Санкт-Петербургский государственный университет

НАРЫШКИН Петр Евгеньевич

Выпускная квалификационная работа

Фильтрации коммутативных подалгебр в тензорных произведениях

Уровень образования: Специалитет
Направление 01.05.01 “Фундаментальные математика и механика“
Образовательная программа СМ.5007. “Фундаментальные математика и механика“
Профиль: Теория функций

Научный руководитель: профессор математики математико-механического факультета, доктор физ.-мат. наук, профессор, Вершик А. М.

Рецензент: старший научный сотрудник лаборатории теории представлений и динамических систем ПОМИ РАН, кандидат физ.-мат. наук, Васильев Н. Н.

Санкт-Петербург
2019

Saint Petersburg State University

NARYSHKIN Petr

Qualification Research Paper

Filtrations of commutative subalgebras in tensor products

Education level: Specialitet
Specialty 01.05.01 “Fundamental Mathematics and Mechanics“
Educational program CM.5007. “Fundamental Mathematics and Mechanics“
Department: Function Theory

Advisor: Professor of mathematics at Mathematics and Mechanics Faculty, doctor of physical and mathematical sciences, professor, Vershik A. M.

Reviewer: Senior Researcher at Laboratory of Representation Theory and Dynamical Systems, PDMI RAS, candidate of physical and mathematical sciences, Vasiliev N. N.

Saint Petersburg
2019

1 Введение

В этом разделе мы кратко изложим результаты, использующиеся в нашей работе, а также ее мотивирующие. Все они взяты из [1]. В пункте 1 вводятся необходимые понятия и простейшие факты. В пункте 2 излагаются основные результаты работы [1] (в упрощенном виде).

1.1 Предварительные сведения

Пусть (X, μ) — пространство Лебега с непрерывной мерой, то есть пространство, изоморфное $\bmod 0$ отрезку $[0,1]$ с лебеговой мерой. Измеримым разбиением в общем случае называется разбиение (X, μ) на прообразы точек при измеримом отображении $f : X \to \mathbb{R}$. Обычным образом определяется фактор-пространство X/ξ и фактор-мера μ^ξ. Разбиение на отдельные точки обозначается через ε, а разбиение на два класса (полной и нулевой мера) — через ν.

Говорим, что разбиение ξ_1 больше разбиения ξ_2 ($\xi_1 \succ \xi_2$), если почти всякий элемент ξ_2 есть объединение элементов ξ_1. Если дано семейство разбиений ξ_α, то его супремумом ($\vee \xi_\alpha$) называется разбиение, состоящее из всевозможных пересечений элементов ξ_α; его инфимумом ($\wedge \xi_\alpha$) называется самое мелкое измеримое разбиение, элементы которого составлены из элементов ξ_α. Инфимум семейства разбиений (даже конечного) существует не всегда. Тем не менее, он корректно определен для убывающей последовательности измеримых разбиений. Статья [1] посвящена изучению вопроса изоморфности двух монотонных последовательностей разбиений.

Элемент (блок) разбиения ξ, содержащий точку x обозначается $\xi(x)$ (также $C_\xi(x)$ или просто $C(x)$), а условная мера на элементе C — через μ^C. Пусть ξ и η – два разбиения. Определим отображение $t : X \to X/\xi \times X/\eta$ формулой $x \mapsto (\xi(x), \eta(x))$; если t есть изоморфизм пространств (X, μ) и $(X/\xi \times X/\eta, \mu^\xi \times \mu^\eta)$, то ξ и η являются независимыми взаимно дополнительными разбиениями.

Говорят, что возрастающая (убывающая) последовательность разбиений $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ стремится к разбиению ξ, если $\vee\xi_n = \xi$ $(\wedge\xi_n = \xi)$. Убывающая последовательность измеримых разбиений ξ_n называется эргодической, если она стремится к тривиальному разбиению ν.

