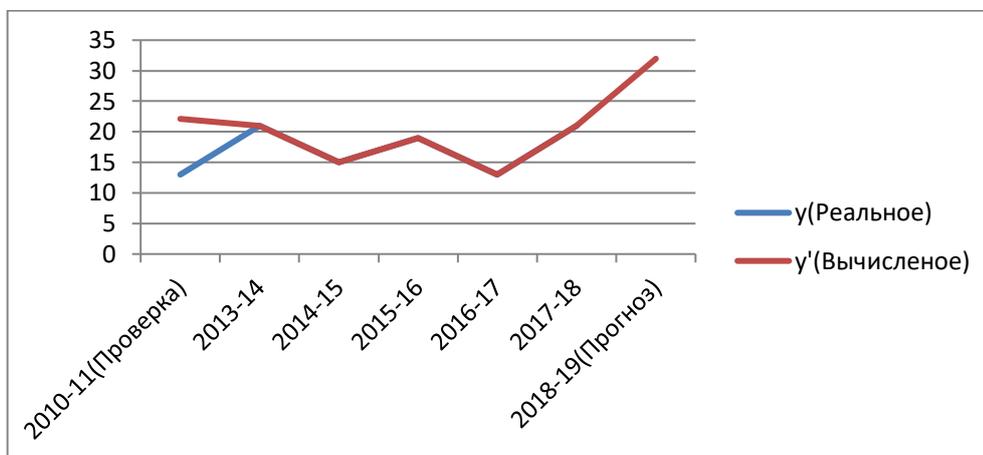
Прогноз: результат команды уменьшится.

График в приложение **Рис 12**.

### ***Степенная производственная функция для побед в гостях***

$$y = x_3^{-1,5022} * x_5^{-2,99} * x_7^{2,9342} * x_{13}^{-0,0118} * x_{14}^{2,1894}$$

График функции.



*Рис 7. Степенная производственная функция для побед в гостях.*

На графике видно, функция введёт себя, непредсказуема.

Данную функцию не будем использовать для прогноза результата.

### ***Степенная производственная функция для поражений в гостях***

$$y = x_3^{1,4474} * x_5^{1,88} * x_7^{-1,0382} * x_{13}^{-0,2783} * x_{14}^{-1,0794}$$

Средняя относительная погрешность вычислений 0,001211 %.

Главные факторы:  $x_3$  – количество выброшенных трёх очковых;  $x_5$  – количество выброшенных штрафных;  $x_7$  – процент попадания штрафных;  $x_{13}$  – количество перехватов;  $x_{14}$  – количество заблокированных бросков.

Прогноз: результат команды увеличится.

График в приложение **Рис 13**.

### **Прогноз на сезон.**

*Дома*

**25** побед; **16** поражений.

### *Гости*

**23** победы; **18** поражений.

### *Итог*

**48** побед; **34** поражения

**Выход в плей-офф.**

### **Реальный результат.**

**48** побед; **34** поражения.

Команда вышла в плей-офф.

## **§2.2 Производственные функции команды Oklahoma City Thunder.**

### **Линейные ПФ**

Аналогично предыдущему случаю построим ПФ и сделаем прогноз.

*Линейная производственная функция для побед дома*

$$y = 1,60x_1 - 0,565x_3 - 0,5284x_4 + 0,42029x_7 - 1,2963x_9$$

*Линейная производственная функция для поражений дома*

$$y = -1,5538x_1 + 0,83374x_3 + 0,6793x_4 - 0,25189x_7 + 1,71x_9$$

*Линейная производственная функция для побед в гостях*

$$y = 0,54146x_3 - 0,6164x_4 + 1,13x_7 - 0,2289x_{10} - 2,1223x_{15}$$

*Линейная производственная функция для поражений в гостях*

$$y = -0,26509x_3 + 0,69107x_4 - 1,2322x_7 + 0,50238x_{10} + 3,32x_{15}$$

Средняя относительная погрешность вычислений всех функций 0,0462 %.

Прогноз: 41 победа-41 поражение.

Графики в приложение **Рис 14; Рис 15; Рис 16; Рис 17** соответственно.

## Обратные ПФ

### *Обратная производственная функция для побед дома*

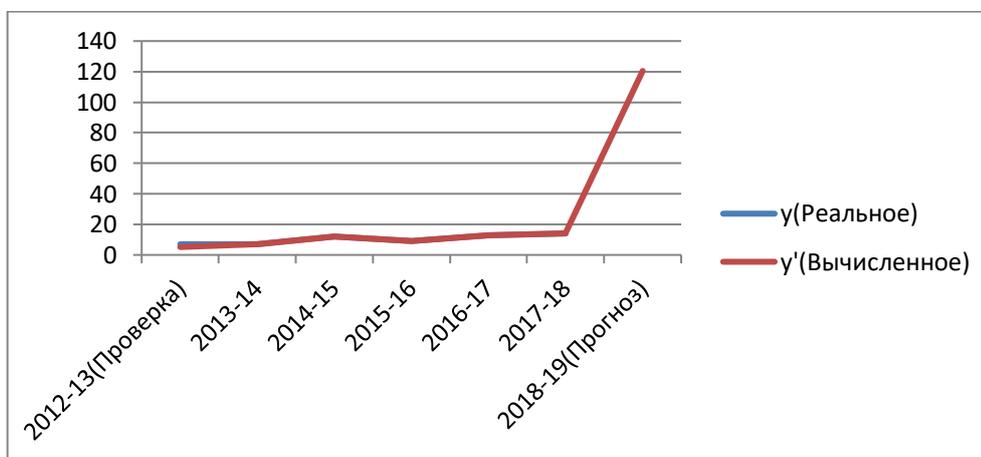
$$y = \frac{1}{-0,0016346x_1 + 0,0010523x_3 + 0,0008908x_4 - 0,0021x_7 + 0,0020187x_9}$$

Средняя относительная погрешность 0,005 %.

Графики в приложение **Рис 18**.

### *Обратная производственная функция для поражений дома*

$$y = \frac{1}{0,015487x_1 - 0,0069642x_3 + -0,0029183x_4 + 0,0021893x_7 - 0,0152x_9}$$



**Рис 8.** Обратная производственная функция для поражений дома.

На графике видно, функция введёт себя, непредсказуема.

