Санкт-Петербургский государственный университет

КЛЮЕВ Даниил Сергеевич

Выпускная квалификационная работа

Модули и бимодули Хариш-Чандры над квантованиями Клейновых особенностей

Уровень образования: Специалитет
Направление 01.05.01 “Фундаментальные математика и механика“
Образовательная программа СМ.5007. “Фундаментальные математика и механика“
Профиль: Алгебра и теория чисел

Научный руководитель: Доцент математико-механического факультета, доктор ф.м. наук, доцент, Петров Ф. В.

Рецензент: Профессор университета Торонто, кандидат ф.м. наук, профессор, Лосев И. В.

Санкт-Петербург
2019

Saint Petersburg State University

KLIUEV Daniil Sergeyevich

Qualification Research Paper

Harish-Chandra modules and bimodules over quantizations of Kleinian singularities

Education level: Specialist Degree program
Specialty 01.05.01 “Fundamental Mathematics and Mechanics“
Educational program CM.5007. “Fundamental Mathematics and Mechanics“
Department: Algebra and number theory

Advisor: Associate professor at Mathematics and Mechanics Faculty, doctor of physical and mathematical sciences, associate professor, Petrov F. V.

Reviewer: Professor at University of Toronto, candidate of physical and mathematical sciences, professor, Loseu I. V.

Saint Petersburg
2019

Содержание

1 Введение и мотивация

$\mathbb{Z}_{\geq 0}$-фильтрованная ассоциативная алгебра $\mathcal{A}$ с единицей называется почти коммутативной, если $\operatorname{gr}\mathcal{A}$ коммутативна. Пусть $\mathcal{A}$ — почти коммутативная алгебра с антиинволюцией τ, сохраняющей фильтрацию. Выберем число $d > 0$ такое, что $[A_{\leq i}, A_{\leq j}] \subset A_{\leq i+j-d}$.

Пусть M — фильтрованнный $\mathcal{A}$-модуль. Мы говорим, что M является (A, τ)-модулем Хариш-Чандры [2], если

1. $\operatorname{gr} M$ является конечнопорожденным $\operatorname{gr}\mathcal{A}$-модулем.

2. Для любого элемента $a \in \mathcal{A}_{\leq i}$ с $\tau(a) = -a$ выполнено $aM_{\leq j} \subset M_{\leq i+j-d}$.

Приведем пример. Пусть $\mathcal{B}$ — почти коммутативная алгебра, $\mathcal{A} = \mathcal{B}\otimes\mathcal{B}^{opp}$, $\tau(b_1\otimes b_2) = b_2\otimes b_1$. Тогда $(\mathcal{A}, \tau)$-модуль Хариш-Чандры называется бимодулем Хариш-Чандры над $\mathcal{B}$.

Пример. Свяжем это определение с классическими модулями Хариш-Чандры. Предположим, что $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathcal{A} = U(\mathfrak{g})$ — ее универсальная обертывающая алгебра с естественной фильтрацией. Пусть τ — антиинволюция алгебры $\mathfrak{g}$, тогда $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}^{-\tau}$ — редуктивная подалгебра в $\mathfrak{g}$. Отображение τ продолжается до антиинволюции алгебры $\mathcal{A}$, которую мы тоже обозначим за τ. Можно показать, что $(\mathcal{A}, \tau)$-модуль Хариш-Чандры это то же самое, что $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-модуль Хариш-Чандры, то есть конечнопорожденный $\mathfrak{g}$-модуль с локально конечным действием $\mathfrak{k}$.

Мы будем работать в следующей ситуации.

Определение 1.1. Пусть A — градуированная алгебра. Фильтрованной деформацией алгебры A называется пара $(\mathcal{A}, \chi)$, где $\mathcal{A}$ — фильтрованная алгебра, χ — изоморфизм градуированных алгебр между $\operatorname{gr} \mathcal{A}$ и A.

Пусть A — градуированная Пуассонова алгебра, в которой степень скобки Пуассона равна $-d$, $(\mathcal{A}, \chi)$ — некоммутативная фильтрованная деформация A. Пусть выполнено $[\mathcal{A}_{\leq i}, \mathcal{A}_{\leq j}] \subset \mathcal{A}_{\leq i+j-d}$. Коммутатор на $\mathcal{A}$ задает скобку Пуассона на $\operatorname{gr} \mathcal{A}$ степени $-d$.

Определение 1.2. Если χ переводит эту скобку Пуассона в скобку Пуассона на A мы говорим, что $(\mathcal{A}, \chi)$ — квантование A.

Нас будут интересовать квантования Клейновых особенностей: пусть Γ — конечная подгруппа в $\mathrm{SL}(2)$, $\mathcal{A}$ — квантование алгебры $\mathbb{C}[u, v]^{\Gamma}$. В разделе 2.2 мы классифицируем классы сопряженности антиинволюций τ алгебры $\mathcal{A}$. Далее мы будем изучать $(\mathcal{A}, \tau)$-модули Хариш-Чандры и бимодули Хариш-Чандры над $\mathcal{A}$.

Опишем мотивацию для изучения бимодулей Хариш-Чандры над квантованиями Клейновых особенностей.

Функторы ограничения, которые мы опишем далее, связывают классические бимодули Хариш-Чандры над универсальной обертывающей алгеброй $U(\mathfrak{g})$ и бимодули Хариш-Чандры над квантованиями Клейновых особенностей.

Рассмотрим нильпотентный конус $\mathcal{N}$ в полупростой алгебре Ли $\mathfrak{g}$. В статье [1] доказано, что любое квантование $\mathbb{C}[\mathcal{N}]$ получается как фактор универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$.

Перейдем к функтору ограничения. Выберем в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ $\mathfrak{sl}_2$-тройку $\{E, F, H\}$. Пусть $S = E + \ker \operatorname{ad} F$ — слайс Слодови. Элементу E можно сопоставить [6] алгебру $\mathcal{W}$ — некоторую фильтрованную деформацию алгебры $\mathbb{C}[S]$. В статье [3] построен функтор ограничения, действующий из категории $U(\mathfrak{g})$-бимодулей Хариш-Чандры в Q-эквивариантные $\mathcal{W}$-бимодули Хариш-Чандры, где Q — это централизатор $\{E, F, H\}$. Предположим, что диаграмма Дынкина Φ группы G не имеет кратных ребер. В этом случае слайс Слодови для орбиты коразмерности два в нильпотентном конусе вместе с естественным отображением $S \mapsto \mathfrak{g}/G \cong \mathfrak{h}/W$ является [7] универсальной коммутативной деформацией алгебры $\mathbb{C}[x, y]^{\Gamma}$, где Γ — конечная подгруппа $\mathrm{SL}(2)$, соответствующая Φ.

Пусть τ — антиинволюция алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}^{-\tau}$ — соответствующая редуктивная подалгебра. Выберем в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ $\mathfrak{sl}_2$-тройку $\{E, F, H\}$ такую, что $\tau E = E$, $\tau F = F$, $\tau H = -H$. Другой функтор ограничения, более общий, построенный в [2] переводит $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-модуль Хариш-Чандры в $(\mathcal{W}, \tau)$-модуль Хариш-Чандры, где τ — антиинволюция алгебры $\mathcal{W}$, индуцированная с одноименной антиинволюции алгебры $\mathfrak{g}$.

Таким образом, квантования алгебры функций на нильпотентном конусе связаны с Клейновыми особенностями. Также представляет интерес изучение квантований алгебр функций нормализаций нильпотентных орбит.

Кроме того с отображением τ связана следующая конструкция. Если отображение $-\tau$ коммутирует со стандартным комплексным сопряжением на $\mathfrak{g}$, их композиция дает антилинейную инволюцию алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Неподвижные точки этой антилинейной инволюции образуют вещественную форму алгебры $\mathfrak{g}$.

Определение 1.3. Пусть V — это $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-модуль Хариш-Чандры. Мы говорим, что V унитаризуем, если на нем можно ввести эрмитову форму такую, что вещественные точки алгебры $\mathfrak{g}$ действуют на V эрмитовыми операторами.

Определение унитаризуемого модуля обобщается на $(\mathcal{A}, \tau)$-модули Хариш-Чандры:

Определение 1.4. Предположим, что на почти коммутативной алгебре $\mathcal{A}$ с антиинволюцией τ введена вещественная форма r такая, что $r\tau = \tau r$. Пусть V — это $(\mathcal{A}, \tau)$-модуль ХЧ. Мы говорим, что V унитаризуем, если на V можно ввести положительно определенную эрмитову форму такую, что для любых $a \in \mathcal{A}$, $u, v \in V$ выполнено $(au, v) = (u, r\tau(a)v)$.

Есть ожидание, что при функторе ограничения унитаризуемые модули переходят в унитаризуемые. Это мотивирует изучение унитаризуемых $(\mathcal{A}, \tau)$-модулей Хариш-Чандры и $\mathcal{A}$-бимодулей Хариш-Чандры.

Опишем структуру работы.

Во второй главе данной работы мы классифицируем унитаризуемые неприводимые $(\mathcal{A},\tau)$-модули Хариш-Чандры для одного выбора τ в случае, когда $\mathcal{A}$ — фильтрованная деформация алгебры $\mathbb{C}[x,y]^{C_n}$, где $C_n = \{\begin{pmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & \varepsilon^{-1}\end{pmatrix} \mid \varepsilon^n = 1\}$ — циклическая подгруппа порядка n в $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Также мы классифицируем инволюции, антиинволюции и вещественные формы на $\mathcal{A}$ с точностью до сопряжения.

В третьей главе мы начинаем изучение неприводимых унитаризуемых $\mathcal{A}$-бимодулей Хариш-Чандры. Сначала мы напоминаем доказательство классификации унитаризуемых модулей для деформаций алгебры $\mathbb{C}[x,y]^{C_2}$. Во втором параграфе мы изучаем, когда на регулярном бимодуле, то есть на самой алгебре $\mathcal{A}$, рассматриваемой как бимодуль, можно ввести инвариантную форму.

Напомним [10], что деформации алгебры $\mathbb{C}[x,y]^{C_n}$ находятся во взаимнооднозначном соответствии с многочленами степени n с фиксированным старшим коэффициентом: многочлену $P(x)$ соответствует алгебра с образующими e,f,h и соотношениями $[h,e]=ne$, $[h,f]=-nf$, $ef=P(h)$, $fe=Q(h)$, где $Q(x)=P(x+n)$.

Пусть $\mathcal{A}$ — деформация алгебры $\mathbb{C}[x,y]^{C_n}$ с параметром $P(x)$. В случае, когда $P(x)=\overline{P}(n-x)$, существует антилинейная инволюция r на $\mathcal{A}$, которая устроена следующим образом: $r(e)=-f$, $r(f)=-e$, $r(h)=-h$. Мы будем изучать унитаризуемость бимодулей Хариш-Чандры для вещественной формы $r\otimes r$ на алгебре $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}^{op}$

Многочленам $P(x)$ и $-P(x)$ соответствуют изоморфные деформации, но этот изоморфизм не коммутирует с r. То есть $P(x)$ и $-P(x)$ задают различные вещественные формы. Таким образом, знак старшего члена $P(x)$ влияет на классификацию унитаризуемых бимодулей.

Основной результат можно сформулировать следующим образом:

Теорема 1.5. В этих условиях

1. Если у $P(x)$ есть хотя бы три корня α таких, что $0<\operatorname{Re}\alpha<n$, то регулярный бимодуль унитаризуем.

2. Предположим что $n=2m$ и знак старшего члена $P(x)$ равен $(-1)^m$. Тогда

   (a) Если у $P(x)$ есть корень α такой, что $0<\operatorname{Re}\alpha<n$, то регулярный бимодуль унитаризуем.

(b) Если для любого корня α многочлена $P(x)$ выполнено $\operatorname{Re}\alpha \notin [0,n]$, то регулярный бимодуль не унитаризуем.

В третьем параграфе мы напоминаем про конструкции, которые будут полезны для рассмотрения общих бимодулей Хариш-Чандры над $\mathcal{A}$: понятие двойственного бимодуля Хариш-Чандры, конструкция представления Данкла.

2 Модули Хариш-Чандры

2.1 Неприводимые модули для некоммутативных деформаций типа A

Напомним, что некоммутативная деформация алгебры $A = \mathbb{C}[x,y]^{C_n}$ задается образующими e, f, h и соотношениями $[h,e] = nce$, $[h,f] = -ncf$, $ef = P(h)$, $fe = Q(h)$, где c — произвольная ненулевая константа, P — многочлен степени n со старшим коэффициентом 1, $Q(h) = P(h+nc)$.

Пусть $\mathcal{A}$ — некоммутативная деформация алгебры $\mathbb{C}[x,y]^{C_n}$. В этом разделе мы классифицируем неприводимые $\mathcal{A}$-модули, в которых h действует локально конечно. При естественном отождествлении $\operatorname{gr}\mathcal{A} \cong A$ квантования будут иметь $c = 1$.

Пусть V — такой $\mathcal{A}$-модуль. Так как h действует локально конечно, мы можем найти в V собственный вектор оператора h: $hv = \lambda v$. Легко видеть, что линейная оболочка векторов v, $e^k v$, $f^k v$, $k \in \mathbb{N}$ является $\mathcal{A}$-подмодулем, поэтому она совпадает с V.

Обозначим за V_μ собственное пространство оператора h в V, соответствующее собственному числу μ. Очевидно, $e^k v$ лежит в $V_{\lambda+kn}$, f^k лежит в $V_{\lambda-kn}$.

Пусть u лежит в V_μ. Тогда $efu = P(\mu)u$, $feu = Q(\mu)u = P(\mu+n)u$. Предположим, $P(\mu) = 0$. Тогда линейная оболочка $f^k u$, $k > 0$, является $\mathcal{A}$-подмодулем, строго содержащемся в V. Следовательно, $fu = 0$. Аналогично, если $Q(\mu) = 0$, то $eu = 0$.

Из этого несложно следует, что V раскладывается в прямую сумму $\bigoplus_{k=0}^{k_1} \mathbb{C} f^k v \oplus \bigoplus_{k=1}^{k_2} \mathbb{C} e^k v$, где k_1 — это наибольшее неотрицательное число такое, что $P(\lambda - nk_1) = 0$, k_2 — наименьшее неотрицательное число такое, что $Q(\lambda + nk_2) = 0$ (бесконечность, если такого числа не существует). Такое представление однозначно задает структуру $\mathcal{A}$-модуля на V.

Пусть наоборот числа λ, k_1, k_2 удовлетворяют этим условиям. Несложно видеть, что на прямой сумме $\bigoplus\limits_{k=0}^{k_1} \mathbb{C} f^k v \oplus \bigoplus\limits_{k=1}^{k_2} \mathbb{C} e^k v$ можно ввести структуру $\mathcal{A}$-модуля, который окажется неприводимым. Следовательно, неприводимые $\mathcal{A}$-модули находятся во взаимно-однозначном соответствии с арифметическими прогрессиями с разностью n, начинающимися и заканчивающимися в корне многочлена P (или уходящими в бесконечность).