Пространство Лебега называется однородным, если группа его автоморфизмов действует на нем транзитивно; иными словами, однородные пространства – это пространства с чисто непрерывной мерой или с дискретной равномерной мерой из n атомов. Разбиение называется однородным, если почти все его элементы есть изоморфные однородные пространства, а фактор-пространство тоже однородно.

Несложно видеть, что любое однородное разбиение пространства Лебега с непрерывной мерой однозначно характеризуется числом атомов в типовом элементе (это число называется рангом разбиения), и числом атомов в фактор-пространстве.

Финитные инварианты убывающей однородной последовательности разбиений ξ_n сводятся к к набору чисел r_n — рангов разбиений ξ_n / ξ_{n-1}. Последовательность чисел $\{r_n\}$ называется типом последовательности разбиений. В нашей работе мы сосредоточим наше внимание на диадических последовательностях, то есть последовательностях, все ранги в которых равны 2 (в [1] результаты получены для последовательностей произвольного типа). Заметим, что определение диадичности включает в себя однородность последовательности разбиений.

Определение 1. Пусть (X_n, μ_n) — однородное пространство с мерой из r_n точек и $X = \prod X_n, \mu = \prod \mu_n$. Рассмотрим в этом пространстве последовательность разбиений ξ_n^0, элементы которых состоят из всех последовательностей $\{x_n\} \in X$, совпадающих начиная с n-й координаты. Последовательность разбиений типа $\{r_n\}$ называется стандартной, если она метрически изоморфна последовательности ξ_n^0.

Основной вопрос, рассматриваемый в статье [1] — это вопрос стандартности убывающей последовательности разбиений.

1.2 Критерий стандартности и пример нестандартной последовательности

1.2.1 Критерий стандартности

Введем еще несколько определений. Обозначим за T_n градуированное дерево, состоящее из $n+1$ уровня, каждая вершина которого (кроме вершин последнего уровня) имеет ровно два потомка на следующем уровне. Пусть D_n — группа автоморфизмов этого дерева. Действие D_n на T_n индуцирует действие D_n на пространстве путей в этом дереве, которое естественным образом изоморфно $G_n = \{0;1\}^n$. Рассмотрим теперь $(F(G_n, \{0;1\}), \rho_n)$ — метрическое пространство функций на G_n со значениями в $\{0;1\}$. Метрика ρ_n на нем — это метрика Хэмминга:

$$\rho_n(f,g) = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in G_n} |f(x) - g(x)|.$$

Действие D_n на G_n индуцирует, в свою очередь, действие D_n на этом метрическом пространстве. Обозначим через $(K_n, \mathfrak{r}_n)$ фактор-пространство по этому действию, а через l_n — проекцию на это фактор-пространство:

$$K_n = (F(G_n, \{0;1\}), \rho_n)/\, D_n;$$
$$l_n : F(G_n, \{0;1\}) \to K_n.$$

Пусть ξ_n — диадическая последовательность разбиений пространства X, и $A \subset X$ — измеримое множество. На почти каждом элементе $C \in \xi_n$ имеется диадическая структура, а значит определен элемент $l_n(A \cap C) \in K_n$.

Сформулируем, наконец, основной результат работы [1] (в упрощенном виде).

Теорема 1 (Критерий стандартности)**.** *Пусть ξ_n — диадическая эргодическая последовательность разбиений. Тогда эквивалентны:*

1. *ξ_n стандартна;*

2. *существует возрастающая последовательность измеримых разбиений η_n, являющаяся последовательностью независимых дополнений к ξ_n и стремящаяся к ε.*

3. *Для любого измеримого множества A найдется последовательность $k_n \in K_n$, такая, что*

$$\int\limits_{C \in \xi_n} \mathfrak{r}_n(l_n(A \cap C), k_n)\, d\mu^{\xi_n} \to 0.$$

Смысл последнего условия состоит в том, что при больших n пересечения A с элементами ξ_n близки с точностью до действия группы D_n.