Данную функцию не будем использовать для прогноза результата.

### *Обратная производственная функция для побед в гостях*

у

1

$$= \frac{1}{-0,00085741x_3 + 0,0018128x_4 - 0,0031898x_7 + 0,0010949x_{10} + 0,0090605x_{15}}$$

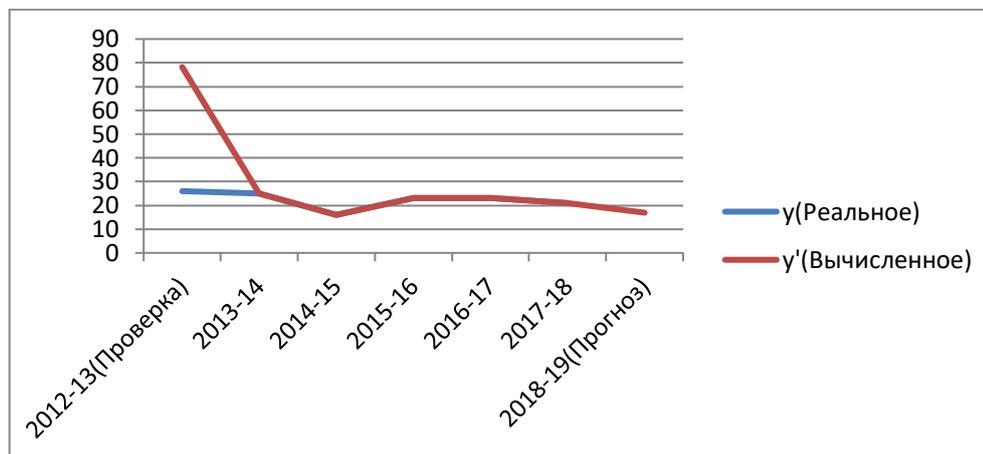


Рис 9. Обратная производственная функция для побед в гостях.

На графике видно, функция введёт себя, непредсказуема.

Данную функцию не будем использовать для прогноза результата.

### ***Обратная производственная функция для поражений в гостях***

у

1

$$= \frac{1}{0,0011465x_3 - 0,0013842x_4 + 0,0026761x_7 - 0,00080624x_{10} - 0,0043293x_{15}}$$

Средняя относительная погрешность 0,008 %.

Графики в приложение **Рис 19.**

Прогноз: отсутствует, так как две функции непригодны к использованию.

## **Логарифмические ПФ**

*Логарифмическая производственная функция для побед дома*

$$y = -2,1473 \ln(x_3) + 18,591 \ln(x_7) - 13,025 \ln(x_8) + 16,78 \ln(x_{14}) - 13,291 \ln(x_{15})$$

*Логарифмическая производственная функция для поражений дома*

$$y = 3,8138 \ln(x_3) - 8,8631 \ln(x_7) + 12,442 \ln(x_8) - 17,704 \ln(x_{14}) + 12,168 \ln(x_{15})$$

*Логарифмическая производственная функция для побед в гостях*

$$y = 19,628 \ln(x_2) + 81,42 \ln(x_5) - 54,60 \ln(x_7) - 18,284 \ln(x_8) + 11,225 \ln(x_{13})$$

*Логарифмическая производственная функция для поражений в гостях*

$$y = -21,88 \ln(x_2) - 90,32 \ln(x_5) + 68,146 \ln(x_7) + 22,609 \ln(x_8) - 9,9919 \ln(x_{13})$$

Средняя относительная погрешность вычислений всех функций 0,0328%.

Прогноз: 52 победы-30 поражения.

Графики в приложение **Рис 20; Рис 21; Рис 22; Рис 23** соответственно.

## **Экспоненциальные ПФ**

*Экспоненциальная производственная функция для побед дома*

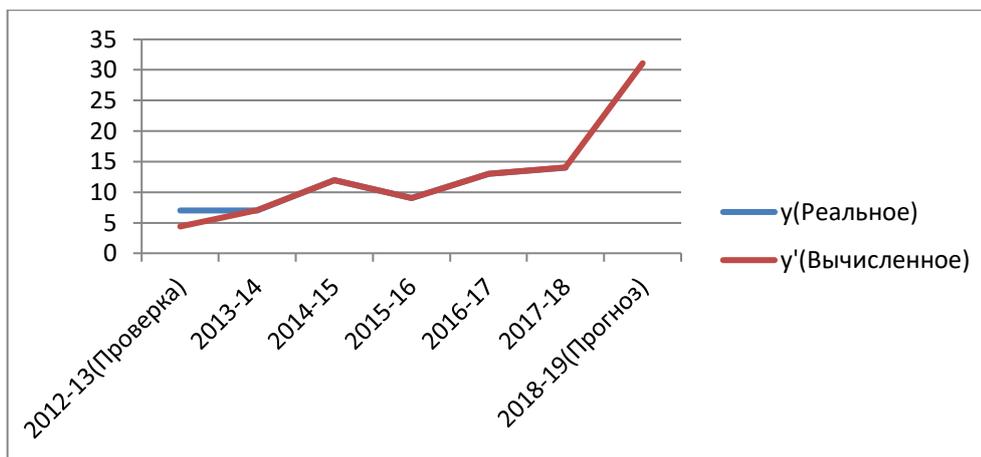
$$y = e^{0,054646x_1 - 0,0028108x_3 - 0,0096748x_4 + 0,024182x_7 - 0,01758x_9}$$

Средняя относительная погрешность 0,0041 %.

Графики в приложение **Рис 24**.

*Экспоненциальная производственная функция для поражений дома*

$$y = e^{-0,15147x_1 + 0,090253x_3 + 0,057525x_4 - 0,014115x_7 + 0,18351x_9}$$



*Рис 10. Экспоненциальная производственная функция для побед в гостях.*

На графике видно, функция введёт себя, непредсказуема.

Данную функцию не будем использовать для прогноза результата.

***Экспоненциальная производственная функция для побед в гостях***

$$y = e^{0,042156x_3 - 0,027908x_4 + 0,052607x_7 + 0,0035598x_{10} - 0,055344x_{15}}$$

Средняя относительная погрешность 0,0029 %.

Графики в приложение **Рис 25.**

***Экспоненциальная производственная функция для поражений в гостях***

$$y = e^{0,0022443x_3 + 0,036449x_4 - 0,064382x_7 + 0,040308x_{10} + 0,21307x_{15}}$$

Средняя относительная погрешность 0,0029 %.