2.2 Классификация антиинволюций и вещественных форм.

Инволюции и антиинволюции Пусть s — инволюция некоммутативной деформации $\mathcal{A}$. В таком случае $\operatorname{gr} s$ — инволюция алгебры $\mathbb{C}[x,y]^\Gamma$, сохраняющая скобку Пуассона. В случае, если s — антиинволюция, $\operatorname{gr} s$ является инволюцией, меняющей знак скобки Пуассона. Если s — полулинейная инволюция, то $\operatorname{gr} s$ — полулинейная инволюция, сохраняющая скобку Пуассона. Любой полулинейный автоморфизм $\mathbb{C}[x,y]^\Gamma$ можно представить как композицию стандартного сопряжения на $\mathbb{C}[x,y]^\Gamma$ и автоморфизма над $\mathbb{C}$.

Лемма 2.1. Любой градуированный автоморфизм алгебры $\mathbb{C}[x,y]^G$ является сужением автоморфизма алгебры $\mathbb{C}[x,y]$, то есть задается матрицей из $\mathrm{GL}(2)$.

Доказательство. Множество особых точек имеет коразмерность два в нормальном многообразии $\operatorname{Specm} \mathbb{C}[x,y]^\Gamma$, поэтому по теореме Хартогса автоморфизмы $\mathbb{C}^2/\Gamma$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с автоморфизмами открытого подмножества гладких точек.

Так как точка $(0,0)$ имеет вещественную коразмерность четыре в $\mathbb{C}^2$, многообразие $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ односвязно. Следовательно, отображение проекции p из $\mathbb{C}^2$ в $\mathbb{C}^2/\Gamma$ является комплексно-аналитическим универсальным накрытием на множестве гладких точек, поэтому по автоморфизму ϕ подмножества гладких точек мы получаем комплексно-аналитический автоморфизм ψ многообразия $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Заметим, что на многообразиях $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0\}$ и $(\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0\})/\Gamma$ естественным образом действует группа $\mathbb{C}^\times$. Действие $\mathbb{C}^\times$ на алгебраических функциях локально конечномерно. Обратно: если действие $\mathbb{C}^\times$ на голоморфную функцию f на многообразии $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0\}$ локально конечномерно, то функция f алгебраическая.

По условию автоморфизм ϕ коммутирует с действием $\mathbb{C}^\times$. То есть для любого $t \in \mathbb{C}^\times$ имеем $\phi = t \circ \phi \circ t^{-1}$. Следовательно, для любого $t \in \mathbb{C}^\times$ автоморфизм $t \circ \psi \circ t^{-1}$ является поднятием автоморфизма ϕ. Так как группа $\mathbb{C}^\times$ связна, отсюда несложно вывести, что $\psi = t \circ \psi \circ t^{-1}$ для любого $t \in \mathbb{C}^\times$.

Пусть f — алгебраическая функция на $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Тогда $f \circ \psi$ — комплексно-аналитическая функция. Так как действие $\mathbb{C}^\times$ на f было локально конечномерным и автоморфизм ψ коммутирует с действием $\mathbb{C}^\times$, действие $\mathbb{C}^\times$ на функцию $f \circ \psi$ локально конечномерно. Значит, $f \circ \psi$ — алгебраическая функция. Отсюда следует, что ψ — алгебраическое отображение.

Следовательно, мы получили алгебраический автоморфизм многообразия $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$. По теореме Хартогса мы получаем отсюда автоморфизм $\mathbb{C}^2$. Утверждение доказано. $\square$

Из леммы получаем, что группа автоморфизмов алгебры $\mathbb{C}[x,y]^G$ изоморфна $N_{\mathrm{GL}(2)}(G)/G$. Несложно видеть, что инволюция сохраняет скобку Пуассона, если определитель соответствующей матрицы равен 1, и меняет знак скобки Пуассона, если определитель равен -1. Заметим, что в случае $G = C_n$, $n > 2$ группа $N(G)$ состоит из элементов вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$.

Теперь несложно выделить элементы порядка 2 в группе $N_{\mathrm{GL}(2)}(G)/G$: если элемент представляется матрицей первого вида, условие будет $a^{2n} = a^2 d^2 = 1$, если матрицей второго вида, получим $(bc)^n = (bc)^2 = 1$. В зависимости от четности получаем три или пять классов сопряженности элементов порядка 2:

1. $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}$, $\varepsilon^n = -1$.

2. $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon^{-1} \end{pmatrix}$, $\varepsilon^{2n} = 1$. Если n четно, получаем два класса сопряженности: $\varepsilon^n = 1$ и $\varepsilon^n = -1$.

3. $\begin{pmatrix} 0 & s \\ s^{-1} & 0 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{C}^\times$.

4. Такие элементы есть только в случае четного n: $\begin{pmatrix} 0 & s \\ -s^{-1} & 0 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{C}^\times$.

У элементов второго и третьего типа определитель равен -1.

Поймем, какие автоморфимы задают эти матрицы. Обозначим за $e = x^n, f = y^n, h = xy$ стандартные образующие алгебры $\mathbb{C}[x, y]^{C_n}$.

1. Получаем инволюцию $e \mapsto -e$, $f \mapsto -f$, $h \mapsto h$.

2. Получаем инволюцию, меняющую знак скобки Пуассона $e \mapsto \varepsilon^n e$, $f \mapsto (-\varepsilon)^n f$, $h \mapsto -h$.

3. Получаем инволюцию, меняющую знак скобки Пуассона $e \mapsto s^{-n} f$, $f \mapsto s^n e$, $h \mapsto h$. Введя новое обозначение $t = s^n$, получаем отображение $e \mapsto (-1)^n t^{-1} f, f \mapsto te$, $h \mapsto h$

4. Получаем инволюцию $e \mapsto s^{-n} f$, $f \mapsto s^n e$, $h \mapsto -h$, то есть $e \mapsto t^{-1} f$, $f \mapsto te$, $h \mapsto -h$.

Рассмотрим квантование $\mathcal{A}$ алгебры $\mathbb{C}[x, y]^{C_n}$. В $\mathcal{A}$ есть стандартные образующие e, f, h.

Пересечение $\mathcal{A}_{\leq 2}$ и весового пространства оператора $\operatorname{ad} h$ веса 0 имеет базис из двух элементов: 1, h. Пересечение $\mathcal{A}_{\leq n}$ и весового пространства оператора $\operatorname{ad} h$ веса $\pm n$ одномерно и порождено e или f.

Поймем, когда (анти)инволюцию каждого типа можно поднять в $\mathcal{A}$ и сохраняется ли сопряженность двух (анти)инволюций при подъеме в $\mathcal{A}$.

1. Рассмотрим отображение $e \mapsto -e$, $f \mapsto -f$, $h \mapsto h$. Несложно видеть, что в фильтрованной деформации стандартная образующая h переходит в себя. Следовательно, веса относительно присоединного действия h сохраняются. Отсюда несложно видеть, что стандартные образующие e, f меняют знак. Такая инволюция есть в любой деформации.

2. Поменяем стандартную образующую h так, чтобы при антиинволюции она меняла знак. Рассуждением с весовыми пространствами получаем, что e, f переходят в $\varepsilon^n e$, $(-\varepsilon)^n f$. Такие антиинволюции существуют при $P(x) = (-1)^n Q(-x)$. При нечетном n две антиинволюции сопряжены посредством отображения $e \mapsto -f$, $f \mapsto e$, $h \mapsto -h$.

3. Легко видеть, что h переходит в себя. Рассуждением с весовыми пространствами получаем, что $e \mapsto (-1)^n t^{-1} f, f \mapsto te$. Такая антиинволюция существует в любой деформации. Все такие антиинволюции сопряжены при помощи автоморфизма $h \mapsto h$, $e \mapsto te$, $f \mapsto t^{-1} f$.

4. Аналогично меняя h, применяя рассуждения с весовыми пространствами и применяя автоморфизм получаем, что h переходит в $-h$, e и f меняются местами. Такая инволюция существует при $P(x) = Q(-x)$.

Вещественные формы   Попытаемся теперь классифицировать вещественные формы на квантованиях. Вещественные формы находятся во взаимно однозначном соответствии с антилинейными инволюциями. Присоединенное градуированное от антилинейной инволюции — антилинейная инволюция. Композиция антилинейной инволюции и стандартного комплексного сопряжения на $\mathbb{C}[x,y]^\Gamma$ является автоморфизмом алгебры $\mathbb{C}[x,y]^\Gamma$. Следовательно, антилинейные инволюции на $\mathbb{C}[x,y]^\Gamma$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с элементами $A \in N_{\mathrm{GL}(2)}(\Gamma)/\Gamma$ такими, что $A\overline{A} \in \Gamma$.

Рассмотрим автоморфизм алгебры $\mathbb{C}[x,y]^\Gamma$, который задается матрицей $B \in N_{\mathrm{GL}(2)}(\Gamma)$. Если мы сопряжем антилинейную инволюцию этим автоморфизмом, матрица A перейдет в матрицу $B^{-1}A\overline{B}$.

Как мы помним, элементы $N_{\mathrm{GL}(2)}(\Gamma)$ имеют вид либо $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, либо $\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$. Отсюда получаем классификацию антилинейных инволюций.

1. При $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ имеем $A\overline{A} = \begin{pmatrix} a\overline{a} & 0 \\ 0 & d\overline{d} \end{pmatrix}$. Такая матрица принадлежит Γ тогда и только тогда, когда $|a| = |d| = 1$. Несложно видеть, что все такие матрицы лежат в одной орбите действия группы автоморфизмов.

2. При $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ получаем условие $(b\overline{c})^n = 1$. При нечетном n получается одна орбиты, при четном n получаем две орбиты: $(b\overline{c})^{\frac{n}{2}} = 1$ и $(b\overline{c})^{\frac{n}{2}} = -1$.

Несложно видеть, что антиинволюции, которые были сопряжены, остаются сопряженными про подъеме в квантование. Таким образом, можно выбрать по одному представителю от каждой орбиты. Получим матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и в случае четного n матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$, где $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Отсюда имеем вещественные формы

1. $e \mapsto e$, $f \mapsto f$, $h \mapsto h$. Такая вещественная форма существует при $P(x) = \overline{P}(x)$.

2. $e \mapsto f$, $f \mapsto e$, $h \mapsto h$. Эта форма будет основным объектом нашего интереса. Нам будет удобнее перейти к образующим $-e, f, ih$. Мы получим антилинейную инволюцию $e \mapsto -f$, $f \mapsto -e$, $h \mapsto -h$. Такая антилинейная инволюция существует при $P(x) = \overline{Q}(-x)$.

3. $e \mapsto f$, $f \mapsto e$, $h \mapsto \varepsilon h$. Такая форма существует при $P(x) = \overline{Q}(\varepsilon x)$.

Обозначим за r вещественную структуру, которая меняет знак h, переводит f в $-e$ и e в $-f$.

Обозначим за τ антиинволюцию, которая оставляет e на месте, переводит f в $(-1)^n f$ и меняет знак h.

При четном n отображения r и τ коммутируют, поэтому мы можем изучать, какие неприводимые $(\mathcal{A}, \tau)$-модули Хариш-Чандры унитаризуемы. При нечетном n отображения r и τ не коммутируют.

Классификация неприводимых $(\mathcal{A}, \tau)$-модулей Хариш-Чандры. Несложно видеть, что на $(\mathcal{A}, \tau)$-модуле Хариш-Чандры h действует локально конечномерно. Следовательно, любой неприводимый $(\mathcal{A}, \tau)$-модуль Хариш-Чандры совпадает с одним из модулей V из предыдущего пункта.

При четном n выполнено обратное следствие. Пусть V — неприводимый модуль из предыдущего пункта. Тогда фильтрация $V_{\leq n} = \oplus_{|\lambda| \leq n} V_\lambda$ превращает V в модуль Хариш-Чандры.

При нечетном n мы видим, что на $\operatorname{gr} V$ элементы f и h действуют нулем. Это исключает из рассмотрения модули, в которых вес весовых пространств h не ограничен снизу. Если же вес ограничен снизу, нам подойдет фильтрация $V_{\leq n} = \oplus_{\lambda \leq n} V_\lambda$.

Следовательно, мы классифицировали неприводимые $(\mathcal{A}, \tau)$-модули Хариш-Чандры с точностью до изоморфизма $\mathcal{A}$-модулей.

2.3 Когда можно ввести унитарную структуру?

Пусть V — неприводимый $(\mathcal{A}, \tau)$-модуль Хариш-Чандры. Попытаемся выяснить, когда на нем можно ввести инвариантную положительно определенную эрмитову форму $(\cdot, \cdot)$, согласованную с вещественной структурой r.

Достаточно проверять инвариантность для u и v из собственных подпространств оператора h. Пусть u лежит в V_λ, v лежит в V_μ.

Тогда $(hu, v) = \lambda(u, v)$, $(u, hv) = \overline{\mu}(u, v)$. Пусть $v = u$. Тогда мы можем поделить равенство $(hu, u) = (u, hu)$ на (u, u) и получить $\lambda = \overline{\lambda}$. Следовательно, все собственные числа оператора h вещественны.

Пусть теперь $\lambda \neq \mu$. Тогда мы можем поделить равенство $(hu, v) = (u, hv)$ на $\lambda - \mu$ и получить $(u, v) = 0$.

Обратно, этих условий достаточно для выполнения равенства $(hu, v) = (u, hv)$.

Посмотрим теперь на равенство $(eu, v) = (u, fv)$. Если $\lambda + n \neq \mu$, то с обеих сторон стоит 0. Если $\lambda + n = \mu$, то мы можем считать, что $v = eu$

и получаем равенство $(eu, eu) = (u, feu) = Q(\lambda)(u, u)$. Таким образом, мы доказали следующую лемму:

Лемма 2.2. Пусть V — неприводимый $(\mathcal{A}, \tau)$-модуль Хариш-Чандры. Тогда на V можно ввести инвариантную эрмитову форму тогда и только тогда, когда $Q(\lambda) > 0$ для всех собственных чисел λ оператора h, кроме наибольшего.

3 Бимодули Хариш-Чандры

3.1 Случай $\mathfrak{sl}_2$

Связь с унитарными представлениями группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Рассмотрим бесконечномерное неприводимое унитарное представление V группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, рассматриваемой как вещественной группы. Такие представления однозначно соответствуют унитаризуемым $(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}), SU(2))$-модулям, то есть $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$-модулям V с локально конечномерным действием $\mathfrak{su}_2$ и инвариантной положительно определенной эрмитовой формой $(\cdot, \cdot)$. Инвариантность значит, что $(xu, v) + (u, xv) = 0$ для $x \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, $u, v \in V$.

