Санкт-Петербургский государственный университет

ГВОЗДЕВСКИЙ Павел Борисович

Выпускная квалификационная работа

Надгруппы некоторых подсистемных подгрупп в группах Шевалле над кольцами

Уровень образования: Специалитет
Направление 01.05.01 "Фундаментальные математика и механика"
Образовательная программа СМ.5007. "Фундаментальные математика и механика"
Профиль: Алгебра и теория чисел

Научный руководитель: профессор математики математико-механического факультета, доктор ф.м. наук, профессор, Вавилов Н. А.

Рецензент: Доцент математического факультета НИУ ВШЭ, кандидат ф.м. наук, доцент, Смирнов Е. Ю.

Санкт-Петербург
2019

Saint Petersburg State University

GVOZDEVSKY Pavel Borisovich

Qualification Research Paper

Overgroups of certain subsystem subgroups in Chevalley groups over rings

Specialist Degree program
Specialty 01.05.01 “Fundamental Mathematics and Mechanics“
Educational program CM.5007. “Fundamental Mathematics and Mechanics“
Department: Algebra and number theory

Advisor: Professor of mathematics at Mathematics and Mechanics Faculty, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Vavilov N. A.

Reviewer: Associate Professor at HSE Faculty of Mathematics, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Smirnov E. Y.

Saint Petersburg
2019

Содержание

Аннотация. Эта работа посвящена задаче описания надгрупп подсистемной подгруппы в группе Шевалле над коммутативным кольцом. Мы будем предполагать, что система корней имеет тип ADE, а также, что подсистема, определяющая подгруппу "достаточно большая". В этих предположениях мы докажем, что решетка надгрупп разбивается в дизъюнктное объединение, так называемых, "сэндвичей". Эти "сэндвичи" находятся во взаимно-однозначном соответствии с сетями идеалов кольца.

1. Введение

В настоящей работе мы изучаем надгруппы подсистемных подгрупп в исключительных группах. Принципиальным отличием от всех предшествующих работ является то, что для извлечения элементарных корневых элементов мы используем подсистему типа $2A_1$. Во всех предшествующих работах эту роль выполняли неприводимые подсистемы ранга не меньше 2.

Чтобы поместить результаты настоящей работы в контекст, напомним основные имеющиеся на данный момент результаты.

- В работах [4], [1], [2], [3], [6], [14] изучаются надгруппы (элементарных) подсистемных подгрупп в полной линейной группе. В этом случае подсистемные подгруппы — это группы блочно-диагональных матриц.
- В работе [7] эти результаты были обобщены на случай ортогональных и симплектических групп в предположении $2 \in R^*$. Затем в диссертации Александра Щеголева [24] это предположение было снято, а также решена задача для унитарных групп (см. также [18] и [19]).
- Случай полной линейной группы допускает некоторые обобщения на некоммутативные (но удовлетворяющие какому-то другому условию) кольца. Этому посвящены работы [13], [16] и [9].
- Задача описания надгрупп подсистемных подгрупп в исключительных группах (над коммутативным кольцом) была поставлена в работе [10] (проблема 7). Первым шагом в решении этой задачи служит работа [11], в которой перечислены пары (Φ, Δ), для которых стандартное описание гипотетически возможно, а также для каждой из них найдены количество идеалов, определяющих уровень, и соотношения между ними.
- В работе [12] мною было получено единообразное решение данной задачи для подсистем $A_{l-1} \leqslant D_l$, $D_5 \leqslant E_6$ и $E_6 \leqslant E_7$. Это в точности случаи, в которых подсистемная подгруппа является подгруппой Леви, и соответствующий унипотентный радикал абелев.
- Отметим также, что результат работы [15] описывающий надгруппы F_4 в E_6 хоть и не является частным случаем нашей задачи, но тесно с ней связан.

Напомним, как обычно выглядит ответ в задачах, похожих на нашу.

Пусть $\mathcal{L}$ — решетка подгрупп абстрактной группы G, обладающих некоторым свойством. Говорят, что $\mathcal{L}$ удовлетворяет sandwich classification, если она разбивается в дизъюнктное объединение "сэндвичей"

$$\mathcal{L} = \bigsqcup_i L(F_i, N_i),$$
$$L(F_i, N_i) = \{H\colon F_i \leqslant H \leqslant N_i\},$$

где i пробегает некоторое множество индексов. Причем F_i нормально в N_i. Изучение таких решеток сводится к изучению факторгрупп N_i/F_i. Гипотезы, выдвинутые в работе [11], утверждают, что в группах Шевалле решетки подгрупп, содержащих элементарную подсистемную подгруппу для достаточно большой подсистемы, удовлетворяют sandwich classification для определенных F_i и N_i. Такие теоремы также называются *стандартным описанием.*

Однако, (по крайней мере) для случаев, когда подсистема имеет неприводимую компоненту типа A_1, формулировки гипотез в работе [11] следует модифицировать, так как иначе из них бы следовала нормальность элементарной подгруппы в $\mathrm{SL}(2, R)$, что не всегда верно.

Основной результат настоящей работы похож на sandwich classification, но подгруппа F_i, вообще говоря, не будет нормальна в N_i.

Работа [8] посвящена A_2 доказательству структурных теорем, то есть доказательству использующему элемент вида $x_\alpha(\xi)x_\beta(\zeta)$, где $\angle(\alpha, \beta) = \frac{2\pi}{3}$, для попадания в параболичекую подгруппу. Наш метод доказательства частично основан на замечании после доказательства основной леммы работы [8], согласно которому, для попадания в параболическую подгруппу можно использовать элемент вида $x_\alpha(\xi)x_\beta(\zeta)$, где $\angle(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2}$. Такой способ будет называться $2A_1$-доказательством, и он позволяет изучать надгруппы подсистемных подгрупп для подсистем типа nA_1.

2. Основные обозначения

2.1. **Системы корней и группы Шевалле.** Пусть Φ — неприводимая система корней, $\mathcal{P}$ — решетка, промежуточная между решеткой корней $\mathcal{Q}(\Phi)$ и решеткой весов $\mathcal{P}(\Phi)$, и R — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Обозначим через $G(\Phi, R) = G_{\mathcal{P}}(\Phi, R)$ соответствующую группу Шевалле, через $T(\Phi, R) = T_{\mathcal{P}}(\Phi, R)$ — ее расщепимый максимальный тор, и для каждого корня $\alpha \in \Phi$ обозначим через $X_\alpha = \{x_\alpha(\xi),\, \xi \in R\}$ корневую унипотентную подгруппу, относительно данного тора. Элементарную подгруппу, порожденную всеми X_α, мы будем обозначать через $E(\Phi, R) = E_{\mathcal{P}}(\Phi, R)$.

В дальнейшем мы будем всегда предполагать, что Φ — система с простыми связями.

Пусть Δ — подсистема в Φ. Обозначим через $E(\Delta, R)$ подгруппу в $G(\Phi, R)$, порожденную всеми X_α, где $\alpha \in \Delta$. Можно показать, что она будет элементарной подгруппой группы Шевалле $G(\Delta, R)$, вложенной в $G(\Phi, R)$ для подходящего выбора решетки между $\mathcal{Q}(\Delta)$ и $\mathcal{P}(\Delta)$.

Группы Вейля систем Φ и Δ будут обозначаться через $W(\Phi)$ и $W(\Delta)$ соответственно.

Мы будем решать задачу описания подгрупп, промежуточных между $E(\Delta, R)$ и $G(\Phi, R)$. Про пару (Φ, Δ) мы сделаем предположение, которое мы опишем позже.

2.2. **Аффинные схемы.** Функтор $G(\Phi, -)$ из категории колец в категорию групп является аффинной групповой схемой (групповая схема Шевалле—Демазюра). Это значит, что его композиция с забывающим функтором в категорию множеств представима

$$G(\Phi, R) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[G], R).$$

Кольцо $\mathbb{Z}[G]$, которое его представляет, называется *кольцом регулярных функций* на схеме $G(\Phi, -)$.

Элемент $g_{\mathrm{gen}} \in G(\Phi, \mathbb{Z}[G])$, соответствующий тождественному гомоморфизму колец, называется *общим элементом* схемы $G(\Phi, -)$. Этот элемент обладает универсальным свойством: для любого кольца R и любого $g \in G(\Phi, R)$ существует единственный гомоморфизм колец

$$f\colon \mathbb{Z}[G] \to R$$

такой, что $f_*(g_{\mathrm{gen}}) = g$. Ознакомиться с методом общего элемента можно изучив статью [25].

2.3. **Гомоморфизм редукции и конгруэнц подгруппы.** Если X — групповая схема, R — кольцо и $I \trianglelefteq R$ идеал, то проекцию на фактор-кольцо $R \to R/I$, а также индуцированный ей гомоморфизм групп $X(R) \to X(R/I)$ мы будем обозначать через ρ_I.

Подгруппа $G(\Phi, R, I) = \mathrm{Ker}(\rho_I)$ в группе $G(\Phi, R)$ называется *главной конгруэнц подгруппой* уровня I.

2.4. **Параболические подгруппы.** Пусть $\alpha_1,\alpha_2 \in \Phi$ и $\alpha_1 \perp \alpha_2$. Введем обозначение для следующего линейного функционала на линейной оболочке Φ.

$$\varpi_{\alpha_1,\alpha_2}(\gamma) = (\alpha_1 + \alpha_2, \gamma).$$

Так как Φ — система с простыми связями, несложно видеть, что для любого $\gamma \in \Phi$ мы имеем $\varpi_{\alpha_1,\alpha_2}(\gamma) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ (возможно значения 1 и -1 не принимаются). Множество корней, на которых значение функционала $\varpi_{\alpha_1,\alpha_2}$ неотрицательно, является параболическим. Мы будем обозначать через P_{α_1,α_2} соответствующую параболическую подгруппу.

Введем еще два обозначения:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\alpha_1,\alpha_2} &= \{\gamma \in \Phi\colon \varpi_{\alpha_1,\alpha_2}(\gamma) = 2\},\\
U'_{\alpha_1,\alpha_2} &= \langle x_\gamma(\xi)\colon \gamma \in \Sigma_{\alpha_1,\alpha_2}, \xi \in R\rangle \leqslant P_{\alpha_1,\alpha_2}.
\end{aligned}$$

Иными словами, группа U'_{α_1,α_2} — это унипотентный радикал группы P_{α_1,α_2} в случае, если функционал $\varpi_{\alpha_1,\alpha_2}$ задает 3-градуировку на системе корней (то есть значения 1 и -1 на корнях не принимаются). Если же функционал $\varpi_{\alpha_1,\alpha_2}$ задает невырожденную 5-градуировку, то группа U'_{α_1,α_2} — это коммутант унипотентного радикала.

2.5. **Комбинаторное условие.** Пусть пара (Φ, Δ) фиксирована. Пусть $\alpha_1,\alpha_2 \in \Delta$ и $\alpha_1 \perp \alpha_2$. Будем говорить, что пара корней α_1,α_2 *подходящая*, если для любых различных корней $\gamma_1,\gamma_2 \in \Sigma_{\alpha_1,\alpha_2} \setminus \Delta$ найдется корень $\beta \in \Delta$ такой, что $\varpi_{\alpha_1,\alpha_2}(\beta) = 0$, и $(\beta, \gamma_1) \neq (\beta, \gamma_2)$.

