ССанкт-Петербургский государственный университет

Факультет прикладной математики - процессов управления

Кафедра математической теории игр и статистических решений

**Гапонова Екатерина Николаевна**

Выпускная квалификационная работа бакалавра

**Анализ влияния рынка на выбор краткосрочных или долгосрочных контрактов**

Направление 01.03.02

Прикладная математика, фундаментальная информатика
и основы программирования

Научный руководитель,
кандидат физ.-мат. наук,
старший преподаватель Кумачева С.Ш.

Санкт-Петербург

2019

**Оглавление**

[Введение 3](#_Toc10117994)

[Постановка задачи 6](#_Toc10117995)

[Глава 1. Точное определение навыков 8](#_Toc10117996)

[1.1 Основное обучение младших агентов 8](#_Toc10117997)

[1.2 Дополнительный вклад в обучение 14](#_Toc10117998)

[1.3 Моделирование 16](#_Toc10117999)

[1.4 Численный пример 27](#_Toc10118000)

[Глава 2. Прогнозирование навыков 29](#_Toc10118001)

[2.1 Примеры различных ситуаций на рынке начинающих специалистов 29](#_Toc10118002)

[2.2 Вероятностное определение способностей 33](#_Toc10118003)

[2.3 Долгосрочный контракт при неточном тестировании 38](#_Toc10118004)

[Заключение 51](#_Toc10118005)

[Список литературы 54](#_Toc10118006)

[Приложения 56](#_Toc10118007)

[Приложение 1. 56](#_Toc10118008)

[Приложение 2. 56](#_Toc10118009)

# Введение

Теория контрактов представляет собой раздел теоретической экономики. Она исследует определение параметров контракта между заключающими его сторонами. Данная теория возникла в начале двадцатого века и бурно развивалась, в связи с чем возникли многие экономические труды таких ученых, как Р. Коуз, К. Янковский, В. Лисин и многих других [10] В разные года многие ученые получали нобелевские премии за развитие данной сферы. В 2016-ом году этого звания удостоились ученые О. Харт и Б. Хольфстрем. за труды по исследованию классической модели «принципал-агент», которая в данной работе формулируется отношениями между фирмой, которая сталкивается с проблемой стимуляции сотрудников, и агентом, чьи усилия должны быть увеличены в интересах фирмы. Таким образом, в данной работе будут рассмотрены контракты, которые заключает фирма с агентами с целью дальнейшего осуществления своих проектов, успех которых зависит от действий агентов.

При решении о подписании контракта и о его продолжительности фирма оценивает уровень навыков агента, требующихся для работы на данной должности. На сегодняшний день всё больше фирм отдают предпочтение надпрофессиональным навыкам потенциального сотрудника, которые могут не только помочь агенту быстро повысить узкопрофессиональные навыки, направленные на определенный вид работы, что особенно актуально для начинающих свою карьеру, но также сыграть решающую роль в реализации проекта [2].

Основой для текущего исследования послужили некоторые идеи, изложенные в [3]. В указанной работе исследовалась возможность равновесия на рынке с позиции заключения долгосрочных и краткосрочных контрактов. В результате были выработаны стратегии фирм для выбора продолжительности контрактов, заключаемых с агентами, в зависимости от доли ценностей осуществляемых фирмами проектов на рынке. Авторы работы рассматривают постоянно изменяющуюся модель, где в каждом периоде фирмы (организации) для запуска проекта заключают краткосрочные или долгосрочные контракты с младшим (junior) и/или краткосрочный контракт со старшим (senior) агентами. Агенты осуществляют свою деятельность в течении двух периодов. Краткосрочный контракт подразумевает отношения агента с организацией в течение одного периода, в то время как долгосрочный контракт с младшим агентом – в течение двух. Младший агент — это новичок на рынке, не имеющий опыта в рассматриваемой сфере деятельности. Старший агент является опытным работником, уже проработавшим на одну из организаций на рынке в прошлом периоде как младший. Он полностью руководит проектом, от его способностей и усилий зависит результат реализации фирмой проекта, в то время как младший агент выполняет некоторую рутинную работу, которая на результат не влияет. При этом работа в качестве младшего сотрудника является необходимым условием для последующего становления старшим и управления проектом. Каждый старший агент обладает некоторым уровнем способностей, который является публичной информацией на рынке. Все младшие агенты, напротив, считаются идентичными и раскрывают свои способности в течение первого периода.

