Санкт-Петербургский Государственный Университет

Власова Надежда Юрьевна

Выпускная квалификационная работа

О стягиваемых подграфах трёхсвязных графов

Уровень образования: Специалитет
Направление 01.05.01 «Фундаментальная математика и механика»
Основная образовательная программа СМ.5007.* «Фундаментальная математика и механика»
Профиль Алгебра и теория чисел

Научный руководитель: профессор математики математико-механического факультета, д.ф-м.н., Карпов Д. В.

Рецензент: научный сотрудник Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А.Стеклова РАН, к.ф-м.н., Пастор А. В.

Санкт-Петербург
2019 год

Saint Petersburg State University

Vlasova Nadezhda Yurievna

Qualification Research Paper

On contractible subgraphs of 3-connected graphs

Education level: Specialitet
Specialty 01.05.01 «Fundamental Mathematics and Mechanics»
Educational program CM.5007.* «Fundamental Mathematics and Mechanics»
Department: Algebra and number theory

Advisor: Professor of mathematics at Mathematics and Mechanics Faculty, doctor of Physics and Mathematics Karpov D.V.

Reviewer: Researcher of St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, candidate of physical and mathematical sciences Pastor A.V.

Saint Petersburg
2019

Содержание

1 Введение

1.1 Основные определения

В работе рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных рёбер. Мы будем применять стандартные обозначения.

Множество вершин графа G мы будем обозначать через $V(G)$, а их количество — через $v(G)$. Множество рёбер графа G мы будем обозначать через $E(G)$.

Степень вершины x в графе G мы будем обозначать через $d_G(x)$, а минимальную степень вершины графа G будем обозначать через $\delta(G)$.

Окрестность вершины x в графе G (то есть, множество всех вершин, смежных с x) мы будем обозначать через $\mathrm{N}_G(x)$.

Для множества вершин $U \subset V(G)$ будем обозначать через $G(U)$ *индуцированный подграф* графа G на множестве U. Назовем множество U *связным*, если граф $G(U)$ связен.

Определение 1. 1) Пусть $R \subset V(G)$. За $G - R$ мы обозначим граф, получаемый из G удалением всех вершин R и всех ребер, инцидентных вершинам R. Множество R называется *разделяющим*, если $G - R$ несвязен.

2) Граф G называется *k-связным*, если $v(G) > k$ и G не содержит разделяющего множества размера меньше, чем k.

3) Пусть G — трехсвязный граф. Множество $R \subset V(G)$ назовем *стягиваемым*, если $G(R)$ связен и $G - R$ двусвязен.

4) Стягиваемое множество R назовем *нерасширяемым*, если оно не содержится ни в каком стягиваемом множестве размера $|R| + 1$.

5) Если F — двусвязный подграф G, то через $h_G(F)$ мы будем обозначать максимальный по включению двусвязный подграф G, содержащий F.

6) Мы будем говорить, что вершина $u \in V(G)$ *смежна* с множеством $W \subset V(G)$, если $u \notin W$ и множество W содержит вершину, смежную с u. Про два непересекающихся множества $U, W \subset V(G)$ будем говорить, что они *смежны*, если существуют смежные вершины $u \in U$ и $w \in W$.

1.2 История вопроса и основные результаты

В 1994 г. была сформулирована следующая гипотеза.

Гипотеза (W. McCuaig, K. Ota, 1994). *Пусть $m \in \mathbb{N}$. Тогда существует такое n, что любой трёхсвязный граф G с не менее чем n вершинами имеет стягиваемое множество из m вершин.*

Для $m = 1$ утверждение гипотезы очевидно, для $m = 2$ также достаточно несложно и широко известно. Случай $m = 3$ доказан авторами гипотезы [3], случай $m = 4$ доказал в 2000 году М.Криселл [1] (и это доказательство является весьма технически сложным). Ни для какого $m > 5$ на настоящий момент гипотеза ни доказана, ни опровергнута.

В работе Д. Карпова [10] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $m \geqslant 4$ — натуральное число, а G — трёхсвязный граф с $v(G) \geqslant 2m + 1$. Тогда G имеет стягиваемое множество W с $m \leqslant |W| \leqslant 2m - 3$.*

Тем самым, доказано, что любой трехсвязный граф на хотя бы 11 вершинах содержит стягиваемое подмножество на 5 или 6 вершинах.

В работе [2] М.Криселл исследовал стягиваемые пятерки с маленькой средней степенью и доказал следующую теорему.

Теорема 2. *Любой трёхсвязный граф на хотя бы 13 вершинах и средней степенью меньше, чем $3 + 1/132$, содержит стягиваемое множество на пяти вершинах.*

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть G — трехсвязный граф с $v(G) \geqslant 11$ и $\delta(G) \geqslant 4$. Тогда в G найдется стягиваемое множество на 5 вершинах.*

1.3 Вспомогательные инструменты

Нам потребуется структура разбиения двусвязного графа 2-вершинными разделяющими множествами. Для наших целей удобнее будет определить не структуру из книги У. Татта [4], а в целом аналогичную структуру — *дерево блоков* из работы [8]. Начнём с понятия *разбиения графа набором разделяющих множеств*, определенного в [6].

1.3.1 Разбиение графа набором разделяющих множеств

Отметим, что мы используем не совсем классическое определение *компоненты связности* — для удобства в нашей работе это не максимальный по включению связный подграф, а множество его вершин.

В этом разделе $k \geqslant 2$, а G — k-связный граф. Обозначим через $\mathfrak{R}_k(G)$ множество из всех k-вершинных разделяющих множеств G.

Определение 2. Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$.

1) Множество $A \subset V(G)$ назовем *частью разбиения* графа G набором $\mathfrak{S}$, если никакие две вершины из A нельзя разделить никаким множеством из $\mathfrak{S}$, но любая другая вершина графа G отделена от множества A хотя бы одним из множеств набора $\mathfrak{S}$.