Графики в приложение **Рис 26.**

Прогноз: отсутствует, так как две функции непригодны к использованию.

## Степенные ПФ

***Степенная производственная функция для побед дома***

$$y = x_3^{0,000591} * x_7^{1,2134} * x_8^{-0,4327} * x_{14}^{0,47613} * x_{15}^{-0,53028}$$

*Степенная производственная функция для поражений дома*

$$y = x_3^{0,2184} * x_7^{-0,31} * x_8^{1,48} * x_{14}^{-1,9284} * x_{15}^{0,87262}$$

*Степенная производственная функция для побед в гостях*

$$y = x_2^{0,92881} * x_5^{3,73} * x_7^{-2,1972} * x_8^{-0,65985} * x_{13}^{0,63211}$$

*Степенная производственная функция для поражений в гостях*

$$y = x_2^{-1,1246} * x_5^{-4,75} * x_7^{3,861} * x_8^{1,375} * x_{13}^{-0,41759}$$

Средняя относительная погрешность вычислений всех функций 0,0472 %.

Прогноз: 52 победы-30 поражения.

Графики в приложение **Рис 27; Рис 28; Рис 29; Рис 30** соответственно.

### **Прогноз на сезон.**

*Дома*

**26** побед; **15** поражений.

*Гости*

**22** побед; **19** поражение.

*Итог*

**48** побед; **34** поражений.

**Выход в плей-офф.**

**Реальный результат.**

**49** побед; **33** поражения.

Команда вышла в плей-офф.

## §2.3 Производственные функции команды San Antonio Spurs.

### Линейные ПФ

*Линейная производственная функция для побед дома*

$$y = 0,89x_1 - 1,921x_3 - 0,44171x_4 + 1,65x_6 + 0,19775x_7$$

Средняя относительная погрешность 0,0003%.

Графики в приложение **Рис 31.**

*Линейная производственная функция для поражений дома*

$$y = -0,51452x_1 + 2,0513x_3 + 0,43246x_4 - 1,49x_6 + 0,01572x_7$$

Средняя относительная погрешность 0,0186 %.

Графики в приложение **Рис 32.**

*Линейная производственная функция для побед в гостях*

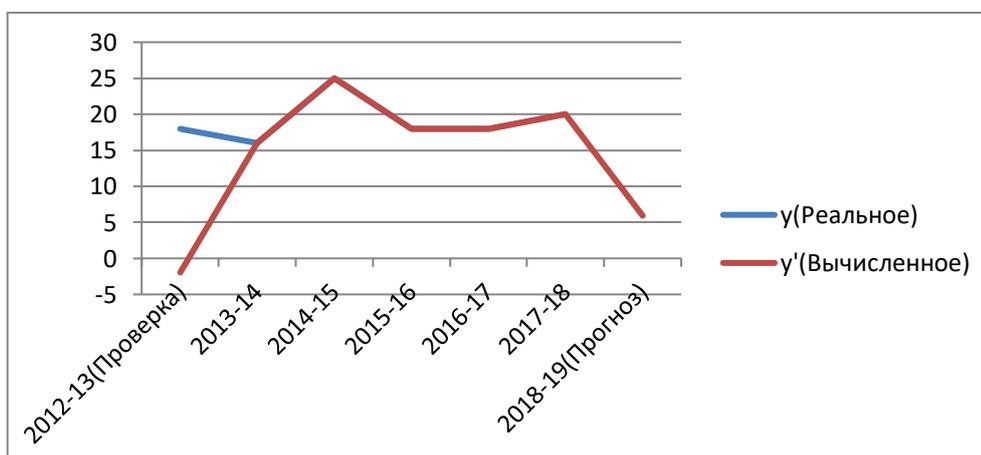
$$y = 0,71228x_3 + 3,23x_4 + 0,77x_7 - 4,3378x_{10} + 1,0809x_{15}$$

Средняя относительная погрешность 0,0109 %.

Графики в приложение **Рис 33.**

*Линейная производственная функция для поражений в гостях*

$$y = -1,0005x_3 - 3,3394x_4 - 0,76115x_7 + 5,41x_{10} - -0,88x_{15}$$



*Рис 11. Линейная производственная функция для побед дома.*

На графике видно, функция введёт себя, непредсказуема.

Данную функцию не будем использовать для прогноза результата.

## Обратные ПФ

### *Обратная производственная функция для побед дома*

$$y = \frac{1}{-0,00025274x_1 + 0,0019069x_3 + 0,00019513x_4 - 0,00138x_6 + 0,00027571x_7}$$

Средняя относительная погрешность 0,002 %.

Графики в приложение **Рис 34.**

### *Обратная производственная функция для поражений дома*

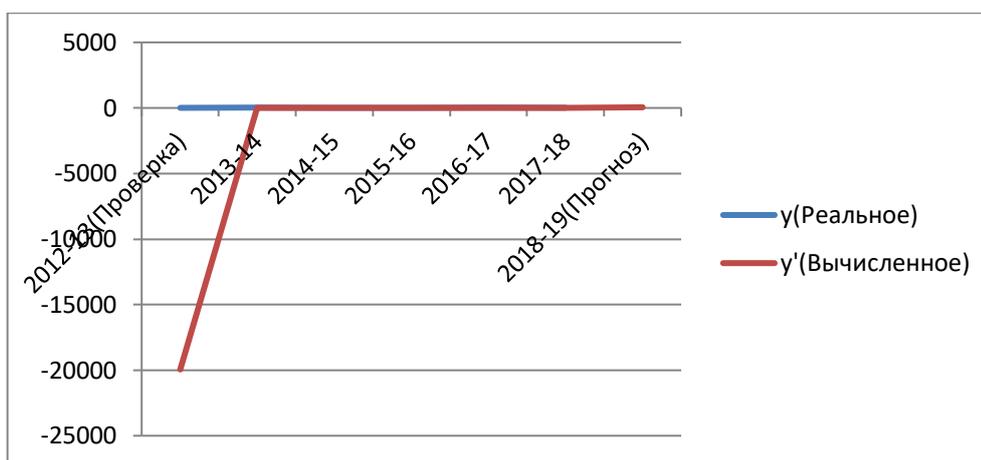
$$y = \frac{1}{0,020744x_1 - 0,16246x_3 - 0,073142x_4 + 0,076395x_6 + 0,053593x_7}$$

Средняя относительная погрешность 0,0688 %.