Целью данного исследования, отличающего его от работы, описанной выше, является предоставление возможности для фирмы получения информации о способностях агента при заключении контракта уже в первом для агента периоде. Ситуация на рынке труда в течении времени подвержена изменениям. В связи с положением на рынке, наличием конкуренции, издержками на поиск информации об альтернативах сделки [9], фирмы не всегда могут найти подходящего опытного сотрудника. Поэтому многие фирмы заинтересованы в наборе на долгосрочную перспективу агентов без опыта, обучив которых, они смогли бы обеспечить себе в будущем наиболее подходящих специалистов.

В данной работе рассматривается выбор для подписания того или иного контракта с младшим агентом с позиции только одной организации. Поставленная задача в совокупности относится к задачам теории принятия решения [13], в которой лицом, принимающем решение, является фирма.

В первой главе данной работы моделируется обучение и рассчитываются параметры контрактов для младших агентов в предположении точного выявления их способностей. Во второй главе вводятся в рассмотрение статистические данные о ситуации на рынке начинающих специалистов и рассматривается определение параметров долгосрочного контракта при выявлении способностей с некоторыми заданными вероятностями. За счет этого производится корректировка понятия «оптимальный контракт».

# Постановка задачи

В каждый период фирма реализует проект определенной постоянной ценности. Для запуска проекта в текущем периоде ей требуется нанять старшего и младшего агентов. Предположим, что в условиях ограниченности кадров на рынке труда сферы деятельности фирмы и времени на осуществление поиска на нем потенциальных сотрудников, организация смогла найти старшего агента, с которым она заключает краткосрочный контракт, и младшего, при подписании контракта с которым фирма владеет двумя альтернативами: заключить с ним долгосрочный контракт, тем самым автоматически обеспечив себе опытного сотрудника во втором для агента периоде, либо подписать с ним краткосрочный контракт, и в следующем периоде, так же, как и в текущем, для осуществления проекта прибегнуть к поиску старшего сотрудника.

Для принятия решения о продолжительности и параметрах контракта фирме требуются данные о способностях агента во втором для него периоде. От этих способностей будет зависеть ожидаемая прибыль фирмы. Предположим, что фирма не знает будущую ситуацию на рынке старших специалистов, и результат поиска опытного сотрудника в следующем периоде для неё неизвестен. Поэтому она рассчитывает максимальную ожидаемую прибыль, которую сможет получить при подписании долгосрочного контракта с найденным ею младшим агентом, данные о потенциальных способностях которого смогут обеспечить б**о**льшую определенность о результатах её работы.

Таким образом, для успешного выполнения фирмой проекта в следующем периоде и, как следствие, получения максимальной прибыли, необходима реализация следующих задач:

* обеспечить фирме данные о текущих уровнях навыков агента;
* смоделировать процесс обучения агента в ходе работы в течение первого для него периода или при дополнительных затратах фирмой на обучение;
* рассчитать параметры краткосрочного и долгосрочного контрактов с определенным младшим сотрудником и ожидаемую прибыль фирмы в случае заключения второго из них;
* сформировать данные об ожидаемых способностях агента и ожидаемой прибыли фирмы при неточном выявления навыков младших агентов при тестировании (с некоторыми заданными вероятностями) с учетом текущей ситуации на рынке начинающих специалистов.

# Глава 1. Точное определение навыков

## 1.1 Основное обучение младших агентов

Способности агента в данной работе разделены на две составляющие: *гибкие навыки*  (soft skills), такие как лидерские качества, коммуникабельность, креативность, способность к адаптации , скорость усвоения новой информации, то есть, надпрофессиональных навыки агента, отражающие его личностные качества, помогающие ему при работе в сфере деятельности фирмы, и *жесткие навыки* (hard skills), которые отражают профессиональные специализированные навыки агента.[4] Таким образом, любой агент характеризуются вектором двух видов его навыков

Гибкие навыки человека формируются в течении всей его жизни. Так как их усваивание происходит медленно, уровень гибких навыков можно представить в виде фиксированной величины, не изменяющейся в обоих периодах деятельности агента. В то же время специализированные навыки могут увеличиваться в течение первого для агента периода с начального значения до некоторого максимального для данного агента уровня жестких навыков . Таким образом, вектор, описывающий способности младшего агента: , и, в свою очередь, старшего: .