Множество всех частей разбиения графа G набором $\mathfrak{S}$ мы будем обозначать через $\mathrm{Part}(G; \mathfrak{S})$.

2) Вершины части $A \in \mathrm{Part}(G; \mathfrak{S})$ назовем *внутренними*, если они не входят ни в одно из множеств набора $\mathfrak{S}$. Множество таких вершин назовем *внутренностью* части A и будем обозначать через $\mathrm{Int}(A)$.

Вершины части A, входящие в какие-либо множества набора $\mathfrak{S}$, мы будем называть *граничными*, а все их множество — *границей* и обозначать через $\mathrm{Bound}(A)$.

Нетрудно понять, что если две части $\mathrm{Part}(G; \mathfrak{S})$ имеют непустое пересечение, то их пересечение — подмножество одного из множеств набора $\mathfrak{S}$.

Замечание 1. Нетрудно доказать (см., например, [7]), что для $A \in \mathrm{Part}(G; \mathfrak{S})$ граница $\mathrm{Bound}(A)$ сотоит из всех вершин части A, имеющих смежные вне A. Если $\mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$, то $\mathrm{Bound}(A)$ отделяет $\mathrm{Int}(A)$ от остальных вершин графа.

Рассмотрим простейший и самый нужный нам пример — разбиение двусвязного графа G одним множеством $S \in \mathfrak{R}_2(G)$. Пусть $\mathrm{Part}(G; S) = \{A_1, \dots, A_k\}$. Тогда $\mathrm{Int}(A_1), \dots, \mathrm{Int}(A_k)$ — все компоненты связности графа $G - S$, а каждая вершина $x \in S$ смежна со всеми этими компонентами (если x не смежна с $\mathrm{Int}(A_i)$, то эта компонента выделяется и одновершинным множеством $S \setminus \{x\}$, что противоречит двусвязности графа G).

Определение 3. Два множества $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ называются *независимыми*, если S не разделяет T и T не разделяет S. В противном случае мы будем называть эти множества *зависимыми*.

В работе [5] доказано, что для k-связного графа G и множеств $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ возможны два варианта: либо S и T независимы, либо каждое из них разделяет другое. Доказательство этого факта — очень простое.

1.3.2 Разбиение двусвязного графа и его свойства

В этом разделе граф G — двусвязный.

Определение 4. 1) Множество $S \in \mathfrak{R}_2(G)$ называется *одиночным*, если S независимо со всеми остальными множествами из $\mathfrak{R}_2(G)$. Обозначим через $\mathfrak{O}(G)$ набор из всех одиночных множеств графа G.

2) Вместо $\mathrm{Part}(G; \mathfrak{O}(G))$ мы будем писать просто $\mathrm{Part}(G)$, а части этого разбиения будем называть *частями* графа G.

Определение 5. *Дерево разбиения* двусвязного графа G — это граф $\mathrm{BT}(G)$, вершины которого соответствуют одиночным множествам и частям графа G. Вершины $S \in \mathfrak{O}(G)$ и $A \in \mathrm{Part}(G)$ смежны в $\mathrm{BT}(G)$, если и только если $S \subset A$. Других рёбер в $\mathrm{BT}(G)$ нет.

Следующая лемма — это частный случай теоремы 1 из статьи [8].

Лемма 1. *Для двусвязного графа G выполняются следующие утверждения.*

1) $\mathrm{BT}(G)$ *— это дерево, все висячие вершины дерева* $\mathrm{BT}(G)$ *соответствуют частям* $\mathrm{Part}(G)$.

2) *Для каждого множества $S \in \mathfrak{O}(G)$ выполняется $d_{\mathrm{BT}(G)}(S) = |\mathrm{Part}(G; S)|$. Более того, для каждой части $A \in \mathrm{Part}(G; S)$ существует ровно одна такая часть $B \in \mathrm{Part}(G)$, что $B \subset A$ и B смежна с S в $\mathrm{BT}(G)$.*

3) *Множество $S \in \mathfrak{O}(G)$ разделяет в графе G части $B, B' \in \mathrm{Part}(G)$, если и только если S разделяет B и B' в $\mathrm{BT}(G)$.*

Определение 6. Часть $A \in \mathrm{Part}(G)$ назовем *крайней*, если она соответствует висячей вершине дерева разбиения $\mathrm{BT}(G)$.

Замечание 2. 1) Если $A \in \mathrm{Part}(G)$ — крайняя часть, то $\mathrm{Bound}(A)$ — одиночное множество графа G.

2) Внутренности двух различных частей $\mathrm{Part}(G)$ не пересекаются.

Определение 7. 1) Обозначим через G' граф, полученный из двусвязного графа G добавлением всех отсутствующих в G рёбер множества $\{xy : \{x, y\} \in \mathfrak{O}(G)\}$.

2) Назовём часть A *циклом*, если граф $G'(A)$ — простой цикл и 3-*блоком*, если граф $G'(A)$ трёхсвязен. Если часть A — цикл, то мы будем называть $|A|$ *длиной* цикла A.

Лемма 2. [9, Лемма 2] *Для двусвязного графа G выполняются следующие утверждения.*

1) *Каждая часть из* $\mathrm{Part}(G)$ *— либо цикл, либо 3-блок.*

2) *Если часть $A \in \mathrm{Part}(G)$ — цикл, то все вершины из $\mathrm{Int}(A)$ имеют степень 2 в графе G. При $\delta(G) \geqslant 3$ все крайние части $\mathrm{Part}(G)$ — 3-блоки.*

3) *Пусть $A \in \mathrm{Part}(G)$ — цикл длины хотя бы 4. Тогда любая пара его несоседних вершин образует неодиночное разделяющее множество графа G и других неодиночных разделяющих множеств в графе G нет.*

1.3.3 Стягиваемые множества в трехсвязном графе

В этом разделе граф G — трехсвязный. Мы процитируем ряд доказанных ранее результатов, которые нам понадобятся, после чего докажем две новые леммы.

