Санкт-Петербургский государственный университет

СИМАРОВА Екатерина Николаевна

Выпускная квалификационная работа

U-max статистики и их предельное поведение

Уровень образования: Специалитет
Направление 01.05.01 "Фундаментальные математика и механика"
Образовательная программа СМ.5007. "Фундаментальные математика и механика"
Профиль: Алгебра и теория чисел

Научный руководитель: профессор
математико-механического факультета,
доктор ф.–м. наук, профессор,
Никитин Я. Ю.

Рецензент: доцент СПбГЭТУ "ЛЭТИ",
кандидат ф.–м. наук, Чирина А. В.

Санкт-Петербург
2019

Saint Petersburg State University

SIMAROVA Ekaterina Nikolaevna

Qualification Research Paper

U-max statistics and their limiting behavior

Education level: Specialitet
Specialty 01.05.01 “Fundamental Mathematics and Mechanics“
Educational program CM.5007. “Fundamental Mathematics and Mechanics“
Department: Algebra and number theory

Advisor: Professor of mathematics at Mathematics and Mechanics Faculty, doctor of physical and mathematical sciences, professor, Nikitin Ya. Yu.

Reviewer: Associate professor at Saint Petersburg Electrotechnical University 'LETI', candidate of physical and mathematical sciences,Tchirina A. V.

Saint Petersburg
2019

Содержание

1 Введение

1.1 U-статистики

Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых случайных величин, принимающих значения в измеримом пространстве (X, A) и имеющих там одинаковое распределение P. Пусть $\mathscr{P} = \{P\}$ — некоторый класс вероятностных распределений на пространстве (X, A).

Рассмотрим $\Theta(P)$ — некоторый функционал на $\mathscr{P}$. Функционал $\Theta(P)$ называется регулярным, если он может быть записан в виде

$$\Theta(P) = \int\limits_X \dots \int\limits_X h(x_1, \dots, x_m) P(dx_1) ... P(dx_m),$$

где $h(x_1, \dots, x_m)$ — некоторая вещественнозначная симметричная борелевская функция. Эту функцию называют ядром, а целое число $m \geq 1$ называют степенью ядра или (реже) функционала $\Theta(P)$.

Халмош и Хёфдинг в работах [2] и [3] были первыми, кто стал расматривать класс несмещенных оценок функционалов $\Theta(P)$, получивших название U-статистик. Они определяются следующим образом. Пусть $h(x_1, \dots, x_m)$ — ядро функционала $\Theta(P)$. Тогда U-статистика степени m определяется как

$$U_n = \binom{n}{m}^{-1} \sum_J h(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_m}),$$

где $n \geq m$, а множество $J = \{(i_1, \dots, i_m) : 1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n\}$ — это множество упорядоченных m - элементных перестановок с множеством индексов из набора $\{1, \dots, n\}$. Впервые такая статистика была рассмотрена Халмошем в 1946 году. В дальнейшем оказалось, что большое количество статистических оценок и тестовых статистик относятся к классу U-статистик. Этот факт сильно повлиял на развитие дальнейшей теории.

1.2 U-max статистики, определения и история изучения

U-max статистики можно рассматривать как предельный случай U-статистик. Определяются они следующим образом:

$$H_n = \max_J h(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_m}).$$

В данном определении функция h и множество J определяются так же, как и для U-статистик. U-min статистики $H_n^{'}$ определяются аналогично. Заметим, что при замене знака ядра U-min статистика превращается в U-max статистику, поэтому эти понятия равнозначны. Приведем некоторые примеры U-max и U-min статистик.

1. Максимальное расстояние $\max\limits_{1 \le i < j \le n} ||\xi_i - \xi_j||$, где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — это независимо и равномерно распределенные точки на d-мерной единичной сфере $B^d, d \ge 2$.

2. Максимальное скалярное произведение $\max\limits_{1 \le i < j \le n} \langle \xi_i, \xi_j \rangle$, где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимо и равномерно распределенные точки на d-мерной единичной сфере $B^d, d \ge 2$.

3. Максимальные периметр и площадь:

$$\max_{1 \le i < j < l \le n} peri(U_i, U_j, U_l) \quad \text{и} \quad \max_{1 \le i < j < l \le n} area(U_i, U_j, U_l)$$

среди всех вписанных треугольников, чьи вершины лежат на единичной окружности и берутся из множества $U_1, \ldots, U_n$. Точки $U_1, \ldots, U_n$ независимо и равномерно распределены на единичной окружности S.

Лао и Майер первыми начали изучать U-max статистики, посвятив им несколько своих работ [4], [5], [6]. Они доказали основную предельную теорему для U-max статистик. Для этого Лао и Майер использовали некоторую модификацию утверждения о сходимости Пуассона из монографии Барбура, Холста и Янсона [1]. Основная их предельная теорема выглядит следующим образом.

Теорема. *(Лао-Майер) Пусть* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *— случайные величины со значением в некотором измеримом пространстве* (Ξ, A) *, и пусть* *дана симмметричная борелевская функция* $h : \Xi^m \to \mathbb{R}$. *Обозначим*

$$H_n = \max_J h(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_m})$$

и определим для каждого $z \in \mathbb{R}$ *следующие функции:*

$$\begin{aligned} p_z &= \mathbb{P}\{h(\xi_1, \ldots, \xi_m) > z\}, \\ \lambda_{n,z} &= \binom{n}{m} p_z, \\ \tau_z(r) &= \frac{\mathbb{P}\{h(\xi_1, \ldots, \xi_m) > z, h(\xi_{1+m-r}, \xi_{2+m-r}, \ldots, \xi_{2m-r}) > z\}}{p_z}. \end{aligned}$$

Тогда для всех $n \geq m$ *и для всех* $z \in \mathbb{R}$ *верно неравенство*

$$\begin{aligned} &|\mathbb{P}(H_n \leq z) - e^{-\lambda_{n,z}}| \leq \\ &\leq \left(1 - e^{-\lambda_{n,z}}\right) \cdot \left[p_z \left(\binom{n}{m} - \binom{n-m}{m} \right) + \sum_{r=1}^{m-1} \binom{m}{r} \binom{n-m}{m-r} \tau_z(r) \right]. \end{aligned}$$

При этом, при замене h *на* $-h$ *получается соответствующее неравенство для минимума.*

Сильверман и Браун в своей работе [7] предложили условия, при которых общая теорема, использованная в [4], приводит в пределе к нетривиальному закону Вейбулла.

Теорема. *(Сильверман-Браун) В условиях теоремы Лао-Майера, если для некоторой последовательности преобразований* $z_n : T \to \mathbb{R}$, $T \subset \mathbb{R}$ *для каждого* $t \in T$ *выполнены условия:*

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_{n, z_n(t)} = \lambda_t > 0, \tag{1}$$

$$\lim_{n \to \infty} n^{2m-1} p_{z_n(t)} \tau_{z_n(t)}(m-1) = 0, \tag{2}$$

то тогда

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(H_n \leq z_n(t)\right) = e^{-\lambda_t}$$

для любого $t \in T$.

Лао и Майер разработали метод, использующий эту теорему, с помощью которого может быть исследовано предельное поведение некоторых U-max статистик. Они использовали его для изучения предельного поведения конкретных U-max статистик и изучили предельное поведение всех статистик, упомянутых в примерах. В частности, они доказали такую предельную теорему.

Теорема (Периметр вписанного треугольника)**.** *Пусть $U_1, U_2, \ldots, U_n$ — независимо и равномерно распределенные точки на единичной окружности S. Обозначим через $peri(U_i, U_j, U_l)$ периметр треугольника с вершинами в точках U_i, U_j, U_l. Обозначим*

$$H_n = \max_{1 \le i < j < l \le n} peri(U_i, U_j, U_l).$$

Тогда для любого $t > 0$ верно, что

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\{n^3(3\sqrt{3} - H_n) \le t\} = 1 - \exp\{-\frac{2t}{9\pi}\}.$$

Но Лао и Майер рассматривали функции h только с небольшим числом переменных, в основном они изучали треугольники. В 2014 году Королева и Никитин опубликовали статью [8], в которой были рассмотрены несколько U-max статистик с произвольной конечной степенью ядра и их предельное поведение. В частности, задача о предельном поведении периметра вписанного треугольника была обобщена до задачи о предельном поведении вписанного выпуклого m - угольника, где $m \ge 3$.

Теорема (Периметр вписанного m-угольника)**.** *Пусть точки $U_1, U_2, \ldots, U_n$ независимо и равномерно распределены на окружности S. Обозначим через*

$$P_{m,n} = \max_{1 \le i_1 < \ldots < i_m \le n} peri(U_{i_1}, \ldots, U_{i_m})$$

максимальный периметр вписанного m-угольника с вершинами в точках $U_1, \ldots, U_n, m \ge 3$. Тогда для каждого $t > 0$ верно, что

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\{n^{\frac{2m}{m-1}}(2m \sin\frac{\pi}{m} - P_{m,n}) \le t\} = 1 - exp\{-\frac{t^{\frac{m-1}{2}}}{K_{1m}}\},$$

где $K_{1m} = m^{\frac{3}{2}}(\pi \sin \frac{\pi}{m})^{\frac{m-1}{2}}\Gamma(\frac{m+1}{2})$.

В этой работе мы обобщили теорему о предельном распределении $U - \max$ статистик на широкий класс ядер.

2 Обобщенная теорема для изучения предельного поведения

Сначала докажем несколько вспомогательных теорем.

Теорема 1. *Пусть* $U_1, \ldots, U_m$ *независимо и равномерно распределенные точки на единичной окружности* S_1 *с центром в точке* O. *Обозначим центральные углы*

$$\beta_i = \angle U_{i+1} O U_1.$$

Рассмотрим такую функцию f, *что*

$$f(U_1, \ldots, U_m) = h(\beta_1, \ldots, \beta_{m-1}),$$

иными словами, функция f *не изменяется под действием поворота. Предположим, что выполняются следующие условия:*

1. *Функция* f *не меняется относительно перестановок* U_i.

2. *Функция* h *непрерывна (в соответствующей топологии, где есть* $-\infty$*).*

3. *Функция, непрерывная на компакте даже с наличием* $-\infty$, *достигает своего максимума. Обозначим его через* M *(он же равен максимуму функции* f*). Потребуем, чтобы этот максимум достигался лишь в конечном числе точек* $V_1, \ldots, V_k \in [0, 2\pi]^{m-1}$. *При этом предположим, что ни одна из этих точек не лежит на границе области определения. Иными словами* $V_i^j > 0$ *и* $V_i^j < 2\pi$ *для всех* $i \in \{1, \ldots, k\}, j \in \{1, \ldots, m-1\}$, *где* V_i^j *— это* j*—я координата точки* V_i.

4. *Существует $\delta > 0$, такое, что функция h трижды непрерывно дифференцируема в $\delta-$окрестности точки V_i для любого $i \in \{1, \dots, k\}$ (то есть в окрестности любой точки максимума).*

5. *Рассмотрим матрицу Гессе G^i следующего вида:*

$$G^i = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h(V_i)}{\partial^2 x_1} & \frac{\partial^2 h(V_i)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 h(V_i)}{\partial x_1 \partial x_{m-1}} \\ \frac{\partial^2 h(V_i)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 h(V_i)}{\partial^2 x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 h(V_i)}{\partial x_2 \partial x_{m-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 h(V_i)}{\partial x_{m-1} \partial x_2} & \frac{\partial^2 h(V_i)}{\partial x_{m-1} \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 h(V_i)}{\partial^2 x_{m-1}} \end{pmatrix}.$$

   Предположим, что для всех точек максимума определитель таких матриц не равен 0. Будем обозначать его через $det(G^i)$.