Получение информации об уровне надпрофессиональных качеств младшего агента, а также о начальном уровне его профессиональных навыков, может быть осуществлено фирмой с помощью тестирования, состоящего из двух тестов: один определяет уровень гибких навыков агента, второй – текущих жестких. Издержки на тестирование одного агента положим равными .

Разделим агентов на 4 типа по уровням их гибких и жестких навыков в предположении, что доли агентов без опыта, вышедших на рынок труда, с каждым из уровней по каждому типу навыков равны друг другу.

Будем считать, что в момент времени , то есть на момент начала первого периода деятельности агентов, их гибкие и изначальные жёсткие навыки являются дискретными случайными величинами, подчиняющимися равномерному закону распределения [6], и принимают значения и соответственно. Таким образом, в ходе тестирования агента фирма может выявить любые уровни обоих навыков равновероятно. Так как количества всевозможных значений для и равны 11, вероятности владения агентом каждым из уровней гибких и жестких навыков принимают значения и соответственно. Положив, что случайные величины и являются независимыми, вероятности того, что агент обладает парой уровней навыков , получим перемножением соответствующих вероятностей обладания агентом каждым значением навыков из данной пары: . Таким образом, получим двумерную случайную дискретную величину всевозможных пар уровней навыков младшего агента, с количеством пар, равным 121, имеющую двумерное равномерное распределение с вероятностью для каждой пары .

Математическое ожидание дискретной равномерно распределенной случайной величины: , где a и b – концы отрезка. Используя данную формулу, получаем математическое ожидание гибких навыков агента . Будем считать агентов с уровнем гибких навыков, равным данному значению, либо превосходящим его, *агентами с высоким уровнем гибких навыков* , остальных – *агентами с низким уровнем гибких навыков* . В результате данной классификации имеем две случайных дискретных, подчиняющихся равномерному закону распределения, величины и , принимающих значения , . Положив и равными средним значениям и соответственно, при округлении до первого знака после запятой получим: , , которые так же являются приближенными значениями нижнего и верхнего квартилей случайной величины .

Работу агента в первом для него периоде можно рассматривать как стажировку, в течение которой агент усваивает новые профессиональные навыки, которые понадобятся ему при работе в роли старшего агента.

В [1], где изучаются кривые обучения, показано, что основой процесса обучения является следующее эмпирическое правило: скорость усвоения новых навыков будет пропорциональна объему еще неприобретенных. Данное правило описывается дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными:[7]

,

с начальным условием , частным решением которого является функция

.

Покажем, что это решение является верным.

Действительно, при подстановке в полученное частное решение начального условия, получим:

Следовательно, начальное условие выполняется. Далее находим производную частного решения по и подставляем её и полученное решение в исходное уравнение:

Получаем верное равенство.

Здесь – функция, отражающая зависимость усвоения новых знаний от времени, является её максимально возможным значением, – уровнем начальных навыков, имеющихся у обучаемого, и – коэффициентом пропорциональности, влияющим в итоговой полученной функции на скорость обучения.

Интерпретируем данную функцию к ситуации усвоения агентом профессиональных навыков в течение одного периода. Функция обучения в контексте нашей задачи является измеримой функцией усвоения жестких навыков в течение времени с максимально возможным значением и начальным уровнем навыков . За коэффициент, влияющий на скорость усвоения новых профессиональных навыков, может быть взят уровень гибких навыков агента, который как раз отражает его надпрофессиональные качества, влияющие на результат обучения.

Таким образом функция обучения агента жестким навыкам принимает вид:

По её виду можно сделать вывод, что, чем выше у агента уровень гибких навыков, тем быстрее он приобретает новые профессиональные навыки.

Предполагая, что агент обучается только в течении первого периода, взятого за единицу, при он достигает своего максимального уровня жестких навыков, который в дальнейшем остаётся неизменным.