Алгебру $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ можно реализовать как вещественную форму $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, соответствующую антилинейной инволюции $(a, b) \mapsto (-b^*, -a^*)$. Это позволяет нам ввести структуру $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$-модуля на V:

$$(a, b).v = \frac{1}{2}((a - b^*, b - a^*) + (a + b^*, a^* + b)).v = \frac{1}{2}((a - b^*)v - i(ia + ib^*)v).$$

Так как действие $\mathfrak{su}_2$ было локально конечным, то действие элементов вида (a, a), $a \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ локально конечномерное. Перепишем условие инвариантности:

$$\begin{gathered}2((a, b).u, v) = ((a - b^*)u, v) - i((ia + ib^*)u, v) = \\ = -(u, (a - b^*)v) - i(u, (ia + ib^*)v) = (u, (-a + b^*)v + i(ia + ib^*)v) = 2(u, (b^*, a^*)v)\end{gathered}$$

Алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ и $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})^{op}$ изоморфны посредством отображения $(a, b) \mapsto (a, -b)$. Таким образом мы получаем $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$-бимодуль V такой, что присоединенное действие локально конечномерное. Условие инвариантности переписывается как

$$(au + ub, v) = ((a, b).u, v) = (u, (-b^*, -a^*).v) = -(u, b^*v + va^*).$$

Переходя к универсальной обертывающей алгебре получаем унитаризуемый бимодуль Хариш-Чандры V над алгеброй $U(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$. Перепишем определение унитаризуемости в терминах стандартных образующих e, f, h. Напомним, что $h^* = h, e^* = f, f^* = e$. Имеем следующие соотношения:

$$
\begin{array}{ll}
(eu, v) = -(u, vf) & (ue, v) = -(u, fv) \\
(hu, v) = -(u, vh) & (uh, v) = -(u, hv) \\
(fu, v) = -(u, ve) & (uf, v) = -(u, ev).
\end{array}
$$

Легко видеть, что этот набор условий равносилен следующему набору:

$$([e,u],v) = (u,[f,v]) \quad ([h,u],v) = (u,[h,v]) \qquad ([f,u],v) = (u,[e,v]) \tag{1}$$

$$(eu, v) = (u, -vf) \tag{2}$$

Оставшееся соотношение для h следует из равенства $[e,f] = h$.

Пусть $\mathcal{A}$ — некоммутативная фильтрованная деформация алгебры $\mathbb{C}[u,v]^{C_2}$, то есть центральная редукция $U(\mathfrak{sl}_2)$: $\mathcal{A} = U(\mathfrak{sl}_2)/(ef + fe + \frac{h^2}{2} - \frac{\lambda^2}{2} - \lambda)$. Мы хотим классифицировать унитаризуемые неприводимые $\mathcal{A}$-бимодули.

Классификация неприводимых $\mathcal{A}$-бимодулей — известный результат [11]:

1. $\lambda \in \mathbb{Z}$. Можно считать, что $\lambda \geq -1$. В случае $\lambda = -1$ имеем один неприводимый бимодуль, саму алгебру. В случае $\lambda \geq 0$ у $\mathcal{A}$ есть конечномерное неприводимое представление V размерности $\lambda + 1$. Обозначим за $\mathfrak{m}$ его аннулятор. Получается два неприводимых бимодуля ХЧ: $\mathcal{A}/\mathfrak{m} \cong V \otimes V^*$ и $\mathfrak{m}$.

2. $\lambda \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$. В случае $\lambda = -\frac{1}{2}$ алгебру $\mathcal{A}$ можно получить как инварианты алгебры Вейля под действием $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Получится два неприводимых бимодуля ХЧ: $\mathcal{A}$ и вторая однородная компонента. В оставшихся случаях получается эквивалентная категория бимодулей, и значит неприводимых бимодулей тоже два.

3. В оставшихся случаях имеем один неприводимый бимодуль, саму алгебру.

Сначала мы рассмотрим, какие условия на форму дают соотношения

$$([e,u],v) = (u,[f,v]) \quad ([h,u],v) = (u,[h,v]) \quad ([f,u],v) = (u,[e,v])$$

После этого мы рассмотрим последнее условие $(eu, v) = -(u, vf)$.

Присоединенное действие $\mathfrak{sl}(2)$ на V локально конечномерно, поэтому V раскладывается в прямую сумму неприводимых $\mathfrak{sl}(2)$-модулей. Нетрудно проверить, что во всех рассматриваемых случаях никакие два неприводимых модуля не будут изоморфны.

Посмотрим, что значат условия инвариантности эрмитовой формы для данного неприводимого $\mathfrak{sl}_2$-модуля V_k размерности k. Для присоединенного действия условия следующие: $([e, u], v) = (u, [f, v])$, $([h, u], v) = (u, [h, v])$, $([f, u], v) = (u, [e, v])$. Пусть модуль U_k получен из V_k следующим автоморфизмом алгебры $\mathfrak{sl}_2$: $e \leftrightarrow -f, h \mapsto -h$. Тогда $(\cdot, \cdot)$ — инвариантная невырожденная полуторалинейная форма на $V_k \times U_k$. Так как V_k и U_k изоморфны, такая форма единственна с точностью до умножения на вещественный скаляр. Положительно определенная форма существует: на тавтологическом представлении можно ввести положительно определенную эрмитову форму, все остальные неприводимые представления можно получить как симмметрическую степень тавтологического.

Из этих рассуждений также следует, что неприводимые представления различных размерностей ортогональны.

Осталось условие

$$(eu, v) = (u, -vf) \tag{3}$$

Посмотрим, как оно связывает различные неприводимые модули.

Утверждение 3.1. Если (3) выполнено для пары $\operatorname{ad} e(u), v$, то оно выполнено для пары $u, \operatorname{ad} f(v)$ и наоборот.

Доказательство. Проверим следствие в одну сторону:

$$\begin{multline}(eu, \operatorname{ad} f(v)) = (\operatorname{ad} e(eu), v) = (e \operatorname{ad} e(u), v) = \\ -(\operatorname{ad} e(u), fv) = -(u, \operatorname{ad} f(fv)) = -(u, f \operatorname{ad} f(v)) \tag{4}\end{multline}$$

Следствие в другую сторону выполнено аналогично. □

Следствие 3.2. Если (3) выполнено, когда v — вектор старшего веса, u — произвольный вектор то оно верно для любых векторов u, v.

Доказательство. Пусть v — не вектор старшего веса. Тогда мы можем представить v в виде $\operatorname{ad} f(v_1)$. По утверждению мы можем проверять (3) для пары $\operatorname{ad} e(u), v_1$. Веса в этой паре больше, и повторив так несколько раз мы дойдем до вектора v старшего веса. □

Заметим, что если u — вектор старшего веса k в неприводимом представлении, то eu — вектор старшего веса $k+2$ в неприводимом представлении: элемент eu является однородным относительно действия $\operatorname{ad} h$ и выполнено равенство $[e, eu] = 0$. Аналогичное утверждение верно для векторов младшего веса.

Пусть U_k — неприводимый $\mathfrak{sl}_2$-модуль старшего веса $2k$, где k — целое или полуцелое число, $U = U_1$ — регулярное представление. Тогда $U \otimes U_k$ изоморфно $U_{k-1} \oplus U_k \oplus U_{k+1}$. Следовательно, если u — вектор в представлении старшего веса $2k$, то ue, uf, uh имеют ненулевые проекции только на представления старших весов $2k-2$, $2k$, $2k+2$.

Утверждение 3.3. Пусть M — бимодуль Хариш-Чандры над $\mathcal{A}$, $u \in U$ — вектор старшего веса $2k$. Обозначим за v_i проекцию fu на представление старшего веса $2i$:

$$fu = v_{k+1} + v_k + v_{k-1} \tag{5}$$

Тогда выполнено

$$\begin{aligned} \frac{k}{4k+2}((\lambda+1)^2 - k^2)u &= ev_{k-1} \\ v_k &= \frac{1}{2}[f, u] \\ v_{k+1} = -\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}&(\operatorname{ad} f)^2(ev) \end{aligned}$$

Доказательство. Так как веса всех элементов равны $2k-2$ мы видим, что $v_{k+1} = a(\operatorname{ad} f)^2(eu)$, $v_k = b \operatorname{ad} f(u)$, v_{k-1} либо ноль, либо старшего веса.

Несложно проверяются следующие равенства для элемента w старшего веса $2k+2$:

$$\operatorname{ad} e(\operatorname{ad} f)^2(w) = 2(2k+1)\operatorname{ad} f(w) \tag{6}$$

$$(\operatorname{ad} e)^2(\operatorname{ad} f)^2(w) = 2(2k+1)(2k+2)w \tag{7}$$

Применим к обеим частям (5) оператор $(\operatorname{ad} e)^2$ и воспользуемся (6). Получится

$$-2eu = (\operatorname{ad} e)^2(fu) = (\operatorname{ad} e)^2(\operatorname{ad} f)^2(eu) = 2(2k+2)(2k+1)aeu$$

Мы видим, что $a = -\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$

Применим к обеим частям (5) $\operatorname{ad} e$. Слева получим $\operatorname{ad} e(fu) = hu$. Справа будет $\operatorname{ad} e(a(\operatorname{ad} f)^2(eu) + b[f,u])$. Воспользовавшись (7) мы видим, что $\operatorname{ad} e(a(\operatorname{ad} f)^2(eu) = 2(2k+1)a[f, eu]$. Легко видеть, что $\operatorname{ad} e(b[f,u]) = 2bku$. Следовательно, правая часть будет равна $2(2k+1)a[f, eu] + 2bku$. То есть после применения $\operatorname{ad} e$ к обоим частям уравнения (5) мы получим

$$hu = 2(2k+1)a[f, eu] + 2bku \tag{8}$$

Слагаемое $[f, eu]$ равно $-hu + e[f,u] = -hu + [ef, u]$. Преобразуем последнее слагаемое:

$$[ef, u] = [-\frac{h^2}{4} + \frac{h}{2}, u] = k(-\frac{1}{2}(hu + uh) + u) = k(-hu + (k+1)u)$$

Получаем

$$[ef, u] = k(-hu + (k+1)u) \tag{9}$$

Таким образм, $-hu + [ef, u] = -(k+1)hu + k(k+1)u$. Объединяя это с (8) получаем $hu = -2a(k+1)(2k+1)hu + 2ak(k+1)(2k+1)u + 2bku$.

Так как u и hu линейно независимы, мы видим, что $b = -a(k+1)(2k+1) = \frac{1}{2}$.

В дальнейшем нам понадобится равенство

$$[f, eu] = -(k+1)hu + k(k+1)u \tag{10}$$

Остается выяснить, чему равен v_{k-1}. Домножим обе части (5) на e:

$$efu = ev_{k+1} + ev_k + ev_{k-1}$$

Будем разбираться с каждым из слагаемых. Заметим, что $ev_{k+1} = a(e(\operatorname{ad} f)^2(eu))$. Мы знаем, что $\operatorname{ad} f(eu) = (k+1)(-hu + ku)$. Значит,

$$(\operatorname{ad} f)^2(eu) = (k+1)[f, -hu + ku]$$

Следовательно,

$$e(\operatorname{ad} f)^2(eu) = (k+1)e[f, -hu+ku]$$

Применим тождество Лейбница:

$$(k+1)e[f, -hu+ku] = (k+1)([ef, -hu+ku] - [e, -hu+ku]f)$$

Так как u старшего веса, то $[e, -hu+ku] = -2eu = -2ue$. Следовательно,

$$([ef, -hu+ku] - [e, -hu+ku]f) = (k+1)((-h+k)[ef, u] - 2uef)$$

Легко видеть, что $(k+1)((-h+k)[ef,u] - 2euf) = (k+1)((-h+k+2)[ef,u] - 2efu)$.

Воспользовавшись (8) получаем

$$(k+1)((-h+k+2)[ef,u]-2efu) = k(k+1)(h-k-2)(h-k-1)u-2(k+1)efu$$

В итоге получаем, что $e(\operatorname{ad} f)^2(eu) = k(k+1)(h-k-2)(h-k-1)u - 2(k+1)efu$. Воспользуемся тем, что $ev_{k+1} = a(e(\operatorname{ad} f)^2(eu))$ и получим

$$ev_{k+1} = \frac{1}{2k+1}efu - \frac{k}{4k+2}(h-k-2)(h-k-1)u$$

Так как u старшего веса, получаем

$$ev_k = \frac{1}{2}e[f,u] = \frac{1}{2}[ef,u]$$

Последнее выражение равно $\frac{k}{2}(-hu+(k+1)u)$ по (8).

Следовательно,

$$ev_{k-1} = efu - ev_k - ev_{k+1} = \frac{2k}{2k+1}efu + \frac{k}{4k+2}(h+k-1)(h-k-1)u$$

Воспользовавшись соотношением $ef = -\frac{h^2}{4} - \frac{h}{2} + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda}{2}$, получаем требуемое равенство $\frac{k}{4k+2}((\lambda+1)^2 - k^2)u = ev_{k-1}$ $\square$

Следствие 3.4. Пусть U_k — $\mathfrak{sl}_2$-модуль наименьшего веса в бимодуле Хариш-Чандры M над алгеброй $\mathcal{A}$. Тогда U_k имеет старший вес либо 0, либо $2(\lambda+1)$.

Доказательство. Действительно, для представления младшего веса элемент v_{k-1} будет равен нулю. Следовательно, $\frac{k}{4k+2}((\lambda+1)^2-k^2)u$ равно нулю, то есть k либо 0, либо $\lambda+1$. □

Мы проверяем, когда на неприводимом бимодуле Хариш-Чандры M над деформацией $\mathcal{A}$ алгебры $\mathbb{C}[x,y]^{C_2}$ можно ввести инвариантную положительно определенную форму $(\cdot,\cdot)$. Мы уже проверили условия инвариантности для присоединенного действия. Остается равенство $(fu,v)=-(u,ve)$.

Достаточно проверять равенство $(fu,v)=-(u,ve)$ в случае, когда u старшего веса. Пусть $fu=v_{k+1}+v_k+v_{k-1}$. Легко видеть, что если v — однородный элемент некоторого неприводимого представления, не равный v_{k-1}, v_k или v_{k+1}, с обеих сторон стоит ноль. Остается подставить $v=v_{k-1},v_k,v_{k+1}$. При $v=v_{k-1}$ получаем $(fu,v_{k-1})=(u,v_{k-1}e)$. Левая часть равна (v_{k-1},v_{k-1}). Используя утверждение 3.3 получаем, что правая часть равна $\frac{k}{4k+2}(k^2-(\lambda+1)^2)(u,u)$

Следовательно, при $v=v_{k-1}$ мы получаем условие

$$\frac{k}{4k+2}(k^2-(\lambda+1)^2)(ev,ev)=(v,v) \tag{11}$$

При $v=v_k=\frac{1}{2}[f,u]$ надо проверить равенство $(fu,v_k)=-(u,\frac{1}{2}[f,u]e)$.