Лемма 3. [10, Лемма 4] *Пусть G — трехсвязный граф, и $H \subset V(G)$ — нерасширяемое стягиваемое множество, такое что граф $G - H$ не является простым циклом. Тогда выполнены следующие утверждения.*

1) Множество H смежно со всеми внутренними вершинами частей-циклов $G - H$.

2) Есть хотя бы две крайние части $\mathrm{Part}(G - H)$, все эти крайние части — циклы длины хотя бы 4. Граница каждой крайней части — одиночное разделяющее множество $G - H$.

3) Пусть $A \in \mathrm{Part}(G - H)$ — крайняя часть. Тогда граф $G - H - \mathrm{Int}(A)$ — двухсвязный.

Замечание 3. Из замечания 1 следует, что если A_1 и A_2 — две части $\mathrm{Part}(G - H)$, то их внутренности несмежны друг с другом.

Очевидным следствием из предыдущих лемм является следующая лемма, доказанная в [1].

Лемма 4. *Пусть G — трехсвязный граф, и $H \subset V(G)$ — нерасширяемое стягиваемое множество и граф $G - H$ не является простым циклом. Пусть $A_1, A_2 \in \mathrm{Part}(G - H)$ — две крайние части $G - H$, $W_i = \mathrm{Int}(A_i)$. Тогда выполнены следующие условия:*

1) $G(W_1)$ и $G(W_2)$ — простые пути.

2) $|W_1| \geqslant 2$, $|W_2| \geqslant 2$.

3) $N_G(W_1) \cap W_2 = \varnothing$, $N_G(W_2) \cap W_1 = \varnothing$.

Лемма 5. [1, Лемма 5] *В обозначениях леммы 4 пусть $H_1 = V(h_{G-W_2}(G - H - W_2)) \cap H$, $H_2 = V(h_{G-W_1}(G - H - W_1)) \cap H$, $H_1^\star = H_1 \setminus H_2$, $H_2^\star = H_2 \setminus H_1$.*

Тогда

1) $N_G(G - H - W_2) \cap H \subset H_1$ и $N_G(G - H - W_1) \cap H \subset H_2$.

2) $H = H_1 \cup H_2$. Каждая компонента связности $G(H_1^\star)$ и $G(H_2^\star)$ имеет ровно одного соседа в H_2 и H_1, соответственно.

3) Предположим, что W — подпуть $G(W_1)$ такой, что $N_G(H_1^\star) \cap W_1 \subset V(W)$. Тогда множество $H_1^\star \cup V(W)$ стягиваемо.

4) Если $|H_1^\star| = 0$, то множество вершин любого подпути $G(W_1)$ стягиваемо.

5) Предположим, что G не содержит стягиваемого подграфа на $|H| + 1$ вершине. Если $|H_1^\star| = 1$, то выполнено одно из двух условий:

(1) $|W_1| \leqslant |H| - 1$.
(2) $|W_1| = |H| + 1$, *обе конечные вершины* $G(W_1)$ *смежны с* $H_1^\star$ *и множество вершин любого подпути* $G(W_1)$ *стягиваемо.*

Лемма 6. *В обозначениях леммы* 4 *пусть* $\{p, q\} = \mathrm{Bound}(A_i)$, $x \in H$.

Предположим, что в множестве $W_i \cup H$ *нашлась стягиваемая четверка* H', *и граф* $G - H'$ *не является циклом. Для графа* $G - H'$ *также выполнено условие леммы 3. Пусть* A *— крайняя часть графа* $G - H'$, $W = \mathrm{Int}(A)$. *Тогда*

1) вершины p *и* x *не могут быть соседними в* $G(W)$.

2) Если $N_G(H') \subset \{p, q\} \cup H$, *то* $\{p, q\}$ *— внутренность одной из крайних частей графа* $G - H'$. *В частности,* $pq \in E(G)$.

Доказательство. 1) Множество $\{p, q\}$ — одиночное в $G - H$, поэтому $d_{G-H}(p) \geqslant 3$. Максимум один сосед p может лежать в $H' \cap V(G - H)$ — это сосед p в W_i. Значит, если $x \notin H'$ и $px \in E(G)$, то $d_{G-H'}(p) \geqslant 3$, что невозможно, если p — внутренняя вершина части-цикла из $\mathrm{Part}(G - H')$.

2) По пункту 1) внутренность любой части $G - H'$ не может содержать одновременно вершину множества $\{p, q\}$ и вершину множества H. Значит, если $\{p, q\}$ не является внутренностью одной из частей, то внутренности всех крайних частей $G - H'$ лежат в H. Но внутренности разных частей несмежны друг с другом, поэтому, $G(H)$ несвязен. Противоречие. $\square$

2 Граф $G - H$ — простой цикл

Пусть в трехсвязном графе G хотя бы 11 вершин и можно выбрать стягиваемое подмножество H на 4 вершинах так, что $G - H$ — простой цикл. Докажем тогда, что в G найдется стягиваемое подмножество на 5 вершинах.

Замечание 4. В этом случае условие $\delta(G) \geqslant 4$ не потребуется.