При получаем функцию, зависящую от пар значений двумерной величины :

 (1)

Подставляя в формулу всевозможные пары значений двух видов навыков агента, имеем матрицу значений величины :

В силу дискретной природы величин и в момент времени функция (1) также является дискретной величиной, принимающей значения . Обозначим за множества пар индексов полученных при тестировании уровней навыков, при которых агент после обучения достигает уровня жестких навыков . Обладания агентом каждой из всевозможных пар навыков , являются несовместными событиями, поэтому применяя теорему сложения вероятностей для всевозможных пар навыков, ведущих к каждому из значений профессиональных навыков , то есть для пар индексов , получим распределение вероятностей величины , заданное в таблице 1:

Таблица 1. Закон распределения вероятностей случайной дискретной величины h

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

В силу дискретной природы данной случайной величины, ее математическое ожидание может быть определено как , где =11. В результате, при округлении до первого знака после запятой, получаем . Тогда, при значении , равном или превосходящим 0.7, позиционируем агента как *агента с высоким уровнем жестких навыков* , в противном случае – как *агента с низким уровнем жестких навыков* . При описанной классификации агентов на две группы имеем две случайных дискретных величины и , принимающих значения , . При подсчете количеств пар значений двумерной величины , ведущих к значениям и , получим 49 и 72 соответственно. Тогда распределения вероятностей для каждой из величин представляются таблицами 2 и 3 соответственно:

Таблица 2. Закон распределения вероятностей случайной дискретной величины

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

Таблица 3. Закон распределения вероятностей случайной дискретной величины

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1 |
|  |  |  |  |  |

Задавая и как математические ожидания данных величин, получим: , .

Таким образом все агенты на рынке труда, в зависимости от своих способностей, разделяются на четыре типа, которые можно представить в виде четырёх пар значений: , , и .

## 1.2 Дополнительный вклад в обучение

Помимо усвоения агентами новых профессиональных навыков, происходящего в течение первого периода во время выполнения ими требуемой работы, фирма может дополнительно вкладываться в обучение агента, к примеру, отправляя его на некоторые дополнительные курсы, если видит в нём перспективу становления высококвалифицированным специалистом, который фирме необходим.

Проведя тестирование и рассчитав ожидаемый уровень жестких навыков, которым агент будет обладать с течением первого периода, фирма оценивает, сможет ли сотрудник данного типа реализовать ее проект во втором для него периоде. Если агент обладает низким уровнем жестких навыков, которого недостаточно для успешного выполнения проекта, фирма может подтянуть данные навыки сотрудника с помощью дополнительных затрат на его обучение.

При дополнительном обучении скорость усвоения новых навыков агентом будет увеличиваться. Предполагая обучение достаточно эффективным, чтобы фирме имело смысл осуществлять подобные затраты, но при этом принимая во внимание, что рост профессионализма агентов сильно зависит от уровней их начальных навыков, коэффициент, влияющий на скорость обучения, можно положить квадратично зависящим от гибких навыков агента. Таким образом функция обучения примет вид:

При подстановке всевозможных пар значений , в функцию обучения с дополнительным вкладом в него фирмой при , получим матрицу:

Таким образом в момент является случайной дискретной величиной, принимающей значения . В случае дополнительного обучения агента при полученных значениях , меньших среднего значения величины , то есть меньших 0.7, так же, как и в предыдущем разделе, позиционируем агента как агента с низким уровнем жестких навыков, в противном случае – как агента с высоким уровнем данных навыков.

Будем говорить, что дополнительное обучение младшего агента приносит результат, если после него уровень жестких навыков агента повышается с уровня , который был получен при расчете уровня жестких навыков, которым начинающий сотрудник будет обладать во втором для него периоде без дополнительного вклада в его обучение, до уровня .

Сопоставляя полученную выше матрицу с матрицей значений из предыдущего раздела, получаем пары уровней навыков, при которых дополнительное обучение приносит результат:

Обозначим за множества пар индексов гибких и начальных жестких навыков, при которых при дополнительном вкладе организацией в обучение сотрудника, он приобретает уровень профессиональных навыков . Будем также использовать обозначения и для обозначения типа агента относительно его жестких навыков, полученного при дополнительном обучении.

## 1.3 Моделирование

Решающим фактором при выборе контракта фирмой с агентом является прибыль, которую с этим сотрудником она сможет осуществить. Также встаёт вопрос о выплатах агенту, при которых он будет плодотворно работать на данную организацию.

Следуя общей постановке задачи, описанной в [2], построим собственную модель, имеющую ряд существенных отличий.