Правая часть равна $-\frac{1}{2}(u,[f,ue]+uh)$. Из ad-инвариантности мы видим, что последнее выражение равно $-\frac{1}{2}(u,uh)$. Воспользуемся равенством (10): $[f,eu]=-(k+1)hu+k(k+1)u$. Из ad-инвариантности мы видим, что $(u,[f,eu])=0$. Следовательно, $(u,hu)=k(u,u)$. Значит, $(u,uh)=(u,hu-2ku)=-k(u,u)$. Получаем, что правая часть равна $\frac{k}{2}(u,u)$.

Левая часть равна (v_k,v_k). Используя инвариантность относительно присоединенного действия мы видим, что

$$(v_k,v_k)=\frac{1}{4}(u,\operatorname{ad}e\operatorname{ad}fu)=\frac{2k}{4}(u,u)=\frac{k}{2}(u,u)$$

Следовательно, обе части равны $\frac{k}{2}(u,u)$.

Остается проверить равенство $(fu,v_{k+1})=-(u,v_{k+1}e)$.

Распишем левую часть:

$$(fu, v_{k+1}) = (v_{k+1}, v_{k+1}) = a^2((\operatorname{ad} f)^2(ev), (\operatorname{ad} f)^2(ev)) =$$
$$a^2(ev, (\operatorname{ad} e)^2(\operatorname{ad} f)^2(ev)) = a^2 2(2k+1)(2k+2)(ev, ev) = \frac{1}{(k+1)(2k+1)}(ev, ev)$$

Используя равенство (11) для пары v, ev мы видим, что

$$(ev, ev) = (k+1)\frac{(k+1)^2 - (\lambda+1)^2}{4k+6}(v, v) \tag{12}$$

Мы проверили равенство $(fu, v) = -(u, ve)$ в случае, когда u — вектор старшего веса, а v пропорционально v_{k-1}. Следовательно, мы можем подставит вместо u элемент eu, вместо v элемент u. Получим $(fue, u) = -(ue, ue)$.

С использованием этого равенства преобразуем правую часть:

$$(u, v_{k+1}e) = (u, fue - v_k e - v_{k-1}e) = (u, fue) + (fu, v_k) + (fu, v_{k-1}) =$$
$$-(ue, ue) + (v_k, v_k) + (v_{k-1}, v_{k-1})$$

Следовательно, равенство $(fu, v_{k+1}) = -(u, v_{k+1}e)$ равносильно равенству

$$-\frac{1}{(k+1)(2k+1)}(ev, ev) = -(ue, ue) + (v_k, v_k) + (v_{k-1}, v_{k-1})$$

Перенося слагаемые с (ev, ev) в одну часть получаем

$$(v_k, v_k) + (v_{k-1}, v_{k-1}) = \frac{2k^2 + 3k}{(k+1)(2k+1)}(ev, ev)$$

Используя равенство (12) мы получаем, что правая часть равна $k\frac{(k+1)^2-(\lambda+1)^2}{4k+2}(v, v)$

Используя равенство (11) и равенство $(v_k, v_k) = \frac{k}{2}(v, v)$ мы получаем, что левая часть равна $(k\frac{k^2-(\lambda+1)^2}{4k+2} + \frac{k}{2})(v, v)$. Последнее выражение равно $k\frac{k^2+2k+1-(\lambda+1)^2}{4k+2}(v,$ Следовательно, левая и правая части равны.

Таким образом, условие инвариантности эрмитовой формы равносильно тому, что на каждом неприводимом $\mathfrak{sl}_2$-модуле есть ad-инвариантная эрмитова форма и выполнено (11). Мы получаем единственную инвариантную форму с точностью до домножения на скаляр. Положительная инвариатная форма существут тогда и только тогда, когда $\frac{k}{4k+2}(k^2 - (\lambda+1)^2) > 0$ для всех векторов u старшего веса $2k-2$ таких, что $eu \neq 0$. Мы можем считать, что $\lambda \geq -1$. В это случае условие $\frac{k}{4k+2}(k^2 - (\lambda+1)^2) > 0$ равносильно тому, что $k > \lambda + 1$.

Пусть M — неприводимый бимодуль Хариш-Чандры, $u \in M$ — старший вектор наименьшего веса $2k-2$, где k целое или полуцелое.

Прредположим, что $eu = 0$. Мы видим, что M совпадает с неприводимым $\mathfrak{sl}_2$-модулем, содержащим u. Все конечномерные бимодули Хариш-Чандры имеют вид $V \otimes V^*$, где V — конечномерное представление $\mathcal{A}$. Конечномерный бимодуль Хариш-Чандры является неприводимым $\mathfrak{sl}_2$-модулем только в том случае, когда $V = \mathbb{C}$. В этом случае $M = V \otimes V^* = \mathbb{C}$. Скалярное произведение на $\mathbb{C}$ в этом случае будет инвариантно.

Если $eu \neq 0$, получаем $k > \lambda + 1$. Следствие 3.4 дает два варианта на наименьший вес: либо $k-1=0$, либо $k-1=\lambda+1$. В первом случае мы получаем регулярное представление, во втором в случае целого или полуцелого $\lambda \neq -1$ — неприводимый бесконечномерный модуль, не изоморфный регулярному. Во втором варианте представление унитаризуемо при любых λ. В первом получаем условие $\lambda < 0$, то есть $-1 \leq \lambda < 0$.

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы:

Теорема 3.5. Пусть M — неприводимый бимодуль Хариш-Чандры над $\mathcal{A}$, где $\mathcal{A} = U(\mathfrak{sl}_2)/(ef + fe + \frac{h^2}{2} - \frac{\lambda^2}{2} - \lambda)$. Тогда M унитаризуем в следующих случаях:

1. $\lambda \in \mathbb{Z}$, $M = I$ — аннулятор неприводимого конечномерного представления $\mathcal{A}$.

2. $\lambda \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$, M — неприводимый бимодуль Хариш-Чандры, не изоморфный $\mathcal{A}$.

3. $\lambda \in (-2, 0)$, $M \cong \mathcal{A}$.

4. $\lambda = 0$, $M \cong \mathbb{C}$.

Расскажем, каким образом полученный список унитаризуемых бимодулей согласуется со списком неприводимых унитарных представлений группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Регулярный бимодуль для $\lambda = -1$ и бимодуль, не изоморфный регулярному, для остальных целых и полуцелых λ соответствуют представлениям главной серии. Регулярное представление для $-1 < \lambda < 0$ соответствуют представлениям дополнительной серии. Доказательство этого факта есть, например, в [9].

Оставшиеся унитарные представления $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ возникнут при рассмотрении $\mathcal{A}_\lambda$-$\mathcal{A}_{\overline{\lambda}}$-бимодулей.

3.2 Регулярный бимодуль

На алгебре $\mathcal{A}$ есть антилинейная инволюция $e \mapsto -f$, $f \mapsto -e$, $h \mapsto -h$, когда $P(-x) = \overline{Q}(x)$. Рассматривая получившуюся нестандартную вещественную форму $e \mapsto -f$, $f \mapsto -e$, $h \mapsto -h$ аналогично предыдущему случаю, получаем условия:

$$\begin{array}{ll} (eu, v) = -(u, vf) & (ue, v) = -(u, fv) \\ (hu, v) = -(u, vh) & (uh, v) = -(u, hv) \\ (fu, v) = -(u, ve) & (uf, v) = -(u, ev) \end{array}$$

Так как форма эрмитова, достаточно проверять первые три условия:

$$(eu, v) = -(u, vf) \tag{13}$$

$$(ue, v) = -(u, fv) \tag{14}$$

$$(hu, v) = -(u, vh) \tag{15}$$

Из инвариантности относительно присоединенного действия h получаем, что весовые пространства присоединенного действия h разных весов ортогональны относительно формы.

В этом параграфе мы рассмотрим случай регулярного бимодуля. Весовое пространство веса $nk \geq 0$ состоит из элементов $S(h)e^k$, $S(x) \in \mathbb{C}[x]$. В случае $nk < 0$ пространство состоит из элементов $S(x)f^k$, $S(x) \in \mathbb{C}[x]$.

Несложно доказываются следующие формулы: $S(h)e^k = e^k S(h + nk)$, $S(h)f^k = f^k S(h - nk)$. Также в алгебре $\mathcal{A}$ есть соотношения $ef = P(h)$, $fe = Q(h) = P(h + n)$.

Достаточно проверить инвариантность для пары элементов неотрицательного веса или неположительного веса: если элементы разных знаков, в формулах (13), (14), (15) с обоих сторон стоит ноль.

Обозначим за $(\cdot, \cdot)_k$ сужение $(\cdot, \cdot)$ на весовое пространство веса nk.

3.2.1 Структура пространства инвариантных форм.

Лемма 3.6. Условия (13), (14), (15) равносильны следующим уравнениям, где k принимает все неотрицательные целые значения:

$$
\begin{aligned}
(R(h-n),S(h))_{k+1} &= -(R(h),S(h)P(h-nk))_k \\
-(R(h),S(h+n))_{-k-1} &= (R(h)Q(h+nk),S(h))_{-k}
\end{aligned} \tag{16}
$$

$$
\begin{aligned}
(R(h),S(h))_{k+1} &= -(R(h),S(h+n)P(h+n))_k \\
-(R(h),S(h))_{-k-1} &= (R(h-n)Q(h-n),S(h))_{-k}
\end{aligned} \tag{17}
$$

$$
(R(h)T(h-nk),S(h))_{\pm k} = (R(h),\overline{T}(-h)S(h))_{\pm k} \tag{18}
$$

Следствие 3.7. Выполнено

$$
\begin{aligned}
(R(h-n),S(h+n)P(h+n))_k &= (R(h),S(h)P(h-nk))_k \\
(R(h-n)Q(h-n),S(h+n))_{-k} &= (R(h)Q(h+nk),S(h))_{-k}
\end{aligned} \tag{19}
$$

Доказательство. Следует из (16) и (17). □

Теперь докажем теорему.

Доказательство. Раскроем условие (13) для элементов положительного веса. При подстановке в (13) элементов $u = R(h)e^k$, $v = S(h)e^k$ мы получаем

$$
(eR(h)e^k, S(h)e^{k+1}) = -(R(h)e^k, S(h)e^{k+1}f) \tag{20}
$$

Левая часть (20) равна $(R(h-n)e^{k+1}, S(h)e^{k+1})$.

Выполнено равенство

$$
S(h)e^{k+1}f = S(h)e^kP(h) = S(h)P(h-nk)e^k
$$

Следовательно, правая часть (20) равна $-(R(h)e^k, S(h)P(h-nk)e^k)$. Таким образом, условие (13) для элементов веса nk равносильно

$$
(R(h-n),S(h))_{k+1} = -(R(h),S(h)P(h-nk))_k \tag{21}
$$

Аналогично преобразуется (14) для элементов отрицательного веса:

$$(R(h)f^{k+1}e, S(h)f^k) = -(R(h)f^{k+1}, fS(h)f^k) \tag{22}$$

Правая часть (22) равна $-(R(h), S(h+n))_{-k-1}$. Выполнено $R(h)f^{k+1}e = R(h)f^kQ(h) = R(h)Q(h+nk)f^k$. Следовательно, левая часть (22) равна $(R(h)Q(h+nk), S(h))_{-k}$. Получаем

$$R(h)Q(h+nk), S(h))_{-k} = -(R(h), S(h+n))_{-k-1} \tag{23}$$

Объединяя (21) и (23) получаем (16)

Напишем (14) для элементов положительного веса:

$$(R(h)e^{k+1}, S(h)e^{k+1}) = (R(h)e^k, fS(h)e^{k+1})$$

Элемент $fS(h)e^{k+1}$ равен $S(h+n)fe^{k+1} = S(h+n)P(h+n)e^k$. Получаем

$$(R(h), S(h))_{k+1} = -(R(h), S(h+n)P(h+n))_k \tag{24}$$

Аналогично преобразовывается уравнение (13) для элементов отрицательного веса.

Объединяя получившееся с (24), получаем (17)

Напишем (15) в более общей форме:

$$(R(h)e^kT(h), S(h)e^k) = (R(h)e^k, \overline{T}(-h)S(h)e^k)$$

Заметим, что $R(h)e^kT(h) = R(h)T(h-nk)e^k$. Получаем (19).

Уравнение (19) для отрицательных k доказывается аналогично. $\square$

Подставим в (19) и (18) $k = 0$:

$$\begin{gathered}(R(h-n), S(h+n)P(h+n))_0 = (R(h), S(h)P(h))_0 \\ (R(h)T(h), S(h))_0 = (R(h), \overline{T}(-h)S(h))_0\end{gathered} \tag{25}$$

Мы получили два уравнения, а не три, потому что при подстановке $k = 0$ в (19) получились два одинаковых условия.

Заметим, что существует взаимно-однозначное соответствие между билинейными формами, заданными на весовом пространстве оператора $\operatorname{ad} h$ веса 0, и билинейными формами на $\mathcal{A}$, удовлеворяющими (17).

Утверждение 3.8. Пусть выполнены (25) и (17). Тогда форма инвариантна.

Доказательство. Надо проверить (16) и (18). С учетом (17) равенство (16) равносильно (19). Равенства (19) и (18) мы докажем индукцией по k.

Используя (17) и равенство (19) для элементов веса nk мы получаем равенство (19) для элементов веса $n(k+1)$

$$(R(h-n), S(h+n)P(h+n))_{k+1} = -(R(h-n), S(h+2n)P(h+2n)P(h+n))_k = \\ -(R(h), S(h+n)P(h+n)P(h-nk))_k = (R(h), S(h)P(h-n(k+1))_{k+1}$$

Используя (17) и равенство (18) для элементов веса nk мы получаем равенство (18) для элементов веса $n(k+1)$.

$$(R(h), \overline{T}(-h)S(h))_{k+1} = -(R(h), \overline{T}(-h-n)S(h+n)P(h+n))_k = \\ -(R(h)T(h-n(k+1)), S(h+n)P(h+n))_k = (R(h)T(h-n(k+1), S(h))_{k+1}$$

$\square$

Таким образом, инвариантные формы на $\mathcal{A}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с формами на весовом пространстве оператора $\operatorname{ad} h$ веса ноль, удовлетворяющими условиям (25). Условие эрмитовости мы рассмотрим позже. Уравнения (25) задают пространство полуторалинейных форм размерности $n-1$. Опишем, как устроено получившееся пространство форм. Уравнение $(R(h)T(h), S(h)) = (R(h), \overline{T}(-h)S(h))$ равносильно тому, что $(R(h), S(h)) = (1, \overline{R}(-h)S(h))$ для любых $R(x), S(x) \in \mathbb{C}[x]$. Обозначим $(1, R(h))$ за $\phi(R(x))$. Уравнение $(R(h-n), S(h+n)P(h+n)) = (R(h), S(h)P(h))$ теперь равносильно тому, что

$$\phi(R(x)P(x)) = \phi(R(x+n)P(x+n)) \tag{26}$$

Для любого многочлена $R(x)$ существует единственный с точностью до прибавления константы многочлен $S(x)$ такой, что $R(x) = S(x+n) - S(x)$. Следовательно, существует такая функция g, что $\phi(R(x)) = g(S(x))$, где $g(1) = 0$, $R(x) = S(x+n) - S(x)$. Условие (26) переписывается как $g(P(x)S(x)) = 0$. То есть g — это произвольная линейная функция на пространстве $\mathbb{C}[x]/\{P(x)S(x) + c \mid S(x) \in \mathbb{C}[x], c \in \mathbb{C}\}$ размерности $n-1$. Или, что то же самое, ϕ — произвольная линейная функция на пространстве $\mathbb{C}[x]/\{P(x+n)R(x+n) - P(x)R(x) \mid R(x) \in \mathbb{C}[x]\}$.