Тогда утверждается следующее:

1. *Обозначим $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{m-1})$. Существуют такие константы $C, D > 0$, что если $0 < s < C$ и $f(U_1, \dots, U_m) > M - s$, то $\min_{1 \le i \le d} ||V_i - \beta|| < D\sqrt{s}$.*

2. $$\lim_{s \to 0_+} s^{-\frac{m-1}{2}} \mathbb{P}\{f(U_1, \dots, U_m) \ge M - s\} = \frac{\Gamma(m+1)}{K},$$

   где $K = m!(2\pi)^{\frac{m-1}{2}} \Gamma(\frac{m+1}{2}) \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{det(-G^i)}}\right)}$.

Доказательство. Приступим к доказательству этой теоремы. Заметим, что из формулировки теоремы ясно, что

$$\mathbb{P}\{f(U_1, \dots, U_m) > z\} = \mathbb{P}\{h(\beta_1, \dots, \beta_{m-1}) > z\},$$

где U_i равномерно распределены на окружности S_1, а β_i равномерно распределены на отрезке $[0, 2\pi]$. Иногда для удобства будем обозначать $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{m-1})$ (это уже было упомянуто в условии теоремы). Таким образом, про функцию f пока можно забыть и работать только с функцией h.

Прежде чем приступить к дальнейшему доказательству теоремы, уделим внимание следующей лемме:

Лемма 1. *Пусть есть точки $V_1, \ldots, V_k \in \mathbb{R}^n$, такие, что только в них достигается максимум непрерывной функции $h(V_i) = M$ определенной на компакте $K \in \mathbb{R}^n$. Определим для каждого $\varepsilon > 0$ число*

$$S(\varepsilon) = \{ \min s \geq 0 \mid \forall x \in K : M - f(x) < \varepsilon \Rightarrow \exists i : |x - V_i| < s \}$$

(т.е. это такой минимальный радиус окрестностей V_i, что если значение функции отстоит от максимального значения меньше чем на ε, то аргумент функции попадает в одну из окрестностей радиуса $S(\varepsilon)$ с центрами в точках $V_1, \ldots, V_k$). Тогда $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} S(\varepsilon) = 0$.

Доказательство. Заметим, что функция $S(x)$ возрастает и неотрицательна, поэтому $\lim_{\varepsilon \to 0+} S(\varepsilon)$ существует. Пусть он равен $a > 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $x_\varepsilon \in K$, такое что $\min_{1 \leq i \leq k} |V_i - x_\varepsilon| \geq a$, а $|h(x_\varepsilon) - M| < \varepsilon$. Рассмотрим $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$. Тогда бесконечная последовательность x_{ε_n}, принадлежащая компакту K, имеет сходящуюся подпоследовательность, сходящуюся к некоторому x^*. По построению

$$x^* \neq V_i \text{ для любого } i,$$

а из непрерывности функции h вытекает, что $h(x^*) = M$. Противоречие доказывает лемму. □

Теперь примем к сведению следующее замечание.

Замечание 1. Рассмотрим любой из максимумов V_i. Он лежит не на границе области определения функции h. Поэтому $\frac{\partial h(V_i)}{\partial x_j} = 0$ для всех $j \in \{1, \ldots, m - 1\}$.

Теперь вернемся к доказательству теоремы. Предположим, что

$$h(\beta) = h(\beta_1, \ldots, \beta_{m-1}) > M - \varepsilon.$$

Тогда по лемме 1 существует $i \in \{1, \ldots, k\}$, такое, что $|\beta - V_i| < S(\varepsilon)$. Также верно, что $\lim_{\varepsilon \to 0} S(\varepsilon) = 0$, поэтому существует ε_0, что $S(\varepsilon_0) < \frac{\delta}{2}$, где δ из условий теоремы. Так как функция $S(\varepsilon)$ возрастает, то для любого положительного $\varepsilon < \varepsilon_0$ верно, что $S(\varepsilon) < \frac{\delta}{2}$. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие ε. Так как в δ-окрестности любого максимума функция h трижды непрерывно дифференцируема, то в этой окрестности можно раскладывать функцию h в многомерный ряд Тейлора в точке V_i. Этим мы сейчас и будем заниматься.

Обозначим через
$$\alpha_j = \beta_j - V_i^j.$$
Заметим, что при данной замене все α_j независимы и равномерно распределены на отрезках $[-V_i^j, 2\pi - V_i^j]$. Когда мы пишем α, то имеем в виду $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1})$. Заметим, что
$$||\beta - V_i|| = ||\alpha|| < \frac{\delta}{2}.$$
Разложим функцию h в многомерный ряд Тейлора в точке V_i.

Получим, что
$$h(\beta) = h(\beta_1, \ldots, \beta_{m-1}) = h(V_i^1 + \alpha_1, V_i^2 + \alpha_2, \ldots, V_i^{m-1} + \alpha_{m-1}) =$$
$$= h(V_i) + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\partial h(V_i)}{\partial x_j}\alpha_j + \sum_{1 \le l,s \le m} \frac{1}{2}\frac{\partial h(V_i)}{\partial x_l \partial x_s}\alpha_l\alpha_s + \sum_{1 \le l,s,t \le m} \frac{1}{6}\frac{\partial h(V_i + r_{(l,s,t)})}{\partial x_l \partial x_s \partial x_t}\alpha_l\alpha_s\alpha_t,$$
где $r_{(l,s,t)} = c_{(l,s,t)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1})$, а $c_{(l,s,t)} \in (0,1)$.

Заметим, что по замечанию $\frac{\partial h(V_i)}{\partial x_j} = 0$, поэтому линейный член в этом равенстве равен 0. Рассмотрим матрицу
$$A^i = \frac{1}{2}G^i.$$
Заметим, что при вместо коэффициентов при $\alpha_s\alpha_t$ можно подставить $a_{s,t}^i$ — элемент матрицы A^i .

Таким образом,

$$h(\beta) = h(V_i) + \frac{1}{2}\sum_{1\le l,s\le m}\frac{\partial h(V_i)}{\partial x_l \partial x_s}\alpha_l\alpha_s + \frac{1}{6}\sum_{1\le l,s,t\le m}\frac{\partial h(V_i + r_{(l,s,t)})}{\partial x_l\partial x_s\partial x_t}\alpha_l\alpha_s\alpha_t =$$

$$= M + \sum_{1\le l,s\le m} a^i_{l,s}\alpha_l\alpha_s + \frac{1}{6}\sum_{1\le l,s,t\le m}\frac{\partial h(V_i + r_{(l,s,t)})}{\partial x_l\partial x_s\partial x_t}\alpha_l\alpha_s\alpha_t. \tag{3}$$

Отсюда следует, что $h(\beta) > M - \varepsilon$ равносильно тому, что

$$-\sum_{1\le l,s\le m} a^i_{l,s}\alpha_l\alpha_s - \frac{1}{6}\sum_{1\le l,s,t\le m}\frac{\partial h(V_i + r_{(l,s,t)})}{\partial x_l\partial x_s\partial x_t}\alpha_l\alpha_s\alpha_t < \varepsilon. \tag{4}$$

Предположим, что $h(\beta) > M - \varepsilon$ и $S(\varepsilon) < \frac{\delta}{2}$. Оценим кубические члены в этом отрезке разложения. Поскольку функции $\frac{\partial h(V_i+r)}{\partial x_l\partial x_s\partial x_t}$ непрерывны при $|r| \le \frac{\delta}{2}$, то существует такое M_1, что $|\frac{\partial h(V_i+r)}{\partial x_l\partial x_s\partial x_t}|$ не превосходит M_1 для всех $t \le \frac{\delta}{2}$.

Следовательно справедливо неравенство:

$$|\frac{1}{6}\frac{\partial h(V_i + r_{(l,s,t)})}{\partial x_l\partial x_s\partial x_t}\alpha_l\alpha_s\alpha_t| < M_1|\alpha_l\alpha_s\alpha_t| <$$
$$< M_1\frac{|\alpha_l|^3 + |\alpha_s|^3 + |\alpha_t|^3}{3} < M_1\frac{\alpha_l^2 + \alpha_s^2 + \alpha_t^2}{3}S(\varepsilon).$$

Последнее неравенство получается из того, что при таких условиях $|\alpha| < S(\varepsilon)$. Значит,

$$|\frac{1}{6}\sum_{1\le l,s,t\le m}\frac{\partial h(V_i + r_{(l,s,t)})}{\partial x_l\partial x_s\partial x_t}\alpha_l\alpha_s\alpha_t| < m^2 M_1 S(\varepsilon)\sum_{s=1}^{m-1}\alpha_s^2 = M_2 S(\varepsilon)\sum_{s=1}^{m-1}\alpha_s^2.$$

Это означает, что

$$M_2S(\varepsilon)\sum_{s=1}^{m-1}\alpha_s^2-\sum_{1\le l,s\le m}a^i_{l,s}\alpha_l\alpha_s\ge M-h(V_i+\alpha)\ge$$
$$-M_2S(\varepsilon)\sum_{s=1}^{m-1}\alpha_s^2-\sum_{1\le l,s\le m}a^i_{l,s}\alpha_l\alpha_s. \quad (5)$$

Суммируя предыдущие формулы (3), (4) и (5), получаем, что

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\{-\sum_{1\le l,s\le m-1}a^i_{l,s}\alpha_l\alpha_s-M_2S(\varepsilon)\sum_{s=1}^{m-1}\alpha_s^2\le\varepsilon\}\ge\\&\ge\mathbb{P}\{h(\beta)>M-\varepsilon,|V_i-\beta|<S(\varepsilon)\}\ge\\&\ge\mathbb{P}\{-\sum_{1\le l,s\le m-1}a^i_{l,s}\alpha_l\alpha_s+M_2S(\varepsilon)\sum_{s=1}^{m-1}\alpha_s^2\le\varepsilon\}.\end{aligned}$$

Обозначим через

$$\begin{cases}A^i(\varepsilon)=\sum\limits_{1\le l,s\le m-1}a^i_{l,s}+M_2S(\varepsilon)\sum\limits_{s=1}^{m-1}a^i_{s,s}\text{ при }\varepsilon\ge0;\\A^i(-\varepsilon)=\sum\limits_{1\le l,s\le m-1}a^i_{l,s}-M_2S(\varepsilon)\sum\limits_{s=1}^{m-1}a^i_{s,s}\text{ при }\varepsilon\ge0.\end{cases}$$

Вспомним, как записывается скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^n$. Заметим, что

$$\sum_{1\le s,t\le m-1}a^i_{s,t}\alpha_s\alpha_t=(\alpha_1,\dots,\alpha_{m-1})\cdot\begin{pmatrix}a^i_{1,1}&a^i_{1,2}&\dots&a^i_{1,m-1}\\a^i_{2,1}&a^i_{2,2}&\dots&a^i_{2,m-1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a^i_{m-1,1}&a^i_{m-1,2}&\dots&a^i_{m-1,m-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_{m-1}\end{pmatrix}$$

То же самое записывается аналогично, как

$$\langle A^i\alpha,\alpha\rangle.$$

Заметим, что предыдущее неравенство переписывается как

$$\mathbb{P}\{-\langle A^i(\varepsilon)\alpha, \alpha\rangle < \varepsilon\} \geq \mathbb{P}\{h(\beta) > M - \varepsilon, |V_i - \beta| < S(\varepsilon)\} \geq \mathbb{P}\{-\langle A^i(-\varepsilon)\alpha, \alpha\rangle < \varepsilon\}. \quad (6)$$

Далее нам понадобится утверждение о том, что матрица A^i неположительно определена. Это известный факт, который содержится, например, в [9]. По условию дано, что $det(G^i) \neq 0$. Отсюда следует, что $det(A^i) \neq 0$, а значит, она отрицательно определена. Заметим, что также будет выполняться и следующая лемма.