Каждый период доход фирмы от проекта может быть представлен суммой двух положительных составляющих: заранее определенной фиксированной , и дополнительной ценности проекта при его успешном (полном) осуществлении В случае невыполнения проекта доход организации составит только фиксированная составляющая. Положим, что в течение всей деятельности фирмы она реализует проекты одинаковой ценности.

Проектом полностью управляет старший агент. Как и в [2], будем считать, что на результат выполнения проекта влияют его способности и прикладываемые им усилия. Чем большими навыками обладает агент и чем больше усилий он прикладывает, тем больше прибыли это принесёт фирме. В различных сферах деятельности влияние гибких и жестких навыков на результат реализации проектов различно. В связи с тем, что данная работа не привязана к какой-либо определенной сфере деятельности фирмы, положим влияние данных навыков равнозначным. Тогда величина, суммирующая способности агента: . Обозначим за уровень усилий (действия) старшего агента, . Усилия агента не являются прописанной в контракте величиной и не поддаются проверке.

Оплата агента может зависеть от результата по выполнению проекта. Усилия младшего агента не влияют на реализацию проекта, поэтому фирма предлагает ему только фиксированную зарплату . С другой стороны, чтобы простимулировать старшего агента прикладывать большие усилия, его доход можно разделить на две составляющих: заданную заработную плату , которую агент получит при любом исходе реализации проекта, и некоторую долю от дополнительной ценности проекта ,, являющуюся бонусом при получении организацией дополнительной ценности . Получение данного бонуса для сотрудника будет зависеть от прикладываемых им усилий и способностей. Положим, что фиксированная заработная плата агента является неотрицательной и ограниченной.

Таким образом краткосрочный контракт с младшим агентом характеризуется заработной платой: , краткосрочный контракт с опытным сотрудником представляется фиксированной заработной платой и дополнительным бонусом: . Долгосрочный контракт с младшим агентом можно представить как вектор, компонентами которого являются фиксированная заработная плата агента в первый для него период, заданная заработанная плата, которую он будет получать во втором периоде, и стимулирующий агента в следующем периоде бонус: .

Так как в данной работе рассматривается выбор фирмой долгосрочного или краткосрочного контракта для определенного младшего агента, дальнейшая задача акцентируется на расчете параметров двух данных контрактов.

Издержки агента [8] при выполнении проекта могут быть представлены затратами на усилия реализации проекта определенной дополнительной ценности:

Так как усилия младшего агента не оказывают влияния на реализацию проекта, и первый для него период может быть рассмотрен как стажировка, минимизируем заработную плату младших агентов до нуля: Предполагая, что фирм на рынке меньше, чем младших агентов, и учитывая условие об обязательном этапе работы каждым агентом как младшим, новички будут соглашаться на минимальную заработную плату и в случае краткосрочного контракта, и в случае рассмотрения первого периода при долгосрочном контракте. Таким образом краткосрочный контракт для любого агента будет иметь вид:.

Фиксированную заработную плату, выплачиваемую фирмой агенту при заключении долгосрочного контракта во втором для него периоде, положим равной некоторому заданному значению, увеличивающемуся в зависимости от способностей агента: , .

Прибыль агента равна разности его дохода и издержек. При долгосрочном контракте прибыль агента во втором для него периоде примет вид:

Агент максимизирует свою прибыль, выбирая определенный уровень усилий:

Отсюда уровень усилий, прикладываемый агентом:

Данный уровень прямо пропорционален способностям агента и величине доли прибыли, которую он получит в результате продуктивной работы.

Также выплаты сотруднику при долгосрочном контракте должны покрывать его возможный внешний вариант , который может быть задан прибылью, получаемой агентами данного типа. Таким образом, условие на принятие контракта агентом примет вид:

 (2)

Положим внешний вариант старшего агента всегда превышающим его фиксированную заработную плату:

 ()

Также для обеспечения рентабельности фирмы, положим, что фиксированная составляющая её дохода покрывает суммарные затраты на тестирование младшего агента и его фиксированную зарплату во втором для него периоде с его любыми способностями:

Целью фирмы при заключении долгосрочного контракта является максимизация её прибыли в следующем периоде, которая задаётся уравнением:

 (4)

Здесь и являются транзакционными издержками [3] на тестирование и обучение агента соответственно, описанными в предыдущих разделах, принимает нулевое значение, если фирма рассчитывает прибыль без дополнительного обучения агента. Будем относить затраты на обучение к расчетам прибыли фирмы во втором для агента периоде. Затраты на тестирование и зарплата младшему агенту в данной формуле будут относиться к начинающему сотруднику, с которым фирма заключит краткосрочный или долгосрочный контракт в следующем периоде.