Графики в приложение **Рис 35.**

### *Обратная производственная функция для побед в гостях*

$$y = \frac{1}{-0,0021601x_3 - 0,0062706x_4 - 0,0029063x_7 + 0,013481x_{10} - 0,0020866x_{15}}$$



*Рис 12. Обратная производственная функция для побед в гостях.*

На графике видно, функция введёт себя, непредсказуема.

Данную функцию не будем использовать для прогноза результата.

***Обратная производственная функция для поражений в гостях***

$$y = \frac{1}{0,0034509x_3 + 0,013863x_4 + 0,00049549x_7 - 0,014431x_{10} + 0,0043414x_{15}}$$

Средняя относительная погрешность 0,0046 %.

Графики в приложение **Рис 36.**

Прогноз: отсутствует, так как одна из функций непригодна к использованию.

**Логарифмические ПФ**

***Логарифмическая производственная функция для побед дома***

$$y = -44,2726 \ln(x_2) + 44,8165 \ln(x_4) - 22,7012 \ln(x_7) + 5,2709 \ln(x_{12}) + 24,1208 \ln(x_{13})$$

***Логарифмическая производственная функция для поражений дома***

$$y = 43,908 \ln(x_2) - 45,506 \ln(x_4) + 30,15 \ln(x_7) - 1,301 \ln(x_{12}) - 23,403 \ln(x_{13})$$

*Логарифмическая производственная функция для побед в гостях*

$$y = 110,65 \ln(x_2) - 128,89 \ln(x_3) - 11,19 \ln(x_7) + 18,351 \ln(x_{14}) + 72,259 \ln(x_{15})$$

*Логарифмическая производственная функция для поражений в гостях*

$$y = -113,02 \ln(x_2) + 132,8 \ln(x_3) + 23,464 \ln(x_7) - 20,893 \ln(x_{14}) - 77,565 \ln(x_{15})$$

Средняя относительная погрешность вычислений всех функций 0,0857 %.

Прогноз: 44 победы-28 поражений.

Графики в приложение **Рис 37; Рис 38; Рис 39; Рис 40** соответственно.

## Экспоненциальные ПФ

*Экспоненциальная производственная функция для побед дома*

$$y = e^{0,049908x_1 - 0,049051x_3 - 0,010737x_4 + 0,06x_6 + 0,016642x_7}$$

*Экспоненциальная производственная функция для поражений дома*

$$y = e^{-0,068304x_1 + 0,45053x_3 + 0,16789x_4 - 0,24x_6 - 0,082508x_7}$$

*Экспоненциальная производственная функция для побед в гостях*

$$y = e^{0,016947x_3 + 0,1315x_4 + 0,048287x_7 - 0,15903x_{10} + 0,061103x_{15}}$$

*Экспоненциальная производственная функция для поражений в гостях*

$$y = e^{-0,075978x_3 - 0,21699x_4 - 0,025086x_7 + 0,34606x_{10} - 0,04519x_{15}}$$

Средняя относительная погрешность вычислений всех функций 0,0359 %.

Прогноз: 63 победы-19 поражений.

Графики в приложение **Рис 41; Рис 42; Рис 43; Рис 44** соответственно.

## Степенные ПФ

### *Степенная производственная функция для побед дома*

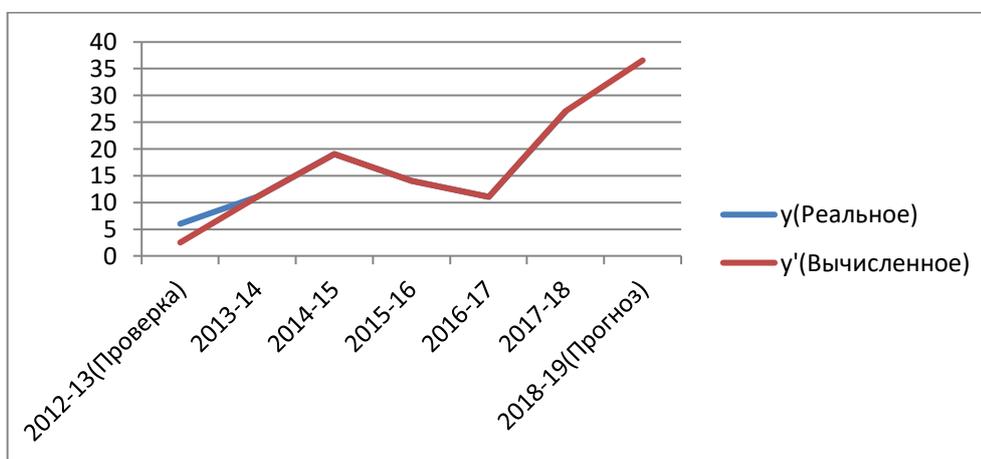
$$y = x_2^{-1,3297} * x_4^{1,427} * x_7^{-0,36775} * x_{12}^{0,41713} * x_{13}^{0,80006}$$

Средняя относительная погрешность 0,0039 %.

Графики в приложение **Рис 45**.

### *Степенная производственная функция для поражений дома*

$$y = x_2^{9,44} * x_4^{-6,4459} * x_7^{1,89} * x_{12}^{1,711} * x_{13}^{-3,7373}$$



*Рис 13. Степенная производственная функция для поражений дома.*

На графике видно, функция введёт себя, непредсказуема.

Данную функцию не будем использовать для прогноза результата.

### *Степенная производственная функция для побед в гостях*

$$y = x_2^{4,7737} * x_3^{-5,8134} * x_7^{-0,29186} * x_{14}^{0,98587} * x_{15}^{3,71}$$

Средняя относительная погрешность 0,0018 %.

Графики в приложение **Рис 46**.

### *Степенная производственная функция для поражений в гостях*

$$y = x_2^{-6,9905} * x_3^{7,77} * x_7^{1,452} * x_{14}^{-0,95368} * x_{15}^{-3,9396}$$

Средняя относительная погрешность 0,02317 %.

Графики в приложение **Рис 47.**

Прогноз: отсутствует, так как одна из функций непригодна к использованию.