Замечание. Заметим, что в случае $n = 2$ у нас получается ровно одна полуторалинейная форма с точностью до умножения на константу. Это совпадает с результатами предыдущего параграфа.

3.2.2 Положительная определенность.

Вернемся к изучению инвариантных форм, определенных на всем бимодуле $\mathcal{A}$.

Утверждение 3.9. Пусть $(\cdot, \cdot)$ — инвариантная полуторалинейная форма на регулярном бимодуле $\mathcal{A}$. Если $(a, a) > 0$ при любом a из весового пространства $\operatorname{ad} h$ веса 0 или n, то $(\cdot, \cdot)$ положительно определена.

Доказательство. Пусть b — элемент веса $2nk$, $k > 0$. Это значит, что он представляется в виде $e^k S(h) e^k$. Из инвариантности получаем $(b, b) = (e^k S(h) e^k, e^k S(h) e^k)$ $(S(h) e^k (-f)^k, S(h) e^k (-f)^k)$. Значит, положительная определенность для элементов веса $2nk$, $k > 0$ следует из положительной определенности для элементов веса 0. Случай $k < 0$ разбирается аналогично.

Пусть b — элемент веса $n(2k + 1)$. В зависимости от знака k он представляется в виде $e^k P(h) e^{k+1}$ или $f^k P(h) f^{k+1}$. Дальше рассуждаем аналогично случаю веса $2kn$:

$$(e^k P(h) e^{k+1}, e^k P(h) e^{k+1}) = (P(h) e^{k+1} (-f)^k, P(h) e^{k+1} (-f)^k)$$

$$(f^k P(h) f^{k+1}, f^k P(h) f^{k+1}) = ((-e)^{k+1} f^k P(h), (-e)^{k+1} f^k P(h))$$

□

В качестве следствия получаем следующее утверждение. Оно позволяет свести изучение положительной определенности к проверке некоторых условий для формы, заданной на весовом пространстве оператора $\operatorname{ad} h$ веса 0.

Утверждение 3.10. Положительная определенность равносильна тому, что для всех $R(x) \in \mathbb{C}[x]$ выполнено

$$\phi(\overline{R}(-x) R(x)) > 0 \tag{27}$$

$$\phi(-\overline{R}(-x)R(x+n)P(x+n)-\overline{R}(-x+n)R(x)\overline{P}(-x+n))>0 \tag{28}$$

Доказательство. Вспомним, что $P(x)=\overline{Q}(-x)=\overline{P}(-x+n)$.

Заметим, что $(R(h),R(h))_0=(1,\overline{R}(-h)R(h))=\phi(\overline{R}(-x)R(x))$. Следовательно, положительная определенность $(\cdot,\cdot)$ на пространстве веса 0 равносильна (27)

Применяя (17) получаем

$$(R(h),S(h))_1=-(R(h),S(h+n)P(h+n))$$

Следовательно, $(R(h),R(h))_1=-(1,\overline{R}(-h)R(h+n)P(h+n))=\phi(-\overline{R}(-x)R(x+n)P(x+n))$.

Из (26) получаем $\phi(\overline{R}(-x)R(x+n)P(x+n))=\phi(R(x)\overline{R}(-x+n)P(x))$.

Таким образом,

$$\phi(\overline{R}(-x)R(x+n)P(x+n))=\frac{1}{2}\phi(\overline{R}(-x)R(x+n)P(x+n)+R(x)\overline{R}(-x+n)P(x))$$

Пользуясь равенством $P(x)=\overline{P}(-x+n)$ мы видим, что положительная определенность $(\cdot,\cdot)$ на пространстве веса n равносильна (28). □

Обозначим за C_0 выпуклый конус, порожденный элементами вида $\overline{R}(-x)R(x)$ и $-\overline{R}(-x)R(x+n)P(x+n)-\overline{R}(-x+n)R(x)\overline{P}(-x+n)$. Утверждение можно переформулировать таким образом: $(\cdot,\cdot)$ положительно определено, когда функция ϕ положительна на C_0.

Для начала поймем, когда форма $(\cdot,\cdot)$ вещественна на C_0.

Пусть $a\in\mathbb{R}$. Рассмотрим антилинейную инволюцию $S(x)\mapsto\overline{S}(2a-x)$.

Определение 3.11. Обозначим за $\operatorname{Re}_a P(x)$ вещественную часть многочлена $P(x)$ относительно этой антиинволюции.

Следующее утверждение доказывается несложно:

Утверждение 3.12. Пусть a вещественно. Множество многочленов $\overline{R_1}(2a-x)R_1(x)$ совпадает с множеством многочленов $F(x)$ таких, что $F(x)\geq 0$ при $\operatorname{Re} x=a$.

В частности, суммы вида $\overline{R_1}(-x)R_1(x)-\overline{R_2}(-x)R_2(x+n)P(x+n)-\overline{R_2}(-x+n)R_2(x)\overline{P}(-x+n)$ образуют выпуклый конус. Следовательно, конус C_0 совпадает с множеством $\{\overline{R_1}(-x)R_1(x) - \overline{R_2}(-x)R_2(x+n)P(x+n) - \overline{R_2}(-x+n)R_2(x)\overline{P}(-x+n) \mid R_1(x), R_2(x) \in \mathbb{C}[x]\}$.

Выясним, когда f вещественно на C_0 и переформулируем условие (26) в этом случае.

Утверждение 3.13.

1. Пусть ϕ — произвольное линейное отображение из $\mathbb{C}[x]$ в $\mathbb{C}$. Тогда равносильно
   (a) Отображение ϕ принимает вещественные значения на C_0.
   (b) Отображение ϕ, суженное на $\mathbb{R}[ix]$, принимает вещественные значения.
2. Пусть ϕ — линейное отображение из $\mathbb{C}[x]$ в $\mathbb{C}$, удовлетворяющее любому из двух условий предыдущего пункта. Тогда следующие два утверждения эквивалентны:
   (a) Отображение ϕ удовлетворяет условию (26)
   (b) $\phi|_{\mathbb{R}[ix]}(P(x+n)F(x+n) - P(x)F(x)) = 0$ для всех $F(x)$ таких, что $F(x) + \overline{F}(-x+n) = 0$.

Доказательство.

1. Достаточно доказать, что вещественная линейная оболочка элементов вида $\overline{R}(-x)R(x)$ и $-\overline{R}(-x)R(x+n)P(x+n) - \overline{R}(-x+n)R(x)\overline{P}(-x+n)$, где $R(x) \in \mathbb{C}[x]$ совпадает с $\mathbb{R}[ix]$. Множество $\mathbb{R}[ix]$ совпадает с множеством элементов, инвариантных относительно антилинейной инволюции $S(x) \mapsto \overline{S}(-x)$. Легко видеть, что элементы вида $\overline{R}(-x)R(x)$ и $-\overline{R}(-x)R(x+n)P(x+n) - \overline{R}(-x+n)R(x)\overline{P}(-x+n)$ инвариантны относительно этой антилинейной инволюции.

   Докажем включение в другую сторону. Заметим, что вещественная линейная оболочка элементов $\overline{R}(-x)R(x)$ содержит элементы $(-x^2)^k$ и $(1-2ix-x^2)^k$ для всех неотрицательных целых k. Теперь несложно доказать по индукции, что вещественная линейная оболочка элементов $(-x^2)^k$ и $(1-2ix-x^2)^k$ совпадает с $\mathbb{R}[ix]$.

2. Докажем вспомогательную лемму:

Лемма. $P(x+n)F(x+n) - P(x)F(x) \in \mathbb{R}[ix]$ тогда и только тогда, когда $F(x) + \overline{F}(-x+n) = 0$

Доказательство. Запишем условие:

$$P(x+n)F(x+n) - P(x)F(x) = \overline{P}(-x+n)\overline{F}(-x+n) - \overline{P}(-x)\overline{F}(-x)$$

Заметим, что правая часть равна $P(x)\overline{F}(-x+n) - P(x+n)\overline{F}(-x+n)$. Отсюда следует, что многочлен $P(x)(F(x) + \overline{F}(-x+n))$ совпадает со своим сдвигом на n. Значит, он равен константе. Так как $\deg P(x) > 1$, $P(x)(F(x) + \overline{F}(-x+n)) = 0$. Отсюда получаем утверждение. $\square$

Из леммы получаем следствие $(a) \Rightarrow (b)$.

Докажем следствие $(b) \Rightarrow (a)$. Пусть F — произвольный многочлен. Легко видеть, что F представляется в виде $F_1(x)+iF_2(x)$, где $F_1(x)+\overline{F_1}(n-x) = 0$, $F_2(x)+\overline{F_2}(n-x) = 0$. Таким образом, $\phi(P(x+n)F(x+n)-P(x)F(x)) = \phi(P(x+n)F_1(x+n)-P(x)F_1(x))+i\phi(P(x+n)F_2(x+n)-P(x)F_2(x)) = 0$. $\square$

Утверждение 3.14. Предположим, что функция ϕ вещественна на $\mathbb{R}[ix]$. Тогда для соответствующей полуторалинейной формы $(\cdot,\cdot)$ выполнено $(u,v) = \overline{(v,u)}$.

Доказательство. Заметим, что $(u,v) = (1, v\cdot r(u))$, $(v,u) = (1, r(v)\cdot u)$. Остается доказать, что $(1,w) = \overline{(1,r(w))}$. Пусть $w = S(h)$. Тогда $r(w) = \overline{S}(-h)$. При этом $(1,w) = \phi(S(x))$, $(1,r(w)) = \phi(\overline{S}(-x))$. Так как f вещественно на $\mathbb{R}[ix]$, то $\phi(S(x)) = \overline{\phi(\overline{S}(-x)}$. Отсюда следует утверждение. $\square$

Таким образом, из положительной определенности формы $(\cdot,\cdot)$ следует эрмитовость.

Получаем, что сужение f на $\mathbb{R}[ix]$ равно нулю на элементах вида $P(x+n)F(x+n)-P(x)F(x)$, где $F(x)+\overline{F}(-x+n) = 0$. В этом случае $P(x+n)F(x+n) - P(x)F(x) = -\overline{P}(-x)\overline{F}(-x) - P(x)F(x) = -\operatorname{Re}_0 P(x)F(x)$.

Обозначим за C образ C_0 в $\mathbb{R}[ix]/\{P(x+n)F(x+n)-P(x)F(x)\}$. C является выпуклым конусом в конечномерном вещественном пространстве. Отображение f действует из этого пространства в $\mathbb{R}$ и должно быть больше нуля на элементах из C. Такое f существует тогда и только тогда, когда C содержится в открытом полупространстве, которое содержит ноль на границе.

Заметим, что выполнены следующие следствия: если C содержится в открытом полупространстве, то C не содержит ноль. Если C не содержит ноль, то C содержится в замкнутом полупространстве. Из последнего условия следует, что на регулярном бимодуле можно ввести неотрицательно определенную инвариантную эрмитову форму.

Условие на то, что C не содержит 0, можно переформулировать более явным образом:

Теорема 3.15. Если регулярный бимодуль с параметром $P(x)$ унитаризуем, то не существует многочлена $S(x)$ такого, что

1. $\operatorname{Re} S(x) \geq 0$ при $\operatorname{Re} x = \frac{n}{2}$.

2. $\operatorname{Re} S(x)P(x) \geq 0$ при $\operatorname{Re} x = 0$

Если такого многочлена $S(x)$ не существует, то на регулярном бимодуле с параметром $P(x)$ можно ввести неотрицательно определенную инвариантную эрмитову форму.

Доказательство. Для удобства доказательства поменяем знак $S(x)$. Получим условие

1. $\operatorname{Re} S(x) \leq 0$ при $\operatorname{Re} x = \frac{n}{2}$.

2. $\operatorname{Re} S(x)P(x) \leq 0$ при $\operatorname{Re} x = 0$

Надо доказать, что это условие равносильно тому, что C не содержит ноль. Последне равносильно тому, что C_0 не содержит многочленов вида $P(x+n)F(x+n) - P(x)F(x)$, где $\operatorname{Re}_{\frac{n}{2}} F = 0$. Конус C_0 состоит из элементов вида $\overline{R_1}(-x)R_1(x) - \overline{R_2}(-x)R_2(x+n)P(x+n) - \overline{R_2}(-x+n)R_2(x)\overline{P}(-x+n)$. Таким образом, условие переформулируется следующим образом: не существует многочленов R_1, R_2, F, не равных нулю одновременно, таких, что $F(x+n) + \overline{F}(-x) = 0$ и

$$\overline{R_1}(-x)R_1(x) - \overline{R_2}(-x)R_2(x+n)P(x+n) - \\ - \overline{R_2}(-x+n)R_2(x)\overline{P}(-x+n) = P(x+n)F(x+n) - P(x)F(x)$$

Преобразуя, получаем

$$\overline{R_1}(-x)R_1(x) = P(x+n)(F(x+n)+\overline{R_2}(-x)R_2(x+n)) - P(x)(F(x)-\overline{R_2}(-x+n)R_2(x)) \tag{29}$$

Вещественная форма Re_0 задается отображением $r(S(x)) = \overline{S}(-x)$. Так как $F(x+n)+\overline{F}(-x) = 0$, то $F(x+n) = -r(F(x))$. Мы знаем, что $P(x+n) = \overline{P}(-x)$, поэтому $P(x+n) = r(P(x))$. Легко видеть, что $r(\overline{R_2}(-x+n)R_2(x)) = R_2(x+n)\overline{R_2}(x)$. Следовательно,

$$P(x+n)(F(x+n) + \overline{R_2}(-x)R_2(x+n)) - P(x)(F(x) - \overline{R_2}(-x+n)R_2(x)) = \\ - \mathrm{Re}_0 P(x)(F(x) - \overline{R_2}(-x+n)R_2(x))$$

Таким образом,уравнение (29) равносильно уравнению

$$\overline{R_1}(-x)R_1(x) = -\mathrm{Re}_0 P(x)(F(x) - \overline{R_2}(-x+n)R_2(x))$$

Из утверждения 3.12 следует, что существование $R_1(x)$ равносильно следующему: $\mathrm{Re}\, P(x)(F(x) - \overline{R_2}(-x+n)R_2(x)) \leq 0$ при $\mathrm{Re}\, x = 0$.