Мы готовы сформулировать условие на пару (Φ, Δ):

$$\begin{array}{c}\text{Для любого корня } \gamma \in \Phi \setminus \Delta \text{ найдется подходящая пара}\\ \text{ортогональных корней } \alpha_1,\alpha_2 \in \Delta \text{ такая что } (\alpha_1, \gamma) = (\alpha_2, \gamma) = -1\end{array}. \qquad (*)$$

С этого момента мы будем всегда предполагать, что это условие выполнено.

2.6. **Теоретико-групповые обозначения.**

- Напомним, что для абстрактных групп $A, B \leqslant G$ транспортером из A в B называется множество
$$\mathrm{Tran}_G(A, B) = \{g \in G \mid gAg^{-1} \subseteq B\}.$$
- Если группа G действует на множестве X, $x \in X$ и $Y \subseteq X$, то будем обозначать через $\mathrm{Stab}_G(x)$ и $\mathrm{Stab}_G(Y)$ стабилизатор элемента x и стабилизатор подмножества Y (не поточечный, а как подмножества).
- Коммутаторы предполагаются левонормированными
$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}.$$
- Верхний индекс означает сопряжение
$${}^g h = ghg^{-1}, \qquad h^g = g^{-1}hg.$$
- Если X — подмножество в группе G, то через $\langle X\rangle$ мы будем обозначать подгруппу, порожденную множеством X.

2.7. **Сети идеалов.** *Сетью идеалов* мы будем называть набор идеалов $\sigma = \{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in\Phi}$ кольца R, удовлетворяющий следующим условиям.

(1) Если α,β и $\alpha + \beta \in \Phi$, то $\sigma_\alpha\sigma_\beta \subseteq \sigma_{\alpha+\beta}$.
(2) Если $\alpha \in \Delta$, то $\sigma_\alpha = R$.

Каждой надгруппе $E(\Delta, R) \leqslant H \leqslant G(\Phi, R)$ мы сопоставим сеть идеалов $\mathrm{lev}(H)$, которая называется *уровнем* надгруппы H, и определяется следующим образом:

$$\mathrm{lev}(H)_\alpha = \{\xi \in R \mid x_\alpha(\xi) \in H\}.$$

Из работы [11] следует, что этот набор множеств будет сетью идеалов. В этой же работе сделано следующее наблюдение

Лемма 1. *Если σ — сеть идеалов, то идеал σ_α зависит только от орбиты корня α поддействием группы Вейля $W(\Delta)$.*

2.8. **Алгебры Ли.** Будем обозначать через $L(\Phi,\mathbb{Z})$ целочисленную линейную оболочку базиса Шевалле в комплексной алгебре Ли типа Φ (смотри [17]), затем положим $L(\Phi,R)=L(\Phi,\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}}R$. Это алгебра Ли над кольцом R, на которой естественным образом действует группа $G(\Phi,R)$ (присоединенное представление). Для элементов $g\in G(\Phi,R)$ и $v\in L(\Phi,R)$ будем обозначать присоединенное действие через ${}^{g}v$.

Предупреждение. Алгебра Ли $L(\Phi,R)$ вообще говоря не изоморфна алгебре Ли алгебраической группы $G(\Phi,R)$ (смотри [23]). Но, если мы рассматриваем односвязную группу, то изоморфна, причем канонически.

Будем обозначать через $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Phi}$ и $\{h_i\}_{i=1}^{\operatorname{rk}\Phi}$ — базис Шевалле алгебры Ли $L(\Phi,R)$. Ее торическую подалгебру, порожденную элементами h_i будем обозначать через D.

Для каждого элемента $v\in L(\Phi,R)$ будем обозначать через v^α и v^i его коэффициенты в разложении по базису Шевалле.

Скобку Ли мы будем обозначать через $[\cdot,\cdot]$. Конфликта обозначений с групповым коммутатором возникать не должно. Из контекста всегда будет видно, где происходят вычисления в группе, а где в алгебре.

Для каждой сети идеалов σ положим

$$L(\sigma)=D\oplus\bigoplus_{\alpha\in\Phi}\sigma_\alpha e_\alpha\leqslant L(\Phi,R),$$

Из определения сети немедленно следует

Лемма 2. *Подмодуль $L(\sigma)$ является также подалгеброй Ли в $L(\Phi,R)$.*

Далее, положим

$$L'(\sigma)=\langle\{\xi e_\alpha\colon \alpha\in\Phi,\xi\in\sigma_\alpha\}\rangle\leqslant L(\sigma),$$

где угловые скобки означают порождение как алгебры Ли. Сделаем два наблюдения.

Лемма 3. *Пусть σ — сеть идеалов. Тогда*

(1) $[L(\sigma),L(\sigma)]\leqslant L'(\sigma)$.
(2) $L(\sigma)=\{v\in L(\Phi,R)\colon [v,L'(\sigma)]\leqslant L(\sigma)\}$.

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Во втором утверждении включение левой части в правую тоже очевидно, докажем обратное включение. Пусть элемент v лежит в правой части, и пусть $\gamma\in\Phi$. Нужно доказать, что v^γ лежит в σ_γ. Если $\gamma\in\Delta$, то доказывать нечего, пусть $\gamma\notin\Delta$. Из условия $(*)$ в частности следует, что найдется $\alpha\in\Delta$ такой, что $(\alpha,\gamma)=-1$, то есть $\alpha+\gamma\in\Phi$. Тогда

$$[v,e_\alpha]\in[v,L'(\sigma)]\leqslant L(\sigma),$$

и следовательно $v^\gamma=\pm[v,e_\alpha]^{\alpha+\gamma}\in\sigma_{\alpha+\gamma}$. Но, согласно лемме 1, $\sigma_{\alpha+\gamma}=\sigma_\gamma$. $\square$

2.9. **Сетевые подгруппы.** Для каждой сети идеалов σ положим

$$E(\Phi,\Delta,R,\sigma)=\langle x_\alpha(\xi)\colon \alpha\in\Phi,\xi\in\sigma_\alpha\rangle,$$
$$S(\Phi,\Delta,R,\sigma)=\mathrm{Stab}_{G(\Phi,R)}(L(\sigma)).$$

Для краткости, когда остальные параметры будут ясны из контекста, мы будем писать просто $E(\sigma)$ и $S(\sigma)$.

Эти две подгруппы будут играть роль нижней и верхней "булки сэндвича" соответственно. Таким образом, модификация гипотез, сформулированных в работе [11], состоит в замене нормализатора на подгруппу $S(\sigma)$.

Сделаем несложное наблюдение.

Лемма 4. *Пусть σ — сеть идеалов. Тогда*

$$S(\sigma)=\{g\in G(\Phi,R)\colon\ {}^{g}L'(\sigma)\leqslant L(\sigma)\ \text{и}\ {}^{g^{-1}}L'(\sigma)\leqslant L(\sigma)\}.$$

Доказательство. Включение левой части в правую очевидно, докажем обратное включение. Пусть элемент g лежит в правой части. Согласно лемме 3, чтобы проверить включение ${}^{g}L(\sigma)\leqslant L(\sigma)$ достаточно проверить включение

$$[\,{}^{g}L(\sigma),L'(\sigma)]\leqslant L(\sigma).$$

Но

$$[\,{}^{g}L(\sigma),L'(\sigma)]={}^{g}[L(\sigma),\,{}^{g^{-1}}L'(\sigma)]\leqslant{}^{g}[L(\sigma),L(\sigma)]\leqslant{}^{g}L'(\sigma)\leqslant L(\sigma).$$

Аналогично ${}^{g^{-1}}L(\sigma)\leqslant L(\sigma)$. Значит, $g\in S(\sigma)$. □

3. Формулировка основного результата

Все кольца (кроме алгебр Ли) предполагаются коммутативными, ассоциативными и с единицей.

Пусть дана надгруппа $E(\Delta,R)\leqslant H\leqslant G(\Phi,R)$. Будем говорить, что надгруппа H *псевдостандартна*, если

$$H\leqslant S(\mathrm{lev}(H)).$$

Для данных Φ, Δ и R будем говорить, что имеет место *псевдостандартное описание* надгрупп, если любая надгруппа $E(\Delta,R)\leqslant H\leqslant G(\Phi,R)$ псевдостандартна.

Позже будет доказано, что $\mathrm{lev}(S(\sigma))=\sigma$ для любой сети идеалов σ, в частности любая сеть идеалов может быть уровнем надгруппы. Легко видеть, что отсюда следует, что псевдостандартное описание можно переформулировать следующим образом: для любой надгруппы $E(\Delta,R)\leqslant H\leqslant G(\Phi,R)$ существует единственная сеть идеалов σ, такая что

$$E(\sigma)\leqslant H\leqslant S(\sigma).$$

Приставку "псевдо" мы добавляем в связи с тем, что подгруппа $E(\sigma)$, вообще говоря, не нормальна в $S(\sigma)$, то есть формально такой результат не является sandwich classification.

Настоящая работа посвящена доказательству следующей теоремы.

Теорема. *Пусть R — коммутативное кольцо. Пусть Φ — неприводимая система корней с простыми связями, Δ — ее подсистема, удовлетворяющая условию $(*)$. Тогда*

(1) *Если кольцо R не имеет поля вычетов из двух элементов, то имеет место псевдостандартное описание надгрупп.*

(2) *Пусть дополнительно известно, что для $R = \mathbb{F}_2$ имеет место псевдостандартное описание надгрупп. Тогда оно имеет место для произвольного R.*

4. Пересечение с U'_{α_1,α_2}

Предложение 1. *Пусть H — надгруппа $E(\Delta, R)$ уровня σ, и пусть α_1,$\alpha_2 \in \Delta$ — подходящая пара ортогональных корней. Тогда*

$$H \cap U'_{\alpha_1,\alpha_2} \leqslant E(\sigma).$$

Доказательство. Пусть $g \in H \cap U'_{\alpha_1,\alpha_2}$. Тогда

$$g = \prod_{i=1}^{k} x_{\gamma_i}(\xi_i),$$

где γ_i — различные корни из $\Sigma_{\alpha_1,\alpha_2}$, докажем, что $\xi_i \in \sigma_i$ для любого i. Предположим противное. Из всех g, для которых это не так, выберем тот, у которого число k минимальное возможное. Тогда $\xi_i \notin \sigma_{\gamma_i}$ для каждого i, поскольку иначе, в силу абелевости U'_{α_1,α_2}, этот множитель можно было бы убрать, уменьшив k. В частности $\gamma_i \notin \Delta$.

Если $k = 1$, то, с учетом вышесказанного, мы получаем противоречие с тем, что $\operatorname{lev}(H) = \sigma$. Значит $k \geqslant 2$. По определению подходящей пары найдется корень $\beta \in \Delta$ такой, что $\varpi_{\alpha_1,\alpha_2}(\beta) = 0$, но $(\beta, \gamma_1) \neq (\beta, \gamma_2)$. Одно из чисел (β, γ_1) и (β, γ_2) не равно нулю, не умаляя общности — первое. Далее, заменив, если нужно, β на $-\beta$, можно считать, что $(\beta, \gamma_1) = -1$. Таким образом, $\gamma_1 + \beta \in \Phi$, но $\gamma_2 + \beta \notin \Phi$.