Лемма 2. *Существует $\varepsilon_1 > 0$, что при любых $|\varepsilon| < \varepsilon_1$ матрица $A^i(\varepsilon)$ отрицательно определена.*

Доказательство. Общеизвестен факт, который гласит, что матрица B отрицательно определена тогда и только тогда, когда существует $a < 0$, такое что $\langle Bx, x\rangle \leq a||x||^2$ для любого x. Также это означает, что все собственные числа матрицы B будут не больше a.

Как уже было сказано ранее, матрица A^i отрицательно определена. Обозначим через $0 > \lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_{m-1}$ собственные числа матрицы A^i. Это означает, что

$$\langle A^i x, x\rangle \leq \lambda_1 ||x||^2.$$

Заметим, что существует $\varepsilon_1 > 0$, такой, что $M_2 S(\varepsilon_1) < -\frac{\lambda_1}{2}$. Тогда для любого
$0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ верно, что $M_2 S(\varepsilon) < -\frac{\lambda_1}{2}$.

Рассмотрим случай $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\langle A^i(\varepsilon)x, x\rangle = \langle (A^i + S(\varepsilon)M_2 I)x, x\rangle = \langle A^i x, x\rangle + M_2 S(\varepsilon)||x||^2 \leq$$
$$\leq (\lambda_1 + M_2 S(\varepsilon))||x||^2 \leq \frac{\lambda_1}{2}||x||^2.$$

Поэтому $A^i(\varepsilon)$ тоже является отрицательно определенной матрицей с собственными числами не большими $\frac{\lambda_1}{2}$.

Случай $\varepsilon < 0$ рассматривается аналогично. Действительно,

$$\langle A^i(\varepsilon)x, x\rangle = \langle (A^i - S(-\varepsilon)M_2 I)x, x\rangle = \langle A^i x, x\rangle - M_2 S(-\varepsilon)||x||^2 \leq$$
$$\leq (\lambda_1 - M_2 S(-\varepsilon))||x||^2 \leq \frac{\lambda_1}{2}||x||^2.$$

Поэтому при отрицательных ε верно, что $A^i(\varepsilon)$ тоже является отрицательно определенной матрицей с собственными числами, не большими $\frac{\lambda_1}{2}$. Лемма доказана. □

Следствие 1. *Все собственные числа матрицы A, а также матриц $A^i(\varepsilon)$, при $|\varepsilon| < |\varepsilon_1|$ строго меньше 0.*

Замечание 2. Очевидно, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} det(A^i(\varepsilon)) = det(A^i).$$

Лемма 3. *Существуют постоянные $C, D > 0$, такие, что если для некоторого $\varepsilon > 0$ и β выполнены следующие условия:*

1. $h(\beta) > M - \varepsilon$,
2. $||V_i - \beta|| < S(\varepsilon)$,
3. $\varepsilon < C$,

то $||\alpha|| < D\sqrt{\varepsilon}$. Обозначения α и β такие же, как и выше.

Доказательство. Как и в прошлой лемме считаем, что

$$0 > \lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_{m-1}$$

— это собственные числа матрицы A^i. Возьмем ε_1 из прошлой леммы. Тогда при $|\varepsilon| < \varepsilon_1$ верно, что $\langle A^i(\varepsilon)x, x\rangle < \frac{\lambda_1}{2}||x||^2$. Заметим, что при положительных ε выполнено, что

$$M + \langle A^i(\varepsilon)\alpha, \alpha\rangle \geq h(V_i) \geq M - \varepsilon,$$

поэтому

$$\varepsilon \geq -\langle A^i(\varepsilon)\alpha, \alpha\rangle \geq -\frac{\lambda_1}{2}||\alpha||^2.$$

Значит,

$$||\alpha|| < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-\lambda_1}}\sqrt{\varepsilon},$$

что и требовалось доказать.

$\square$

Теперь вернемся к доказательству теоремы. Для этого мы хотим вычислить

$$\mathbb{P}\{\langle -A^i\,(\pm\varepsilon)\,\alpha, \alpha\rangle < \varepsilon\}.$$

На самом деле, нам неважно, что матрица $A^i\,(\pm\varepsilon)$ зависит от ε, так что будем просто вычислять вероятность $\mathbb{P}\{\langle B\alpha, \alpha\rangle < \varepsilon\}$, где матрица B положительно определена.

Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_{m-1}$ —собственные числа матрицы B. Так как B положительно определена, то все $\gamma_j > 0$. Заметим, что матрица B симметрична относительно главной диагонали и вещественнозначна, поэтому с помощью ортогонального преобразования можно привести матрицу B к виду, где на диагонали стоят собственные числа этой матрицы, а во всех остальных клетках нули, то есть к следующей матрице:

$$C = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \gamma_{m-1} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, квадратичная форма $\sum\limits_{1\leq s,t\leq m-1} a^i_{l,s}\alpha_l\alpha_s$ после преобразования выглядит как $\sum\limits_{s=1}^{m-1}\gamma_j y_j^2$. Вспомним, что α_j равномерно и независимо распределены на отрезке $[-V_i^j, 2\pi - V_i^j]$. Таким образом,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{\langle B\alpha, \alpha\rangle < \varepsilon\} = \mathbb{P}\{\sum_{1\le s,t\le m-1} b_{s,t}\alpha_l\alpha_s < \varepsilon\} = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{m-1}}\int \mathbf{1}\{\sum_{1\le s,t\le m-1} b_{s,t}\alpha_s\alpha_t < \varepsilon\}d\alpha_1\dots d\alpha_{m-1} = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{m-1}}\int \mathbf{1}\{\sum_{s=1}^{m-1}\gamma_s y_s^2 < 1\}dy_1\dots dy_{m-1} = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{m-1}}\int \mathbf{1}\{\sum_{s=1}^{m-1}\left(\frac{y_s}{I_s}\right)^2 < \varepsilon\}dy_1\dots dy_{m-1} = \frac{1}{(2\pi)^{m-1}}V_{m-1}\Pi(B),
\end{aligned}
$$

где $I_s = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma_s}}$. В предыдущей формуле $V_{m-1} = \frac{\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}$ — объем $m-1$-мерного шара радиуса 1, $\Pi(B) = \prod_{k=1}^{m-1} I_k = \prod_{i=1}^{m-1}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma_s}} = \frac{\varepsilon^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{det(B)}}$ — произведение полуосей. Поскольку все $\gamma_s > 0$, то I_s определены корректно.

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\{\langle B\alpha, \alpha\rangle < \varepsilon\} = \frac{1}{(2\pi)^{m-1}}\cdot\frac{(\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}\cdot\frac{\varepsilon^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{det(B)}} = \\
\frac{\varepsilon^{\frac{m-1}{2}}}{2^{m-1}\pi^{\frac{m-1}{2}}\Gamma(\frac{m+1}{2})\sqrt{det(B)}}.
\end{aligned}
$$

Присовокупив эту формулу к выведенной ранее формуле (6), получим, что

$$
\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon^{\frac{m-1}{2}}}{2^{m-1}\pi^{\frac{m-1}{2}}\Gamma(\frac{m+1}{2})\sqrt{det(-A^i(\varepsilon))}} \ge \mathbb{P}\{h(\beta) > M - \varepsilon, ||V_i - \beta|| < S(\varepsilon)\} \ge \\
&\ge \frac{\varepsilon^{\frac{m-1}{2}}}{2^{m-1}\pi^{\frac{m-1}{2}}\Gamma(\frac{m+1}{2})\sqrt{det(-A^i(-\varepsilon))}}.
\end{aligned}
$$

Поделим это неравенство на $\varepsilon^{\frac{m-1}{2}}$ и устремим ε к 0, тогда получим, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{2^{m-1}\pi^{\frac{m-1}{2}}\Gamma(\frac{m+1}{2})\sqrt{det(-A^i(\varepsilon))}} \geq$$
$$\geq \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-\frac{m-1}{2}}\mathbb{P}\{h(\beta) > M-\varepsilon, ||V_i-\beta|| < S(\varepsilon)\} \geq$$
$$\geq \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{2^{m-1}\pi^{\frac{m-1}{2}}\Gamma(\frac{m+1}{2})\sqrt{det(-A^i(-\varepsilon))}}.$$

Так как

$$\lim_{\varepsilon\to 0} det(A^i(\varepsilon)) = det(A^i),$$

то по теореме о пределе функции, зажатой между двумя функциями с тем же пределом (теореме о "двух милиционерах") получается, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-\frac{m-1}{2}}\mathbb{P}\{h(\beta) > M-\varepsilon, ||V_i-\beta|| < S(\varepsilon\} = \frac{1}{2^{m-1}\pi^{\frac{m-1}{2}}\Gamma(\frac{m+1}{2})\sqrt{\det(-A^i)}} \quad (7)$$

Заметим, что так как $\lim_{\varepsilon\to 0} = 0$, то при достаточно малых ε верно, что $S(\varepsilon)$-окрестности точек $V_1,\dots,V_k$ не будут пересекаться. Поэтому при достаточно малых ε верно, что

$$\mathbb{P}\{h(\beta) > M-\varepsilon\} = \sum_{i=1}^{k}\mathbb{P}\{h(\beta) > M-\varepsilon, ||V_i-\beta|| < S(\varepsilon)\}. \quad (8)$$

Тогда с помощью формул (7) и (8) мы получаем, что

$$\mathbb{P}\{h(\beta) > M-\varepsilon\} = \frac{1}{2^{m-1}\pi^{\frac{m-1}{2}}\Gamma(\frac{m+1}{2})}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{\sqrt{\det(-A^i)}}\right) =$$

Вспомним, что $A^i = \frac{1}{2}G^i$, значит,

$$det(-A^i) = \frac{det(-G^i)}{2^{m-1}}.$$

Таким образом, можно продолжить предыдущую формулу:

$$= \frac{1}{2^{\frac{m-1}{2}}\pi^{\frac{m-1}{2}}\Gamma(\frac{m+1}{2})}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{\sqrt{\det(-G^i)}}\right) = \frac{\Gamma(m+1)}{K},$$

где K — константа из условий теоремы, что и требовалось доказать. $\square$

Теперь перейдем к предельной теореме для U-max статистик.