Обозначим $F(x)-\overline{R_2}(-x+n)R_2(x)$ за $S(x)$. Мы видим, что $\mathrm{Re}\, P(x)S(x) \leq 0$ при $\mathrm{Re}\, x = 0$. Остается доказать, что многочлены вида $F(x) - \overline{R_2}(-x+n)R_2(x)$ — это многочлены, у которых вещественная часть положительна на оси $\mathrm{Re}\, x = \frac{n}{2}$.

Несложно видеть, что при $\mathrm{Re}\, x = \frac{n}{2}$ выполнено $\mathrm{Re}\, S(x) = (\mathrm{Re}_{\frac{n}{2}} S)(x)$.

Мы знаем, что $\mathrm{Re}_{\frac{n}{2}} F(x) = 0$. Таким образом, $\mathrm{Re}\, S(x) = -\mathrm{Re}\, \overline{R_2}(-x+n)R_2(x)$ при $\mathrm{Re}\, x = \frac{n}{2}$. Из утверждения 3.12 следует, что элементы вида $\overline{R_2}(-x+n)R_2(x)$ — это в точности те многочлены, сужение которых $\mathrm{Re}\, x = \frac{n}{2}$ неотрицательно. □

Необходимо понять, как наличие неотрицательно определенной формы связано с наличием положительно определенной формы. Воспользуемся следующим фактом: любой идеал в алгебре $\mathcal{A}$ имеет конечную коразмерность. Из него следует

Утверждение 3.16. Пусть на регулярном бимодуле $\mathcal{A}$ введена неотрицательно определенная эрмитова форма $(\cdot,\cdot)$. Тогда есть два варианта: либо $(\cdot,\cdot)$ положительно определена, либо ядро формы $(\cdot,\cdot)$ — это идеал I конечной коразмерности и конечномерный бимодуль $\mathcal{A}/I$ унитаризуем.

Доказательство. Пусть $(\cdot,\cdot)$ не положительно определена. Следовательно, множество $I = \{v \in \mathcal{A} \mid (v,v) = 0\}$ непусто. Так как $(\cdot,\cdot)$ неотрицательно определена, для любых $a, b \in \mathcal{A}$ выполнено $(a,b)^2 \leq (a,a)(b,b)$. При $a \in I$ получаем, что $(a,b) = 0$. Следовательно, множество I совпадает с ядром формы $(\cdot,\cdot)$. Так как форма $(\cdot,\cdot)$ инвариантна, ее ядро является идеалом. Следовательно, I — идеал в алгебре $\mathcal{A}$. Воспользовавшись фактом получаем, что $\mathcal{A}/I$ — конечномерный бимодуль. По форме $(\cdot,\cdot)$ получаем положительно определенную форму на $\mathcal{A}/I$. □

Утверждение 3.17. Пусть V — унитаризуемый конечномерный неприводимый бимодуль над алгеброй $\mathcal{A}$. Тогда $\dim V = 1$.

Доказательство. Легко видеть, что $V = V_1 \otimes V_2^*$, где V_1, V_2 — конечномерные неприводимые $\mathcal{A}$-модули. Из результатов параграфа 2.1 следует, что h действует диагонализуемо на V_1, V_2 и все собственные пространства h одномерны. Следовательно, на модуле V есть биградуировка левым и правым действием h.

Пусть $\dim V \neq 1$. Не умаляя общности можно считать, что $\dim V_1 \neq 1$. Тогда у действия h слева есть два различных собственых значения. Следовательно, можно подобрать элемент $u \in V$ такой, что $hu = \lambda u$, $uh = \mu u$ и при этом $\lambda \neq -\overline{\mu}$. Воспользуемся инвариантностью формы: $(hu,u) = -(u,uh)$. Мы видим что $(hu,u) = \lambda(u,u)$, $(u,uh) = \overline{\mu}(u,u)$. Следовательно, $(\lambda + \overline{\mu})(u,u) = 0$. Так как $\lambda + \overline{\mu} \neq 0$, получаем $(u,u) = 0$. Противоречие с положительной определенностью. □

Таким образом, мы получили более явный критерий унитаризуемости регулярного в тех случаях, когда не существует одномерных бимодулей над алгеброй $\mathcal{A}$. Попытаемся с помощью этого критерия классифицировать параметры, при которых модуль унитаризуем.

3.2.3 Следствия из теоремы 3.15: положительный ответ

Проверим, что теорема 3.15 дает правильный ответ в случае $n = 2$. Обозначим корни $P(x)$ за α, β. Условие $P(x) = \overline{Q}(-x) = \overline{P}(n-x)$ дает два случая:

1. $\alpha + \overline{\beta} = 2$.

2. $\operatorname{Re}\alpha = \operatorname{Re}\beta = 1$.

Заметим, что замена $P(x)$ на $P(x+ia), a \in \mathbb{R}$ соответсвует замене h на $h - ia$. Эта замена не меняет вещественную форму, поэтому мы можем сдвигать аргумент $P(x)$ на чисто мнимую константу.

В частности, в первом случае мы можем считать, что α и β вещественны, $\alpha + \beta = 2$. Если к тому же знак старшего члена $P(x)$ отрицательный, мы получаем уже разобранный случай центральной редукции $U(\mathfrak{sl}_2)$. Там мы знаем ответ: если оба корня положительны, бимодуль унитаризуем, иначе нет. Проверим, что теорема 3.15 дает такой же ответ.

Пусть $P(x) = -(x-1)^2 + s^2$, $s \geq 1$. Получаем, что $\operatorname{Re} P(ix) = \operatorname{Re} -(ix)^2 + 2ix - 1 + s^2 = x^2 - 1 + s^2$. Этот многочлен неотрицательный при вещественных x. В этом случае подойдет многочлен $S(x) = 1$.

Пусть теперь $s < 1$. В этом случае у $P(x)$ оба корня положительны. Мы получим унитаризуемость соответствующего бимодуля в качестве следствия из более общего утверждения в конце раздела.

Пусть $F(x)$ — произвольный многочлен, a — вещественное число. Обозначим за $\rho_{\leq a}(F(x))$ количество корней $F(x)$, у которых вещественная часть не больше a. Аналогично с другими знаками неравенств.

Рассмотрим незамкнутую кривую $x - a$, где $\operatorname{Re} a \neq 0$, x проходит ось $\operatorname{Re} x = 0$ от $-i\infty$ до $i\infty$. Несложно понять, что оборот этой кривой вокруг нуля равен $-\pi \operatorname{sgn} \operatorname{Re} a$. Отсюда следует лемма:

Лемма 3.18. Если $\operatorname{Re} R(x) \geq 0$ при $\operatorname{Re} x = a$, то

1. Выполнены неравенства

$$\rho_{>a}(F(x)) \leq \rho_{\leq a}(F(x)) + 1$$

$$\rho_{<a}(F(x)) \leq \rho_{\geq a}(F(x)) + 1$$

2. Пусть первое неравенство из предыдущего пункта превратилось в равенство и степень $R(x)$ равна $2d-1$. В этом случае старший коэффициент $R(x)$ вещественный и его знак равен $(-1)^d$. Если второе неравенство из предыдущего пункта превратилось равенство, знак равен $(-1)^{d+1}$.

Доказательство. 1. Пусть количество корней с вещественной частью a равно k, с вещественной частью больше a равно l, с вещественной частью меньше a равно m.

Предположим, что $l \geq k+m+2$. Пусть $R(x) = Q(x)T(x)$, где старший член $Q(x)$ равен i^k, а корни $Q(x)$ — это все корни $R(x)$ с вещественной частью 0. Несложно видеть, что многочлен $Q(x)$ вещественный на оси $\operatorname{Re} x = a$ и меняет знак не больше k раз.

Следовательно, многочлен $T(x)$ меняет знак вещественой части не больше k раз, когда x проходит прямую $\operatorname{Re} x = a$. Мы видим, что оборот $T(x)$ вокруг нуля не меньше $-\pi(k+1)$. С другой стороны, по предыдущей лемме оборот равен $-\pi(l-m) \leq \pi(k+2)$. Противоречие.

Случай $m \geq l+k+2$ разбирается аналогично.

2. Из доказательства предыдущего пункта следует, что оборот $T(x)$ вокруг нуля равен $-\pi(k+1)$ и $T(x)$ меняет знак вещественной части ровно k раз. Отсюда несложно следует, что при x, стремящемся к $a-i\infty$ направление $T(x)$ имеет вид $\pm(i+\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$

При x, стремящемся к $a-i\infty$ многочлен $Q(x)$ положителен, при x, стремящемся к $a+i\infty$ многочлен $Q(x)$ имеет знак $(-1)^m$.

Из этого следует, что направление $T(x)$, при x стремящемся к $a-i\infty$ имеет вид $i+\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$.

Так как степень $T(x)$ равна $l+m$, старший коэффициент $T(x)$ равен i^{l+m+1}. Получаем, что старший коэффициент $P(x)$ равен $i^{k+l+m+1} = i^{2d} = (-1)^d$.

Случай другого знака разбирается аналогично.

$\square$

Выполнено $P(x) = \overline{P}(n-x)$. Следовательно, корни $P(x)$ выглядят следующим образом: это либо числа с вещественной частью $\frac{n}{2}$, либо пары чисел α, β такие, что $\alpha + \overline{\beta} = n$. Последнее условие равносильно тому, что $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Im}\beta$, $\operatorname{Re}\alpha + \operatorname{Re}\beta = n$.

В случае, когда у $P(x)$ четная степень, мы можем разбить корни на пары. В каждой паре либо два числа, у которых мнимые части равны, а вещественные дают в сумме n, либо два комплексных числа с вещественной частью $\frac{n}{2}$.

Следствие 3.19. Пусть степень $P(x)$ равна $n = 2m$. Разобьем корни $P(x)$ на пары указанным образом. Пусть выполнено одно из двух условий

1. Нашлось две пары корней, в которых оба числа имеют положительную вещественную часть.

2. Нашлась пара корней, в которой оба числа имеют положительную вещественную часть и знак старшего члена $P(x)$ равен $(-1)^m$.

Также предположим, что у алгебры $\mathcal{A}$ нет одномерных представлений. Тогда регулярный бимодуль с параметром $P(x)$ унитаризуем.

Доказательство. В каждой паре корней $P(x)$ есть хотя бы один корень с положительной вещественной частью. Таким образом, из первого условия следует, что $\rho_{>0}(P(x)) \geq \rho_{\leq 0}(P(x)) + 4$. Из второго условия следует, что $\rho_{>0}(P(x)) \geq \rho_{\leq 0}P(x) + 2$.

Пусть бимодуль не унитаризуем. Тогда найдется многочлен $S(x)$ такой, что

1. $\operatorname{Re} S(x) \geq 0$ при $\operatorname{Re} x = \frac{n}{2}$.

2. $\operatorname{Re} S(x)P(x) \geq 0$ при $\operatorname{Re} x = 0$.

Из первого условия и из леммы 3.18 получаем, что $\rho_{<\frac{n}{2}}(S(x)) \leq \rho_{\geq\frac{n}{2}}(S(x))+1$. Отсюда следует, что $\rho_{\leq 0}(S(x)) \leq \rho_{>0}(S(x)) + 1$.

Из второго условия и из леммы 3.18 получаем, что $\rho_{>0}(S(x)P(x)) \leq \rho_{\leq 0}(S(x)P(x)$
1.

Сложим два последних неравенства: $\rho_{\leq 0}(S(x))+\rho_{>0}(S(x)P(x)) \leq \rho_{>0}(S(x))+\rho_{\leq 0}(S(x)P(x)) + 1$.

Заметим, что $\rho_{<a}(S(x)P(x)) = \rho_{<a}(S(x))+\rho_{<a}(P(x))$, аналогично для других знаков неравенства. Таким образом, последнее неравенство равносильно $\rho_{>0}(P(x)) \leq \rho_{\leq 0}(P(x)) + 2$.

Если нашлось две пары корней с положительной вещественной частью, мы сразу получаем противоречие. Первый случай в следствии доказан.

Перейдем ко второму случаю. Если нашлась одна пара корней с положительной вещественной частью, все неравенства на количества корней из леммы 3.18 обращаются в равенство. Следовательно, степень $S(x)$ нечетна, обозначим ее за $2d-1$. Из второго пункта леммы 3.18 получаем, что знак старшего коэффициента $S(x)$ равен $(-1)^{d+1}$.

Также из второго пункта леммы 3.18 получаем, что знак старшего коэффициента $S(x)P(x)$ равен $(-1)^{m+d}$. Получаем противоречие со знаком старшего коэффициента $P(x)$. $\square$

В качестве следствия получаем, что в случае $n = 2$, старший коэффициент $P(x)$ отрицателен, оба корня $P(x)$ положительны, регулярный бимодуль унитаризуем.

Замечание. В случае нечетного n все корни многочлена $P(x)$ разбиваются на пары и остается еще один с вещественной частью $\frac{n}{2}$. Если алгебра $\mathcal{A}$ не имеет одномерных представлений и есть пара корней многочлена $P(x)$, в которой вещественные части обоих корней положительны, то регулярный бимодуль с параметром $P(x)$ унитаризуем. Это утверждение доказывается аналогичными рассуждениями.

3.2.4 Аналитическое построение скалярных произведений

Результаты этого раздела мне сообщил в личном разговоре Павел Этингоф. Явная формула для скалярных произведений позволяет разобрать случай, когда у алгебры $\mathcal{A}$ есть одномерное представление: теорема 3.15 не позволяет вывести унитаризуемость в этом случае, но аналитическая формула дает инвариантное скалярное произведение.

Разберем случай $n = 2$ еще одним способом. Пусть $P(x) = -(x-1)^2 + \lambda^2$, где $\lambda < 1$.

Рассмотрим функцию $w(x) = \frac{e^{\pi i x}}{(e^{\pi i x}+e^{\pi i \lambda})(e^{\pi i x}+e^{-\pi i \lambda})}$. Пусть $\phi(F(x)) = \int\limits_{i\mathbb{R}} F(x)w(x)dx$. Заметим, что функция $w(x)$ голоморфна в окрестности прямой $i\mathbb{R}$ и быстро убывает при x, стремящемся к $i\infty$. Следовательно, функция $\phi(F(x))$ корректно определена на многочленах.

Докажем, что по отображению ϕ мы получим положительно определенную форму на регулярном бимодуле с параметром $P(x)$.

Сначала проверим условие инвариантности: $\phi(P(x+n)F(x+n)-P(x)F(x)) = 0$. Надо доказать, что $\int\limits_{i\mathbb{R}} P(x+2)\phi(x+2)w(x)dx = \int\limits_{i\mathbb{R}} P(x)F(x)w(x)dx$. Заметим, что $w(x) = w(x+2)$ и функция $P(x)w(x)$ голоморфна в полосе $0 \leq \operatorname{Re} x \leq 2$. Отсюда легко получаем, что интегралы действительно равны.