При решении о подписании долгосрочного контракта фирма решает задачу максимизации своей прибыли (4) для следующего периода при учете условия о согласии подписания контракта со стороны агента (2). Составляющие дохода фирмы являются постоянными для неё во всех периодах её деятельности так же, как и издержки на тестирование и обучение агента. Заработная плата для всех младших агентов одинакова. Поэтому ожидаемая прибыль фирмы с любым агентом в любой период при заключении долгосрочного контракта будет меняться только в зависимости от способностей, которыми младший агент будет обладать в следующем для него периоде, которые, в свою очередь, будут зависеть, в том числе, от решения фирмы, вкладываться или нет в дополнительное обучение агента, учитывая, что положительное решение в пользу первого повлечет учет издержек на обучение, а также внешнего варианта агента.

Таким образом, получим два вида оптимизационной задачи: для случая вложения в дополнительное обучения и без него. Для обоих случаев происходит выбор параметров долгосрочного контракта таким образом, чтобы они максимизировали прибыль фирмы и удовлетворяли заданному ограничению. Так как параметром контракта, который фирма может менять, является только доля прибыли, мотивирующая агента для приложения больших усилий, максимизация в данных задачах проводится по ней. То есть, фирма выбирает такую дополнительную выплату агенту, которая простимулировала бы его на прикладывание наибольшего уровня усилий для реализации проекта.

Решение описанных задач первого вида для всех типов агентов и второго вида для сотрудников, дополнительное обучение которых приносит результат, даст информацию о прибыли фирмы при подписании долгосрочного контракта с любым младшим агентом.

Решим первую из описанных задач, которая примет следующий вид, где :

 (5)

 (6)

Решим задачу нелинейного программирования (5)-(6) обобщенным методом множителей Лагранжа [11].

Решим задачу максимизации, не учитывая ограничение (6). Найдем производную целевой функции по и приравняем её к нулю:

Отсюда получаем:

 ()

Подставляя полученное значение в (6), выразим величину дополнительной ценности проекта:

 (8)

С учетом того, что способности агента и дополнительная ценность проекта всегда являются положительными величинами, знак второй производной от максимизируемой функции по отрицателен:

Следовательно, при выполнении (8), полученное значение (7) будет максимизировать прибыль фирмы.

Для случая невыполнения неравенства (8), зависящего от известных параметров для фирмы, то есть для значений дополнительной ценности фирмы

 (9)

активируем ограничение (6), представляя его равенством. Выпишем функцию Лагранжа и её необходимые условия экстремума:

 (10)

 (11)

Из условия (11) имеем:

Так как обе части в полученном равенстве в силу положительности всех параметров и условия (3) неотрицательны, извлечем корень из обеих частей:

 (12)

В силу выполнения условия (3) и неотрицательности всех параметров, известных для фирмы, полученная величина (12) отлична от нуля. Из равенства (10) выразим и в полученное выражение подставим значение (12):

Таким образом, решение системы (10) - (11) имеет вид:

, .

Проанализируем знак второй производной функции Лагранжа в полученном решении (12), учитывая условие (3) и неотрицательность всех известных параметров задачи:

Следовательно, полученное значение доли (12) при выполнении условия (9) максимизирует целевую функцию.

По условиям рассматриваемой модели, доля дополнительной ценности проекта, которую выбирает фирма для мотивации старшего агента, строго больше нуля и строго меньше единицы:

 ()

 ()

Проверим выполнение строгих неравенств (13)-(14) для полученных решений. Для значения (7) их выполнение очевидно. Для значения доли (12) неравенство (13) выполняется в силу предположения превышения внешнего варианта старшего агента его фиксированной зарплаты (3). Проверим, при каких значениях выполняется строгое неравенство (14):

При получим задачи для каждого типа агента, каждая из которых будет иметь решение, аналогичное описанному выше.