Положим

$$g_1 = [x_\beta(1), g] = \left[x_\beta(1), \prod_{i=1}^{k} x_{\gamma_i}(\xi_i)\right] = \prod_{i=1}^{k} [x_\beta(1), x_{\gamma_i}(\xi_i)].$$

Последнее равенство выполнено силу того, что $x_\beta(1) \in P_{\alpha_1,\alpha_2}$ и, значит, нормализует U'_{α_1,α_2}, а также того, что группа U'_{α_1,α_2} абелева.

Каждый множитель в этом разложении равен либо единице, либо элементарному корневому элементу с корнем из $\Sigma_{\alpha_1,\alpha_2}$. Первый множитель равен $x_{\beta+\gamma_1}(\pm\xi_1)$, где $\xi_1 \notin \sigma_{\gamma_1} = \sigma_{\gamma_1+\beta}$ (лемма 1). При этом количество нетривиальных множителей меньше, чем k, поскольку второй множитель равен единице, что противоречит предположению о минимальности k. □

5. Тандемы

Будем называть элемент множества $G(\Phi, R) \times L(\Phi, R)$ *тандемом*, если он имеет вид $({}^h(x_\alpha(\xi)), {}^h(\xi e_\alpha))$, где $\alpha \in \Phi$, $\xi \in R$ и $h \in G(\Phi, R)$.

На самом деле, можно показать, что первая компонента тандема восстанавливается из второй, но для наших целей это не существенно.

Замечание. Для данного корня $\beta \in \Phi$ любой тандем $({}^{h}(x_\alpha(\xi)),\ {}^{h}(\xi e_\alpha))$ можно записать в виде $({}^{h'}(x_\beta(\xi')),\ {}^{h'}(\xi' e_\beta))$. При этом h' получается из h подкруткой на элемент расширенной группы Вейля, и $\xi' = \pm\xi$.

Лемма 5. *Первые компоненты тандемов действуют на элемент $v \in L(\Phi, R)$ следующим образом.*

$$^{({}^{h}x_\alpha(\xi))}v = v + [\,{}^{h}(\xi e_\alpha), v] - \xi({}^{h^{-1}}v)^{-\alpha} \cdot {}^{h}(\xi e_\alpha).$$

Доказательство. Достаточно доказать равенство

$$^{x_\alpha(\xi)}v = v + [(\xi e_\alpha), v] - v^{-\alpha} \cdot (\xi^2 e_\alpha), \qquad (\#)$$

потому что, если подставить в это равенство ${}^{h^{-1}}v$ вместо v и подейстоввать на обе части элементом h, то мы получим требуемое равенство.

Равенство (#) достаточно проверять в случае, когда R — это кольцо многочленов над $\mathbb{Z}$, а ξ и все коэффициенты вектора v — независимые переменные. В этом случае $2 \in R$ — не делитель нуля, и мы можем написать, что

$$^{x_\alpha(\xi)}v = v + [(\xi e_\alpha), v] + \frac{1}{2}[(\xi e_\alpha), [(\xi e_\alpha), v]].$$

Остается проверить, что

$$[e_\alpha, [e_\alpha, v]] = -2v^{-\alpha} \cdot e_\alpha,$$

а это следует из соотношений на базис Шевалле. □

Лемма 6. *Пусть (g, l) — тандем и $\beta \in \Phi$. Тогда*

$$^{g}e_\beta = e_\beta + [l, e_\beta] - l^{-\beta} \cdot l.$$

Доказательство. Согласно замечанию 5, можно считать, что $(g, l) = ({}^{h}(x_\beta(\xi)),\ {}^{h}(\xi e_\beta))$. По предыдущей лемме, достаточно проверить, что

$$l^{-\beta} = \xi({}^{h^{-1}}e_\beta)^{-\beta}.$$

Это достаточно проверять в случае, когда $R = \mathbb{Z}[G][\xi]$, и $h = g_{\mathrm{gen}}$ — общий элемент. Пусть χ — форма Киллинга на $L(\Phi, R)$. Тогда

$$\begin{aligned} l^{-\beta}\chi(e_{-\beta}, e_\beta) = \chi(l, e_\beta) = \chi({}^{h}(\xi e_\beta), e_\beta) = \xi\chi(e_\beta, {}^{h^{-1}}e_\beta) = \xi({}^{h^{-1}}e_\beta)^{-\beta}\chi(e_\beta, e_{-\beta}) = \\ = \xi({}^{h^{-1}}e_\beta)^{-\beta}\chi(e_{-\beta}, e_\beta). \end{aligned}$$

Так как в $\mathbb{Z}[G][\xi]$ нет делителей нуля, на $\chi(e_{-\beta}, e_\beta)$ можно сократить. □

Предложение 2. *Пусть (g, l) — тандем, и пусть σ — сеть идеалов. Тогда*

$$g \in S(\sigma) \Leftrightarrow l \in L(\sigma).$$

Доказательство. Импликация $l \in L(\sigma) \Rightarrow g \in S(\sigma)$ следует из леммы 5.

Обратно, пусть $g \in S(\sigma)$ и $\gamma \in \Phi \setminus \Delta$. Нужно показать, что $l^\gamma \in \sigma_\gamma$. Возьмем $\alpha \in \Delta$, такой что $\alpha + \gamma \in \Phi$ (следствие условия $(*)$). Тогда ${}^g e_\alpha \in L(\sigma)$, откуда, по леммам 6 и 1

$$l^{-\alpha} l^\gamma = -({}^g e_\alpha)^\gamma \in \sigma_\gamma, \tag{1}$$

$$l^{-\alpha} l^{\gamma+\alpha} \pm l^\gamma = -({}^g e_\alpha)^{\gamma+\alpha} \in \sigma_{\gamma+\alpha} = \sigma_\gamma. \tag{2}$$

А также ${}^g e_{-\alpha} \in L(\sigma)$, откуда

$$l^\alpha l^\gamma \pm l^{\gamma+\alpha} = -({}^g e_{-\alpha})^\gamma \in \sigma_\gamma. \tag{3}$$

Умножая (3) на $l^{-\alpha}$, и то ли прибавляя, то ли вычитая (2), мы получаем

$$l^{-\alpha} l^\alpha l^\gamma \pm l^\gamma \in \sigma_\gamma. \tag{4}$$

Из (4) и (1) мы получаем, что $l^\gamma \in \sigma_\gamma$. □

Следствие 1. Если σ — сеть идеалов, то $\mathrm{lev}(S(\sigma)) = \sigma$. В частности $E(\sigma) \leqslant S(\sigma)$.

Доказательство. Применим предложение 2 к тандемам $(x_\alpha(\xi), \xi e_\alpha)$. □

Следствие 2. Пусть σ — сеть идеалов. Тогда

$$S(\sigma) = \mathrm{Tran}_{G(\Phi,R)}(E(\sigma), S(\sigma)) \cap \left(\mathrm{Tran}_{G(\Phi,R)}(E(\sigma), S(\sigma))\right)^{-1}.$$

Доказательство. Включение левой части в правую очевидно, докажем обратное включение. По лемме 4, достаточно проверить, что

$${}^g(\xi e_\alpha) \in L(\sigma)$$

для любого $\alpha \in \Phi$, $\xi \in \sigma_\alpha$ и любого g из правой части (так как правая чать замкнута относительно взятия обратного). А это так по предложению 2, поскольку $({}^g x_\alpha(\xi), {}^g(\xi e_\alpha))$ — тандем, и, по предположению его первая компонента лежит в $S(\sigma)$. □

Следствие 3. Пусть H — надгруппа $E(\Delta, R)$. Тогда H псевдостандартна тогда и только тогда, когда для любого тандема (g, l), если $g \in H$, то $l \in L(\sigma)$.

Доказательство. Первая часть следует из второй по предложению 2, докажем следствие в обратную сторону. Пусть H удовлетворят второй части. По лемме 4, достаточно проверить, что

$${}^h(\xi e_\alpha) \in L(\sigma)$$

для любого $\alpha \in \Phi$, $\xi \in \sigma_\alpha$ и любого $h \in H$ (так как H замкнута относительно взятия обратного). А это так, поскольку $({}^h x_\alpha(\xi), {}^h(\xi e_\alpha))$ — тандем, и его первая компонента лежит в H. □

Лемма 7. *Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in \Phi$, $\alpha_1 \perp \alpha_2$, и пусть (g, l) — тандем такой, что l лежит в алгебре Ли L_{α_1,α_2}, где*

$$L_{\alpha_1,\alpha_2} = D \oplus \bigoplus_{\varpi_{\alpha_1,\alpha_2}(\alpha) \geqslant 0} R \cdot e_\alpha \leqslant L(\Phi, R).$$

Тогда $g \in P_{\alpha_1,\alpha_2}$.

Предупреждение. Если мы рассматриваем не односвязную группу $G(\Phi, R)$, то алгебру $'L_{\alpha_1,\alpha_2}$ не следует путать с алгеброй Ли $\mathrm{Lie}(P_{\alpha_1,\alpha_2})$ подгруппы P_{α_1,α_2}.

Доказательство. Из леммы 5 следует, что $g \in \mathrm{Stab}_{G(\Phi,R)}(L_{\alpha_1,\alpha_2})$. Требуемое утверждение, таким образом, следует из следующей леммы. ☐

Лемма 8. *Пусть* $\alpha_1,\alpha_2 \in \Phi$, $\alpha_1 \perp \alpha_2$. *Тогда* $P_{\alpha_1,\alpha_2} = \mathrm{Stab}_{G(\Phi,R)}(L_{\alpha_1,\alpha_2})$.

Доказательство. Для начала разберем случай, когда группа $G(\Phi, R)$ односвязная. В этом случае $L_{\alpha_1,\alpha_2} = \mathrm{Lie}(P_{\alpha_1,\alpha_2})$.

Очевидно, что $P_{\alpha_1,\alpha_2} \subseteq \mathrm{Stab}_{G(\Phi,R)}(\mathrm{Lie}(P_{\alpha_1,\alpha_2}))$. Пусть

$$\varphi\colon P_{\alpha_1,\alpha_2} \to \mathrm{Stab}(\mathrm{Lie}(P_{\alpha_1,\alpha_2}))$$

— вложение, рассматриваемое как морфизм групповых схем над $\mathbb{Z}$ (нужно заметить, что $\mathrm{Stab}(\mathrm{Lie}(P_{\alpha_1,\alpha_2}))$ задан уравнениями над $\mathbb{Z}$, а именно, некоторые матричные коэффициенты в присоединенном представлении должны быть равны нулю). Нам нужно показать, что это изоморфизм.

Согласно теореме 1.6.1 работы [26], с учетом того, что параболическая подгруппа гладкая (над $\mathbb{Z}$) и, в частности, плоская, достаточно проверить, что для любого алгебраически замкнутого поля L:

(1) $\dim((P_{\alpha_1,\alpha_2})_L) \geqslant \dim_L \mathrm{Lie}((\mathrm{Stab}(\mathrm{Lie}(P_{\alpha_1,\alpha_2})))_L)$,
(2) отображения $\varphi(L)$ и $\varphi(L[\varepsilon]/(\varepsilon^2))$ инъективны,
(3) все элементы $\mathrm{Stab}(\mathrm{Lie}(P_{\alpha_1,\alpha_2}))(L)$, нормализующие связную компоненту единицы P_{α_1,α_2} (то есть просто P_{α_1,α_2}), лежат в P_{α_1,α_2}.