### **Прогноз на сезон.**

#### *Дома*

**29** побед; **12** поражений.

#### *Гости*

**19** побед; **22** поражения.

#### *Итог*

**48** побед; **34** поражения.

**Выход в плей-офф.**

### **Реальный результат.**

**48** побед; **34** поражения.

Команда вышла в плей-офф.

## **§2.4 Производственные функции команды Golden State Warriors.**

### **Линейные ПФ**

*Линейная производственная функция для побед дома*

$$y = 1,60x_1 - 0,565x_3 - 0,5284x_4 + 0,42029x_7 - 1,2963x_9$$

Средняя относительная погрешность 0,0047%.

Графики в приложение **Рис 48.**

*Линейная производственная функция для поражений дома*

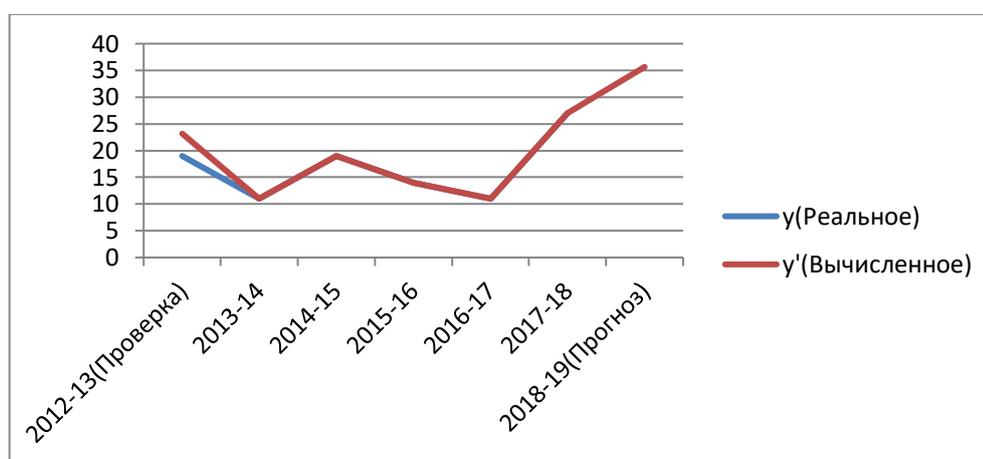
$$y = -1,5538x_1 + 0,83374x_3 + 0,6793x_4 - 0,25189x_7 + 1,71x_9$$

Средняя относительная погрешность 0,0108 %.

Графики в приложение **Рис 49**.

*Линейная производственная функция для побед в гостях*

$$y = 0,54146x_3 - 0,6164x_4 + 1,13x_7 - 0,2289x_{10} - 2,1223x_{15}$$



**Рис 14.** Линейная производственная функция для побед в гостях.

На графике видно, функция введёт себя, непредсказуема.

Данную функцию не будем использовать для прогноза результата.

*Линейная производственная функция для поражений в гостях*

$$y = -0,26509x_3 + 0,69107x_4 - 1,2322x_7 + 0,50238x_{10} + 3,32x_{15}$$

Средняя относительная погрешность 0,0112 %.

Графики в приложение **Рис 50**.

Прогноз: отсутствует, так как одна из функций непригодна к использованию.

## Обратные ПФ

### *Обратная производственная функция для побед дома*

$$y = \frac{1}{0,0015025x_1 - 0,00066866x_3 - 0,0030985x_4 + 0,0008349x_7 + 0,00076103x_{10}}$$

Средняя относительная погрешность 0,0038 %.

Графики в приложение **Рис 51**.

### *Обратная производственная функция для поражений дома*

$$y = \frac{1}{-0,14689x_1 + 0,0060738x_3 + 0,22096x_4 - 0,0084292x_7 - 0,020376x_{10}}$$

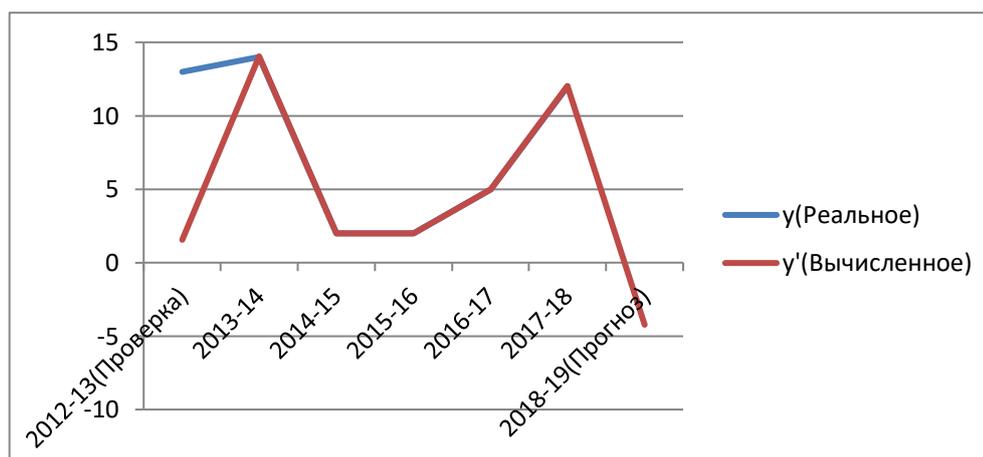


Рис 15. Обратная производственная функция для поражений дома.

На графике видно, функция введёт себя, непредсказуема.

Данную функцию не будем использовать для прогноза результата.

### *Обратная производственная функция для побед в гостях*

$$y = \frac{1}{0,0015444x_1 - 0,0022298x_3 - 0,00013272x_4 + 0,0021239x_6 - 0,00020345x_7}$$

Средняя относительная погрешность 0,001 %.

Графики в приложение **Рис 52**.