Теорема 2. *Пусть $U_1, \ldots, U_n$ — равномерно и независимо распределенные точки на единичной окружности S_1 с центром O, и пусть $h : S_1^m \to \mathbb{R}$ – симмметричная борелевская функция, где $m > 1$. Обозначим*

$$H_n = \max_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_m\le n} h(U_{i_1}, \ldots, U_{i_m}).$$

Предположим, что эта функция на S_1^m достигает максимума, равного M, и выполнено условие:

$$\lim_{s\to 0_+} s^{-\frac{m-1}{2}}\mathbb{P}\{H_m \ge M - s\} = \frac{\Gamma(m+1)}{K}$$

для некоторой константы $K > 0$.

Рассмотрим также любые m точек $V_1, \ldots V_m \in S_1$, $V = (V_1, \ldots, V_m)$. Обозначим $\beta_i = \angle V_1OV_{i+1}, \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{m-1}) \in S_1^{m-1}$. Пусть существует конечное число точек $P_1, \ldots, P_d \in S_1^{m-1}$, а также константы $C, D > 0$, такие что если $0 < s < C$ и $h(V_1, \ldots, V_m) > M - s$, то $\min_{1\le i\le d}||P_i - \beta|| < D\sqrt{s}$.

Тогда для любого $t > 0$ верно предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\{n^{\frac{2m}{m-1}}(M - H_m) \le t)\} = 1 - e^{-\frac{t^{\frac{m-1}{2}}}{K}}.$$

Замечание 3. Если h заменить на $-h$, то можно получить условие для минимума.

Доказательство. Для любого $t > 0$ рассмотрим преобразование

$$z_n(t) = M - tn^{-\frac{2m}{m-1}}.$$

Рассмотрим $\lambda_{n,z_n(t)}$ из теоремы Сильвермана-Брауна . Тогда

$$\lambda_{n,z_n(t)} = \frac{n!}{m!(n-m)!}\mathbb{P}\{H_m > z_n(t)\}.$$

Рассмотрим $s = tn^{-\frac{2m}{m-1}}$, тогда $n^m s^{\frac{m-1}{2}} = t^{\frac{m-1}{2}}$. Докажем, что выполнено условие (1) из теоремы Сильвермана-Брауна:

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{n,z_n(t)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{m!(n-m)!}\mathbb{P}\{H_m > z_n(t)\} =$$
$$= \frac{1}{m!}\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^m(n-m)!} n^m s^{\frac{m-1}{2}} s^{-\frac{m-1}{2}}\mathbb{P}\{H_m > s\} =$$
$$= \frac{1}{m!} t^{\frac{m-1}{2}} \lim_{n\to\infty} (tn^{-\frac{2m}{m-1}})^{-\frac{m-1}{2}}\mathbb{P}\{H_m > M - tn^{-\frac{2m}{m-1}}\} =$$
$$= \frac{1}{m!} t^{\frac{m-1}{2}} \frac{\Gamma(m+1)}{K} = \frac{t^{\frac{m-1}{2}}}{K} =: \lambda_t > 0.$$

Теперь мы хотим доказать ослабленное условие 2 из упомянутой теоремы, а именно, что

$$\lim_{n\to\infty} n^{2m-r} p_{z_n(t)} \tau_{z_n(t)}(r) = 0,$$

для всех $r \in \{1, \dots, m-1\}$. Заметим, что

$$n^{2m-r} p_{z_n(t)} \tau_{z_n(t)}(r) =$$
$$= n^{2m-r}\mathbb{P}\{h(U_1, \dots, U_m) > z_n(t), h(U_{1+m-r}, \dots, U_{2m-r}) > z_n(t)\}.$$

Чтобы это доказать, воспользуемся следующей леммой.

Лемма 4. *Для любого* $r \in \{1, \dots, m-1\}$ *выполнено, что*

$$\lim_{n\to\infty} n^{2m-r}\mathbb{P}\{h(U_1, \dots, U_m) > z_n(t), h(U_{1+m-r}, \dots, U_{2m-r}) > z_n(t)\} = 0.$$

Доказательство. По условию теоремы существует конечное число точек $P_1, \dots, P_d \in S_1^m$, а также константы $C, D > 0$, такие что, если $0 < s < C$ и $h(V_1, \dots, V_m) > M - s$, то выполнено, что $\min_{1 \le i \le d} ||P_i - V|| < D\sqrt{s}$. Поэтому условие $h(U_1, \dots, U_m) > z_n(t)$ влечет существование такого i, что выполнено неравенство $||P_i - U|| < D\sqrt{s}$.

Оценим следующую вероятность:

$$\lim_{n\to\infty} n^{2m-r}\mathbb{P}\{h(U_1, \dots, U_n) > z_n(t), ||P_l - (U_1, \dots, U_m)|| < D\sqrt{s},$$
$$h(U_{1+m-r}, \dots, U_{2m-r}) > z_n(t), ||P_q - (U_{1+m-r}, \dots, U_{2m-r})|| < D\sqrt{s}\},$$

где l и q фиксированы.

Заметим, что исходно P_q и $(U_{1+m-r}, \dots, U_{2m-r})$ принадлежат разным пространствам, но когда мы рассматриваем расстояние между точками, то мы имеем в виду, что $(U_{1+m-r}, \dots, U_{2m-r})$ лежит в системе координат, где ось OX сонаправлена с вектором OU_{1+m-r}, и данному положению точек соответствует точка из пространства S_1^{m-1} (как и в предыдущей теореме).

Пусть

$$P_l = (P_{l_1}, \dots, P_{l_{m-1}}), P_q = (P_{q_1}, \dots, P_{q_{m-1}}) \in S_1^{m-1}.$$

Здесь под P_{i_j} подразумеваются углы $\mod 2\pi$ соответствующих точек. При этом t фиксировано, n стремится к бесконечности, а значит, s стремится к 0.

Введем углы

$$\beta_i = \angle U_{i+1}OU_1 \text{ для } i \in \{1, \dots, 2m - r - 1\},$$
$$\hat{\beta}_i = \angle U_{i+1}OU_{m-r+1} \text{ для } i \in \{m - r + 1, \dots, 2m - r - 1\}.$$

Заметим, что для $i \in \{m - r + 1, \dots, m\}$ верно, что

$$\hat{\beta}_i = (\beta_i + \beta_{m-r}) \mod 2\pi.$$

Из условия $||P_l - (U_1, \dots, U_m)|| < D\sqrt{s}$ верно, что $||P_l - \beta|| < D\sqrt{s}$. Это означает, что

$$|P_{l_i} - \beta_i| < D\sqrt{s} \text{ при } i \in \{1, \dots, m - 1\}.$$

Также мы знаем, что $||P_q - (U_{m-r+1}, \dots, U_{2m-r})|| < D\sqrt{s}$. Отсюда следует, что $||P_q - \hat{\beta}|| < D\sqrt{s}$. Значит,

$$|P_{q_{i-m+r}} - \hat{\beta}_i| < D\sqrt{s} \text{ при } i \in \{m-r+1, \dots, m-1\}$$

Из предыдущих формул мы находим следующее:

$$|P_{l_i} - \beta_i| < D\sqrt{s} \text{ при } i \in \{1, \dots, m-1\},$$
$$|P_{q_{i-m+r}} + P_{l_{m-r}} - \beta_i| < 2D\sqrt{s} \text{ при } i \in \{m-r+1, \dots, 2m-r-1\}.$$

Обозначим через

$$P_{l,q} = (P_{l_1}, \dots, P_{l_{m-1}}, P_{q_r} + P_{l_{m-r}}, \dots, P_{q_{m-1}} + P_{l_{m-r}}).$$

Также обозначим через

$$\gamma_i = \begin{cases} -P_{l_i} + \beta_i \text{ при } i \in \{1, \dots, m-1\}, \\ -P_{q_{i-m+r}} - P_{l_{m-r}} + \beta_i \text{ при } i \in \{m-r+1, \dots, 2m-r-1\}. \end{cases}$$

Нужная нам вероятность не превосходит вероятности события

$$\bigcap_{i=1}^{2m-r-1} \{|\gamma_i| < 2D\sqrt{s}\}.$$

Заметим, что углы β_i независимы и равномерно распределены на отрезке $[0, 2\pi]$, поэтому γ_i независимо и равномерно распределены на отрезках $[-P_{(l,q)_i}, 2\pi - P_{(l,q)_i}]$. Значит,

$$\mathbb{P}\{h(U_1, \dots, U_n) > z_n(t), ||P_l - (U_1, \dots, U_m)|| < D\sqrt{s},$$
$$h(U_{1+m-r}, \dots, U_{2m-r}) > z_n(t), ||P_q - (U_{1+m-r}, \dots, U_{2m-r})|| < D\sqrt{s}\} \leq$$
$$\leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{2m-r-1} \{|\gamma_i| < 2D\sqrt{s}\}\right) \leq \left(\frac{4D\sqrt{s}}{2\pi}\right)^{2m-r-1}.$$

Следовательно, верно неравенство

$$n^{2m-r}\mathbb{P}\{h(U_1, \dots, U_m) > z_n(t), h(U_{1+m-r}, \dots, U_{2m-r}) > z_n(t)\} \leq$$
$$\leq d^2 n^{2m-r} \left(\frac{4D\sqrt{s}}{2\pi}\right)^{2m-r-1} = \frac{d^2 2^{2m-r-1} D^{2m-r-1} t^{\frac{2m-r-1}{2}}}{\pi^{2m-r-1}} n^{-\frac{m-r}{m-1}} = o(1).$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} n^{2m-r}\mathbb{P}\{h(U_1,\ldots,U_m) > z_n(t), h(U_{1+m-r},\ldots,U_{2m-r}) > z_n(t)\} = 0.$$

$\square$

Вернемся к доказательству нашей теоремы. Теперь мы можем воспользоваться теоремой Сильвермана-Брауна, ибо мы доказали выполнение всех ее условий. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(H_n \le z_n(t)\right) = e^{-\lambda_t}$$

для любого $t \in T$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(H_n \le M - tn^{-\frac{2m}{m-1}}\right) = e^{-\frac{t^{\frac{m-1}{2}}}{K}}.$$

Поэтому для любого $t > 0$ верно, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{n^{\frac{2m}{m-1}}(M - H_n) \le t)\} = 1 - e^{-\frac{t^{\frac{m-1}{2}}}{K}}.$$

Теорема доказана. $\square$

Объединим теоремы 1 и 2 в общий результат.

Теорема 3. Обобщенная теорема. *Пусть $U_1,\ldots,U_m$ — независимо и равномерно распределенные точки на единичной окружности S_1 с центром в точке O. Обозначим*

$$\beta_i = \angle U_{i+1}OU_1.$$

Рассмотрим функцию

$$f(U_1,\ldots,U_m) = h(\beta_1,\ldots,\beta_{m-1})$$

(иными словами, функция f не изменяется под действием поворота). Предположим, что выполняются следующие условия:

1. *Функция f не меняется относительно перестановок U_i.*

2. *Функция h непрерывна (в топологии на $\mathbb{R} \cup -\infty$).*

3. *Функция, непрерывная на компакте даже с наличием $-\infty$, достигает своего максимума. Обозначим его через M (он же равен максимуму функции f). Потребуем, чтобы этот максимум достигался лишь в конечном числе точек $V_1, \dots, V_k \in [0, 2\pi]^{m-1}$. При этом предположим, что ни одна из этих точек не лежит на границе области определения. Иными словами*

   $$V_i^j > 0 \text{ и } V_i^j < 2\pi \text{ для всех } i \in \{1, \dots, k\}, j \in \{1, \dots, m-1\},$$

   где V_i^j — $j-$я координата точки V_i.