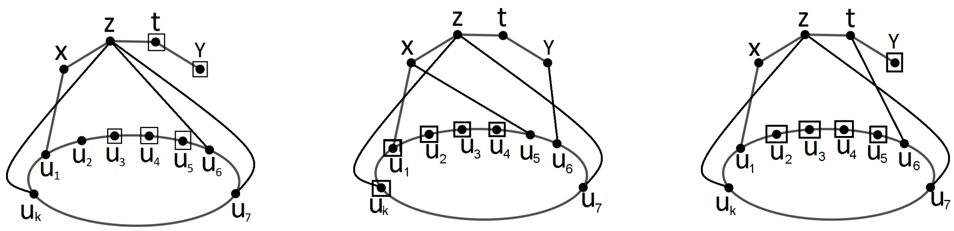
Предположим, что в G нет стягиваемого подмножества на 5 вершинах. Обозначим через C граф $G - H$. Разберем два случая.

2.1 В $G(H)$ можно выбрать путь $xzty$ длины 3

Выберем в C путь длины 5. Пусть W — множество вершин этого пути. Множество W нестягиваемо, тогда либо $N_G(x) \cap V(C) \subset W$, либо $N_G(y) \cap V(C) \subset W$. Не умаляя общности будем считать, что реализован первый вариант. Очевидно, что W можно выбрать таким образом, чтобы вершина x была смежна хотя бы с одним из концов пути $G(W)$. Обозначим вершины цикла последовательно $u_1, \ldots, u_k$, где $W = \{u_1, \ldots, u_5\}$ и вершина x смежна с u_1. Множество $W' = \{u_2, u_3, \ldots, u_6\}$ также нестягиваемо, поэтому $N_G(y) \subset W'$.

Так как $v(G) \geqslant 11$, цикл C содержит хотя бы 7 вершин. Рассмотрим множество $W'' = \{u_3, u_4, \ldots, u_7\}$, оно опять же нестягиваемо, значит $N_G(y) \cap V(C) \subset W' \cap W''$.

Так как пятерка $\{u_3, u_4, u_5, u_6, y\}$ нестягиваема, при ее удалении остается недвусвязный граф. Это возможно, только когда $N_G(t) \cap V(C) \subset W' \cap W''$. Следовательно, с вершинами $u_7, \ldots, u_k$ может быть смежна только z.



(a) (b) (c)

Рис. 1: *стягиваемые пятерки в разделе 2.1.*

Если ни t, ни y не смежны с u_6, то пятерка $\{u_3, u_4, u_5, y, t\}$ стягиваема (см. Рис 1(a)), u_2 смежна с x или z, так как несмежна ни с y, ни с t).

Если y смежна с u_6, то либо x смежна с u_5, и пятерка $\{u_k, u_1, u_2, u_3, u_4\}$ стягиваема (см. Рис 1(b)), либо x несмежна с u_5 и тогда пятерка $\{x, u_1, u_2, u_3, u_4\}$ стягиваема.

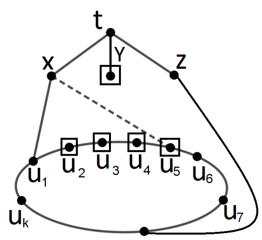
Если, наконец, y несмежна с u_6, а t смежна, то можно стянуть пятерку $\{u_2, u_3, u_4, u_5, y\}$ (см. Рис 1(c)).

2.2 В $G(H)$ нет пути длины 3

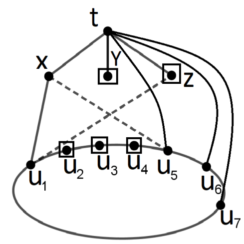
Следовательно, вершины H можно обозначить так, что x, y, z смежны в $G(H)$ с t и только с ней. Очевидно тогда, что каждая вершина x, y, z имеет хотя бы двух соседей в C. Пронумеруем вершины цикла и выберем путь $W = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, как в предыдущем пункте (то есть так, чтобы $\mathrm{N}_G(x) \cap V(C) \subset W$ и x смежна с u_1).

2.2.1 Вершины x и u_5 несмежны

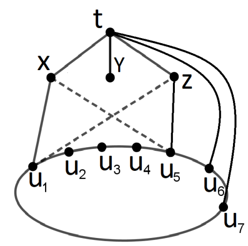
Попробуем тогда удалить подграф $G(\{x, u_1, u_2, u_3, u_4\})$. Оставшийся граф может быть недвусвязным только в том случае, когда хотя бы у одной из вершин y, z все соседи в C лежат в множестве $W' = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Не умаляя общности будем считать, что у y. Если z смежна хотя бы с одной вершиной в $C - W$, то пятерка $\{y, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ стягиваема (см. Рис 2(a), при $i \geqslant 6$ вершина u_i смежна с z или t).



(a)



(b)



(c)

Рис. 2: *стягиваемые пятерки в разделе 2.2.1*

Значит, с $C - W$ смежна только t. При $k \geqslant 9$ пятерка $W'' = \{u_1, u_k, u_{k-1}, u_{k-2}, u_{k-3}\}$ будет стягиваема, так как u_2 и u_{k-4} смежны с H и каждая из вершин x, y, z имеет хотя бы по одному соседу в $C - W''$.

При $k = 8$ пятерка W'' нестягиваема только в том случае, когда z смежна в C с u_1, u_5 и только с ними, так как x и y имеют хотя бы по одному соседу в множестве $\{u_2, u_3, u_4\}$. Но тогда пятерка $\{x, y, u_2, u_3, u_4\}$ стягиваема, так как t смежна с u_6.