Второй пункт выполнен. Третий следует из того, что параболические подгруппы самонормализуемы. Поскольку схема P_{α_1,α_2} гладкая, чтобы доказать первый пункт, достаточно проверить, что

$$\mathrm{Lie}((P_{\alpha_1,\alpha_2})_L) \geqslant \mathrm{Lie}((\mathrm{Stab}(\mathrm{Lie}(P_{\alpha_1,\alpha_2})))_L).$$

Присоединенное действие правой части стабилизирует $\mathrm{Lie}((P_{\alpha_1,\alpha_2})_L)$ (если группа стабилизирует подпространство, то ее алгебра Ли — тоже). Равенство, таким образом, следует из того, что $\mathrm{Lie}((P_{\alpha_1,\alpha_2})_L)$ самонормализуема.

Теперь рассмотрим произвольную изогению группы $G(\Phi, R)$. Пусть $h \in G(\Phi, R)$, тогда найдутся строго плоское расширение S кольца R и элемент односвязной группы $h' \in G_{\mathrm{sc}}(\Phi, S)$, переходящий в h при естественном гомоморфизме. Таким образом,

$$h \in P_{\alpha_1,\alpha_2} \Leftrightarrow h' \in (P_{\alpha_1,\alpha_2})_{\mathrm{sc}} \Leftrightarrow h' \in \mathrm{Stab}(L_{\alpha_1,\alpha_2}) \Leftrightarrow h \in \mathrm{Stab}(L_{\alpha_1,\alpha_2}),$$

где (P_{α_1,α_2}) — параболическая подгруппа $G_{\mathrm{sc}}(\Phi, S)$. Что и требовалось. ☐

6. Битандемы

Будем называть элемент множества $G(\Phi, R) \times L(\Phi, R)$ *битандемом*, если он имеет вид $(\,^h(x_{\alpha_1}(\xi)x_{\alpha_2}(\zeta)),\ ^h(\xi e_{\alpha} + \zeta e_{\alpha_2}))$, где $\alpha_1,\alpha_2 \in \Phi$, $\alpha_1 \perp \alpha_2$, $\xi,\zeta \in R$ и $h \in G(\Phi, R)$.

Аналогично, семейство $(g(t), l(t)) \in G(\Phi, R) \times L(\Phi, R)$, $t \in R$ будем называть *битандемом с параметром*, если

$$g(t) = {}^{h}((x_{\alpha_1}(t\xi))x_{\alpha_2}(t\zeta)),$$
$$l(t) = {}^{h}(t\xi e_{\alpha_1} + t\zeta e_{\alpha_2}).$$

В этом случае мы для краткости будем обозначать $g = g(1)$, $l = l(1)$.

Лемма 9. *Пусть $(g(t), l(t))$ — битандем с параметром, и пусть $v \in L(\Phi, R)$. Тогда найдется $w \in L(\Phi, R)$ такой, что для любого $t \in R$*

$$^{g(t)}v = v + t[l, v] + t^2 w.$$

При этом $2w = [l, [l, v]]$.

Доказательство. Как и в лемме 5 достаточно доказывать для $h = 1$ и для кольца, в котором 2 не делитель нуля (t следует считать еще одной свободной переменной). А в такой ситуации все тривиально. □

Пусть α_1,$\alpha_2 \in \Phi$, $\alpha_1 \perp \alpha_2$, и пусть (g, v) — тандем. Положим

$$(g_1(t), l_1(t)) = ({}^{g}(x_{\alpha_1}(tl^{-\alpha_2})x_{\alpha_2}(-tl^{-\alpha_1})),\ {}^{g}(tl^{-\alpha_2}e_{\alpha_1} - tl^{-\alpha_1}e_{\alpha_2})).$$

Битандем с параметром, полученный таким образом, и соответствующий битандем $(g, l) = (g(1), l(1))$ будем называть *специальными* относительно пары α_1, α_2.

Лемма 10. *Пусть $(g_1(t), l_1(t))$ — специальный относительно пары α_1, α_2, битандем с параметром. Тогда $g_1(t) \in P_{\alpha_1,\alpha_2}$ для любого $t \in R$.*

Доказательство. Во-первых, достаточно разобрать случай, в котором $R = \mathbb{Z}[G][\xi, t]$, $g = {}^{g_{\text{gen}}}x_\alpha(\xi)$, $l = {}^{g_{\text{gen}}}(\xi e_\alpha)$, и битандем с параметром $(g_1(t), g_2(t))$ получен из тандема (g, l) как выше.

Во-вторых, заметим, что $l_1 \in L_{\alpha_1,\alpha_2}$ (смотри лемму 7). Действительно, по лемме 6

$$l_1 = {}^{g}(l^{-\alpha_2}e_{\alpha_1} - l^{-\alpha_1}e_{\alpha_2}) = (l^{-\alpha_2}e_{\alpha_1} - l^{-\alpha_1}e_{\alpha_2}) + [l, (l^{-\alpha_2}e_{\alpha_1} - l^{-\alpha_1}e_{\alpha_2})] -$$
$$-l^{-\alpha_2}l^{-\alpha_1} \cdot l + l^{-\alpha_1}l^{-\alpha_2} \cdot l = (l^{-\alpha_2}e_{\alpha_1} - l^{-\alpha_1}e_{\alpha_2}) + [l, (l^{-\alpha_2}e_{\alpha_1} - l^{-\alpha_1}e_{\alpha_2})].$$

Градуировка системы корней Φ функционалом $\varpi_{\alpha_1,\alpha_2}$ порождает градуировку алгебры Ли $L(\Phi, R)$, элементы e_{α_1} и e_{α_2} имеют градуировку 2, поэтому однородные компоненты каждого слагаемого в сумме выше имеют неотрицательную градуировку, а это в точности означает, что $l_1 \in L_{\alpha_1,\alpha_2}$.

В-третьих, $g_1(t) \in \mathrm{Stab}(L_{\alpha_1,\alpha_2})$. Действительно, если $v \in L_{\alpha_1,\alpha_2}$, то, по лемме 9

$$^{g_1(t)}v = v + t[l_1, v] + t^2 w.$$

Первые два слагаемых лежат в L_{α_1,α_2}, а про w мы знаем, что

$$2w = [l_1, [l_1, v]] \in L_{\alpha_1,\alpha_2}.$$

Но так как 2 не делитель нуля в $\mathbb{Z}[G][\xi, t]$, мы можем заключить, что $w \in L_{\alpha_1,\alpha_2}$. Таким образом,

$$^{g_1(t)}L_{\alpha_1,\alpha_2} \leqslant L_{\alpha_1,\alpha_2}.$$

Заменяя t на $-t$ получим обратное включение.

Остается применить лемму 8. $\square$

7. Случай поля

Предложение 3. *Пусть $R = K$ — поле, отличное от $\mathbb{F}_2$. Тогда имеет место псевдостандартное описание надгрупп $E(\Delta, K)$.*

Доказательство. Пусть H — надгруппа $E(\Delta, K)$ уровня σ. Согласно следствию 3, достаточно проверить, что для любого тандема (g, l), если $g \in H$, то $l \in L(\sigma)$.

Итак, пусть (g, l) — тандем, и пусть $g \in H$. Предположим, что $l \notin L(\sigma)$. Это значит, что найдется $\gamma \in \Phi \setminus \Delta$ такой, что $\sigma_\gamma = (0)$, но $l^\gamma \neq 0$. Согласно $(*)$, найдется подходящая пара ортогональных векторов α_1,$\alpha_2 \in \Delta$ такая, что $(\gamma, \alpha_1) = (\gamma, \alpha_2) = -1$.

Случай 1 $l^{-\alpha_1} = 0$. Рассмотрим тандем $(g_1, l_1) = ({}^{g}x_{\alpha_1}(1),\ {}^{g}e_{\alpha_1})$. Заметим, что, по лемме 6 мы имеем $l_1 = e_{\alpha_1} + [l, e_{\alpha_1}] \in \mathrm{Lie}(P_{\alpha_1,\alpha_2})$. Таким образом, по построению и лемме 7 мы имеем $g_1 \in H \cap P_{\alpha_1,\alpha_2}$.

Далее, рассмотрим тандем $(g_2, l_2) = ({}^{g_1}x_{\alpha_2}(1),\ {}^{g_1}e_{\alpha_2})$. Так как U'_{α_1,α_2} нормальна в P_{α_1,α_2}, с учетом предложения 1, мы имеем

$$g_2 \in H \cap U'_{\alpha_1,\alpha_2} \leqslant E(\sigma) \leqslant S(\sigma).$$

Тогда, по предложению 2 мы имеем $l_2 \in L(\sigma)$.

С другой стороны $\gamma+\alpha_1$ и $\gamma+\alpha_1+\alpha_2 \in \Phi$, и, по лемме 1 мы имеем $\sigma_{\gamma+\alpha_1+\alpha_2} = \sigma_\gamma = 0$, но

$$l_2^{\gamma+\alpha_1+\alpha_2} = (e_{\alpha_2} + [l_1, e_{\alpha_2}])^{\gamma+\alpha_1+\alpha_2} = \pm l_1^{\gamma+\alpha_1} = (e_{\alpha_1} + [l, e_{\alpha_1}])^{\gamma+\alpha_1} = \pm l^\gamma \neq 0$$

(в первом равенстве мы воспользовались леммой 6 и тем, что $l_1 \in \mathrm{Lie}(P_{\alpha_1,\alpha_2})$, и поэтому $l_1^{-\alpha_2} = 0$). Противоречие.

Случай 2 $l^{-\alpha_1} \neq 0$. Построим, специальный относительно пары α_1,α_2, битандем с параметром

$$(g_1(t), l_1(t)) = ({}^{g}(x_{\alpha_1}(tl^{-\alpha_2})x_{\alpha_2}(-tl^{-\alpha_1})),\ {}^{g}(tl^{-\alpha_2}e_{\alpha_1} - tl^{-\alpha_1}e_{\alpha_2})).$$

Затем построим тандем $(g_2, l_2) = ({}^{g_1(t)}x_{\alpha_1}(1),\ {}^{g_1(t)}e_{\alpha_1})$, где t — элемент поля K, который мы определим позже.

Вне зависимости от t, по лемме 10 мы имеем $g_1(t) \in P_{\alpha_1,\alpha_2}$, и, как и в предыдущем случае, $g_2 \in H \cap U'_{\alpha_1,\alpha_2} \leqslant S(\sigma)$, и $l_2 \in L(\sigma)$.

С другой стороны, по лемме 9

$$l_2^{\gamma+\alpha_1+\alpha_2} = (e_{\alpha_1} + t[l_1, e_{\alpha_1}] + t^2 w)^{\gamma+\alpha_1+\alpha_2} = \pm l_1^{\gamma+\alpha_2} t + w^{\gamma+\alpha_1+\alpha_2} t^2.$$

Это многочлен от t степени не больше, чем 2, и он не нулевой, так как из доказательства леммы 10 мы имеем

$$l_1^{\gamma+\alpha_2} = ((l^{-\alpha_2}e_{\alpha_1} - l^{-\alpha_1}e_{\alpha_2}) + [l, (l^{-\alpha_2}e_{\alpha_1} - l^{-\alpha_1}e_{\alpha_2})])^{\gamma+\alpha_2} = \pm l^{-\alpha_1} l^\gamma \neq 0.$$

Таким образом, так как, по предположению $|K| > 2$, мы можем выбрать t отличным от корней этого многочлена, и, как и в предыдущем случае, получить противоречие. $\square$

8. Лемма о редукции

Следующая лемма позволит нам свести нашу задачу для кольца R сначала к его локальным факторкольцам, а затем, к полям вычетов.