4. *Существует $\delta > 0$, что функция h трижды непрерывно дифференцируема в $\delta-$окрестности V_i для любого $i \in \{1, \dots, k\}$ (то есть в окрестности любой точки максимума).*

5. *Рассмотрим матрицу Гессе G^i следующего вида:*

   $$G^i = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h(V_i)}{\partial^2 x_1} & \frac{\partial^2 h(V_i)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 h(V_i)}{\partial x_1 \partial x_{m-1}} \\ \frac{\partial^2 h(V_i)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 h(V_i)}{\partial^2 x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 h(V_i)}{\partial x_2 \partial x_{m-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 h(V_i)}{\partial x_{m-1} \partial x_1} & \frac{\partial^2 h(V_i)}{\partial x_{m-1} \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 h(V_i)}{\partial^2 x_{m-1}} \end{pmatrix}.$$

   Предположим, что для всех точек максимума определитель матрицы $det(G^i) \neq 0$.

Тогда для любого $t > 0$ верно равенство

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\{n^{\frac{2m}{m-1}}(M - H_n) \leq t)\} = 1 - e^{-\frac{t^{\frac{m-1}{2}}}{K}},$$

где $K = m!(2\pi)^{\frac{m-1}{2}} \Gamma(\frac{m+1}{2}) \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{det(-G^i)}}\right)}$.

Замечание 4. Заметим, что в условиях теоремы можно максимум M заменить на минимум μ. Тогда все будет так же, кроме предельного распределения, которое будет равно :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{n^{\frac{2m}{m-1}}(H_n - \mu) \le t)\} = 1 - e^{-\frac{t^{\frac{m-1}{2}}}{K}},$$

где $K = m!(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}\Gamma(\frac{m+1}{2})\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{det(G^i)}}\right)}$.

Замечание 5. Пусть $f(U_1, \ldots, U_m)$, как и в условиях предыдущей теоремы, не меняется при перестановке U_i. Поэтому $h(\beta_1, \ldots, \beta_{m-1})$ не меняется при перестановках β_i. Тогда

$$h(\beta_1, \ldots, \beta_{m-1}) = \hat{h}(\beta_{j_1}, \ldots, \beta_{j_{m-1}}),$$

где $\beta_{j_1} \le \beta_{j_2} \le \ldots \le \beta_{j_{m-1}}$ — это перестановка углов $\beta_1, \ldots, \beta_{m-1}$.

Довольно часто функция $\hat{h}$ — гладкая и трижды дифференцируемая в окрестностях точек максимума (например, гладкие функции, зависящие от сторон m-угольника). Если эти точки максимума не имеют одинаковых координат, то можно делать так, как сказано в теореме. Но при совпадающих координатах бывают проблемы, так как тогда в этой точке происходит изменение упорядоченной перестановки и может происходить перестановка частных производных. Иными словами, производных по направлению в этих точках может и не быть. Например, так происходит в задаче про максимизацию суммы квадратов.

Замечание 6. Пусть у всех V_i координаты не совпадают . Так как функция f не меняется при перестановках, то при перестановке координат точки V_i получается тоже максимум. Значит, все точки максимума делятся на перестановочные орбиты величины $(m-1)!$, при этом определитель матрицы вторых производных во всех этих точках будет одинаков. Тогда, если $W_1, \ldots, W_r$ — точки максимума с упорядоченными углами, то

$$\lim_{s\to 0_+} s^{-\frac{m-1}{2}}\mathbb{P}\{f(U_1, \ldots, U_m) \ge M - s\} = \frac{\Gamma(m+1)}{K},$$

где $K = m(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\sqrt{\det(-G(W^i))}}\right)}$, где $G(W^i)$ — это матрица из вторых производных для функции $\hat{h}$.

3 Применение обобщенной теоремы в частных случаях

3.1 Степенные функции от сторон

Предположим, что точки $U_1, \ldots, U_n$ — независимо и равномерно распределены на единичной окружности S. Рассмотрим некоторую функцию

$$h(V_1, \ldots, V_m) : S^m \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\},$$

заданную следующим образом. Пусть нам дан m-угольник с вершинами в точках $V_1, \ldots, V_m$. Пусть обход вершин по часовой стрелке этого многоугольника дает нам порядок $V_{i_1}, \ldots, V_{i_m}$. Рассмотрим функцию

$$h(V_1, \ldots, V_m) = \sum_{j=1}^{m} |V_{i_j} V_{i_{j+1}}|^y$$

сумму y-вых степеней длин сторон многоугольника, построенного на заданных вершинах. Рассмотрим точки $U_1, \ldots, U_m$, не умаляя общности будем считать, что они расположены на окружности в таком порядке. Введем углы β_i как в основной теореме. Заметим, что длина стороны $|U_i U_{i+1}| = 2\sin\left(\frac{\beta_i - \beta_{i-1}}{2}\right)$. Значит,

$$h(U_1, \ldots, U_m) = 2^y \sum_{i=1}^{m} \sin^y\left(\frac{\beta_i - \beta_{i-1}}{2}\right). \tag{9}$$

Заметим, что отсюда сразу видно, что функция h непрерывна, а также бесконечно гладкая везде, кроме, быть может, мест, где U_i совпадают (так как в этих точках стыкуются несколько бесконечно гладких функций, но производные с разных концов могут и не совпадать). Для того, чтобы воспользоваться обобщенной теоремой, надо установить, что максимумов конечное число и все они не имеют совпадающих точек.

Лемма 5. *При $y < 0$ на правильном $m-$угольнике достигается минимум этой функции, а при $y \in (0,1)$ — максимум.*

Доказательство. Обозначим через

$$x_i = \frac{\beta_i - \beta_{i-1}}{2}.$$

Тогда мы хотим найти точки, в которых достигается нужный экстремум следующей задачи:

$$\begin{cases} 2^y \sum\limits_{i=1}^{m} (\sin x_i)^y \to \max / \min \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = \pi \\ x_j \geq 0 \text{ для любого } j \in \{1, \ldots, m\}. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = (\sin x)^y \text{ при } x \in (0, \pi).$$

Найдем ее первые две производные:

$$\begin{aligned} f'(x) &= y(\sin x)^{y-1} \cos x, \\ f''(x) &= y(\sin x)^{y-2}(y \cos^2 x - 1). \end{aligned}$$

Заметим, что при $y < 0$ верно, что $f''(x) > 0$ при $x \in (0, \pi)$. Это означает, что данная функция строго выпукла на данном промежутке. Тогда по неравенству Йенсена

$$\alpha_1 f(y_1) + \ldots + \alpha_n f(y_n) \geq f(\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n),$$

при условии, что $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$. Будем считать, что все $\alpha_i > 0$. Тогда равенство достигается только в случае, когда все y_i попарно равны.

Вернемся к нашей задаче. Заметим, что

$$h(U_1,\ldots,U_m) = 2^y\sum_{i=1}^{m}(\sin x_i)^y = 2^y\sum_{i=1}^{m}f(x_i) \geq$$
$$\geq 2^y m f\left(\frac{x_1+\ldots+x_m}{m}\right) = 2^y m f\left(\frac{\pi}{m}\right).$$

При этом из-за строгой выпуклости равенство достигается только в случае, когда все x_i равны. Значит, в случае $y<0$ функция $h(U_1,\ldots,U_m)$ достигает минимума только в вершинах правильного $m-$угольника.

В случае, когда $y\in(0,1)$ вторая производная $f^{''}(x)<0$, поэтому функция строго вогнута. Аналогичные соображения приводят к тому, что при $y\in(0,1)$ функция $h(U_1,\ldots,U_m)$ достигает своего максимума только в вершинах правильного $m-$угольника. $\square$

Значит, в выбранных случаях мы нашли точку экстремума, удовлетворяющую условиям теоремы. Теперь вычислим матрицу G. Из формулы 9 мы знаем, как функция зависит от β_i. Подсчитаем частные производные второго порядка. Получим, что

$$\frac{\partial^2 h}{\partial\beta_i\partial\beta_j} = 0,\ \text{если } |i-j|>2,$$
$$\frac{\partial^2 h}{\partial\beta_i\partial\beta_{i-1}} = 2^{y-2}y\left(\sin\left(\frac{\beta_i-\beta_{i-1}}{2}\right)\right)^{y-2}\left(1-y\cos^2\left(\frac{\beta_i-\beta_{i-1}}{2}\right)\right),$$
$$\frac{\partial^2 h}{\partial^2\beta_i} = -2^{y-2}y\left(\sin\left(\frac{\beta_i-\beta_{i-1}}{2}\right)\right)^{y-2}\left(1-y\cos^2\left(\frac{\beta_i-\beta_{i-1}}{2}\right)\right)-$$
$$-2^{y-2}y\left(\sin\left(\frac{\beta_{i+1}-\beta_i}{2}\right)\right)^{y-2}\left(1-y\cos^2\left(\frac{\beta_{i+1}-\beta_i}{2}\right)\right).$$

Теперь посмотрим на матрицу G в точке экстремума. В точке, соответствующей правильному $m-$угольнику, частные производные выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 h}{\partial\beta_i\partial\beta_j}(U) = 0, \text{ если } |i-j|>2,\\
&\frac{\partial^2 h}{\partial\beta_i\partial\beta_{i-1}}(U) = 2^{y-2}y\left(\sin\frac{\pi}{m}\right)^{y-2}\left(1-y\cos^2\frac{\pi}{m}\right),\\
&\frac{\partial^2 h}{\partial^2\beta_i}(U) = -2^{y-1}y\left(\sin\frac{\pi}{m}\right)^{y-2}\left(1-y\cos^2\frac{\pi}{m}\right).
\end{aligned}$$

Значит, матрица G принимает вид

$$G = -2^{y-2}y\left(\sin\frac{\pi}{m}\right)^{y-2}\left(1-y\cos^2\frac{\pi}{m}\right)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}$ можно подсчитать с помощью написания рекуррентного соотношения. Обозначим за $g(n)$ определитель такой матрицы размеры $n\times n$. Тогда верно, что

$$\begin{cases} g(1) = 2,\\ g(2) = 3,\\ g(n) = 2g(n-1) - g(n-2). \end{cases}$$

Отсюда мы видим, что $g(n) = n+1$. Значит,

$$\det(G) = m\left(-2^{y-2}y\left(\sin\frac{\pi}{m}\right)^{y-2}\left(1-y\cos^2\frac{\pi}{m}\right)\right)^{m-1}.$$

Посчитаем константу из обобщенной теоремы в случае $y < 0$. Напомним, что она в случае минимума выглядит следующим образом:

$$K = m!2^{\frac{m-1}{2}}\pi^{\frac{m-1}{2}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{det(G^i)}}\right)}.$$