Решая оптимизационную задачу второго вида тем же способом, придём к такому же ответу.

Таким образом доказано следующее утверждение:

**Утверждение 1.**

Оптимальная (максимизирующая прибыль фирмы) доля дополнительной ценности проекта, стимулирующая агента во втором для него при заключении долгосрочного контракта и, соответственно, вид данного оптимального долгосрочного контракта зависят от условий, которым удовлетворяет дополнительная ценность проекта *R* следующим образом:

* для фирмы с дополнительной ценностью , удовлетворяющей условию , оптимальная доля составит

,

оптимальный долгосрочный контракт примет вид:

;

* для фирмы с оптимальная доля равна:

,

оптимальный долгосрочный контракт имеет вид:

;

* фирма с не сможет обеспечить себе услуги агента со способностями в условиях рассматриваемой модели,

где , если дополнительное обучение не проводится, и в противном случае. ■

Подставляя полученные бонусы в функцию чистой прибыли фирмы, получим следующие утверждения для первого и второго типа задач:

**Утверждение 2.**

Максимальная прибыль в следующем периоде без дополнительного обучения агента

* для фирмы с составит:

;

* для фирмы с :

,

где . ■

**Утверждение 3.**

Максимальная прибыль в следующем периоде при дополнительном обучении агента

* для фирмы с составит:

;

* для фирмы с :

,

где . ■

## 1.4 Численный пример

Проиллюстрируем пример расчета оптимальных долей дополнительной ценности проекта для мотивации агентов во втором для них периоде к приложению наибольших уровней усилий при проведении дополнительного обучения и без него на численных данных. Вычисления будем проводить в программе, представленной в приложении 1, реализованной на языке Python, вычисляющей для параметров фирмы и всех типов агентов параметры оптимальных контрактов и прибыли, которую фирма сможет реализовать с данными агентами с дополнительным обучением и без него.

Расчеты будем вести в рублях, проводя округления до целой части.

Зададим фиксированную составляющую дохода фирмы и фиксированную заработную плату старших агентов, увеличивающуюся в зависимости от их способностей, равными:

Внешние варианты агентов для каждого типа способностей положим:

Затраты на тестирования и обучение младших агентов зададим величинами:

Пусть дополнительная ценность проекта фирмы равна

При данной дополнительной ценности получаем оптимальные доли и, соответственно, бонусы оптимальных контрактов, получаемых агентами в случае реализации полной дополнительной ценности проекта, равными:

В связи с ограниченностью способностей и усилий, сотрудниками может быть реализована только некоторая часть дополнительной ценности проекта. Следовательно, по итогу выполнения проекта агенты получают не всю величину бонуса, а долю от той части дополнительной ценности, которая была реализована.

Прибыли, которые фирма сможет осуществить с каждым из типов сотрудников, будут равны:

В свою очередь, прибыль каждого из агентов в втором для них периоде при работе на данную фирму составит:

Значения прибылей агентов в некоторых случаях превышают прибыль фирмы, поскольку старший сотрудник полностью руководит проектом и осуществляет затраты по реализации дополнительной ценности проекта.

При этом, если при полученных начальных навыках агента его дополнительное обучение приносит результат, при инвестировании в данное обучение фирма получит следующие значения прибыли, реализуемые с сотрудниками с низким и высоким уровнями гибких навыков:

При сравнении всех полученных значений для данной дополнительной ценности проектов фирмы, можно сделать вывод, что чем выше способности агента, тем больше прибыли данный сотрудник сможет принести организации, и тем больше он получаем сам. При заданных издержках на обучение агентов, вклад в дополнительное обучение будет приносить фирме большую прибыль.

# Глава 2. Прогнозирование навыков

## 2.1 Примеры различных ситуаций на рынке начинающих специалистов

Классификация агентов по типам навыков проводилась в предположении равномерного распределения гибких и жестких навыков среди начинающих специалистов на рынке труда. Но ситуация на рынке младших специалистов так же, как и на рынке старших сотрудников, может быть различной. Учитывая, что младших агентов, вышедших на рынок труда больше, чем агентов на рынке опытных специалистов, и поведение фирм на состояние рынка начинающих сотрудников оказывает меньшее влияние, чем на рынок старших агентов, предположим, что, в отличие от отсутствия информации о состоянии на рынке старших сотрудников в следующем периоде, у фирмы имеется некоторая статистика о текущем распределении навыков среди начинающих специалистов на рынке. Проанализируем примеры возможных распределений.