### *Обратная производственная функция для поражений в гостях*

у

1

$$= -0,004818x_1 + 0,0018363x_3 - 0,002278x_4 + 0,0003998x_6 + 0,0042889x_7$$

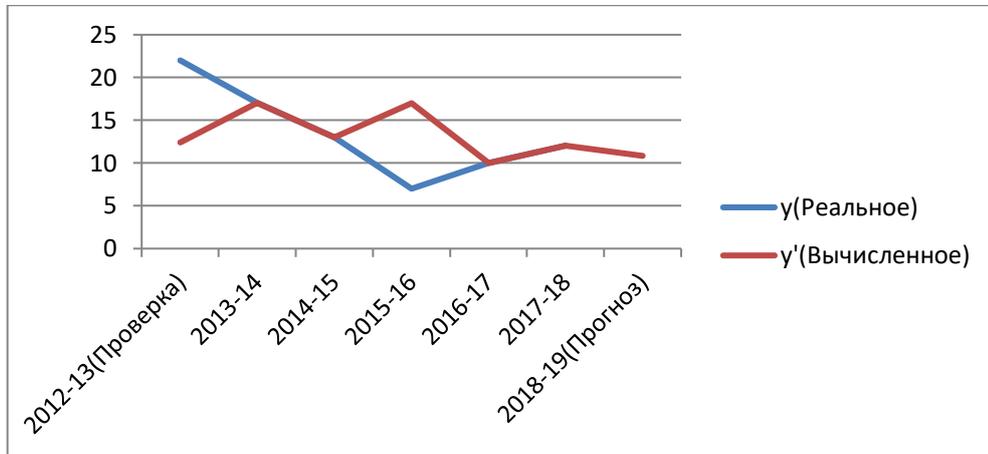


Рис 16. Обратная производственная функция для поражений в гостях.

На графике видно, функция введёт себя, непредсказуема.

Данную функцию не будем использовать для прогноза результата.

Прогноз: отсутствует, так как две функции непригодны к использованию.

## Логарифмические ПФ

*Логарифмическая производственная функция для побед дома*

$$y = 43,568 \ln(x_2) - 27,13 \ln(x_6) - 6,404 \ln(x_7) + 32,663 \ln(x_{13}) - 17,58 \ln(x_{14})$$

*Логарифмическая производственная функция для поражений дома*

$$y = -44,881 \ln(x_2) + 30,94 \ln(x_6) + 13,31 \ln(x_7) - 31,622 \ln(x_{13}) + 17,725 \ln(x_{14})$$

*Логарифмическая производственная функция для побед в гостях*

$$y = 27,292 \ln(x_2) - 22,448 \ln(x_7) + 2,51 \ln(x_8) + 17,788 \ln(x_{13}) + 9,53 \ln(x_{14})$$

*Логарифмическая производственная функция для поражений в гостях*

$$y = -26,092 \ln(x_2) + 32,156 \ln(x_7) - 0,37463 \ln(x_8) - 20,651 \ln(x_{13}) - 11,014 \ln(x_{14})$$

Средняя относительная погрешность вычислений всех функций 0,0688 %.

Прогноз: 62 победы-20 поражений.

Графики в приложение **Рис 53; Рис 54; Рис 55; Рис 56** соответственно.

## Экспоненциальные ПФ

*Экспоненциальная производственная функция для побед дома*

$$y = e^{-0,022319x_1 - 0,01327x_3 + 0,13965x_4 - 0,022618x_7 + 0,024573x_{10}}$$

Средняя относительная погрешность 0,0019 %.

Графики в приложение **Рис 57**.

*Экспоненциальная производственная функция для поражений дома*

$$y = e^{0,48186x_1 - 0,060509x_3 - 0,7989x_4 + 0,09463x_7 + 0,097415x_{10}}$$

Средняя относительная погрешность 0,0063 %.

Графики в приложение **Рис 58**.

*Экспоненциальная производственная функция для побед в гостях*

$$y = e^{-0,057204x_1 + 0,037035x_3 + 0,053798x_4 + 0,02x_6 + 0,034021x_7}$$

Средняя относительная погрешность 0,00259 %.

Графики в приложение **Рис 59**.

*Экспоненциальная производственная функция для поражений в гостях*

$$y = e^{-0,075978x_3 - 0,21699x_4 - 0,025086x_7 + 0,34606x_{10} - 0,04519x_{15}}$$

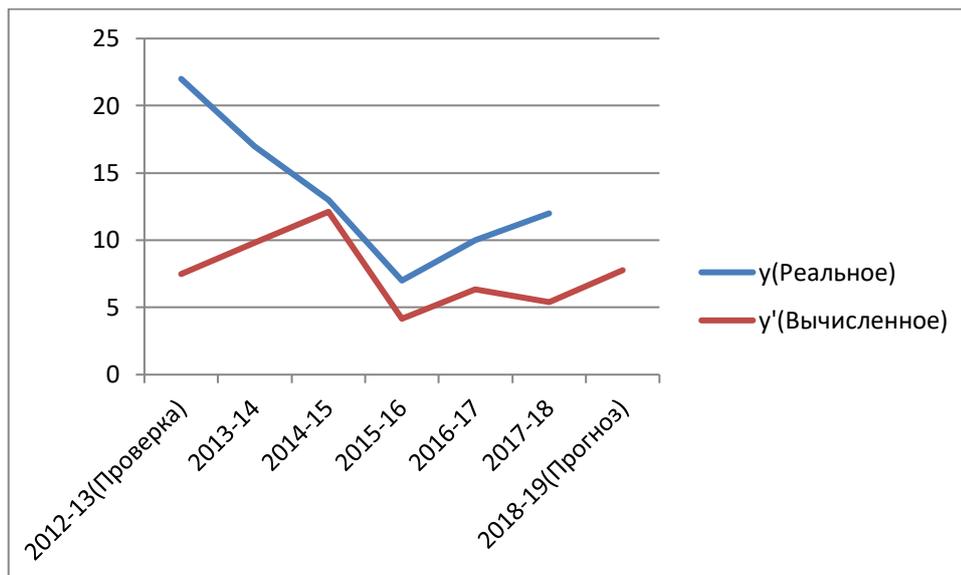


Рис 17. Экспоненциальная производственная функция для поражений в гостях.

На графике видно, функция введёт себя, непредсказуема.

Данную функцию не будем использовать для прогноза результата.

Прогноз: отсутствует, так как одна из функций непригодна к использованию.

