

## Отзыв научного руководителя

на дипломную работу по теме

### “О стягиваемых подграфах трехсвязных графов”

Власовой Надежды Юрьевны

Работа Надежды Власовой относится к очень сложной и абстрактной области теории графов — теории связности. В ней приходится работать с трудно изображаемыми объектами, очень часто внешне очевидные факты оказываются очень трудными или вообще неверными. Гипотеза МакКвейга и Оты (1994) весьма несложно формулируется, что в этой области теории графов встречается редко.

Классический факт — теорема Дьори-Ловаса (1976) говорит нам, что множество вершин  $k$ -связного графа можно разбить на  $k$  связных множеств любых заданных размеров (разумеется, сумма размеров должна быть равна числу вершин графа). Это красивый и весьма сложный факт, и неудивительно, что возникли попытки его обобщить на большую связность. Самое простое обобщение: а можно ли для любого натурального числа  $m$  из любого  $k$ -связного графа достаточно большого размера удалить связное множество из  $m$  вершин так, чтобы индуцированный подграф на множестве оставшихся вершин был  $(k - 1)$ -связным? При  $k \geq 4$  отрицательный ответ на этот вопрос для любого  $m \geq 2$  дал Мадер. Таким образом, вопрос остается открытым только для  $k = 3$ , это и есть гипотеза МакКвейга и Оты. Такое  $m$ -вершинное множество называется *стягиваемым* (так как стягивание его в одну вершину не нарушает 3-связности графа).

Однако, эта несложная по формулировке гипотеза, как нередко бывает, оказалась весьма непростой. Для  $m = 2$  доказательство следует из результатов Татта (1966 год), для  $m = 3$  ее доказали авторы. Для  $m = 4$  гипотезу доказал Криселл в 2000 году, а, начиная с  $m \geq 6$ , продвижений нет. Отмечу, что понятие “достаточно большой граф” в работах по этой гипотезе в корне отличается от того, к которому привыкли специалисты по вероятностной комбинаторике. Так, Криселл доказал, что стягиваемое 4-вершинное множество есть в графе на хотя бы 8 вершинах.

Криселл пытался доказать случай  $m = 5$  этой гипотезы, и сделал это для кубического 3-связного графа (степени всех вершин равны 3), а также для 3-связного графа, средняя степень вершин которого очень близка к 3. Известно также, что любой 3-связный граф на не менее чем 11 вершинах имеет стягиваемое множество из 5 или 6 вершин (это доказал я в 2018 году).

Надежда Власова доказала, что в 3-связном графе с не менее чем 11 вершинами и минимальной степенью 4 есть стягиваемое 5-вершинное множество. В этой работе применяются методы Криселла (из статьи о случае  $m = 4$ ), а также структурное дерево блоков двусвязного графа, которое существенно помогает разбираться с тем, что возникает при удалении из графа четверки или тройки вершин, которую нельзя дополнить еще одной вершиной. Доказан интересный результат, несколько противоположный сделанному Криселлом (там как раз нужны вершины степени 3 в трёхсвязном графе, которые в работе Власовой запрещены). Главное даже не в этом — разработанные методы позволяют надеяться, что будет доказана и полная версия гипотезы МакКвейга-Оты для  $m = 5$  (к моменту защиты диплома Надежда, как мне кажется, завершила это доказательство, но по его подробной записи и проверке предстоит большая работа). Более того, полученные результаты показывают, что основные трудности и самые плохие случаи невозможны при запрете вершин степени 3 в графе. Надеюсь, удастся использовать идеи из этой работы для доказательства гипотезы МакКвейга и Оты в случаях  $m > 5$  для графов минимальной степени более 3.

Считаю, что дипломная работа Н. Ю. Власовой является серьезным научным исследованием, уже в настоящий момент характеризует Надежду, как самостоятельного исследователя и безусловно заслуживает оценки “**отлично**”. Работа является хорошим заделом для будущей кандидатской диссертации.

Научный руководитель,  
профессор кафедры высшей алгебры и теории чисел  
математико-механического факультета СПбГУ, д. ф.-м. н.

Д. В. Карпов