Лемма 11. *Пусть H — надгруппа $E(\Delta, R)$ и пусть $I \trianglelefteq R$ — идеал. Тогда*

$$\rho_I(\mathrm{lev}(H)) = \mathrm{lev}(\rho_I(H)),$$

где $\rho_I(\sigma)_\alpha = \rho_I(\sigma_\alpha) \trianglelefteq R/I$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{lev}(H) = \sigma$. Для удобства будем писать $\overline{X} = \rho_I(X)$ вне зависимости от природы X. Фиксируем $\gamma \in \Phi \setminus \Delta$. Нам нужно доказать, что $\overline{\sigma_\gamma} = \mathrm{lev}(\overline{H})_\gamma$. Включение левой части в правую очевидно, докажем обратное включение. Пусть $\xi \in \mathrm{lev}(\overline{H})_\gamma$. Это значит, что существует $h \in H$, такой что $\overline{h} = x_\gamma(\xi)$. Согласно $(*)$, найдется подходящая пара ортогональных векторов $-\alpha_1$, $\alpha_2 \in \Delta$, такая что $(\gamma, -\alpha_1) = (\gamma, \alpha_2) = -1$. Заметим,что в этом случае пара α_1,α_2 также подходящая, поскольку получается из исходной отражением относительно $\alpha_1 \in \Delta$.

Построим тандем $(g, l) = ({}^h x_{-\alpha_1}(1),\ {}^h e_{-\alpha_1})$. Затем построим битандем, специальный относительно пары α_1,α_2,

$$(g_1, l_1) = ({}^g(x_{\alpha_1}(l^{-\alpha_2})x_{\alpha_2}(-l^{-\alpha_1})),\ {}^g(l^{-\alpha_2}e_{\alpha_1} - l^{-\alpha_1}e_{\alpha_2})).$$

Наконец, положим $g_2 = [g_1, x_{\alpha_1}(1)]$.

Согласно лемме 10, тому факту, что U'_{α_1,α_2} нормальна в P_{α_1,α_2}, а также предложению 1, мы имеем $g_2 \in H \cap U'_{\alpha_1,\alpha_2} \leqslant S(\sigma)$. Откуда несложно видеть, что $\overline{g_2} \in S(\overline{\sigma})$.

С другой стороны, производя вычисления по модулю идеала I, мы получаем

$$\overline{g} = {}^{x_\gamma(\xi)}x_{-\alpha_1}(1) = x_{\gamma-\alpha_1}(\pm\xi)x_{-\alpha_1}(1),$$
$$\overline{l} = {}^{x_\gamma(\xi)}e_{-\alpha_1} = e_{-\alpha_1} \pm \xi e_{\gamma-\alpha_1},$$

затем,

$$\overline{g_1} = {}^{x_{\gamma-\alpha_1}(\pm\xi)x_{-\alpha_1}(1)}(x_{\alpha_1}(0)x_{\alpha_2}(-1)) = {}^{x_{\gamma-\alpha_1}(\pm\xi)x_{-\alpha_1}(1)}x_{\alpha_2}(-1) = {}^{x_{\gamma-\alpha_1}(\pm\xi)}x_{\alpha_2}(-1) =$$
$$= x_{\gamma-\alpha_1+\alpha_2}(\pm\xi)x_{\alpha_2}(-1),$$

и, наконец,

$$\overline{g_2} = [x_{\gamma-\alpha_1+\alpha_2}(\pm\xi)x_{\alpha_2}(-1), x_{\alpha_1}(1)] = [x_{\gamma-\alpha_1+\alpha_2}(\pm\xi), x_{\alpha_1}(1)] = x_{\gamma+\alpha_2}(\pm\xi).$$

Таким образом, $x_{\gamma+\alpha_2}(\pm\xi) \in S(\overline{\sigma})$, то есть по следствию 1 и лемме 1 мы имеем $\xi \in \overline{\sigma}_{\gamma+\alpha_2} = \overline{\sigma}_\gamma$, что и требовалось. □

9. Сведение к локальным кольцам с нильпотентным максимальным идеалом

Для нетеровых колец лемма 11 сразу позволяет свести задачу к локальным кольцам с нильпотентным максимальным идеалом. Необходимо лишь сделать следующее теоретико-кольцевое наблюдение.

Предложение 4. *Пусть R — нетерово кольцо σ — сеть идеалов. Тогда*

$$S(\sigma) = \bigcap_{\mathfrak{M},k} \rho_{\mathfrak{M}^k}^{-1}(S(\rho_{\mathfrak{M}^k}(\sigma))),$$

где $\mathfrak{M}$ пробегает множество максимальных идеалов кольца R, а k — множество натуральных чисел.

Доказательство. Включение левой части в правую очевидно, докажем обратное включение.

Для любого нетерова кольца S естественное отображение

$$S \to \prod_{\mathfrak{M}\in \operatorname{Max} S,\, k\in\mathbb{N}} S/\mathfrak{M}^k$$

инъективно (это следует из инъективности отображения в произведения локализаций и теоремы Крулля о пересечении. Применив это к кольцам $S = R/\sigma_\alpha$, с учетом того, что $\mathfrak{M}^k \subseteq \rho_{\sigma_\alpha}^{-1}(\rho_{\sigma_\alpha}(\mathfrak{M})^k)$, мы получим, что

$$\sigma_\alpha = \bigcap_{\mathfrak{M}\in \operatorname{Max} R,\, k\in\mathbb{N}} \rho_{\mathfrak{M}^k}^{-1}(\rho_{\mathfrak{M}^k}(\sigma_\alpha)).$$

Следовательно,

$$L(\sigma) = \bigcap_{\mathfrak{M}\in \operatorname{Max} R,\, k\in\mathbb{N}} \rho_{\mathfrak{M}^k}^{-1}(L(\rho_{\mathfrak{M}^k}(\sigma))).$$

Правая часть равенства, которого мы хотим доказать, стабилизирует каждую подалгебру $\rho_{\mathfrak{M}^k}^{-1}(L(\rho_{\mathfrak{M}^k}(\sigma)))$, следовательно, она стабилизирует $L(\sigma)$, то есть лежит в $S(\sigma)$. $\square$

Следствие 4. Пусть R — нетерово кольцо, и пусть H — надгруппа $E(\Delta, R)$, и пусть $\rho_{\mathfrak{M}^k}(H)$ псевдостандартна для любого $\mathfrak{M} \in \operatorname{Max}(R)$ и любого $k \in \mathbb{N}$. Тогда H псевдостандартна.

Доказательство. Предложение 4 + лемма 11. $\square$

10. Сведение к полям

Чтобы свести задачу к случаю поля, нам понадобится несколько технических лемм.

Лемма 12. *Пусть H — надгруппа $E(\Delta, R)$ уровня σ, и пусть $I \trianglelefteq R$ — нильпотентный идеал. Тогда*

$$(HT(\Phi, R)) \cap G(\Phi, R, I) \leqslant T(\Phi, R)E(\sigma).$$

Доказательство. Пусть $I^k = 0$ будем действовать индукцией по k.

База $k = 2$. Пусть $hg \in G(\Phi, R, I)$, где $h \in H$ и $g \in T(\Phi, R)$. Так как идеал I нильпотентен, для произвольного выбора порядка на системе Φ

$$G(\Phi, R, I) \leqslant T(\Phi, R, I)U(\Phi, R, I)U^-(\Phi, R, I),$$

где

$$T(\Phi, R, I) = T(\Phi, R) \cap G(\Phi, R, I),$$
$$U(\Phi, R, I) = \langle x_\alpha(\xi)\colon \alpha \in \Phi^+, \xi \in I\rangle,$$
$$U^-(\Phi, R, I) = \langle x_\alpha(\xi)\colon \alpha \in \Phi^+, \xi \in I\rangle.$$

Это хорошо известное утверждение можно найти, например, в работе [20] (предложение 2.3). Таким образом,

$$hg = g' \prod_{\beta\in\Phi} x_\beta(\xi_\beta),$$

где $g' \in T(\Phi, R, I)$ и $\xi_\beta \in I$. Покажем, что $\xi_\gamma \in \sigma_\gamma$ для любого $\gamma \in \Phi \setminus \Delta$. Согласно $(*)$, найдется подходящая пара ортогональных векторов α_1, $\alpha_2 \in \Delta$, такая что $(\gamma, \alpha_1) = (\gamma, \alpha_2) = -1$. Положим $g_1 = [x_{\alpha_1}(1), [x_{\alpha_2}(1), hg]]$.

Заметим, что $g_1 \in H$, поскольку

$$[x_{\alpha_2}(1), hg] = [x_{\alpha_2}(1), h] \cdot {}^h[x_{\alpha_2}(1), g] = [x_{\alpha_2}(1), h] \cdot {}^h x_{\alpha_2}(\varepsilon) \in H.$$

С другой стороны, так как $I^2 = 0$, группа $G(\Phi, R, I)$ нормальна и абелева. Следовательно,

$$g_1 = [x_{\alpha_1}(1), [x_{\alpha_2}(1), g']] \cdot \prod_{\beta\in\Phi} [x_{\alpha_1}(1), [x_{\alpha_2}(1), x_\beta(\xi_\beta)]] =$$
$$= \prod_{\beta\in\Phi} [x_{\alpha_1}(1), [x_{\alpha_2}(1), x_\beta(\xi_\beta)]] = x_{\alpha_1}(\zeta) \prod_{\{\beta\in\Phi\colon (\beta,\alpha_1)=(\beta,\alpha_2)=-1\}} x_{\beta+\alpha_1+\alpha_2}(\pm\xi_\beta).$$

Здесь первый множитель — это $[x_{\alpha_1}(1), [x_{\alpha_2}(1), x_{-\alpha_2}(\xi_{-\alpha_2})]]$, поскольку, с учетом того, что $\xi_{-\alpha_2}^2 = 0$, мы имеем $[x_{\alpha_2}(1), x_{-\alpha_2}(\xi_{-\alpha_2})]] \in x_{\alpha_2}(\pm\xi_{-\alpha_2})T(\Phi, R, I)$. Это проверяется прямым вычислением в $\mathrm{SL}(2, R)$.

Таким образом, мы имеем $g_1 \in H \cap U'_{\alpha_1,\alpha_2}$, и из доказательства предложения 1 следует, что $\xi_\gamma \in \sigma_{\gamma+\alpha_1+\alpha_2} = \sigma_\gamma$ (лемма 1).