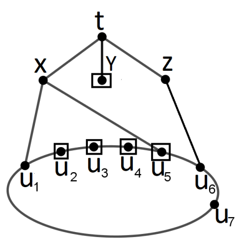
Осталось рассмотреть случай $k = 7$. Вершина t обязательно смежна с u_7, u_6. Также z не может быть смежна с u_1, иначе пятерка $\{y, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ будет стягиваема. Получаем, что z смежна хотя бы с одной из вершин u_2, u_3, u_4. Если при этом t смежна с u_5, то пятерка $\{y, z, u_2, u_3, u_4\}$ стягиваема (см. Рис 2(b)), поэтому с u_5 смежна только z (см. Рис 2(c)). Далее заметим, что y не может быть смежна с u_1, иначе пятерка $\{u_2, u_3, u_4, u_5, z\}$ стягиваема, и y несмежна с u_2, иначе пятерка $\{u_3, u_4, u_5, u_6, z\}$ стягиваема. Наконец, y несмежна с u_3, так как иначе стягиваема пятерка $\{z, u_4, u_5, u_6, u_7\}$. Но тогда y смежна в C только с u_4 и имеет степень 2 в G — противоречие.

2.2.2 Вершина x смежна с u_1 и u_5

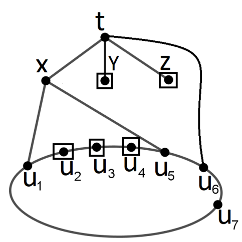
Множество $\{u_2, u_3, \ldots, u_6\}$ нестягиваемо, поэтому, не умаляя общности у вершины y все соседи в C лежат в этом множестве. Если z смежна с u_6, то пятерка $\{y, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ стягиваема, так как y имеет хотя бы два соседа в C (см. Рис 3(a)).

Если t смежна с u_6, то пятерка $\{y, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ не стягиваема только в том случае, если все соседи z из C лежат в множестве $\{u_2, u_3, u_4, u_5\}$, но тогда, как легко видеть, пятерка $\{y, z, u_2, u_3, u_4\}$ стягиваема (см. Рис 3(b)).

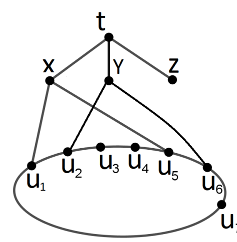
Значит, y смежна с u_6. Повторяя рассуждения раздела 2.2.1 для вершины y и пятерки $\{u_6, u_5, u_4, u_3, u_2\}$, получаем, что y также смежна и с u_2 (см. Рис 3(c)). Если z смежна с хотя бы одной вершиной из u_2, u_3, u_4, u_5, то пятерка $\{z, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ стягиваема. Также выше доказано, что z несмежна с u_6 и по симметричным причинам с u_1. Откуда немедленно следует, что $k \geqslant 8$ и пятерка $\{u_4, u_3, u_2, u_1, u_k\}$ стягиваема, так так все вершины x, y, z имеют соседей в C вне этой пятерки.



(a)



(b)



(c)

Рис. 3: *стягиваемые пятерки в разделе 2.2.2*

3 Для любой стягиваемой четверки H граф $G - H$ не является циклом

По лемме 3 в графе $G - H$ есть хотя бы две крайние части. Обозначим эти части A_1 и A_2.

Пусть везде далее $W_i = \mathrm{Int}(A_i)$, $G(W_1) = u_1 \ldots u_k$, $G(W_2) = w_1 \ldots w_\ell$, вершина u_1 смежна в $G - H - W_1 - W_2$ с p, u_2 — с q, w_1 — с r, w_ℓ — с s. Разберем несколько случаев.

3.1 $|H_i^\star| = 1$

Предположим, что $H_1^\star = \{x\}$. Тогда $H_2 = H - \{x\} = \{y, z, t\}$.

По пункту 5) леммы 5 $|W_1| \leqslant 3$ или $|W_1| = 5$.

3.1.1 $|W_1| = 2$

По пункту 2) леммы 5 вершина x имеет ровно одного соседа в H_2 (не умаляя общности, y), а в $G - H$ она смежна только с вершинами W_1. Следовательно, $d_G(x) = 3$. Противоречие.

3.1.2 $|W_1| = 3$

Четверка $W_1 \cup \{x\}$ стягиваема по пункту 3) леммы 5 и нерасширяема, поэтому в ее окрестности должны быть два пути, удовлетворяющие условию леммы 4 (см. Рис. 4).

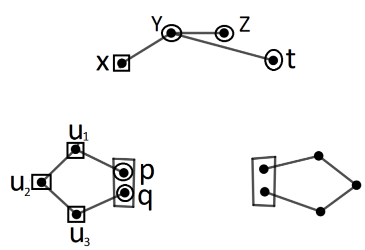


Рис. 4: *четверка $W_1 \cup \{x\}$ и ее окрестность*

По лемме 6 ребро pq является одним из путей. Следовательно, вершины p и q имеют степень 2 в $G - W_1 - x$. Но тогда $d_G(p) = d_G(q) = 3$, так как x несмежна с p и q. Противоречие.

3.1.3 $|W_1| = 5$

Если u_5 смежна с H_2, то пятерка $W_1 \setminus \{u_5\} \cup \{x\}$ стягиваема. Но иначе $d_G(u_5) \leqslant 3$. Противоречие.

3.2 $|H_i^\star| = 3$

Предположим, что $|H_1^\star| = 3$. Тогда с вершинами W_2 может быть смежна только одна вершина H (та, которая не входит в $H_1^\star$). Следовательно, степени всех вершин W_2 не превосходят 3. Противоречие.

3.3 $|H_i^\star| = 2$

Предположим, что $|H_1^\star| = 2$.

Обозначим вершины H так, что $x, y \in H_1^\star$, $z, t \in H_2$.

По пункту 5) леммы 5 каждая из вершин x, y может быть смежна только с одной из вершин z, t. Причем, если x и y смежны, то они могут быть смежны только с одной и той же вершиной из $\{z, t\}$. В любом случае, чтобы граф $G(H)$ был связен, необходимо, чтобы z и t были смежны.

Так как $d_G(x) \geqslant 4$, $d_G(y) \geqslant 4$, а в H вершины x и y имеют максимум двух соседей, каждая из вершин x, y смежна хотя бы с двумя вершинами множества W_1.