Теперь проверим два условия положительности. Так как w положительна на оси $i\mathbb{R}$, функция ϕ положительна на многочленах вида $f(x)\overline{f}(-x)$.

Также надо проверить положительность $\phi(-\overline{f}(-x)\phi(x+2)P(x+2)) = -\int\limits_{i\mathbb{R}} \overline{f}(-x)\phi(x+2)P(x+2)w(x)dx$. Функция $P(x+2)w(x)$ голоморфна в полосе $-2 < \operatorname{Re} x < 0$. Следовательно, $\int\limits_{i\mathbb{R}} \overline{f}(-x)\phi(x+2)P(x+2)w(x)dx = \int\limits_{i\mathbb{R}} \overline{f}(-x+1)\phi(x+1)P(x+1)w(x-1)dx$. Таким образом, нам надо доказать, что для любого f интеграл $\int\limits_{i\mathbb{R}} (\overline{f}(-x+1)\phi(x+1))(-P(x+1)w(x-1))dx$ больше нуля.

Заметим, что многочле $\overline{f}(-x+1)\phi(x+1)$ положителен на прямой $i\mathbb{R}$. Таким образом остается доказать, что $-P(x+1)w(x-1) > 0$ на прямой $i\mathbb{R}$. Из формулы для $P(x)$ следует, что $P(x+1) > 0$ при $x \in i\mathbb{R}$. Из формулы для w также следует, что $-w(x-1) > 0$ при $x \in i\mathbb{R}$.

Таким образом, мы получаем явную формулу для скалярного произведения на регулярном бимодуле с параметром $P(x)$.

Пусть теперь степень $P(x)$ равна $n = 2m$. Предположим, что все корни многочлена $P(x)$ вещественны. Корни $P(x)$ делятся на пары α, β такие, чт $\alpha + \beta = n$. Сделаем замену переменной так, чтобы корни делились на пары α, β: $\alpha + \beta = 2$. Предположим, что знак старшего члена $P(x)$ равен $(-1)^m$ и $P(x)$ делится на кваратный трехчлен вида $(x-\alpha)(x-\beta)$, где $\alpha + \beta = 2$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Определим линейное отображение из $\mathbb{C}[x]$ в $\mathbb{C}$ с помощью той же самой функции $w(x)$. Тогда аналогичные рассуждения доказывают, что по этому линейному отображения мы получаем инвариантное скалярное произведение на регулярном бимодуле с парамером $P(x)$.

3.2.5 Следствия из теоремы 3.15: отрицательный ответ

Широкий класс параметров описывается следующей теоремой:

Теорема 3.20. Пусть у многочлена $P(x)$ степень равна $n = 2m$, старший коэффициент равен $(-1)^m$, все корни вещественны и не принадлежат отрезку $[0, n]$. Тогда регулярный бимодуль, соответствующий параметру $P(x)$, не унитаризуем.

Эта теорема является следствием из теоремы 3.15 и следующей теоремы:

Теорема 3.21. Пусть у $P(x)$ степень равна $n = 2m$, старший коэффициент равен $(-1)^m$, все корни вещественны и не принадлежат отрезку $[0, n]$. Тогда найдется многочлен $S(x)$, положительный на оси $\operatorname{Re} x = \frac{n}{2}$ такой, что $\operatorname{Re}_0 S(x)P(x) \geq 0$.

Ключевым шагом в доказательстве будет следующая лемма:

Лемма 3.22. Предположим, что $P(x) = -(x-a)(x-b)$, где $a + b = n$, $a < 0$. Пусть $N > 0$, $\varepsilon > 0$ — произвольные вещественные числа. Тогда найдется многочлен $S(x)$ положительный на оси $\operatorname{Re} x = \frac{n}{2}$ и число $M > N$ такие, что

1. Аргумент $P(x)S(x)$ принадлежит отрезку $[-\varepsilon, \varepsilon]$ при $x \in [-iN, iN]$, $x \in [iM, i\infty]$, $x \in [-i\infty, -iM]$.
2. Аргумент $P(x)S(x)$ принадлежит отрезку $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ при $x \in i\mathbb{R}$.

Перед доказательством леммы заметим, что существование M доказывать не нужно:

Утверждение 3.23. Пусть $F(x)$ — произвольный многочлен четной степени $2l$ со старшим коэффициентом $(-1)^l$. Тогда существует такое число M, что $arg\, F(x) \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ при $x \in [-i\infty, -iM] \cup [iM, i\infty]$.

Доказательство. Заметим, что $\frac{F(x)}{(-x^2)^l}$ стремится к единице при x, стремящемся к бесконечности. Из этого легко следует утверждение. $\square$

Доказательство. Легко видеть, что многочлен $P(x)S(x)$ подходит под условия утверждения 3.23. Следовательно, мы можем не доказывать существование M.

Увеличив аргумент в n раз можно считать, что $n = 1$.

Так как $P(x)$ положителен на оси $\operatorname{Re} x = \frac{1}{2}$, достаточно найти многочлен $R(x)$ такой, что

1. $R(x)$ делится на $P(x)$.

2. $R(x)$ положителен на оси $\operatorname{Re} x = \frac{1}{2}$.

3. Аргумент $R(x)$ принадлежит отрезку $[-\varepsilon, \varepsilon]$ при $x \in [-iN, iN]$.

4. Аргумент $R(x)$ принадлежит отрезку $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ при $x \in i\mathbb{R}$.

Если мы найдем такой $R(x)$, то мы возьмем $S(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$. Легко видеть, что $S(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы.

Для удобства мы сначала предъявим голоморфную функцию $R_0(x)$, удовлетворяющую всем условиям. Далее мы будем приближать ее многочленами. Пусть c — положительная константа, $R_0(x) = (e^{c(x-a)} - 1)(e^{c(b-x)} - 1)$. Мы видим, что $R_0(a) = R_0(b) = 0$, то есть $R_0(x)$ делится на $P(x)$. Легко видеть, что $R_0(x)$ положительна на оси $\operatorname{Re} x = \frac{1}{2}$.

Проверим, что при достаточно больших значения c аргумент $R_0(x)$ принадлежит отрезку $[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]$ при всех $x \in i\mathbb{R}$.

Заметим, что $R_0(x) = e^{c(b-a)} + 1 - e^{c(x-a)} - e^{c(b-x)}$. Так как $x \in i\mathbb{R}$, то $|e^{c(x-a)}| = e^{-ca}$, $|e^{c(b-x)}| = e^{cb}$. Следовательно,

$$\operatorname{Re} R_0(x) \geq e^{c(b-a)} - e^{-ca} - e^{cb} + 1 = (e^{cb} - 1)(e^{-ca} - 1)$$

$$ImR_0(x) \leq e^{cb} + e^{-ca}$$

Мы видим, что отношение $\frac{\operatorname{Im} R_0(x)}{\operatorname{Re} R_0(x)}$ оценивается числом, которое стремится к нулю, при c стремящемся к бесконечности. Следовательно, при достаточно больших c аргумент $R_0(x)$ принадлежит отрезку $[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]$ при всех $x \in i\mathbb{R}$.

Теперь мы будем приближать функцию $R_0(x)$ многочленами.

Мы будем выбирать константу c среди натуральных чисел.

Заметим, что функция e^{x-a} на компакте равномерно приближается многочленами $S^1_k(x) = (\frac{k+x-a}{k})^k$. Пусть $L_1 < L_2 < \ldots < L_{c-1} < L_c$ — последовательность параметров, которую мы определим позднее. Мы видим, что функция $e^{c(x-a)}$ на компакте равномерно приближается многочленами $S^1_{L_1}(x)S^1_{L_2}(x)\cdots S^1_{L_c}(x)$. Аналогично функция $e^{c(b-x)}$ на компакте равномерно приближается многочленами $S^2_{L_1}(x)\cdots S^2_{L_c}(x)$, где $S^2_k(x) = (\frac{k+b-x}{k})^k$.

Рассмотрим многочлен $R(x) = (S^1_{L_1}(x)\cdots S^1_{L_c}(x)-1)(S^2_{L_1}(x)\cdots S^2_{L_c}(x)-1)$. Так как $S^1_k(a) = S^2_k(b) = 1$ при любом значении k, то $R(a) = R(b) = 0$.

Отрезок $[-iN, iN]$ компактен и аргумент $R_0(x)$ на этом множестве принадлежит отрезку $[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]$. Следовательно, при достаточно больших N_1 аргумент $R(x)$ на множестве $[-iN, iN]$ принадлежит отрезку $[-\varepsilon, \varepsilon]$.

Несложно понять, что $R(x)$ положителен на оси $\operatorname{Re} x = \frac{1}{2}$.

Остается подобрать параметры так, что аргумент $R(x)$ будет принадлежать отрезку $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ на всей оси $i\mathbb{R}$.

Выберем положительное число ε_1 такое, что $\frac{\pi}{4} - (c+1)\varepsilon_1 > \frac{1}{2}$.

При достаточно больших c и L_1 аргумент $R(x)$ отличается от аргумента $S^1_{L_1}(x)\cdots S^1_{L_c}(x)S^2_{L_1}(x)\cdots S^1_{L_c}(x)$ меньше, чем на ε_1, на всей оси. То есть достаточно доказывать, что аргумент $S^1_{L_1}(x)\cdots S^1_{L_c}(x)S^2_{L_1}(x)\cdots S^1_{L_c}(x)$ принадлежит отрезку $[-\frac{\pi}{4} + (c+1)\varepsilon_1, \frac{\pi}{4} - (c+1)\varepsilon_1]$.

Утверждение 3.24. Пусть K — ограниченное подмножество $i\mathbb{R}$. Тогда для всех достаточно больших натуральных чисел m аргумент $S^1_m(x)S^2_m(x)$ лежит на отрезке $[-\varepsilon_1, \varepsilon_1]$ при $x \in K$ и лежит на отрезке $[-\frac{\pi}{4} + (c+1)\varepsilon_1, \frac{\pi}{4} - (c+1)\varepsilon_1]$ при $x \in i\mathbb{R}$.

Доказательство. Последовательность многочленов $S^1_m(x)S^2_m(x)$ равномерно на K приближает функцию $e^{c(x-a)}e^{c(b-x)} = e^{c(b-a)}$, поэтому при достаточно большом m аргумент $S^1_m(x)S^2_m(x)$ лежит на отрезке $[-\varepsilon_1, \varepsilon_1]$ при $x \in K$. Остается доказать, что при всех значениях $x \in i\mathbb{R}$ аргумент $S^1_m(x)S^2_m(x)$ лежит на отрезке $[-\frac{\pi}{4}+(c+1)\varepsilon_1, \frac{\pi}{4}-(c+1)\varepsilon_1]$. Мы выбрали ε_1 таким образом, что отрезок $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ лежит внутри отрезка $[-\frac{\pi}{4}+(c+1)\varepsilon_1, \frac{\pi}{4}-(c+1)\varepsilon_1]$. Осталось доказать, что аргумент $S_m^1(x)S_m^2(x)$ лежит внутри $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Заметим, что $S_m^1(x)S_m^2(x) = (\frac{x+m-a}{m} \cdot \frac{m+b-x}{m})^m$. То есть надо оценить, в каких пределах меняется аргумент многочлена $F(x) = (x+m-a)(m+b-x)$. Вещественная часть $F(x)$ при $x = it, t \in \mathbb{R}$ равна $t^2 + (m-a)(m+b)$, мнимая часть $F(x)$ равна $t(a+b)$. Следовательно, тангенс угла наклона равен $\frac{t(a+b)}{t^2+(m-a)(m+b)}$. Максимум тангенса достигается при $t^2 = (m-a)(m+b)$ и равен $\frac{a+b}{2\sqrt{(m-a)(m+b)}}$. По условию $a+b = 1$, $a < 0$, $b > 0$. Следовательно, тангенс ограничен величиной $\frac{1}{2m}$. Значит и сам угол наклона ограничен величиной $\frac{1}{2m}$. Таким образом, аргумент $S_m^1(x)S_m^2(x)$ лежит в пределах $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. $\square$

У нас осталось ограничения снизу на число L_1 из предыдущих рассуждений. Воспользовавшись утвержденим получаем, что при достаточно большом L_1 аргумент $S_{L_1}^1(x)S_{L_1}^2(x)$ лежит на отрезке $[-\frac{\pi}{4} + (\ +1)\varepsilon_1, \frac{\pi}{4} - (\ +1)\varepsilon_1]$. Выберем L_1 так, чтобы оно удовлетворяло ограничениям снизу из предыдущих рассуждений и из утверждения 3.24. По утверждению 3.23 найдется ограниченное множество K_1 такое, что вне K_1 аргумент $S_{L_1}^1(x)S_{L_1}^2(x)$ лежит на отрезке $[-\varepsilon_1, \varepsilon_1]$. Применим утверждение 3.24 для множества K_1. Получим число L_2 такое, что на K_1 аргумент $S_{L_2}^1(x)S_{L_2}^2(x)$ лежит на отрезке $[-\varepsilon_1, \varepsilon_1]$. Применим утверждние 3.23 и получим множество K_2 такое, что вне K_2 аргумент $S_{L_2}^1(x)S_{L_2}^2(x)$ лежит на отрезке $[-\varepsilon_1, \varepsilon_1]$. Не умаляя общности мы можем считать, что $K_1 \subset K_2$ и $L_1 < L_2$.

Повторяя это рассуждение мы получим последовательность ограниченных множеств $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_c$ и чисел $L_1 < L_2 < \cdots < L_c$ таких, что аргумент многочлена $S_{L_i}^1(x)S_{L_i}^2(x)$ лежит на отрезке $[-\varepsilon_1, \varepsilon_1]$ при x из $(i\mathbb{R} \setminus K_i) \cup K_{i-1}$ и лежит на отрезке $[-\frac{\pi}{4} + (+1)\varepsilon_1, \frac{\pi}{4} - (+1)\varepsilon_1]$ при x из $K_i \setminus K_{i-1}$. Мы видим, что аргумент произведения лежит на отрезке $[-\frac{\pi}{4} + \varepsilon_1, \frac{\pi}{4} - \varepsilon_1]$ при всех $x \in i\mathbb{R}$. Таким образом, мы нашли искомую последовательность $L_1, \ldots, L_c$, что завершает доказательство леммы. $\square$

Теперь докажем теорему.

Пусть $P(x) = P_1(x) \ldots P_n(x)$, где сумма корней $P_i(x)$ равна n и старший член отрицательный. Воспользуемся леммой для $P_1(x)$ с $N = N_1 = 0$, получим число M_1. Воспользуемся леммой для $P_2(x)$ и $N = M_1 + 1$, получим число M_2. Повторим эти действия для $P_3, \ldots, P_n$. Получим последовательность многочленов $S_1(x), \ldots, S_n(x)$ таких, что $P_i(x)S_i(x)$ обладает аргументом от $-\varepsilon$ до ε вне множества $[-iM_i, -iN_i] \cup [iN_i, iM_i]$ и от $-\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{4}$ на $[-iM_i, -iN_i] \cup [iN_i, iM_i]$.