В данном случае $k = (m-1)!$ — это количество конфигураций точек на окружности, образующих правильный $m-$угольник и не переводящихся друг в друга поворотами. Значит,

$$K = m!2^{\frac{m-1}{2}}\pi^{\frac{m-1}{2}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\frac{\sqrt{\det(G)}}{(m-1)!} =$$

$$= m2^{\frac{m-1}{2}}\pi^{\frac{m-1}{2}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\left(m\left(-2^{y-2}y\left(\sin\frac{\pi}{m}\right)^{y-2}\left(1-y\cos^2\frac{\pi}{m}\right)\right)^{m-1}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= m^{\frac{3}{2}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\left(-2^{y-1}y\pi\left(\sin\frac{\pi}{m}\right)^{y-2}\left(1-y\cos^2\frac{\pi}{m}\right)\right)^{\frac{m-1}{2}}.$$

В случае, когда $y \in (0,1)$ минимум заменяется на максимум, поэтому надо считать определитель $\det(-G)$. Тогда константа выглядит следующим образом:

$$K = m^{\frac{3}{2}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\left(2^{y-1}y\pi\left(\sin\frac{\pi}{m}\right)^{y-2}\left(1-y\cos^2\frac{\pi}{m}\right)\right)^{\frac{m-1}{2}}.$$

Теперь воспользуемся обобщенной теоремой и получим следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть $U_1,\ldots,U_n$ — независимо и равномерно распределенные точки на единичной окружности S_1. Рассмотрим функцию $h(V_1,\ldots,V_m) : S^m \to \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, заданную следующим образом. Рассмотрим m-угольник с вершинами в точках $V_1,\ldots,V_m$. Пусть обход вершин по часовой стрелке этого многоугольника дает нам* *порядок* $V_{i_1}, \dots, V_{i_m}$. *Пусть функция*

$$h(V_1, \dots, V_m) = \sum_{j=1}^{m} |V_{i_j} V_{i_{j+1}}|^y$$

это сумма y*-вых степеней длин сторон многоугольника, построенного на заданных вершинах.Обозначим через*

$$H_m = \min_{1 \le i_1 < \dots < i_m \le n} h(U_{i_1}, \dots, U_{i_m}).$$

Тогда при условии $y < 0$ *для любого* $t > 0$ *верно равенство*

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\{n^{\frac{2m}{m-1}}(H_m - m2^y \left(\sin \frac{\pi}{m}\right)^y) \le t)\} = 1 - e^{-\frac{t^{\frac{m-1}{2}}}{K}},$$

где $K = m^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \left(-2^{y-1} y\pi \left(\sin \frac{\pi}{m}\right)^{y-2} \left(1 - y\cos \frac{\pi}{m}\right)\right)^{\frac{m-1}{2}}$.

Также обозначим через

$$F_m = \max_{1 \le i_1 < \dots < i_m \le n} h(U_{i_1}, \dots, U_{i_m}).$$

Тогда при условии $y \in (0,1)$ *для любого* $t > 0$ *верно равенство*

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\{n^{\frac{2m}{m-1}}(m2^y \left(\sin \frac{\pi}{m}\right)^y - F_m) \le t)\} = 1 - e^{-\frac{t^{\frac{m-1}{2}}}{K}},$$

где $K = m^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \left(2^{y-1} y\pi \left(\sin \frac{\pi}{m}\right)^{y-2} \left(1 - y\cos \frac{\pi}{m}\right)\right)^{\frac{m-1}{2}}$.

Замечание 7. Заметим, что при $y = 1$ правильный $m-$угольник также является единственной точкой максимума, поэтому эта константа тоже работает. Это показано в работе [8].

При $y > 1$ с помощью данных соображений установить точку максимума не удается. Более того, в некоторый момент правильный $m-$угольник перестает быть точкой максимума. Так уже при $y = 2$ для любого $m \ge 3$ точкой максимума является правильный треугольник. Так как в точке максимума при $m > 3$ некоторые U_i

в точке максимума совпадают, то теорему уже нельзя применять в этом случае. Это происходит из-за того, что у функции не будут определены частные производные в точках стыка, поэтому раскладывать в ряд Тейлора в окрестности точки максимума мы не можем. Но при $m = 3$ верно, что точкой максимума является правильный m-гольник.

Лемма 6. *Покажем, что при $m = 3$ и $y \in [1, 2]$ правильный треугольник будет точкой максимума.*

Доказательство. Аналогично предыдущим рассуждениям, обозначим через

$$x_i = \frac{\beta_i - \beta_{i-1}}{2}.$$

Тогда мы хотим найти точки, в которых достигается максимум у следующей задачи:

$$\begin{cases} 2^y \sum\limits_{i=1}^{3} (\sin x_i)^y \to \max \\ \sum\limits_{i=1}^{3} x_i = \pi \\ x_i \geq 0 \text{ для любого } j \in \{1, \dots, 3\}. \end{cases}$$

Заметим, что в случае, когда все $x_i = \frac{\pi}{3}$, функция равна $3 \cdot 2^y (\frac{\sqrt{3}}{2})^y = 3^{\frac{y+2}{2}}$. Предположим, что некоторое $x_i = 0$. Тогда $h(U_1, U_2, U_3) \leq 2 \cdot 2^y = 2^{y+1}$. Заметим, что при $y \in [1, 2]$ верно, что $3^{\frac{y+2}{2}} > 2^{y+1}$, поэтому максимум не расположен на границе. Для решения полученной системы используем следующую теорему о необходимых условиях локального минимума в задаче с ограничениями в виде равенств и неравенств.

Теорема. *Пусть мы решаем следующую задачу*

$$\begin{aligned} &f_0(x) \to \min, \\ &f_i(x) \leq b_i, i \in \{1, \dots, k\}, \\ &f_i(x) = b_i, i \in \{k+1, \dots, n\}, \\ &x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Напишем функцию Лагранжа для этой системы

$$L(x,\lambda) = \lambda_0 f_0(x) + \sum_{i=1}^{n}(f_i(x) - b_i).$$

Пусть x^* — точка локального минимума в задаче, и пусть $f_i(x)$ непрерывно дифференцируемы в окрестности точки x^*. Тогда существует ненулевой набор множителей Лагранжа $\lambda^* = (\lambda_0^*, \ldots, \lambda_n^*) \in \mathbb{R}^{n+1}$, такой, что для функции Лагранжа выполняются условия:

1) стационарности: $\frac{\partial L(x^*,\lambda^*)}{\partial x_j} = 0$, для всех $j \in \{1,\ldots,n\}$;

2) дополняющей нежесткости: $\lambda_i^*(f_i(x) - b_i) = 0$, для $i \in \{1,\ldots,k\}$;

3) неотрицательности: $\lambda_i^* \geq 0$, для $i \in \{0,\ldots,k\}$.

Вернемся к нашей задаче. Напишем функцию Лагранжа. Она равна

$$L(x,\lambda) = \lambda_0 \cdot 2^y \sum_{i=1}^{3}(\sin x_i)^y + \sum_{i=1}^{3}\lambda_i x_i + \lambda_4(x_1 + x_2 + x_3 - \pi).$$

Заметим, что по доказанному ранее, в точке максимума все $x_i > 0$, поэтому по второму свойству получается, что $\lambda_i > 0$. Воспользуемся первым условием теоремы. Получится, что

$$L'_{x_i}(x,\lambda) = \lambda_0 \cdot 2^y y(\sin x_i)^{y-1}\cos x_i + \lambda_4 = 0.$$

Заметим, что $\lambda \neq 0$, следовательно $\lambda_0 \neq 0$. Значит, для всех i верно, что

$$(\sin x_i)^{y-1}\cos x_i = C = -\frac{\lambda_4}{2^y y \lambda_0}.$$

Заметим, что при $C \leq 0$ верно, что $\cos x_i \leq 0$. Это означает, что $x_i \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Это противоречит условию, $\sum_{i=1}^{3} x_i = \pi$. Значит, $C \geq 0$, и $x_i \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Рассмотрим функцию $f(x) = (\sin x)^{y-1}\cos x$ при $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ Ее производная равна $f'(x) = (\sin x)^{y-2}(y\cos^2 x - 1)$. Она обращется в 0 только в точке $x_0 = \arccos\sqrt{\frac{1}{y}}$. При $x \leq x_0$ функция возрастает, а при $x \geq x_0$ убывает. Значит, уравнение $f(x) = C$ имеет не более двух корней на интервале $(0, \frac{\pi}{2})$. Таким образом, в точке максимума либо все x_i равны, либо два угла равны, а третий дополняет сумму двух предыдущих до π. Докажем, что верен первый случай. Это и будет означать, что максимум достигается на правильном треугольнике.

Предположим, что выполняется второй случай. Значит, у нас есть два угла, равных z и третий, равный $\pi - 2z$. При этом, точка z должна удовлетворять следующему соотношению $f(z) = f(\pi - 2z)$. Получаем, что

$$(\sin z)^{y-1} \cos z = -(\sin 2z)^{y-1} \cos 2z,$$
$$(\sin z)^{y-1} \cos z = -(2 \sin z \cos z)^{y-1} \cos 2z.$$

Перенеся все в одну часть, получим, что

$$r(z) = \cos 2z (\cos z)^{y-2} = -\frac{1}{2^{y-1}}.$$

Заметим, что $z = \frac{\pi}{3}$ является решением этого уравнения. Покажем, что при $y \in [1, 2]$ будет только одно решение.

Ясно, что $\cos 2z < 0$, а значит, $z \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$. Также заметим, что при таких условиях $\cos 2x$ отрицателен и убывает, а $(\cos x)^{y-2}$ положителен и не убывает, поэтому функция $r(x)$ строго убывает на интервале $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$. Значит, $z = \frac{\pi}{3}$ — это единственное решение и максимум достигается только на правильном треугольнике. $\square$

Таким образом, при $m = 3$ верна следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть $U_1, \ldots, U_n$ — независимо и равномерно распределенные точки на единичной окружности S_1 с центром в точке O. Рассмотрим некоторую функцию $h(V_1, \ldots, V_m) : S^m \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, заданную следующим образом*

$$h(V_1, V_2, V_3) = \sum_{j=1}^{3} |V_j V_{j+1}|^y$$

это сумма y-вых степеней длин сторон треугольника, построенного на заданных вершинах. Также обозначим

$$F_{3n} = \max_{1 \le i < j < k \le n} h(U_i, U_j, U_k).$$

Тогда при условии $y \in [1, 2]$ для любого $t > 0$ верно равенство

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\{n^3(3^{\frac{y+2}{2}} - F_{3n}) \le t)\} = 1 - e^{-\frac{t}{K}},$$

где $K = 3^{\frac{y+1}{2}} \pi y(2 - \frac{2}{y})$.