1.2.2 Пример нестандартной последовательности

Приведем пример диадической нестандартной последовательности.

Пример 1. *Пусть $G = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2, G_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_2$. Рассмотрим действие группы G сдвигами на пространстве $F(G, \{0; 1\})$, снабженном продакт-мерой. Это действие порождает диадическую последовательность разбиений на орбиты групп $G_n < G$. Эта последовательность однородна, так как действие свободно почти всюду и эргодична, так как действие эргодично. Эта последовательность также нестандартна.*

Чтобы показать нестандартность приведенной последовательности, необходимо рассмотреть множество

$$A = \{x \in F(G, \{0; 1\}) \mid x(e) = 1\}$$

и доказать того, что оно не удовлетворяет третьему условию Теоремы 1. Полное доказательство приведено в [1].

2 Фильтрации C^*-алгебр

В этом разделе мы перейдем к изучению аналогичного вопроса, поставленного А. Вершиком, см., например, [2].

Пусть $A = A_0 > A_1 > A_2 > \ldots$ — убывающая последовательность (фильтрация) унитальных C^*-алгебр, причем

$$A_n = M_2(\mathbb{C}) \otimes A_{n+1}.$$

Назовем последнее условие диадичностью фильтрации.

Определение 2. Фильтрация C^*-алгебр называется стандартной, если она измоморфна фильтрации

$$\bigotimes_{\mathbb{N}} M_2(\mathbb{C}) > \mathbb{1}_2 \otimes \bigotimes_{\mathbb{N}} M_2(\mathbb{C}) > \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \bigotimes_{\mathbb{N}} M_2(\mathbb{C}) > \ldots,$$

где $\mathbb{1}_2$ — это единичная матрица в $M_2(\mathbb{C})$. Под $\bigotimes_{\mathbb{N}} M_2(\mathbb{C})$ мы имеем ввиду максимальное тензорное произведение (то есть замыкание алгебраического тензорного произведения относительно максимальной возможной C^*-нормы).

Глобальный интересующий нас вопрос — при каких условиях диадичная фильтрация стандартна. В нашей работе мы изучаем этот вопрос в частном случае, когда фильтрация C^*-алгебр получается из последовательности убывающих разбиений на пространстве с мерой с помощью опреации скрещенного произведения. Конкретно, пусть (X,μ) — пространство Лебега с непрерывной мерой, $\{\xi_n\}$ — диадическая последовательность измеримых разбиений, индуцированная действием группы $G=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{Z}_2$ на X (то есть элементы разбиения ξ_n есть орбиты действия подгруппы $\sum_{k=1}^{n}\mathbb{Z}_2$). Обозначим за $B=B_0$ алгебру $L^\infty(X)$, а за B_n — подалгебру функций из B, постоянных на элементах разбиения. Тем самым, диадическая последовательность измеримых разбиений задает фильтрацию коммутативных C^*-алгебр

$$B=B_0>B_1>B_2>\dots.$$

Заметим, что $B_n=B_{n+1}\oplus B_{n+1}$. Действие G на X индуцирует действие G на B. Обозначим это действие через α, а действие элемента $r\in G$ через α_r. Таким образом, определена динамическая система (B,G,α) и можно рассмотреть скрещенное произведение $B\rtimes_\alpha G$. Так как топология на G дискретна, то это произведение есть замыкание алгебры функций из G в B с конечным носителем относительно универсальной нормы (см., например [3, Chapter 2]). Умножение в этой алгебре определено следующим образом:

$$f\star g(s)=\sum_{r\in G}f(r)\alpha_r(g(r^{-1}s)).$$

На таком скрещенном произведении есть естественная фильтрация: если $A_0=B\rtimes_\alpha G$, то за A_n возьмем замыкание подалгебры функций из G в B_n, равных 0 на элементах, первые n координат которых отличны от $(0,0,\dots,0)$. Эта фильтрация диадическая, поскольку разложение $B_n=B_{n+1}\oplus B_{n+1}$ индуцирует разложение $B_n\rtimes\mathbb{Z}_2=M_2(B_{n+1})$, а значит и разложение $A_n=M_2(A_{n+1})=M_2(\mathbb{C})\otimes A_{n+1}$. Будем говорить, что фильтрация $\{A_n\}$ соответствует последовательности разбиений ξ_n.