Так как отрезки $[N_i, M_i]$ не пересекаются, у произведения в каждой точке аргумент лежит на отрезке $-n\varepsilon - \frac{\pi}{4}, n\varepsilon + \frac{\pi}{4}$. При достаточно малом ε получаем, что $\operatorname{Re} P(x)S_1(x) \cdots S_n(x) \geq 0$ при $x \in i\mathbb{R}$. По построению многочлен $S_1(x) \cdots S_n(x)$ положителен на оси $\operatorname{Re} x = \frac{n}{2}$. Теорема доказана.

3.3 Различные конструкции

В этом разделе мы рассмотрим различные конструкции, которые могут быть полезны для рассмотрения произвольных неприводимых бимодулей Хариш-Чандры.

3.3.1 Двойственный бимодуль

Пусть M — бимодуль Хариш-Чандры над $\mathcal{A}$, M^* — двойственное пространство. На M^* естественным образом вводится структура $\mathcal{A}$-бимодуля. Несложно видеть, что множество функционалов ϕ, на которые $\operatorname{ad} e$ и $\operatorname{ad} f$ действуют нильпотентно, а $\operatorname{ad} h$ конечномерно, образует подмодуль в M^*.

Обозначим получившийся подмодуль за $M^\vee$.

Инвариантная форма на M задает отображение $\mathcal{A}$-бимодулей из M в $M_1^\vee$, где $M_1^\vee$ получен из $M^\vee$ изменением действия алгебры $\mathcal{A}$: элемент $a \in \mathcal{A}$ действует как $r(a)$. Таким образом, изучение двойственных бимодулей может быть полезно в классификации инвариантных положительно определенных форм.

Разберем в качестве примера случай $n = 2$. В этом случае $\mathcal{A} = U(\mathfrak{sl}_2)/(ef + fe + \frac{h^2}{2} - \frac{\lambda^2}{2} - \lambda)$. Мы помним, что в этом случае $\operatorname{ad} e$, $\operatorname{ad} f$, $\operatorname{ad} h$ образуют алгебру Ли $\mathfrak{sl}_2$.

Пусть $M = \oplus_{i \in I} U_i$ — разложение бимодуля Хариш-Чандры M в прямую сумму неприводимых $\mathfrak{sl}_2$-модулей. Следовательно, $M^* = \prod_{i \in I} U_i^*$. Для всех неприводимых бимодулей множество I счетно и размерность U_i стремится к бесконечности. Пусть u — элемент неприводимого $\mathfrak{sl}_2$-модуля старшего веса k, натуральное число l удовлетворяет неравенству $2l + 2$ меньше k. В этом случае либо $(\operatorname{ad} e)^l u \neq 0$, либо $(\operatorname{ad} f)^l u \neq 0$. Отсюда несложно выводится, что $M^\vee = \oplus_{i \in I} U_i^*$.

Таким образом, мы знаем структуру $M^\vee$ как $\mathfrak{sl}_2$-модуля. Вспомним, как устроено разложение неприводимых $\mathcal{A}$-бимодулей Хариш-Чандры в прямую сумму неприводимых $\mathfrak{sl}_2$-модулей. Обозначим за U_i неприводимый $\mathfrak{sl}_2$-модуль старшего веса i.

1. Во всех случаях $\mathcal{A} = \bigoplus\limits_{i=0}^{\infty} U_{2i}$.

2. В случае $\lambda \in \mathbb{Z}$, $\lambda \neq -1$ возникает два неприводимых бимодуля. Пусть V — конечномерное представление $\mathcal{A}$ размерности d. Тогда $V \otimes V^*$ и $I = Ann(V)$ — два неприводимых бимодуля. Имеем $V \otimes V^* = \bigoplus\limits_{i=0}^{d-1} U_{2i}$, $I = \bigoplus\limits_{i=d}^{\infty} U_{2i}$.

3. В случае $\lambda \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ имеем два неприводимых бимодуля: $\mathcal{A}$ и M. Тогда $M = \bigoplus\limits_{i=0}^{\infty} U_{2i+1}$.

Утверждение 3.25. Выполнено следующее

1. Пусть M — неприводимый бимодуль Хариш-Чандры. Тогда $M^\vee$ изоморфен M.

2. В случае, когда бимодуль $\mathcal{A}$ приводим, имеем точную последовательность $0 \to V \otimes V^* \to \mathcal{A}^\vee \to I \to 0$.

Доказательство.

1. Сразу следует из того, как неприводимые бимодули Хариш-Чандры раскладываются на неприводимые $\mathfrak{sl}_2$-модули.

2. Инвариантная форма на $\mathcal{A}$ дает отображение из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}^\vee$: единица отправляется в любой ненулевой элемент U_0^*. Так как форма аннулирует I, образ будет изоморфен $V \otimes V^*$. Сравнивая разложения на неприводимые $\mathfrak{sl}_2$ мы видим, что фактор $\mathcal{A}^\vee / V \otimes V^*$ изоморфен I.

□

Таким образом, в случае $\lambda \in \mathbb{Z}$ мы получаем инвариантную форму на идеале с помощью отображения $I \cong I^\vee$. Если бы был какой-то способ без счета доказать, что получившаяся форма положительно определена, это бы нам сильно помогло в общем случае.

3.3.2 Случай алгебры Вейля

Пусть $\mathcal{A} = \mathbb{C}\langle x, y\rangle/(xy - yx - 1)$ — алгебра Вейля. Это деформация $\mathbb{C}[x, y] = \mathbb{C}[x, y]^{C_1}$, поэтому к ней можно применить результаты про регулярный бимодуль. Если мы рассмотрим стандартную вещественную форму на $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, то получим, что форм нет: пространство форм имеет размерность 0. Следовательно, имеет смысл рассматривать другую вещественную форму на $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$.

На $\mathcal{A}$ действует группа C_2: образующая C_2 переводит x в $-x$, y в $-y$. Разложим $\mathcal{A}$ в на изотипические компоненты относительно этого действия: $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{C_2} \oplus M$.

Алгебра $\mathcal{A}^{C_2}$ является деформацией алгебры $\mathbb{C}[x, y]^{C_2}$. Элементы x^2, $-y^2$, xy соответствуют стандартным образующим e, f, h. Мы рассматривали антилинейную инволюцию τ: $e \mapsto -f$, $f \mapsto -e$, $h \mapsto -h$ на алгебре $\mathcal{A}^{C_2}$, и с ее помощью получали антилинейную инволюцию на $\mathcal{A}^{C_2} \otimes \mathcal{A}^{C_2}$: $e \otimes 1 \mapsto -1 \otimes f$, аналогично с оставшимися образующими.

Введем на $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ антилинейную инволюцию такую, что ее сужение на $\mathcal{A}^{C_2} \otimes \mathcal{A}^{C_2}$ совпадает со стандартной антилинейной инволюцией: $x \otimes 1 \mapsto 1 \otimes y$, $y \otimes 1 \mapsto -1 \otimes x$, $1 \otimes x \mapsto -y \otimes 1$, $1 \otimes y \mapsto x \otimes 1$. Сужение этой антилинейной инволюции на $\mathcal{A}^{C_n}$ для нечетных n не будет совпадать со стандартной антилинейной инволюцией.

Так как алгебре $\mathcal{A}^{C_2}$ соответствует параметр $\lambda = -\frac{1}{2}$, из теоремы 3.5 следует, что на $\mathcal{A}^{C_2}$ и M можно ввести $\mathcal{A}^{C_2}$-инвариантное скалярное произведение. Введем скалярное произведение на $\mathcal{A}$ следующим образом: $\mathcal{A}^{C_2}$ и M ортогональны, на $\mathcal{A}^{C_2}$ и M введены $\mathcal{A}^{C_2}$-инвариантные скалярные произведения таким образом, что $(x, x) = \frac{1}{2}(1, 1)$.

Теорема 3.26. Получившееся скалярное произведение $\mathcal{A}$-инвариантно.

Доказательство. Достаточно проверять два условия:

$$(xu, v) = (u, vy) \tag{30}$$

$$(ux, v) = -(u, yv) \tag{31}$$

Достаточно проверять равенства (30), (31) в случае, когда u лежит в неприводимом $\mathfrak{sl}_2$-подмодуле U_k старшего веса k. Из теории представлений $\mathfrak{sl}_2$ следует, что $xu \in U_{k-1} \oplus U_{k+1}$, поэтому достаточно проверять равенства в случае, когда v из U_{k-1} или U_{k+1}. Мы видим, что один из элементов u, v принадлежит $\mathcal{A}^{C_2}$.

Разберем два случая:

1. Элемент u принадлежит $\mathcal{A}^{C_2}$. Из $\mathcal{A}^{C_2}$-инвариатности получаем $(xu, v) = (x, \tau(u)v)$, $(u, vy) = (1, \tau(u)vy)$. Таким образом, достаточно проверять (30) для пары $u = 1$, v произвольный. Также из $\mathcal{A}^{C_2}$-инвариантности получаем $(ux, v) = (x, v\tau(u)$, $(u, yv) = (1, yv\tau(u))$. Таким образом, достаточно проверять (31) для пары $u = 1$, v произвольный.

2. Элемент v принадлежит $\mathcal{A}^{C_2}$. Из $\mathcal{A}^{C_2}$-инвариантности получаем $(xu, v) = (xu\tau(v), 1)$, $(u, vy) = (u\tau(v), y)$. Таким образом, достаточно проверять (30) для пары u произвольный, $v = 1$. Аналогично достаточно проверять (31) для пары u произвольный, $v = 1$.

Таким образом, мы можем считать, что $u = 1$ или $v = 1$. Также можно считать, что оставшийся элемент лежит в U_1.

Пусть $u = 1$. Надо проверить равенства $(x, v) = (1, vy)$, $(x, v) = -(1, yv)$ Достаточно проверить их для $v \in U_1$, то есть $v = x$ или $v = y$. Представление U_2 имеет базис $x^2, y^2, xy + yx$. Следовательно, $(1, xy) = -(1, yx) = \frac{1}{2}(1, xy - yx) = \frac{1}{2}(1, 1)$. Случай $v = x$ доказан. В случае $v = y$ имеем $(x, y) = 0 = (1, y^2)$.

Случай $v = 1$ разбирается аналогично.

$\square$

3.3.3 Представление Данкла

Пусть $k = (k_0, \dots, k_{n-1})$ — набор комплексных чисел. В статье [5] построена следующая конструкция некоммутативных деформаций $\mathbb{C}[x, y]^{C_n}$: в алгебре $\mathcal{D}(\mathbb{C} \setminus 0) = \mathbb{C}[x, \frac{1}{x}, \frac{\partial}{\partial x}]$ следует взять элементы $e = x^n$, $f = (\frac{\partial}{\partial x} - \frac{nk_{n-1}x}{x})(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{nk_{n-2}}{x}) \cdots (\frac{\partial}{\partial x} - \frac{nk_0}{x})$, $h = x\frac{\partial}{\partial x}$. Легко видеть, что $[h, e] = ne$, $[h, f] = -nf$.

Чтобы выразить ef через h, подействуем ef на формальный символ x^a: $ef(x^a) = x^n(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{nk_{n-1}}{x})(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{nk_{n-2}}{x}) \cdots (\frac{\partial}{\partial x} - \frac{nk_0}{x})(x^a) = (a - nk_0)x^n(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{nk_{n-1}}{x}) \cdots (\frac{\partial}{\partial x} - \frac{nk_1}{x})x^{a-1} = (a - nk_0)(a - nk_1 - 1) \dots (a - nk_{n-1} - n + 1)x^a$.

Так как $hx^a = ax^a$, мы получаем, что $ef = (h - nk_0) \dots (h - nk_{n-1} - n + 1)$.

Аналогично имеем $fe = (h + n - nk_0) \dots (h + n - nk_{n-1} - n + 1)$.

Получаем, что подалгебра, порожденная элементами e, f, h изоморфна некоммутативной деформации $\mathcal{A}$ алгебры $\mathbb{C}[x, y]^{C_n}$. И таким образом можно получить любую некоммутативную деформацию.

Если все числа k_i целые неотрицательные, то e, f, h действуют на свободный $\mathbb{C}[x^n]$-подмодуль модуля $\mathbb{C}[x]$ с образующими x^{nk_0}, x^{nk_1+1},…,$x^{nk_{n-1}+n-1}$. Последний модуль называется модулем квази-инвариантов действия группы C_n на $\mathbb{C}[x]$. В статье [4] доказано, что в этом случае $\mathcal{A}$ изоморфно алгебре инвариантных дифференциальных операторов $\mathcal{D}(Q_k)^{C_n}$.

Изотипические компонентия действия C_n в $\mathcal{D}(Q_k)$ — это бимодули Хариш-Чандры над $\mathcal{A}$. Таким образом, мы получили явную реализацию некоторых бимодулей, не изоморфных $\mathcal{A}$.

Список литературы

[1] Ivan Losev, Deformations of symplectic singularities and Orbit method for semisimple Lie algebras. arXiv:1605.00592 [math.RT]

[2] Ivan Losev, Dimensions of irreducible modules over W-algebras and Goldie ranks. arXiv:1209.1083 [math.RT]

[3] I. Losev. Finite dimensional representations of W-algebras. Duke Math J. 159(2011), n.1, 99-143

[4] Berest, Y., & Chalykh, O. (2011). Quasi-invariants of complex reflection groups. Compositio Mathematica, 147(3), 965-1002. doi:10.1112/S0010437X10005063

[5] C. F. Dunkl and E. M. Opdam, Dunkl operators for complex reflection groups, Proc. London Math. Soc. (3) 86(1) (2003), 70–108

[6] A. Premet. Special transverse slices and their enveloping algebras. Adv. Math. 170(2002), 1-55.

[7] Peter Slodowy, Simple Singularities and Simple Algebraic Groups, Springer, Lecture Notes in Mathematics, 1980.

[8] Д. И. Панюшев, “Рациональность особенностей и горенштейновость нильпотентных орбит”, Функц. анализ и его прил., 25:3 (1991), 76–78; Funct. Anal. Appl., 25:3 (1991), 225–226

[9] Taylor, M. E. (1986), Noncommutative harmonic analysis, Mathematical Surveys and Monographs, 22, American Mathematical Society, ISBN 978-0-8218-1523-6, Chapter 9, SL$(2, \mathbb{C})$ and more general Lorentz groups

[10] T .J. Hodges, Noncommutative deformations of type-A Kleinian singularities, J. Algebra 161 (1993), 271-290.

[11] J. N. Bernstain, S. I. Gelfand, Tensor products of finite and infinite dimensional representations of semisimple Lie algebras, Compositio Mathematica, tome 41, no 2 (1980), p. 245-285.