3.2 Сумма попарных расстояний между точками

Изучим предельное поведение следующей функции. Предположим, что $U_1, \dots, U_m$ — точки на единичной окружности S_1 с центром в точке O. Через $P(U_1, \dots, U_m)$ обозначим сумму попарных расстояний между U_i :

$$P(U_1, \dots, U_m) = \sum_{i<j} |U_i U_j|.$$

Докажем, что для этой функции выполняются условия обобщенной теоремы. Не умаляя общности,будем считать, что $U_1, \dots, U_m$ занумерованы таким образом, чтобы они шли в заданном порядке при обходе окружности против часовой стрелки. Пусть угол $2\varphi_i = \angle U_i O U_1$. Тогда треугольник $U_i O U_j$ равнобедренный, значит, его углы равны $2\varphi_j - 2\varphi_i, \frac{\pi}{2} - (\varphi_j - \varphi_i), \frac{\pi}{2} - (\varphi_j - \varphi_i)$. По теореме синусов

$$\frac{|U_i U_j|}{\sin(2(\varphi_j - \varphi_i))} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - (\varphi_j - \varphi_i)\right)},$$

поэтому,

$$|U_i U_j| = \frac{\sin 2(\varphi_j - \varphi_i)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - (\varphi_j - \varphi_i)\right)} = 2 \sin(\varphi_j - \varphi_i).$$

Следовательно,

$$P(U_1, \dots, U_n) = 2 \sum_{1 < i < j < n+1} \sin(\varphi_j - \varphi_i).$$

Отсюда мы видим, что функция P непрерывная на области определения, а также достаточно гладкая везде, кроме быть может мест, где U_i совпадают. Для этого также можно воспользоваться замечанием 7. Кроме того, она не меняется под действием перестановок U_i. Докажем, что точка максимума единственна с точностью до перестановок U_i и не лежит на границе области определения (то есть U_i не совпадают).

Лемма 7. . *Максимум функции P достигается в вершинах правильного $m-$угольника и равен $m\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2m}$.*

Доказательство. В предыдущих предположениях на точки, мы знаем, что если $\angle U_iOU_j = 2\varphi$, то

$$|U_iU_j| = 2\sin\varphi.$$

При этом данная формула не меняется при замене 2φ на $2\pi - 2\varphi$, поэтому необязательно брать из двух углов между сторонами наименьший.

Определение 1. *Будем говорить, что диагональ величины k, если минимальное число вершин вдоль окружности между концами этой диагонали равно k. Например, сторона выпуклого $m-$угольника — это диагональ величины 0.*

Обозначим через $P(k, U_1, \dots, U_m)$ сумму длин всех $k-$диагоналей. Тогда

$$P(U_1, \dots, U_m) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1} P(i, U_1, \dots, U_m).$$

Докажем, что максимум суммы всех длин $k-$ диагоналей достигается на правильном $m-$угольнике. Заметим, что

$$\begin{aligned} P(k, U_1, \dots, U_m) &= \sum_{i=1}^{m} |U_iU_{i+k+1}|, \text{ если } 2k \neq m \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} |U_iU_{i+k+1}|, \text{ если } 2k = m. \end{aligned}$$

В формуле выше считается, что U_{i+m} совпадают с U_i. Таким образом, в любом случае надо доказать, что $\tilde{P}(k, U_1, \ldots, U_m) := \sum_{i=1}^{m} |U_i U_{i+k+1}|$ достигает своего максимума только на правильном $m-$угольнике. Пусть угол $U_i O U_{i+k} = 2\psi_i$ (имеется в виду угол, который идет от U_i против часовой стрелки до U_{i+k}.) Тогда

$$\tilde{P}(k, U_1, \ldots, U_m) = 2\sum_{i=1}^{m} \sin \psi_i.$$

Заметим, что нашу задачу можно обобщить на следующую задачу (опустив некоторые условия):

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} \sin \psi_i \to \max, \\
&0 \le \psi_i \le \pi, \ \text{для любого } i \in \{1, \ldots, m\}, \\
&\sum_{i=1}^{m} \psi_i = (k+1)\pi.
\end{aligned}$$

Последнее условие берется из того, что угол, образованный сектором $U_i O U_{i+1}$ был сосчитан среди всех углов ровно $k+1$ раз.

Заметим, что вторая производная функции $\sin x$ равна $-\sin x$, а $\sin x \le 0$ при $x \in [0, \pi]$. Поэтому функция $\sin x$ выпукла вверх на отрезке $x \in [0, \pi]$. Значит,

$$\sum_{i=1}^{m} \sin \psi_i \le m \sin\left(\frac{\sum_{i=1}^{m} \psi_i}{m}\right) = m \sin\left(\frac{(k+1)\pi}{m}\right).$$

Заметим также, что в правильном $m-$угольнике $\tilde{P}(k, U_1, \ldots, U_m) = m \sin\left(\frac{(k+1)\pi}{m}\right)$, значит, на правильном $m-$угольнике достигается максимум. Следовательно, на нем же достигается максимум и исходной функции. При этом, для $\tilde{P}(0, U_1, \ldots, U_m)$(суммы сторон m-угольника) максимум достигается только на правильном $m-$угольнике. Это доказано, например, в книге [10]. Поэтому максимум функции P достигается только на правильном $m-$угольнике.

Теперь вычислим значение функции в точке максимума. Оно равно
$$2 \cdot \frac{m}{2}\left(\sin\frac{\pi}{m} + \sin\frac{2\pi}{2m} + \ldots + \sin\frac{(m-1)\pi}{m}\right).$$
Докажем, что это выражение равно $m \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2m}$. Для этого надо доказать, что $\sin\frac{\pi}{m} + \sin\frac{2\pi}{2m} + \ldots + \sin\frac{(m-1)\pi}{m} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2m}$. Домножим обе части на $\sin\frac{\pi}{2m}$. Справа получится $\cos\frac{\pi}{2m}$, а слева получится следующее:
$$\sum_{i=1}^{m-1} \sin\frac{i\pi}{m} \sin\frac{\pi}{2m}.$$
Из тригонометрии мы знаем соотношение
$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos\left(x-y\right) - \cos\left(x+y\right)\right).$$
Подставим его в предыдущее сотношение и получим следующее:
$$\sum_{i=1}^{m-1}\left(\sin\frac{i\pi}{m}\sin\frac{\pi}{2m}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m-1}\left(\cos\frac{(2i-1)\pi}{2m} - \cos\frac{(2i+1)\pi}{2m}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2m} - \cos\frac{\pi(2m-1)}{2m}\right) = \cos\frac{\pi}{2m}.$$
Значит, мы доказали нужное равенство. □

Теперь надо вычислить матрицу Гессе в точке максимума нашей функции. Если обозначить $\beta_i = \angle U_{i+1}OU_1$, то функция P выглядит так:
$$P(U_1, \ldots, U_m) = 2\sum_{i<j}\sin\left(\frac{\beta_i - \beta_j}{2}\right).$$

Заметим, что

$$\frac{\partial^2 P}{\partial\beta_i\partial\beta_j} = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{|\beta_i-\beta_j|}{2}\right) \text{ при } i\neq j$$
$$\frac{\partial^2 P}{\partial^2\beta_i} = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1}\sin\left(\frac{|\beta_i-\beta_j|}{2}\right).$$

В точке максимума верно, что $\beta_i = \frac{2\pi i}{m}$. Значит,

$$\frac{\partial^2 P}{\partial\beta_i\partial\beta_j} = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi|(i-j)|}{m}\right) \text{ при } i\neq j$$
$$\frac{\partial^2 P}{\partial^2\beta_i} = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2m}\right).$$

Матрица $-G$ равна

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2m} & -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{m}\right) & -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{m}\right) & \dots & -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{(m-2)\pi}{m}\right) \\ -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{m}\right) & \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2m} & -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{m}\right) & \dots & -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{(m-3)\pi}{m}\right) \\ -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{m}\right) & -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{m}\right) & \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2m} & \dots & -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{(m-4)\pi}{m}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{(m-2)\pi}{m}\right) & -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{(m-3)\pi}{m}\right) & -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{(m-4)\pi}{m}\right) & \dots & \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2m} \end{pmatrix}.$$

После вынесения $\frac{1}{2}$ получается

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2m} & -\sin\left(\frac{\pi}{m}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{m}\right) & \dots & -\sin\left(\frac{(m-2)\pi}{m}\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{m}\right) & \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2m} & -\sin\left(\frac{\pi}{m}\right) & \dots & -\sin\left(\frac{(m-3)\pi}{m}\right) \\ -\sin\left(\frac{2\pi}{m}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{m}\right) & \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2m} & \dots & -\sin\left(\frac{(m-4)\pi}{m}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\sin\left(\frac{(m-2)\pi}{m}\right) & -\sin\left(\frac{(m-3)\pi}{m}\right) & -\sin\left(\frac{(m-4)\pi}{m}\right) & \dots & \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2m} \end{pmatrix}.$$

В отличие от предыдущих $m-$мерных функций, тут сосчитать определитель гессиана в общем виде не получается. Поэтому мы сосчитаем его для маленьких m. Для этого воспользуемся математической программой Maple.

$$\begin{aligned}
&\det(G) = \frac{9}{16} = 0.5652 \text{ при } m = 3;\\
&\det(G) = \frac{3}{8}\sqrt{2} + \frac{1}{2} \approx 1.03033 \text{ при } m = 4;\\
&\det(G) = \frac{21}{8}\sqrt{3} + \frac{291}{64} \approx 9.0935 \text{ при } m = 6;\\
&\det(G) \approx 7620.479437 \text{ при } m = 10.
\end{aligned}$$

В общем виде, константа

$$K = m(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\sqrt{det(-G)}.$$

Поэтому, в частных случаях константа K выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
&K = 3 \cdot 2^1 \cdot \pi \cdot \Gamma(2) \cdot \sqrt{\frac{9}{16}} = 3 \cdot 2^1 \cdot \pi \cdot \frac{3}{4} = \frac{9\pi}{2} \text{ при } m = 3;\\
&K = 4 \cdot 2^{\frac{3}{2}}\pi^{\frac{3}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \cdot \sqrt{\frac{3}{8}\sqrt{2} + \frac{1}{2}} = 3\pi^2\sqrt{4 + 3\sqrt{2}} \text{ при } m = 4;\\
&K = 6 \cdot 2^{\frac{5}{2}}\pi^{\frac{5}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) \cdot \sqrt{\frac{21}{8}\sqrt{3} + \frac{291}{64}} = 6 \cdot 2^5\pi^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{15}{8}\pi^{\frac{1}{2}} \cdot (\frac{7}{64}\sqrt{6} + \frac{3}{16}\sqrt{2}) =\\
&= \frac{45}{8}\pi^3(7\sqrt{6} + 12\sqrt{2}) \text{ при } m = 6;\\
&K \approx 10 \cdot 2^{\frac{9}{2}}\pi^{\frac{9}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{11}{2}\right)\sqrt{7620.479437} \approx 10 \cdot 2^{\frac{9}{2}}\pi^{\frac{9}{2}} \cdot \frac{945}{32}\pi^{\frac{1}{2}}87.295358 =\\
&= 583321.4352\pi^5 \text{ при } m = 10;
\end{aligned}$$

Заметим, что при $m = 3$ константа совпадает с результатом Лао и Майера из работы [4], как мы и ожидали, ведь в этом случае $P(V_1, V_2, V_3)$ — это периметр треугольника с вершинами в заданных точках.

Таким образом, предельная теорема звучит следующим образом.