Переход от $k-1$ к k. По предположению индукции, с учетом леммы 11, мы имеем

$$\rho_{I^{k-1}}(HT(\Phi, R) \cap G(\Phi, R, I)) \leqslant (\rho_{I^{k-1}}(H)T(\Phi, R/I^{k-1})) \cap G(\Phi, R/I^{k-1}, \rho_{I^{k-1}}(I)) \leqslant$$
$$\leqslant T(\Phi, R/I)E(\rho(\sigma)).$$

Так как $E(\sigma)$ отображается на $E(\rho(\sigma))$ сюръективно, а также $T(\Phi, R)$ отображается на $T(\Phi, R/I^{k-1})$ сюръективно (так как I нильпотентен), то

$$HT(\Phi, R) \cap G(\Phi, R, I) \leqslant G(\Phi, R, I^{k-1})T(\Phi, R)E(\sigma).$$

Таким образом,

$$HT(\Phi, R) \cap G(\Phi, R, I) \leqslant G(\Phi, R, I^{k-1})T(\Phi, R)E(\sigma) \cap HT(\Phi, R) \leqslant$$
$$\leqslant (G(\Phi, R, I^{k-1}) \cap HT(\Phi, R)E(\sigma)T(\Phi, R))T(\Phi, R)E(\sigma).$$

С учетом того, что $T(\Phi, R)$ нормализует $E(\sigma)$, последнее выражение равно

$$(G(\Phi, R, I^{k-1}) \cap HE(\sigma)T(\Phi, R))T(\Phi, R)E(\sigma) = (G(\Phi, R, I^{k-1}) \cap HT(\Phi, R))T(\Phi, R)E(\sigma).$$

Так как $(I^{k-1})^2 = 0$, мы можем воспользоваться базой индукции, и заключить, что последнее выражение содержится в

$$T(\Phi,R)E(\sigma)T(\Phi,R)E(\sigma) = T(\Phi,R)E(\sigma).$$

$\square$

Пусть $\Delta' \leqslant \Phi$ — замкнутое множество корней (то есть, если $\alpha,\beta \in \Delta'$ и $\alpha+\beta \in \Phi$, то $\alpha+\beta \in \Delta'$), и пусть $\Delta \leqslant \Delta'$. Для каждого кольца R рассмотрим сеть идеалов $\sigma_{\Delta'}$, положив

$$(\sigma_{\Delta'})_\gamma = \begin{cases} R & \gamma \in \Delta', \\ (0) & \gamma \notin \Delta'. \end{cases}$$

Положим $E(\Delta',R) = E(\sigma_{\Delta'})$. Тогда ассоциированный пучок (по Зарискому) к предпучку $T(\Phi,-)E(\Delta',-)$ — это параболическая подгруппа расширенной группы Шевалле, соответсвующей подсистеме $\Delta' \cup (-\Delta')$. Будем обозначать эту подгруппу через $\overline{G}(\Delta',R)$. Также положим $\widetilde{G}(\Delta',R) = S(\sigma_{\Delta'})$. Ясно, что $\overline{G}(\Delta',R) \leqslant \widetilde{G}(\Delta',R)$.

Лемма 13. *Пусть $R = L$ — алгебраически замкнутое поле. Тогда подгруппы $\overline{G}(\Delta',L)$ и $\widetilde{G}(\Delta',L)$ замкнуты в $G(\Phi,L)$, и подгруппа $\overline{G}(\Delta',L)$ является компонентой связности единицы подгруппы $\widetilde{G}(\Delta',L)$.*

Доказательство. Замкнутость в $G(\Phi,L)$ очевидна. Также ясно, что $\overline{G}(\Delta',L)$ связна. Остается показать, что $\overline{G}(\Delta',L)$ открыта в $\widetilde{G}(\Delta',L)$. Так как $\overline{G}(\Delta',L)$ гладкая, в силу следствия 5.6 книги [22], достаточно показать, что у этих групп совпадают алгебры Ли.

Заметим, что $\widetilde{G}(\Delta',-)$ — это подсхема (даже над $\mathbb{Z}$) в $G(\Phi,-)$. Поэтому интересующую нас алгебру Ли можно отождествить с группой $\widetilde{G}(\Delta',L[\varepsilon]/(\varepsilon^2)) \cap G(\Phi,L[\varepsilon]/(\varepsilon^2),(\varepsilon))$. Согласно следствию 1, $\mathrm{lev}(\widetilde{G}(\Delta',L[\varepsilon]/(\varepsilon^2))) = \sigma_{\Delta'}$, и тогда, по лемме 12

$$\begin{aligned}\widetilde{G}(\Delta',L[\varepsilon]/(\varepsilon^2)) \cap G(\Phi,L[\varepsilon]/(\varepsilon^2),(\varepsilon)) \leqslant (T(\Phi,L[\varepsilon]/(\varepsilon^2))E(\Delta',L[\varepsilon]/(\varepsilon^2)))\cap \\ \cap G(\Phi,L[\varepsilon]/(\varepsilon^2),(\varepsilon)) \leqslant \overline{G}(\Delta',L[\varepsilon]/(\varepsilon^2)) \cap G(\Phi,L[\varepsilon]/(\varepsilon^2),(\varepsilon)),\end{aligned}$$

что и требовалось. $\square$

Пусть $\overline{W}(\Phi) \leqslant G(\Phi,R)$ — расширенная группа Вейля. И пусть $\overline{W}(\Phi,\Delta') \leqslant \overline{W}(\Phi)$ — прообраз подгруппы $\mathrm{Stab}_{W(\Phi)}(\Delta') \leqslant W(\Phi)$.

Лемма 14. *Пусть $R = K$ — поле. Тогда $\widetilde{G}(\Delta',K) = \overline{G}(\Delta',K)\overline{W}(\Phi,\Delta')$.*

Доказательство. Включение правой части в левую очевидно, докажем обратное включение. Пусть, для начала, $K = L$ — алгебраически замкнутое поле, и пусть $g \in \widetilde{G}(\Delta',L)$. Заметим, что $T(\Phi,L)$ — это максимальный тор группы $\overline{G}(\Delta',L)$. Согласно лемме 13, подгруппа $\overline{G}(\Delta',L)$ нормальна в $\widetilde{G}(\Delta',L)$, следовательно, ${}^gT(\Phi,L) \leqslant \overline{G}(\Delta',L)$ — другой максимальный тор. Так как поле замкнуто, эти торы сопряжены в $\overline{G}(\Delta', L)$, то есть для некоторого $g_1 \in \overline{G}(\Delta', L)$ мы имеем $T(\Phi, R) = {}^{g_1 g}T(\Phi, L) \leqslant \overline{G}(\Delta', L)$,то есть

$$g_1 g \in N_{G(\Phi,L)}(T(\Phi, L)) \cap \widetilde{G}(\Delta', L) = (T(\Phi, L)\overline{W}(\Phi)) \cap \widetilde{G}(\Delta', L) = \\ = T(\Phi, L)(\overline{W}(\Phi) \cap \widetilde{G}(\Delta', L)) = T(\Phi, L)\overline{W}(\Phi, \Delta').$$

Откуда $g \in \overline{G}(\Delta', L)T(\Phi, L)\overline{W}(\Phi, \Delta') = \overline{G}(\Delta', L)\overline{W}(\Phi, \Delta')$.

Теперь пусть K произвольное поле и L — его алгебраическое замыкание. Тогда

$$\widetilde{G}(\Delta', K) = \widetilde{G}(\Delta', L) \cap G(\Phi, K) = (\overline{G}(\Delta', L)\overline{W}(\Phi, \Delta')) \cap G(\Phi, K) = \\ = (\overline{G}(\Delta', L) \cap G(\Phi, K))\overline{W}(\Phi, \Delta') = \overline{G}(\Delta', K)\overline{W}(\Phi, \Delta'),$$

что и требовалось. □

Лемма 15. *Пусть $R = K$ — поле, и пусть σ — сеть идеалов. Тогда подгруппа $E(\sigma)$ нормальна в группе $S(\sigma)$.*

Доказательство. Любая сеть идеалов в поле имеет вид $\sigma = \sigma_{\Delta'}$ для некоторого замкнутого множества корней Δ'. Утверждение, таким образом, следует из леммы 14 и того факта, что $\overline{G}(\Delta', K) = E(\Delta', K)T(\Phi, K)$. □

Предложение 5. *Пусть R — локальное кольцо с нильпотентным максимальным идеалом $\mathfrak{M}$, и пусть H — надгруппа $E(\Delta, R)$. Тогда, если $\rho_{\mathfrak{M}}(H)$ псевдостандартна, то H псевдостандартна.*

Доказательство. Для удобства будем писать $\overline{X} = \rho_{\mathfrak{M}}(X)$ вне зависимости от природы X. Пусть $\operatorname{lev} H = \sigma$. Тогда, по лемме 11 мы имеем $\operatorname{lev} \overline{H} = \overline{\sigma}$. Предположим, что $\overline{H}$ псевдостандартна, тогда, по лемме 15 мы имеем ${}^{\overline{H}}E(\overline{\sigma}) \leqslant E(\overline{\sigma})$. Так как $E(\sigma)$ отображается на $E(\overline{\sigma})$ сюръективно, с учетом леммы 12, мы имеем

$${}^{H}E(\sigma) \leqslant (E(\sigma)G(\Phi, R, \mathfrak{M})) \cap H = E(\sigma)(G(\Phi, R, \mathfrak{M}) \cap H) \leqslant E(\sigma)T(\Phi, R) \leqslant S(\sigma).$$

Тогда, по следствию 2, с учетом того, что H замкнута относительно взятия обратного, мы имеем $H \leqslant S(\sigma)$, что и требовалось. □

Следствие 5. Пусть R — нетерово кольцо, и пусть H — надгруппа $E(\Delta, R)$, и пусть $\rho_{\mathfrak{M}}(H)$ псевдостандартна для любого $\mathfrak{M} \in \operatorname{Max}(R)$. Тогда H псевдостандартна.

Доказательство. Следствие 4 + предложение 5. □

Следствие 6. Пусть R — локальное кольцо с нильпотентным максимальным идеалом $\mathfrak{M}$. Пусть H — надгруппа $E(\Delta, R)$ уровня σ. Тогда, если $\rho_{\mathfrak{M}}(l) \in L(\rho_{\mathfrak{M}}(\sigma))$ для любого тандема (g, l), в котором $g \in H$, то H псевдостандартна.

Доказательство. Пусть $H' \leqslant H$ — подгруппа, порожденная элементами $g \in H$, являющимися первыми компонентами тандемов. Ясно, что $\operatorname{lev}(H) = \sigma$. Из условия, леммы 11 и предложения 2 следует, что подгруппа $\rho_{\mathfrak{M}}(H')$ псевдостандартна, тогда по предложению 5 подгруппа H' псевдостандартна, и тогда, по следствию 3, с учетом предложения 2, мы получаем, что H псевдостандартна. □

11. Доказательство теоремы

Для нетеровых колец теорема следует из следствия 5 и предложения 3. Для произвольных колец она получается переходом к индуктивному пределу по конечно порожденным подкольцам. Здесь нужно заметить, что, если кольцо R не имеет поля вычетов из двух элементов, то оно является индуктивным пределом своих конечно порожденных подколец с тем же свойством. Действительно, в этом случае элементы вида t^2+t порождают в R единичный идеал (иначе мы бы погрузили идеал, порожденный ими, в максимальный и в соответствующем поле вычетов все элементы были бы корнями уравнения $t^2+t=0$). Следовательно найдутся a_i, $t_i \in R$, такие что

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(t_i^2+t_i)=1.$$

Тогда все конечно порожденные подкольца, содержащие все a_i и t_i не будут иметь поля вычетом из двух элементов, и R будет их индуктивным пределом.