Лемма 1. *Последовательность $\{\xi_n\}$ эргодическая тогда и только тогда, когда $\bigcap A_n=\mathbb{C}$, где $\{A_n\}$ — соответствующая фильтрация.*

Доказательство. Действительно, $\bigcap A_n$ есть алгебра функций из одной точки (элемента $(0,0,0,\dots) \in G$) в алгебру $\bigcap B_n$, что изоморфно $\bigcap B_n$. В свою очередь, $\bigcap B_n = \mathbb{C}$ по определению тогда и только тогда, когда $\{\xi_n\}$ эргодична. □

Лемма 2. *Две эргодические диадические последовательности разбиений изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны соответствующие фильтрации алгебр.*

Доказательство. Содержательная часть утверждения состоит в доказательстве изоморфности разбиений, если известна изоморфность фильтраций алгебр. Заметим, что по фильтрации $\{A_n\}$ можно получить алгебру B — для этого достаточно пересечь подалгебры диагональных матриц в разложениях $A = M_{2^n}(A_n)$ по всем n. Также, пересечение B с A_n есть подалгебра B_n в B. Таким образом, если изоморфны фильтрации алгебр в скрещенных произведениях, то изоморфны фильтрации коммутативных алгебр

$$B = B_0 > B_1 > B_2 > \dots.$$

Более того, изоморфизм сохраняет элемент $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1}$ в разложении $A_n = M_2(\mathbb{C}) \otimes A_{n+1}$. Это позволяет восстановить действие n-й группы $\mathbb{Z}_2$ на B. Все вместе они определяют действие всей группы G на B. Заметим, что по алгебре функций $B = L^\infty(X)$ однозначно восстанавливается X как пространство с σ-алгеброй, а действие группы G определяет на нем последовательность разбиений. Осталось заметить, что раз последовательность разбиений однородна, то действие группы G должно сохранять меру, но из эргодической теоремы следует, что существует ровно одна мера, такая, что действие группы G для нее эргодическое. Таким образом, по фильтрации алгебр в скрещенном произведении однозначно восстанавливается пространство с мерой (X, μ), а также последовательность убывающих разбиений на нем. □

Приведем для начала результат (см. [3, Theorem 2.61]), который нам понадобится в доказательстве Теоремы 2.

Утверждение 1 (Теорема Реберна)**.** *Пусть (B, G, α) — динамическая система, а D — C^*-алгебра, причем:*

(a) существует ковариантный гомоморфизм (j_B, j_G) системы (B, G, α) в алгебру множителей $M(D)$;

(b) для любого невырожденного представления (π, U) системы (B, G, α) найдется невырожденное представление L алгебры D, такое, что $\overline{L} \circ j_B = \pi$ и $\overline{L} \circ j_G = U$;

(c) линейные комбинации элементов вида $j_B(b)j_G(s)$, где $b \in B, s \in C_c(G)$ плотны в D.

Тогда существует изоморфизм

$$j : D \to B \rtimes_\alpha G,$$

такой, что

$$\overline{j} \circ j_B = i_B \quad \text{и} \quad \overline{j} \circ j_G = i_G,$$

где (i_B, i_G) — это канонический ковариантный гомоморфизм (B, G, α) в $M(B \rtimes_\alpha G)$.

В рассматриваемом нами случае все алгебры унитальные, поэтому совпадают со своими алгебрами множителей. Кроме того, группа G дискретна, поэтому условия теоремы достаточно проверять для отдельных элементов $s \in G$.

Сформулируем основной результат этой работы.