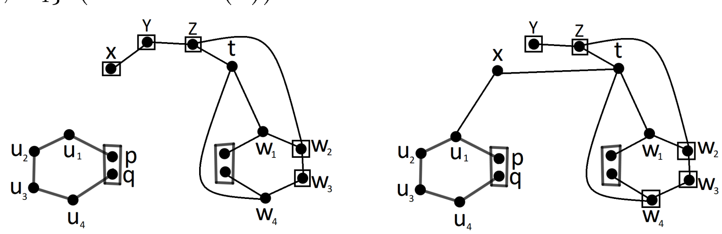
Каждая из вершин W_2 имеет хотя бы двух соседей в H, причем W_2 несмежно с $H_1^\star$. Следовательно, каждая из вершин z и t смежна со всеми вершинами W_2.

Множество $\{x, y\}$ смежно с множеством $\{z, t\}$. Не умаляя общности, y смежна с z.

Если $|W_2| = 2$, то стягиваема пятерка $W_2 \cup \{y, z, t\}$.

Если $|W_2| = 3$, то стягиваема пятерка $W_2 \cup \{z, t\}$.

Если $|W_2| \geqslant 4$, то либо x смежна с множеством $\{y, z\}$, и стягиваема пятерка $\{x, y, z, w_2, w_3\}$ (см. Рис 5(a)), либо x смежна с t, и стягиваема $\{y, z, w_2, w_3, w_4\}$ (см. Рис 5(b)).



(a) (b)

Рис. 5: *стягиваемые пятерки при* $|W_2| \geqslant 4$

Далее будем рассматривать случаи, когда $H_1^\star = H_2^\star = \varnothing$. Тогда по лемме 5 любые подпути в $G(W_1)$ и $G(W_2)$ стягиваемы, а значит, $|W_1|, |W_2| \in \{2, 3, 4\}$.

3.4 $|W_1| = 4$

Четверка W_1 стягиваема, поэтому в $G - W_1$ есть два пути, удовлетворяющие условиям леммы 4.

По лемме 6 ребро pq является одним из путей. Следовательно, степени p и q в графе $G-W_1$ равны 2. Но тогда $d_G(p) = d_G(q) = 3$. Противоречие.

3.5 $|W_1| = 3$

Утверждение 1. *Если $|W_1| = 3$, то в $G(H)$ есть два независимых ребра.*

Доказательство. Пусть это не так, тогда можно обозначить вершины H так, что вершина x смежна с вершинами y, z, t и никаких других ребер в H нет. Так как $H = H_1 = H_2$, каждая из вершин y, z, t смежна хотя бы с одной вершиной и в $G - H - W_1$, и в $G - H - W_2$.

Не умаляя общности, множество $\{x, y\}$ смежно с W_1. Пятерка $W_1 \cup \{x, y\}$ нестягиваема только тогда, когда одна из вершин z, t имеет не более одного соседа в $G - H - W_1$ (см. Рис. 6), пусть это будет z. Значит, z смежна хотя бы с двумя вершинами W_1. Пятерка $W_1 \cup \{x, z\}$ нестягиваема, только если одна из вершин y, t имеет не более одного соседа в $G - H - W_1$, пусть это будет y. Значит, y смежна хотя бы с двумя вершинами W_1.

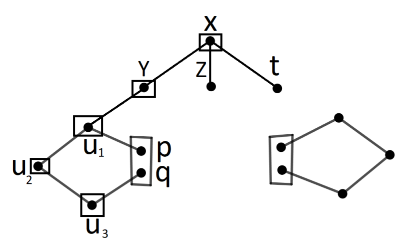


Рис. 6: *пятерка $W_1 \cup \{x, y\}$*

Каждая вершина W_2 смежна хотя бы с двумя вершинами H, а из множества $\{y, z\}$ ведет не более двух ребер в W_2. Следовательно, W_2 смежно с $\{x, t\}$. Множества $W_2 \cup \{x, t\}$ и $W_2 \cup \{z, x, t\}$ стягиваемы, так как y и z смежны хотя бы с двумя вершинами W_1. Одно из этих множеств содержит 5 вершин. Противоречие.

□

`Далее считаем, что в` H `есть два независимых ребра. Пусть это ребра` xy `и` zt.

Каждая вершина W_1 смежна хотя бы с двумя вершинами H, следовательно, в H найдется вершина, смежная хотя бы с двумя вершинами W_1. Пусть эта вершина — y.

3.5.1 $|W_2| = 3$

Пятерка $W_2 \cup \{z, t\}$ нестягиваема, только если x несмежна с $G - H - W_2$ или множество $\{z, t\}$ несмежно с W_2.

Предположим, что множество $\{z, t\}$ несмежно с W_2. Тогда каждая вершина W_2 смежна с x и y. Пятерка $W_2 \cup \{x, y\}$ нестягиваема, только если граф $G - W_2 - \{x, y\}$ не двусвязен. Вершины z и t смежны и имеют хотя бы по одному соседу в $G - H - W_2$. Следовательно, в $G - H - W_2$ вершины z и t смежны с одной и той же вершиной f. Кроме того, каждая из вершин z, t должна иметь степень хотя бы 4 в G, поэтому смежна с x и y. Но тогда пятерка $W_2 \cup \{x, z\}$ стягиваема (см. Рис. 7), так как y и t смежны, y имеет хотя бы двух соседей в W_1, а t имеет хотя бы одного соседа в $G - H - W_2$.