12. От абстрактного к конкретному

Лемма 16. *Пусть Φ — неприводимая система корней с простыми связями, и пусть $\operatorname{rk}\Phi = n$. Пусть $\Delta \leqslant \Phi$ — подсистема, содержащая подсистему типа nA_1. Тогда пара (Φ,Δ) удовлетворяет условию $(*)$.*

Доказательство. Во-первых, заметим, что любая пара ортогональных корней из вышеупомянутой подсистемы nA_1 подходящая. Действительно, пусть α_1,α_2 — такая пара, и пусть $\gamma_1,\gamma_2 \in \Sigma_{\alpha_1,\alpha_2} \setminus \Delta$ различны. Тогда в качестве β нам обязательно подойдет один из корней подсистемы nA_1, ортогональных α_1 и α_2. Действительно, если $\gamma_1-\gamma_2$ ортогональна всем таким корням, то, с учетом того, что $\gamma_1,\gamma_2 \in \Sigma_{\alpha_1,\alpha_2}$ (и следовательно $\gamma_1-\gamma_2 \perp \alpha_1,\alpha_2$), получается, что $\gamma_1-\gamma_2$ ортогонально всей подсистеме nA_1, то есть $\gamma_1=\gamma_2$.

Теперь, пусть $\gamma \in \Phi \setminus \Delta$. Так как γ не может быть ортогонален всей подсистеме nA_1, найдется $\alpha_1 \in nA_1$, такой что $(\gamma,\alpha_1)=-1$. Допустим, что мы не можем найти второй такой корень $\alpha_2 \in nA_1$, ортогональный α_1. Это значит, что γ ортогонален ортогональному дополнению к корню α_1. Но тогда $\gamma=\pm\alpha_1 \in \Delta$, что противоречит предположению. □

Перечислим несколько случаев, к которым применима теорема 3, сформулированных в работе [11] в качестве проблем.

Мы будем обозначать i-й простой корень через ε_i, а максимальный корень — через δ. Нумерация простых корней следует [5].

Предложение 6. *Для следующих вложений систем корней выполнено условие $(*)$. (в скобках указан набор простых корней системы Δ, если это требуется в доказательстве).*

(a) $A_7 \leqslant E_7$ $(-\delta,\varepsilon_1,\varepsilon_3,\ldots,\varepsilon_7)$.

(b) $A_5+A_1 \leqslant E_6$ $(-\delta,\varepsilon_1,\varepsilon_3,\ldots,\varepsilon_6)$.

(c) $A_8 \leqslant E_8$ *(*ε_1,ε_3,...,ε_8,$-\delta$*)*.

(d) $A_5 + A_2 \leqslant E_7$ *(*$-\delta$,ε_1,ε_2,ε_4,...,ε_7*)*.

(e) $2A_3 + A_1 \leqslant E_7$ *(*$-\delta$,ε_1,ε_2,ε_3,ε_5,ε_6,ε_7*)*.

(f) $A_1 + A_7 \leqslant E_8$ *(*$-\delta$,ε_1,ε_2,ε_4,...,ε_8*)*.

(g) $D_5 + A_3 \leqslant E_8$ *(*ε_1,...,ε_5,ε_7,ε_8,$-\delta$*)*.

(h) $2A_4 \leqslant E_8$ *(*ε_1,...,ε_4,ε_6,ε_7,ε_8,$-\delta$*)*.

(i) $4A_2 \leqslant E_8$.

(j) $3A_2 \leqslant E_6$.

(k) $E_6 + A_2 \leqslant E_8$.

(l) $D_6 + A_1 \leqslant E_7$.

(m) $D_8 \leqslant E_8$.

(n) $E_7 + A_1 \leqslant E_8$.

(o) $D_4 + 3A_1 \leqslant E_7$.

(p) $D_6 + 2A_1 \leqslant E_8$.

(q) $2D_4 \leqslant E_8$.

(r) $7A_1 \leqslant E_7$.

(s) $2mA_1 \leqslant D_{2m}$.

(t) $8A_1 \leqslant E_8$.

Доказательство. (a) В этом случае группа $W(\Delta)$ действует на множество $\Phi \setminus \Delta$ транзитивно, поэтому можно считать,что $\gamma = \varepsilon_2$. Тогда мы можем положить $\alpha_1 = \varepsilon_4$ и $\alpha_2 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5$. Проверим, что эта пара подходящая.

Представим E_7 как множество восьмимерных векторов, получающихся перестановками координат в векторах

$$(1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0,) \quad \text{и} \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Первый тип векторов образует нашу подсистему A_7. При этом

$$\alpha_1 = (0, 0, 0, -1, 1, 0, 0, 0),$$
$$\alpha_2 = (0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0).$$

Тогда элементы множества $\Sigma_{\alpha_1,\alpha_2} \setminus \Delta$ имеют вид

$$\left(\cdot, \cdot, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \cdot, \cdot\right).$$

Если два таких вектора γ_1,γ_2 отличаются, то найдутся i,$j \in \{1, 2, 7, 8\}$ такие, что γ_1 имеем в этих позициях $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$ соответственно, а γ_2 — наоборот. Тогда в качестве β можно взять вектор имеющий 1 в позиции i и -1 в позиции j.

(b) Аналогично.

(c) Аналогично, только множество $\Phi \setminus \Delta$ имеет две $W(\Delta)$ орбиты, но одна из них — это минус другая, поэтому достаточно доказать для одной из них. Перебор для проверки того, что пара подходящая также будет чуть больше.

(d) Несложно видеть, что для любого $\gamma \in \Phi \setminus \Delta$ найдутся $\alpha_1 \in A_2$ и $\alpha_2 \in A_5$ такие, что $(\gamma, \alpha_1) = (\gamma, \alpha_2) = -1$. Проверим, что любая такая пара подходящая. Так как группа $W(\Delta)$ действует транзитивно на множестве таких пар, можно считать, что $\alpha_1 = \varepsilon_1$ и $\alpha_2 = \varepsilon_2$. Вложим E_7 в $\mathbb{R}^9$ так, чтобы первые три координаты соответствовали стандартной реализации A_2, а оставшиеся 6 — стандартной реализации A_5. Тогда

$$\alpha_1 = (0, -1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$
$$\alpha_1 = (0, 0, 0, -1, 1, 0, 0, 0, 0).$$

Пусть γ_1,$\gamma_2 \in \Sigma_{\alpha_1,\alpha_2} \setminus \Delta$ различны. Множество $\Phi \setminus \Delta$ имеет две $W(\Delta)$-орбиты. В зависимости от орбиты, первые три координаты корня из $\Phi \setminus \Delta$ являются перестановкой либо $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$, либо $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, а оставшиеся шесть координат — либо $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$, либо либо $(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Допустим, что у нас не получается взять в качестве β корень из подсистемы A_3, сосредоточенной в последних четырех координатах, то есть $\gamma_1 - \gamma_2$ ортогонально всем таким корням. Несложно видеть,что это возможно, только если у γ_1 и γ_2 совпадают последние четыре координаты (учесть, что $(\gamma_1, \alpha_2) = -1$). Это, в частности, значит, что γ_1 и γ_2 в одной $W(\Delta)$-орбите. Для данной орбиты условие, что γ_1,$\gamma_2 \in \Sigma_{\alpha_1,\alpha_2}$ однозначно определяют координаты со второй по четвертую. Тогда первая тоже оказывается определена, то есть $\gamma_1 = \gamma_2$.

(e) Аналогично достаточно показать, что пара $\alpha_1 = \varepsilon_3$, $\alpha_2 = \varepsilon_5$ подходящая. Это несложный перебор с помощью соответствующего вложения в $\mathbb{R}^{10}$.

(f) Аналогично, рассмотрев соответствующее вложение в $\mathbb{R}^{10}$, можно показать, что любая пара ортогональных корней из A_7 подходящая, и этого хватает.

(g) Аналогично, рассмотрев соответствующее вложение в $\mathbb{R}^9$, можно показать, что любая пара $\alpha_1 \in D_5$, $\alpha_2 \in A_3$ подходящая, и этого хватает.

(h) Аналогично, рассмотрев соответствующее вложение в $\mathbb{R}^{10}$, можно показать, что если корни α_1,$\alpha_2 \in \Delta$ лежат в разных компонентах, то такая пара подходящая, и этого хватает.

(i) Достаточно показать, что, если α_1 и α_2 из разных компонент, то такая пара подходящая. Пусть γ_1,$\gamma_2 \in \Sigma_{\alpha_1,\alpha_2} \setminus \Delta$ различны. Допустим, что $\gamma_1 - \gamma_2$ ортогональна всем оставшимся компонентам. Перебор возможных расположений γ_i относительно наших компонент показывает, что квадрат длинны проекции вектора $\gamma_1 - \gamma_2$ на плоскость компоненты может быть равен либо 0, либо $\frac{2}{3}$. Значит, квадрат длинны вектора $\gamma_1 - \gamma_2$ не превосходит $\frac{4}{3}$, но квадрат разности различных корней всегда не меньше 2. Противоречие.

(j) Аналогично.

(k) Формально следует из случая $4A_2 \leqslant E_8$, так как $3A_2 \leqslant E_6$.

Все остальное следует из леммы 16. $\square$

13. Надгруппы $4A_1$ в D_4

Как мы уже отмечали, надгруппы подсистемных подгрупп в ортогональных и симплектических группах были описаны в работах [7] и [24]. Однако, эти работы не охватывают случай $2mA_1 \leqslant D_{2m}$, поскольку он требует $2A_1$-доказательства.

Из леммы 16 следует, что условие $(*)$ в этом случае выполнено. Таким образом, теорема 3 дает ответ на эту задачу при условии, что кольцо не имеет поля вычетов из двух элементов.

Теперь, пусть $\Phi = D_4$ и $\Delta = 4A_1$. Уже в этом случае над полем $\mathbb{F}_2$ псевдостандартное описание не выполнено. Тем не менее для произвольных колец мы можем доказать некоторый еще более ослабленный вариант sandwich classification.

Задача облегчается тем, что множество $\Phi \setminus \Delta$ имеет одну $W(\Delta)$ орбиту. Поэтому, по лемме 1 сеть идеалов σ можно отождествить с идеалом, соответствующим этой орбите, что мы и будем делать.

Предложение 7. *Пусть R — произвольное коммутативное кольцо, и пусть $\sigma \trianglelefteq R$ — идеал. Тогда существует надгруппа*

$$E(4A_1, R) \leqslant \widehat{G}(D_4, 4A_1, R, \sigma) = \widehat{G}(\sigma) \leqslant G(D_4, R),$$

наибольшая среди надгрупп уровня σ.

Доказательство. (1) Заметим, что достаточно доказать это предложение для нетеровых колец. Действительно, если для нетеровых колец предложение верно,то для произвольного кольца R можно положить.

$$\widehat{G}(\Phi, \Delta, R, \sigma) = \bigcup_{S_0 \in \mathrm{FG}(R)} \bigcap_{\substack{S \in \mathrm{FG}(R)\\ S_0 \leqslant S}} \widehat{G}(\Phi, \Delta, S, \sigma \cap S) \leqslant G(\Phi, R),$$

где $\mathrm{FG}(S)$ — множество конечно порожденных подколец в R.

(2) Заметим, что достаточно доказать это предложение для локальных колец с нипотентным максимальным идеалом. Действительно, если для таких колец предложение доказанно, то для произвольного нетерова кольца можно положить

$$\widehat{G}(\Phi, \Delta, R, \sigma) = \bigcap_{\mathfrak{M} \in \operatorname{Max} R,\, k \in \mathbb{N}} \rho_{\mathfrak{M}^k}^{-1}(\widehat{G}(\Phi, \Delta, R/\mathfrak{M}^k, \rho_{\mathfrak{M}^k}(\sigma))).$$

Уровень правой части будет равен

$$\bigcap_{\mathfrak{M} \in \operatorname{Max} R,\, k \in \mathbb{N}} \rho_{\mathfrak{M}^k}^{-1}(\rho_{\mathfrak{M}^k}(\sigma)) = \sigma.$$

Это обсуждалось в доказательстве предложения 4. Тогда, по лемме 11 эта подгруппа будет наибольшей среди подгрупп уровня σ.