Теорема 6. *Пусть точки $U_1, \dots, U_n$ — равномерно и независимо распределены на единичной окружности S. Рассмотрим функцию*

$$P(V_1, \dots, V_m) = \sum_{i<j} |V_i V_j|.$$

Она равна сумме сторон и диагоналей выпуклого m-угольника с вершинами в указанных точках. Пусть

$$H_m = \max_{1 \le i_1 < \ldots < i_m \le n} P(U_{i_1}, \dots, U_{i_m}).$$

Тогда для любого $t > 0$ верно равенство

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\{n^{\frac{2m}{m-1}}(m \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2m} - H_m) \le t)\} = 1 - e^{-\frac{t^{\frac{m-1}{2}}}{K}},$$

где $K = m 2^{\frac{m-1}{2}} \pi^{\frac{m-1}{2}} \Gamma(\frac{m+1}{2}) \sqrt{\det(-G)}$, а матрица G написана выше.

В частных случаях K равно следующим величинам:

$$K = \frac{9\pi}{2} \text{ при } m = 3;$$
$$K = 3\pi^2 \sqrt{4 + 3\sqrt{2}} \text{ при } m = 4;$$
$$K = \frac{45}{8} \pi^3 (7\sqrt{6} + 12\sqrt{2}) \text{ при } m = 6;$$
$$K \approx 583321.4352\pi^5 \text{ при } m = 10.$$

3.3 Сумма расстояний от центра окружности до вершин описанного m-угольника

Изучим предельное поведение следующей функции в окрестности точки минимума. Пусть $U_1, \dots, U_m$ точки на единичной окружности

S с центром в точке O. Считаем, что $m \geq 4$. Рассмотрим описанный выпуклый $m-$угольник, стороны которого касаются окружности S в точках $U_1, \ldots, U_m$. Это будет m-угольник с вершинами $A_1, \ldots, A_m$ (при этом, возможен случай, когда одна из этих вершин находится на бесконечности). Рассмотрим следующую функцию

$$h(U_1, \ldots, U_m) = \sum_{i=1}^{m} OA_i.$$

Это сумма расстояний от центра окружности до вершин описанного m-угольника. В случае, когда одна из вершин A_i попала на бесконечность, мы считаем, что $h(U_1, \ldots, U_m) = +\infty$.

Не умаляя общности, мы считаем, что вершина A_i стоит на пересечении касательных к вершинам U_i и U_{i+1}. Как и в обобщенной теореме обозначим через

$$\beta_i = \angle U_{i+1} O U_1.$$

Нетрудно увидеть, что трегольники OU_iA_i и $OU_{i+1}A_i$ являются равными прямоугольными треугольниками с прямыми углами при вершинах U. Таким образом,

$$\cos \angle U_{i+1} O A_i = \frac{OU_{i+1}}{OA_i}.$$

Значит,

$$OA_i = \frac{1}{\cos\left(\frac{\beta_i - \beta_{i-1}}{2}\right)},$$

где $\beta_0 = 0$, а $\beta_m = 2\pi$. Заметим, что это выражение корректно во всех случаях, когда вершина A_i не на бесконечности. Действительно, предположим, что косинус в знаменателе получился неположительным. Это значит, что $\beta_i - \beta_{i-1} \geq \pi$ Тогда касательные, проведенные в точках U_{i+1} и U_i пересекутся с другой стороны от окружности и полученный m-угольник будет невыпуклым. (Все это верно при $m \geq 4$.)

Значит, при конечном значении функции h верно, что

$$\beta_i - \beta_{i-1} < \pi \text{ для любого } i \in \{1, \dots, m\}.$$

Здесь мы считаем, что $\beta_0 = 0, \beta_m = 2\pi$. Так же верно выражение для формулы

$$h(V_1, \dots, V_m) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\cos\left(\frac{\beta_i - \beta_{i-1}}{2}\right)}.$$

Как и в предыдущих случаях, мы хотим доказать, что эта функция удовлетворяет условиям обобщенной теоремы. Из общего вида функции сразу следует непрерывность и необходимая для обобщенной теоремы гладкость функции h.

Лемма 8. *Минимум функции h достигается только в вершинах правильного m-угольника и равен $\frac{m}{\cos\frac{\pi}{m}}$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{\cos x}$. Тогда задачу минимизации функции h можно переформулировать следующим образом:

$$\begin{aligned}
&f(x_1) + \ldots + f(x_m) \to \min,\\
&x_1 + \ldots + x_m = \pi,\\
&x_i \in [0, \frac{\pi}{2}) \text{ для любого } i \in \{1, \dots, m\}.
\end{aligned}$$

Заметим, что функция f — это строго выпуклая функция. Для этого докажем, что вторая производная функции $f^{''}(x)$ больше 0 при $x \in [0, \frac{\pi}{2})$. Это известный факт анализа, см., например, [9]. Действительно,

$$\begin{aligned}
&f(x) = \frac{1}{\cos x},\\
&f^{'}(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x},\\
&f^{''}(x) = \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^3 x} > 0 \text{ при } x \in [0, \frac{\pi}{2}).
\end{aligned}$$

Значит, функция f на нужном промежутке строго выпукла и выполнено неравенство Йенсена:

$$f(x_1) + \ldots_f (x_m) \geq mf\left(\frac{x_1 + \ldots + x_m}{m}\right) = \frac{m}{\cos\frac{\pi}{m}}.$$

При этом, равенство достигается только в случае, когда все x_i совпадают. Это равносильно тому, что $V_1, \ldots, V_m$ — это вершины правильного m-угольника. □

Значит, в выбранных случаях мы нашли точку минимума, удовлетворяющую условиям теоремы. Теперь вычислим матрицу G. Из предыдущих рассужений мы знаем, как функция зависит от β_i. Подсчитаем частные производные второго порядка. Получим, что

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 h}{\partial\beta_i\partial\beta_j} = 0, \text{ если } |i-j| > 2,\\
&\frac{\partial^2 h}{\partial\beta_i\partial\beta_{i-1}} = -\frac{1+\sin^2\left(\frac{\beta_i-\beta_{i-1}}{2}\right)}{4\cos^3\left(\frac{\beta_i-\beta_{i-1}}{2}\right)},\\
&\frac{\partial^2 h}{\partial^2\beta_i} = \frac{1+\sin^2\left(\frac{\beta_i-\beta_{i-1}}{2}\right)}{4\cos^3\left(\frac{\beta_i-\beta_{i-1}}{2}\right)} + \frac{1+\sin^2\left(\frac{\beta_{i+1}-\beta_i}{2}\right)}{4\cos^3\left(\frac{\beta_{i+1}-\beta_i}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Теперь посмотрим на матрицу G в точке минимума. В точке, соответствующей правильному $m-$угольнику, частные производные выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 h}{\partial\beta_i\partial\beta_j}(U) = 0, \text{ если } |i-j| > 2,\\
&\frac{\partial^2 h}{\partial\beta_i\partial\beta_{i-1}}(U) = -\frac{1+\sin^2\left(\frac{\pi}{m}\right)}{4\cos^3\left(\frac{\pi}{m}\right)},\\
&\frac{\partial^2 h}{\partial^2\beta_i}(U) = \frac{1+\sin^2\left(\frac{\pi}{m}\right)}{2\cos^3\left(\frac{\pi}{m}\right)}.
\end{aligned}$$

Значит, матрица G принимает вид

$$G = \frac{1+\sin^2\left(\frac{\pi}{m}\right)}{4\cos^3\left(\frac{\pi}{m}\right)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}$,был сосчитан в параграфе 3.1 и равен m. Значит,

$$det(G) = \left(\frac{1+\sin^2\left(\frac{\pi}{m}\right)}{4\cos^3\left(\frac{\pi}{m}\right)}\right)^{m-1} \cdot m.$$

Перстановок вершин, при которых получается правильный m-угольник, равно $(m-1)!$ и в каждом из них определитель матрицы G будет одинаковым. Таким образом, константа K из обобщенной теоремы равна

$$K = m^{\frac{3}{2}} 2^{\frac{m-1}{2}} \pi^{\frac{m-1}{2}} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \left(\frac{1+\sin^2\left(\frac{\pi}{m}\right)}{4\cos^3\left(\frac{\pi}{m}\right)}\right)^{\frac{m-1}{2}}.$$

Теорема 7. *Предположим, что $U_1, \dots, U_n$ — независимо и равномерно распределенные точки на единичной окружности S с центром в точке O. Рассмотрим функцию $h : S^m \to \mathbb{R} \cup \infty$, где $m \geq 4$. Рассмотрим описанный выпуклый $m-$угольник, стороны которого касаются окружности S в точках $V_1, \dots, V_m$. Это будет m-угольник, с вершинами $A_1, \dots, A_m$ (при этом возможен случай, когда одна из этих вершин находится на бесконечности). Рассмотрим следующую функцию*

$$h(V_1, \dots, V_m) = \sum_{i=1}^{m} OA_i.$$

Обозначим через

$$H_n = \min_{1 \le i_1 < \ldots < i_m \le n} \sum_{k=1}^{m} |OA_{i_k}|.$$

Тогда выполняется следующее равенство:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{n^{-\frac{2m}{m-1}}\left(H_n - \frac{m}{\cos\frac{\pi}{m}}\right) \le t\} = 1 - \exp(-\frac{t^{\frac{m-1}{2}}}{K}),$$

где $K = m\sqrt{m}\Gamma(\frac{m+1}{2})\pi^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{\sin^2\frac{\pi}{m}+1}{2\cos^3\frac{\pi}{m}}\right)^{\frac{m-1}{2}}$.

4 Заключение

В данной работе метод изучения предельного поведения U-max статистик был обобщен на более широких класс U-max статистик. Было обнаружено, что на предельное поведение этого класса U-max статистик оказывает влияние только гессиан в точках максимума, что дает общее представление о предельном поведении U-max статистик данного класса, а также значительно упрощает изучение поведения конкретных U-max статистик. Также было изучено предельное поведение ряда конкретных U-max статистик геометрической природы.

Список литературы

[1] A.D. Barbour, L. Holst, S. Janson, Poisson Approximation, Oxford University Press, London, 1992.

[2] P.R. Halmos, The theory of unbiased estimation, Ann. Math. Statist. 17 (1946) 34–43.

[3] W. Hoeffding, A class of statistics with asymptotically normal distribution, Ann. Math. Statist. 19 (1948) 293–325.

[4] W. Lao, M. Mayer, U-max-statistics, J. Multivariate Anal. 99(2008), 2039–2052.

[5] W. Lao, Some weak limit laws for the diameter of random point sets in bounded regions. Ph.D. Thesis, Karlsruhe, 2010.

[6] M. Mayer, Random Diameters and Other U-max-Statistics. Ph.D. Thesis, Bern University, 2008.

[7] F.B. Silverman, T. Brown, Short distances, flat triangles, and Poisson limits, J. Appl. Probab. 15(1978), 815–825.

[8] E.V.Koroleva, Ya. Yu. Nikitin, U-max-statistics and limit theorems for perimeters and areas of random polygons, J. Multivariate Anal. 127(2014), 99–111.

[9] В.А. Зорич. Математический анализ. Часть 1 (2012).

[10] I. M. Yaglom, V.G. Boltyanskii. Convex figures. (Transl. by P.J. Kelly and L.F. Walton), New York: Holt, Rinehart and Winston, 1961.