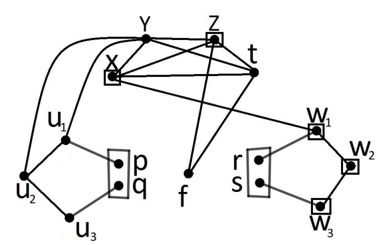


Рис. 7: *стягиваемая пятерка* $W_2 \cup \{x, z\}$

Значит, x несмежна с $G - H - W_2$. Но $d_G(x) \geqslant 4$, поэтому x смежна с W_2.

Вспомним, что каждая вершина W_1 смежна хотя бы с двумя вершинами H. То есть каждая вершина W_1 смежна с z или t, а следовательно, одна из вершин z, t (например, z), смежна хотя бы с двумя вершинами W_1.

Если t смежна с $G - H - W_2$, то пятерка $W_2 \cup \{x, y\}$ стягиваема (см. Рис. 8). Если t смежна с W_2, то пятерка $W_2 \cup \{x, t\}$ стягиваема (см. Рис. 9). А иначе, t несмежна с $G - H$ и имеет степень не более 3 в G. Противоречие.

3.5.2 $|W_2| = 2$

Пятерка $W_2 \cup \{x, z, t\}$ нестягиваема, только если она несвязна. При этом z и t смежны, и W_2 смежно хотя бы с одной вершиной множества $\{x, z, t\}$. То есть x несмежна с z и t, и либо x несмежна с W_2, либо множество $\{z, t\}$ несмежно с W_2.

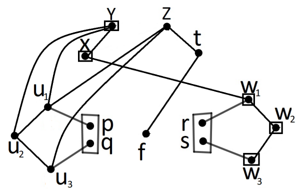


Рис. 8: *стягиваемая пятерка* $W_2 \cup \{x, y\}$

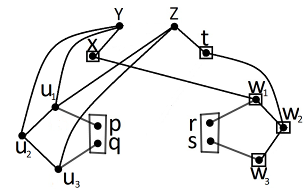


Рис. 9: *стягиваемая пятерка* $W_2 \cup \{x, t\}$

Предположим, что x несмежна с W_2, z и t. Тогда x смежна хотя бы с тремя вершинами $G-H-W_2$. В силу связности $G(H)$ вершина y смежна с множеством $\{z, t\}$. Легко видеть, что пятерка $W_2 \cup \{y, z, t\}$ стягиваема (см. Рис. 10).

Значит, множество $\{z, t\}$ несмежно с x и W_2. Тогда каждая вершина W_2 смежна с x и y, каждая вершина множества $\{z, t\}$ смежна хотя бы с двумя вершинами $G - H - W_2$, а y смежна хотя бы с одной вершиной множества $\{z, t\}$, пусть y смежна с z. Легко видеть, что пятерка $W_2 \cup \{y, z, x\}$ стягиваема (см. Рис. 11).

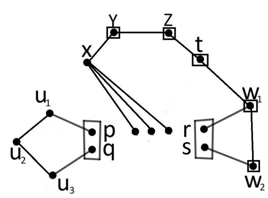


Рис. 10: *стягиваемая пятерка* $W_2 \cup \{y, z, t\}$

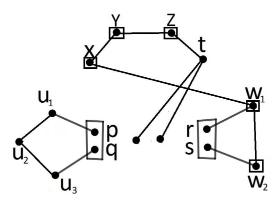


Рис. 11: *стягиваемая пятерка* $W_2 \cup \{y, z, x\}$

3.6 $|W_1| = |W_2| = 2$

Утверждение 2. *Если какая-то вершина H смежна с обеими вершинами одного из путей W_1 и W_2 или с вершиной какого-либо пути и вершиной $G - H - W_1 - W_2$, то в графе G найдется стягиваемая пятерка.*

Доказательство. Пусть, например, x смежна с u_1 и еще одной вершиной $G - H - W_2$.

Если граф $G(W_2 \cup \{y,z,t\})$ — связный, то пятерка $W_2 \cup \{y,z,t\}$ стягиваема. Далее будем считать, что граф $G(W_2 \cup \{y,z,t\})$ несвязен. Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. *Две вершины множества $\{y,z,t\}$ в объединении с W_2 образуют связный подграф.*

Не умаляя общности, $\{z,t\}$. Тогда y может быть смежна в H только с x и должна иметь хотя бы трех соседей в $G-H-W_2$. Так как $G(H)$ связен, вершина x смежна с z или t. Следовательно, пятерка $W_2 \cup \{x,z,t\}$ стягиваема (см. Рис. 12).

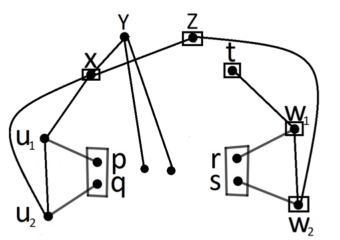


Рис. 12: *стягиваемая пятерка* $W_2 \cup \{x,z,t\}$

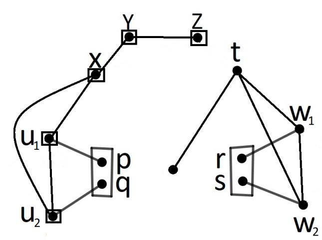


Рис. 13: *стягиваемая пятерка* $W_1 \cup \{x,y,z\}$

Случай 2. *Только одна вершина множества $\{y,z,t\}$ образует связный подграф с W_2.*

Не умаляя общности t. Тогда t может быть смежна в H только с x. Множество W_2 несмежно с $\{y,z\}$, но $d_G(w_1) \geqslant 4$, $d_G(w_2) \geqslant 4$, следовательно, вершины w_1 и w_2 смежны с x и t. Пятерка $W_1 \cup \{x,y,z\}$ связна, так как $G(H)$ связен, а t в нем — висячая вершина, а, следовательно, она стягиваема (см. Рис. 13).