Теорема 2. *Последовательность разбиений $\{\xi_n\}$ стандартна тогда и только тогда, когда стандартна соответствующая фильтрация $\{A_n\}$.*

Доказательство. Лемма 2 уже доказана, поэтому достаточно доказать, что фильтрация, соответствующая стандартной последовательности разбиений стандартна. Для этого мы воспользуемся приведенной выше Теоремой Реберна, чтобы построить изоморфизм $B \rtimes_\alpha G \cong \bigotimes_{\mathbb{N}} M_2(\mathbb{C})$, после чего покажем, что он сохраняет структуру фильтрации. Поскольку пространство с мерой X изоморфно $\{0;1\}^{\mathbb{N}}$, то $B = L^\infty(X) = \bigotimes_{\mathbb{N}} L^\infty(\{0;1\})$ (где тензорное произведение опять же максимально). Каждое пространство $L^\infty(\{0;1\})$ вкладывается в $M_2(\mathbb{C})$ (как диагональная матрица), что определяет вложение $j_B : B \hookrightarrow \bigotimes_{\mathbb{N}} M_2(\mathbb{C})$. Группа $\mathbb{Z}_2$ вкладывается в $M_2(\mathbb{C})$ естественным образом:

$$0 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 1 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Это, в свою очередь, определяет вложение $j_G : G \hookrightarrow \bigotimes_{\mathbb{N}} M_2(\mathbb{C})$. Покажем, что (j_B, j_G) — ковариантный гомоморфизм системы (B, G, α) в алгебру $\bigotimes_{\mathbb{N}} M_2(\mathbb{C})$. Действительно, нетривиальный элемент группы $\mathbb{Z}_2$ действует на разложении $B_n = B_{n+1} \oplus B_{n+1}$ перестановкой координат, что в точности соответствует сопряжению соответствующей диагональной матрицы матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно,

$$j_G(s) j_B(f) j_G(s)^* = j_B(\alpha_s(f)).$$

Тем самым, доказан пункт (a) Теоремы Реберна

Теперь, пусть (π, U) — невырожденное ковариантное представление (B, G, α). Тогда оно задает набор представление (π_n, U_n) динамических систем $(L^\infty(\{0;1\}), \mathbb{Z}_2, \alpha|_{\mathbb{Z}_2})$, причем представления с разными индексами коммутируют между собой. Легко видеть, каждое такое представление задает представление π'_n алгебры $M_2(\mathbb{C})$, причем все они коммутируют между собой. Это означает, что определено и представление $L = \bigotimes_{\mathbb{N}} \pi'_n$ алгебры $\bigotimes_{\mathbb{N}} M_2(\mathbb{C})$ (здесь мы воспользовались универсальным свойством максимального тензорного произведения). По построению очевидно, что $L \circ j_B = \pi$ и $L \circ j_G = U$. Таким образом, доказано условие (b) Теоремы Реберна.

Наконец, алгебраическое тензорное произведение плотно в $\bigotimes_{\mathbb{N}} M_2(\mathbb{C})$, но любой конечный тензор есть линейная комбинация элементов вида $j_B(f) j_G(s)$, где $f \in B, s \in G$. Это доказывает пункт (c) Теоремы Реберна.

Таким образом, мы показали изоморфизм алгебр $B \rtimes_\alpha G$ и $\bigotimes_{\mathbb{N}} M_2(\mathbb{C})$. Из построения легко видеть, что этот изоморфизм сохраняет структуру диадической фильтрации, что завершает доказательство теоремы. $\square$

Список литературы

[1] Вершик, Анатолий // Теория убывающих последовательностей измеримых разбиений // Алгебра и анализ, 6:4 (1994), 1–68

[2] Вершик, Анатолий // Теория фильтраций подалгебр, стандартность и независимость // УМН, 72:2(434) (2017), 67–146

[3] Williams, Dana // Crossed Products of C^*-Algebras // AMS Mathematical Surveys and Monographs 134 (2007)