## Степенные ПФ

### *Степенная производственная функция для побед дома*

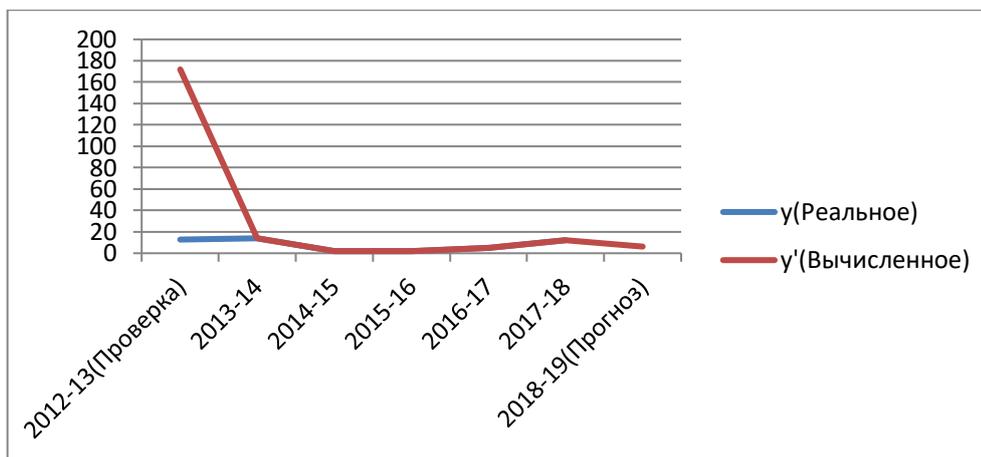
$$y = x_2^{1,2155} * x_6^{-0,55} * x_7^{0,19216} * x_{13}^{1,0469} * x_{14}^{-0,48164}$$

Средняя относительная погрешность 0,0016 %.

Графики в приложение Рис 60.

### *Степенная производственная функция для поражений дома*

$$y = x_2^{9,05} * x_6^{8,28} * x_7^{0,52} * x_{13}^{-5,6145} * x_{14}^{4,5648}$$



*Рис 18. Степенная производственная функция для поражений дома.*

На графике видно, функция введёт себя, непредсказуема.

Данную функцию не будем использовать для прогноза результата.

***Степенная производственная функция для побед в гостях***

$$y = x_2^{0,9753} * x_7^{-0,25694} * x_8^{0,20616} * x_{13}^{0,51015} * x_{14}^{0,31551}$$

Средняя относительная погрешность 0,0015 %.

Графики в приложение **Рис 61.**

***Степенная производственная функция для поражений в гостях***

$$y = x_2^{-2,253} * x_7^{3,0241} * x_8^{-0,04716} * x_{13}^{-1,5499} * x_{14}^{-0,6677}$$

Средняя относительная погрешность 0,0091%.

Графики в приложение **Рис 62.**

Прогноз: отсутствует, так как одна из функций непригодна к использованию.

**Прогноз на сезон.**

*Дома*

**32** побед; **9** поражений.

*Гости*

28 побед; 13 поражений.

*Итог*

60 побед; 20 поражений.

**Выход в плей-офф.**

*Реальный результат.*

57 побед; 25 поражений.

Команда вышла в плей-офф.

## §2.5 Производственные функции команды Toronto Raptors.

### Линейные ПФ

*Линейная производственная функция для побед дома*

$$y = 1,851x_3 + 1,50x_6 - 0,1986x_7 - 0,5879x_{11} - 1,3532x_{15}$$

*Линейная производственная функция для поражений дома*

$$y = -5,0602x_3 - 1,41x_6 + 0,672x_7 + 6,4636x_{11} - 0,4136x_{15}$$

*Линейная производственная функция для побед в гостях*

$$y = 0,021x_3 + 0,1106x_7 + 0,4784x_9 + 0,2345x_{11} - 0,2784x_{15}$$

*Линейная производственная функция для поражений в гостях*

$$y = 0,1448x_3 + 0,1424x_7 - 0,1974x_9 + 0,0473x_{11} + 0,4144x_{15}$$

Средняя относительная погрешность вычислений всех функций 3,2378 %.

Прогноз: 55 победы-27 поражений.

Графики в приложение **Рис 63; Рис 64; Рис 65; Рис 66** соответственно.

## Обратные ПФ

### *Обратная производственная функция для побед дома*

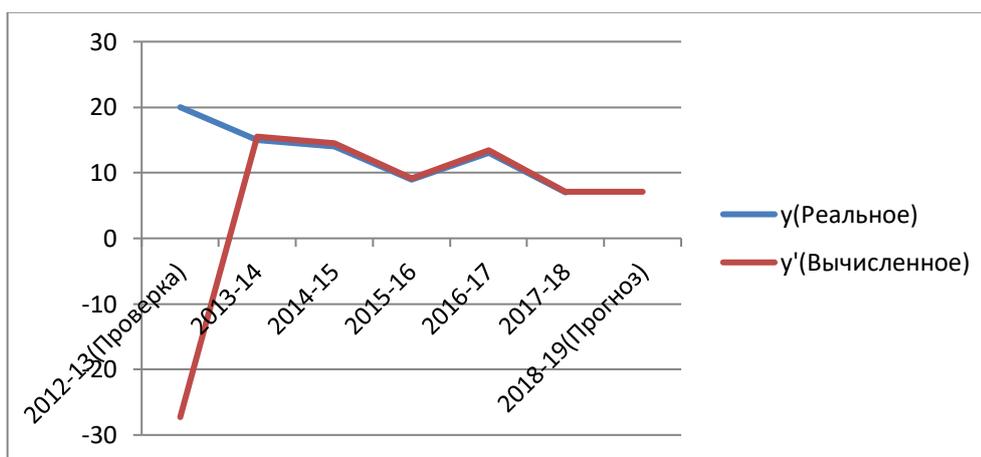
$$y = \frac{1}{-0,0020034x_3 - 0,00089x_6 + 0,00076567x_7 + 0,0015989x_{11} + 0,00068662x_{15}}$$

Средняя относительная погрешность 0,0033 %.

Графики в приложение **Рис 67**.

### *Обратная производственная функция для поражений дома*

$$y = \frac{1}{0,0165x_3 + 0,01x_6 - 0,0041x_7 - 0,0064x_{11} - 0,0071x_{15}}$$



**Рис 19.** Обратная производственная функция для поражений дома.

На графике видно, функция введёт себя, непредсказуема.

Данную функцию не будем использовать для прогноза результата

### *Обратная производственная функция для побед в гостях*

$$y = \frac{1}{0,0002507x_3 + 0,00037552x_7 - 0,00035652x_9 + 0,0001511x_{11} + 0,00078552x_{15}}$$

Средняя относительная погрешность 0,0033 %.