С этого момента считаем, что R — локальное кольцо с нильпотентным максимальным идеалом $\mathfrak{M}$. Будем писать $\overline{X} = \rho_{\mathfrak{M}}(X)$, независимо от природы X.

(3) Если $R/\mathfrak{M}$ отлично от $\mathbb{F}_2$, то по теореме 3 можно положить $\widehat{G}(\sigma) = S(\sigma)$.

(4) Если $\sigma \neq \mathfrak{M}$, то также можно положить $\widehat{G}(\sigma) = S(\sigma)$, то есть любая надгруппа $E(\Delta, R)$ уровня σ псевдостандартна. Действительно, для $\sigma = R$ доказывать нечего, пусть $\sigma \subsetneq \mathfrak{M}$. Пусть H — наша надгруппа, проверим, что выполнено условие следствия 6. Пусть (g, l) — тандем, и пусть $g \in H$. Нужно проверить, что $\overline{l} \in L(\overline{\sigma}) = L(0)$.

Допустим, что найдется корень $\gamma \in \Phi \setminus \Delta$ такой, что $\overline{l^\gamma} \neq 0$. Как мы знаем, найдется подходящая пара ортогональных корней $\alpha_1, \alpha_2 \in \Delta$ такая, что $(\alpha_1, \gamma) = (\alpha_2, \gamma) = -1$.

По лемме 11 $\operatorname{lev} \overline{H} = (0)$. Поэтому, если $\overline{l}^{-\alpha_1} = 0$, то мы можем применить доказательство предложения 3, чтобы получить противоречие (случай $\overline{l}^{-\alpha_1} = 0$ не использует предположения о том, что поле отлично от $\mathbb{F}_2$). Пусть $\overline{l}^{-\alpha_1} \neq 0$.

Построим специальный относительно пары α_1, α_2 битандем с параметром

$$(g_1(t), l_1(t)) = ({}^{g}(x_{\alpha_1}(tl^{-\alpha_2})x_{\alpha_2}(-tl^{-\alpha_1})),\ {}^{g}(tl^{-\alpha_2}e_{\alpha_1} - tl^{-\alpha_1}e_{\alpha_2})).$$

Затем построим тандем, зависящий от $t \in R$, $(g_2, l_2) = ({}^{g_1(t)}x_{\alpha_1}(1),\ {}^{g_1(t)}e_{\alpha_1})$.

Вне зависимости от t, по лемме 10 мы имеем $g_1(t) \in P_{\alpha_1,\alpha_2}$, и $g_2 \in H \cap U'_{\alpha_1,\alpha_2} \leqslant S(\sigma)$. Тогда $l_2 \in L(\sigma)$. Таким образом, $l_2^{\gamma+\alpha_1+\alpha_2} \in \sigma$. С другой, как и в доказательстве предложения 3, мы можем написать формулу вида $l_2^{\gamma+\alpha_1+\alpha_2} = at + bt^2$, где $a, b \in R$ не зависят от t, и из этого доказательства следует, что $\overline{a} \neq 0$, то есть $a \in R^*$. Тогда, по лемме Накаяма элементы вида $at + bt^2$, где t пробегает $\mathfrak{M}$ породят весь идеал $\mathfrak{M}$ (так как их образы породят $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$). Следовательно, $\sigma = \mathfrak{M}$, что противоречит предположению.

(5) Чтобы разобрать оставшийся случай, достаточно рассмотреть случай $R = \mathbb{F}_2$ и $\sigma = (0)$. Действительно, тогда, если R — локальное кольцо с нильпотентным идеалом $\mathfrak{M}$, $R/\mathfrak{M} = \mathbb{F}_2$ и $\sigma = \mathfrak{M}$, то можно положить $\widehat{G}(\Phi, \Delta, R, \sigma) = \rho_{\mathfrak{M}}^{-1}(\widehat{G}(\Phi, \Delta, R/\mathfrak{M}, (0)))$.

(6) Итак, нам осталось показать, что в $G(D_4, \mathbb{F}_2)$ только одна максимальная подгруппа содержит $E(4A_1, \mathbb{F}_2) = G(4A_1, \mathbb{F}_2)$. Этой подгруппой будет $N_{G(\mathrm{D}_4,\mathbb{F}_2)}([G(4A_1, \mathbb{F}_2), G(4A_1, \mathbb{F}_2)])$.

Пусть N — максимальная подгруппа, содержащая $G(4A_1, \mathbb{F}_2)$. В книге [21] перечисленны все классы сопряженности максимальных подгрупп в $G(D_4, \mathbb{F}_2)$. После того, как мы отбросим те группы, порядок которых не делится на 3^4, а также те, которые имеют 3-силовскую подгруппу порядка 3^4, не изоморфную $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$, у нас останется один класс сопряженности, состоящий из нормализаторов подгрупп, изоморфных $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$. Нужно показать, что подгруппа $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$, которую нормализует N, совпадает с $[G(4A_1, \mathbb{F}_2), G(4A_1, \mathbb{F}_2)]$. Для этого достаточно показать, что N содержит только одну подгруппу, изоморфную $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$. Предположим противное, тогда другая такая подгруппа (та, которая не обязательно нормальна) содержится в некоторой 3-силовской подгруппе S группы N, нормальная подгруппа вида $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$ также содержится в S, поскольку она нормальна. Порядок S равен 3^5, и она также является 3-силовской подгруппой в $G(D_4, \mathbb{F}_2)$. Согласно [21], группа $G(D_4, \mathbb{F}_2)$ содержит подгруппу, изоморфмную знакопеременной группе A_9. Следовательно S содержит подгруппу, изоморфную 3-силовской подгруппе группы A_9. Отсюда элементарными средствами выводится, что S не может содержать двух различных подгрупп, изоморфных $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$. Противоречие.

$\square$

В следующей работе автор планирует предложить способ увеличить подгруппу $E(\Delta, R)$ так, чтобы псевдостандартное описание стало стандартным (то есть нижняя "булка сэндвича" была нормальной подгруппой в верхней), и показать, что в для подсистем, не содержащих компоненты типа A_1 такого увеличения не требуется.

Список литературы

[1] *Боревич З. И., Вавилов Н. А.* О подгруппах полной линейной группы над коммутативным кольцом // *Докл. АН СССР.* — 1982. — Т. 267, № 4. — С. 777–778.

[2] *Боревич З. И., Вавилов Н. А.* Расположение кодгрупп, содержащих группу клеточно диагональных матриц, в полной линейной группе над кольцом // *Изв. вузов. Матем.* — 1982. — № 11. — С. 12–16.

[3] *Боревич З. И., Вавилов Н. А.* Расположение подгрупп в полной линейной группе над коммутативным кольцом // *Тр. МИАН.* — 1984. — Т. 165. — С. 24–42.

[4] *Боревич З. И., Вавилов Н. А., Наркевич В.* О подгруппах полной линейной группы над дедекиндовым кольцом // *Зап. научн. сем. ЛОМИ.* — 1979. — Т. 94. — С. 13–20.

[5] *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Главы 4-6. — Москва: Мир, 1972.

[6] *Вавилов Н. А.* Подгруппы полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащие группу клеточно-диагональных матриц // *Вестн. Ленингр. ун-та. Сер.* 1*: Мат., Мех., Астроном.* — 1983. — № 1. — С. 16–21.

[7] *Вавилов Н. А.* О подгруппах расщепимых классических групп // *Тр. МИАН.* — 1990. — Т. 183. — С. 29–42.

[8] *Вавилов Н. А., Гаврилович М. Р.* A_2-доказательство структурных теорем для групп Шевалле типов E_6 и E_7 // *Алгебра и анализ.* — 2004. — Т. 16, № 4. — С. 54–87.

[9] *Вавилов Н. А., Степанов А. В.* Подгруппы полной линейной группы над кольцом, удовлетворяющим условиям стабильности // *Изв. вузов. Матем.* — 1989. — № 10. — С. 19–25.

[10] *Вавилов Н. А., Степанов А. В.* Надгруппы полупростых групп // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.* — 2008. — № 3. — С. 51–95.

[11] *Вавилов Н. А., Щеголев А. В.* Надгруппы subsystem subgroups в исключительных группах: уровни // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* — 2012. — Т. 400. — С. 70–126.

[12] *Гвоздевский П. Б.* Надгруппы подгрупп леви I. Случай абелева унипотентного радикала // *Алгебра и Анализ (в печати).*

[13] *Голубчик И. З.* О подгруппах полной линейной группы $Gl_n(R)$ над ассоциативным кольцом R // *УМН.* — 1984. — Т. 39, № 1. — С. 125–126.

[14] *Койбаев В. А.* О подгруппах полной линейной группы, содержащих группу элементарных клеточно-диагональных матриц // *Вестн. Ленингр. ун-та. Сер.* 1*: Мат., Мех., Астроном.* — 1982. — Т. 13. — С. 33–40.

[15] *Лузгарев А. Ю.* “описание надгрупп F_4 в E_6 над коммутативным кольцом // *Алгебра и анализ.* — 2008. — Т. 20. — С. 148–185.

[16] *Степанов А. В.* Описание подгрупп полной линейной группы над кольцом при помощи условий стабильности // Кольца и линейные группы. — Краснодар: Кубанский государственный университет, 1988. — С. 82–91.

[17] *Хамфрис Дж.* Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. — МЦНМО, 2003.

[18] *Щеголев А. В.* Надгруппы блочно-диагональных подгрупп гиперболической унитарной группы над квази-конечным кольцом: Основные результаты // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* — 2016. — Т. 443. — С. 222–233.

[19] *Щеголев А. В.* Надгруппы элементарной блочно-диагональной подгруппы классической симплектической группы над произвольным коммутативным кольцом // *Алгебра и анализ.* — 2018. — Т. 30. — С. 147–199.

[20] *Abe E., Suzuki K.* On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings // *Tohoku Math. J.* — 1976. — Vol. 28, no. 2. — p. 185–198.

[21] Atlas of finite groups: maximal subgroups and ordinary characters for simple groups / L. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton et al. — Clarendon Press; Oxford University Press, 1985.

[22] *Demazure M., Gabriel P.* Introduction to algebraic geometry and algebraic groups. Math. Stud. **39**. — Amsterdam: North-Holland, 1980.

[23] *Roozemond D. A.* Algorithms for Lie algebras of algebraic groups: Ph.D. thesis / Technische Universiteit Eindhoven. — 2010.
[24] *Shchegolev A.* Overgroups of elementary block-diagonal subgroups in even unitary groups over quasi-finite rings: Ph.D. thesis / Fakultat fur Mathematik der Universitat Bielefeld. — 2015. — Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades.
[25] *Stepanov A. V.* Structure of Chevalley groups over rings via universal localization // *J. Algebra.* — 2016. — Vol. 450. — p. 522–548.
[26] *Waterhouse W.C.* Automorphisms of $\det(x_{ij})$: the group scheme approach // *Adv. Math.* — 2003. — Vol. 179. — p. 99–116.