Случай 3. *Ни одна из вершин $\{y,z,t\}$ не смежна с W_2.*

Тогда с W_2 смежна только x. Значит, обе вершины W_2 имеют степень 3 в G, противоречие.

□

В оставшемся случае ни одна вершина H не смежна с двумя вершинами одного из путей или с вершиной W_i и вершиной $G-H-W_1-W_2$.

Заметим, что каждая вершина W_1 должна быть смежна хотя бы с двумя вершинами H. А каждая вершина H смежна не более чем с одной вершиной W_1. Поэтому с u_1 смежны ровно две вершины H, а с u_2 — две другие вершины H. И аналогично с W_2.

Каждая вершина H смежна с вершинами путей, поэтому H не смежно с $G - H - W_1 - W_2$. Кроме того, так как каждая вершина H смежна ровно с двумя вершинами из $G - H$, и $\delta(G) \geqslant 4$, то $\delta(G(H)) \geqslant 2$. То есть, в $G(H)$ есть цикл длины 4, пусть это цикл $xyzt$.

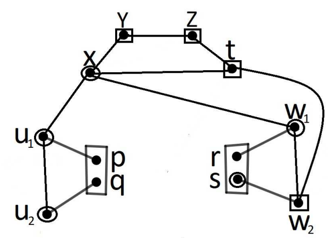


Рис. 14: стягиваемая четверка $\{y, z, t, w_2\}$

Можно считать, что вершина x смежна с u_1 и w_1. Четверка $H' = \{y, z, t, w_2\}$ стягиваема и нерасширяема (см. Рис. 14). Ее окрестность содержится в множестве $\{x, u_1, u_2, w_1, s\}$. Вершина u_1 не может входить в путь, удовлетворяющий лемме 4 для четверки H', так как имеет степень 3 в $G - H'$. Поскольку вершины из разных путей не могут быть смежны, а $xw_1 \in E(G)$, путями должны быть xw_1 и u_2s. То есть $s = q$ и по лемме 4 граф $G - H' - \{u_2, s\} = G - \{y, z, t, w_2, u_2, s\}$ двусвязен.

Предположим, что одна из вершин y, t смежна с u_1 или w_1. Пусть y. Тогда граф $G - \{z, t, w_2, u_2, s\}$ двусвязен. Кроме того, граф $G(\{z, t, w_2, u_2, s\})$ связен, так как w_2 смежна с двумя вершинами H и ни одна из них не x, а u_2 смежна с s. Следовательно, пятерка $\{z, t, w_2, u_2, s\}$ стягиваема.

Значит, вершины y и t смежны с u_2 и w_2. Проделывая рассуждения, аналогичные описанным выше, для четверки $H'' = \{x, z, t, w_1\}$ получаем, что либо в G есть стягиваемая пятерка, либо $p = r$.

Но случай $\{p, q\} = \{r, s\}$ невозможен, так как тогда либо $V(G) = \{x, y, z, t, u_1, u_2, w_1, w_2, p, q\}$, то есть $v(G) < 11$, либо $\mathrm{Part}(G - H; \{p, q\}) \geqslant 3$. Но тогда по лемме 1 найдется еще одна крайняя часть в $\mathrm{Part}(G - H)$. Напомним, что все ребра из H в рассматриваемом случае выходят к W_1 и W_2. Следовательно, третья крайняя часть несмежна с H, что противоречит трехсвязности графа G.

Таким образом, мы доказали, что если в трехсвязном графе G хотя бы 11 вершин и степень любой вершины хотя бы 4, то в G есть стягиваемая пятерка.

4 Заключение

В настоящей работе был исследован вопрос о нахождении стягиваемого 5-вершинного множества в трехсвязном графе. Доказано, что в трехсвязном графе на хотя бы 11 вершинах с минимальной степенью вершин хотя бы 4 найдется стягиваемое множество на 5 вершинах Разработаны методы, позволяющие исследовать вопрос о нахождении 5-вершинных стягиваемых множеств и в графах без ограничения на минимальную степень вершин, а также нахождении стягиваемых множеств больших размеров. В частности, случай, когда при удалении стягиваемого четырехвершинного множества, остается простой цикл, разобран в работе без предположения об ограничении на минимальную степень вершин.

Список литературы

[1] M. Kriesell. *Contractible Subgraphs in 3-Connected Graphs* J.Comb.Theory Ser.B, Vol.80, 2000, p.32-48.

[2] M. Kriesell. *On Small Contractible Subgraphs in 3-connected Graphs of Small Avarage Degree* Mathematisches Seminar der Universitat Hamburg, Bundesstrabe 55, D-20146 Hamburg.

[3] W. McCuaig, K. Ota. *Contractible triples in 3-connected graphs.* J.Comb.Theory Ser.B, Vol.60, 1994, p.308-314.

[4] W. T. Tutte. *Connectivity in graphs.* Toronto, Univ. Toronto Press, 1966.

[5] Д. В. Карпов, А. В. Пастор. *О структуре k-связного графа.* Записки научных семинаров ПОМИ, **266**, 2000, стр. 76-106.

[6] Д. В. Карпов. *Блоки в k-связных графах.* Записки научных семинаров ПОМИ, **293**, 2002, стр. 59-93.

[7] Д. В. Карпов. *Разделяющие множества в k-связном графе.* Записки научных семинаров ПОМИ, **340**, 2006, стр. 33-60.

[8] Д. В. Карпов. *Дерево разбиения двусвязного графа.* Записки научных семинаров ПОМИ, **417**, 2013, p. 86-105.

[9] Д. В. Карпов. *Минимальные двусвязные графы.* Записки научных семинаров ПОМИ, **417**, 2013, p. 106-127.

[10] D. V. Karpov. *Large contractible subgraphs of a 3-connected graph.* Discussiones Mathematicae Graph Theory, to appear, doi:10.7151/dmgt.2172.