Графики в приложение **Рис 68**.

*Обратная производственная функция для поражений в гостях*

$$y = \frac{1}{-0,0008x_3 + 0,0009x_7 + 0,0008x_9 - 0,001x_{15}}$$

Средняя относительная погрешность 0,2008 %.

Графики в приложение **Рис 69**.

Прогноз: отсутствует, так как одна из функций непригодна к использованию.

## Логарифмические ПФ

*Логарифмическая производственная функция для побед дома*

$$y = 28,6057 \ln(x_3) + 33,33 \ln(x_6) - 33,8868 \ln(x_7) - 16,1116 \ln(x_8) + 9,62 \ln(x_{14})$$

*Логарифмическая производственная функция для поражений дома*

$$y = -26,9224 \ln(x_3) - 30,96 \ln(x_6) + 41,3089 \ln(x_7) + 14,4999 \ln(x_8) - 10,0276 \ln(x_{14})$$

*Логарифмическая производственная функция для побед в гостях*

$$y = 0,8853 \ln(x_3) + 7,40 \ln(x_7) - 7,8108 \ln(x_8) - 0,0355 \ln(x_{13}) + 4,053 \ln(x_{14})$$

*Логарифмическая производственная функция для поражений в гостях*

$$y = -1,5221 \ln(x_3) + 2,8625 \ln(x_7) + 7,5596 \ln(x_8) - 0,4378 \ln(x_{13}) - 4,1676 \ln(x_{14})$$

Средняя относительная погрешность вычислений всех функций 0,0064 %.

Прогноз: 57 победы-25 поражений.

Графики в приложение **Рис 70; Рис 71; Рис 72; Рис 73** соответственно.

## Экспоненциальные ПФ

*Экспоненциальная производственная функция для побед дома*

$$y = e^{0,065593x_3 + 0,08x_6 + 0,015187x_7 + 0,0086871x_{11} - 0,08073x_{15}}$$

*Экспоненциальная производственная функция для поражений дома*

$$y = e^{-0,16534x_3 - 0,08x_6 + 0,068397x_7 + 0,11229x_{11} + 0,040435x_{15}}$$

*Экспоненциальная производственная функция для побед в гостях*

$$y = e^{-0,0055353x_3 + 0,031239x_7 + 0,023358x_9 + 0,010519x_{11} - 0,0058416x_{15}}$$

*Экспоненциальная производственная функция для поражений в гостях*

$$y = e^{-0,013799x_3 + 0,045477x_7 - 0,021663x_9 - 0,012256x_{11} + 0,027624x_{15}}$$

Средняя относительная погрешность вычислений всех функций 0,0122 %.

Прогноз: 59 победы-23 поражений.

Графики в приложение **Рис 74; Рис 75; Рис 76; Рис 77** соответственно.

## Степенные ПФ

*Степенная производственная функция для побед дома*

$$y = x_3^{1,0161} * x_7^{1,24} * x_7^{-0,65823} * x_8^{-0,65582} * x_{14}^{0,31296}$$

*Степенная производственная функция для поражений дома*

$$y = x_3^{-2,7267} * x_7^{-2,82} * x_7^{4,36} * x_8^{1,1298} * x_{14}^{-0,86307}$$

*Степенная производственная функция для побед в гостях*

$$y = x_3^{-0,0032} * x_7^{0,86261} * x_8^{-0,35537} * x_{13}^{-0,02054} * x_{14}^{0,16702}$$

### ***Степенная производственная функция для поражений в гостях***

$$y = x_3^{-0,12963} * x_7^{0,64244} * x_8^{0,40547} * x_{13}^{-0,03596} * x_{14}^{-0,24272}$$

Средняя относительная погрешность вычислений всех функций 0,0359 %.

Прогноз: 57 победы-25 поражений.

Графики в приложение **Рис 78; Рис 79; Рис 80; Рис 81** соответственно.

### **Прогноз на сезон.**

#### ***Дома***

**32** победы; **9** поражений.

#### ***Гости***

**26** побед; **15** поражений.

#### ***Итого***

**58** побед; **24** поражения.

**Выход в плей-офф.**

### **Реальный результат.**

**58** побед; **24** поражения.

Команда вышла в плей-офф.

## **§2.6 Оценка полученных результатов.**

Самой лучший вид функции при прогнозировании результатов команд у логарифмической производственной функции. Наименее точный прогноз у

обратной производственной функции. Графики обратных ПФ чаще других показывали неадекватные результаты и были отброшены.

Погрешность вычислений оказалась меньше процента у всех видов функций, кроме обратной производственной функции. Это еще раз подтверждает неточность прогноза обратной ПФ.

Факторы больше всех влияющие на результат команд:  $x_1$  – общий процент попадания двух очковых и трёх очковых мячей за всю игру;  $x_3$  – количество выброшенных трёх очковых;  $x_4$  – процент попадания трёх очковых;  $x_6$  – количество выброшенных штрафных;  $x_7$  – процент попадания штрафных;  $x_{10}$  – общее количество подборов, как на своем, так и на чужом щите;  $x_{13}$  – количество перехватов.

Факторы меньше всех влияющие на результат команд:  $x_{11}$  – количество результативных передач;  $x_{12}$  – количество потерь.

## **Вывод.**

В рамках моего исследования, на примере 5 команд, мне удалось выполнить следующие задачи:

Во-первых, составить алгоритм построения производственных функций, оптимизирующий дальнейший анализ Национальной баскетбольной ассоциации США.

Во-вторых, построить производственные функции и графики, отображающие изменение функции со временем.

В-третьих, узнать степень влияние факторов на результат, оценить погрешность построения и сделать прогноз.

В итоге я рассмотрел 410 игр для каждой из 30 команд, и результаты совпали с реальными результатами за последние 5 лет.

Моя работа актуальна, потому что у меня получилось сделать прогноз на сезон, который предсказал попадания команд в плей-офф.

## Список литературы

1. Колбин В.В. Производственная функция и её свойства. Часть 1 изд. СПб. : 2008.
2. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/>
3. URL: <https://www.myscore.ru/>
4. URL: <http://stats.nba.com/>
5. URL: <https://www.basketball-reference.com/>