Пусть по полученной статистике младших агентов на рынке труда с низким уровнем начальных профессиональных навыков в два раза больше, чем с высоким, что объясняется отсутствием опыта работы агентов в данной сфере. При этом среди двух данных групп количества агентов с каждым из уровней навыков одинаковы.

Тогда распределение априорных вероятностей обладания любым агентом в текущем периоде каждым из уровней начальных профессиональных навыков будет представлено таблицей 4:

Таблица 4. Закон распределения вероятностей случайной величины для рассматриваемого примера

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Распределение гибких навыков, в свою очередь, пусть отражает ситуацию, что агентов на рынке с средними значениями данных навыков – большинство, а количества агентов с самым низким и высоким уровнями гибких навыков наименьшие, то есть распределение априорных вероятностей владения агентом каждого из значений надпрофессиональных навыков представляется таблицей 5:

Таблица 5. Закон распределения вероятностей случайной величины s для рассматриваемого примера

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

В силу независимости величин и при попарном перемножении полученных вероятностей получим матрицу априорных вероятностей того, что агент обладает парой навыков . Данное распределение вероятностей проиллюстрировано в таблице 6:

Таблица 6. Закон распределения вероятностей двумерной дискретной величины для рассматриваемого примера

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

При сложении полученных вероятностей для пар навыков , ведущих к каждому из значений профессиональных навыков , то есть для пар индексов , если фирма дополнительно не обучает агента, и для , если организация вкладывается в дополнительное обучение, получим априорные вероятности владения сотрудником во втором для него периоде одним из уровней профессиональных навыков в случае дополнительного обучения и без него:

Таблица 7.Закон распределения вероятностей случайной величины h для рассматриваемого примера

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Таблица 8. Закон распределения вероятностей случайной величины для рассматриваемого примера

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Так как каждый младший агент может обладать только одним уровнем гибких навыков, сложение вероятностей владения агентом каждым из уровней данных навыков, меньшим 0.5, даст априорную вероятность принадлежности младшего агента к группе агентов с низким уровнем гибких навыков :

Для рассматриваемого примера данная вероятность будет равна . Соответственно, при сложении вероятностей обладания начинающим сотрудником каждым из уровней надпрофессиональных навыков, равным или большим 0.5, получим вероятность того, что сотрудник является агентом с высоким уровнем гибких навыков :

Таким образом: .

Аналогично вычисляем вероятности того, что начинающий специалист станет во втором для него периоде агентом с низким или высоким уровнем профессиональных навыков без дополнительного обучения и с ним:

Получим: ., . , .,

Вероятность того, что агент будет обладать и уровнем гибких навыков и уровнем жестких навыков без дополнительного вклада фирмой в его обучение и с дополнительным вкладом, дадут произведения соответствующих вероятностей:

В результате получим: , ,.

Аналогично вычисляя вероятности принадлежности агента к типам , и без и с дополнительным обучением, имеем: , , , , , .

Полученные вероятности показывают вероятность принадлежности агента к одному из типов до проведения тестирования.

В предыдущих разделах считалось, что тестирование агентов даёт точный результат. В следующем разделе рассмотрим ситуацию, предполагающую, что тест может ошибаться.

## 2.2 Вероятностное определение способностей

Предположим, что при проведении тестирования возможно выявить способности агента лишь с некоторой вероятностью. Будем считать, что за время работы агента в первом для него периоде раскрываются его истинные способности. Введём коэффициент надежности теста, значение которого получено проведением анализа его результатов за прошедшие периоды. Данный коэффициент отражает вероятность того, что тест показал верные уровни навыков агента.

Положим, что при решении о подписании с младшим агентом контракта фирма проводит тест на гибкие навыки агента с вероятностью получения верных результатов и тест на текущие жесткие навыки с соответствующей вероятностью равной .

Распишем следующие события:

* – тестируемый владеет уровнями гибких навыков ;
* – тестируемый обладает начальными уровнями жестких навыков ;
* – младший агент обладает парой навыков ;
* – младший агент во втором для него периоде без дополнительного обучения будет владеть уровнем жестких навыков ;
* – младший агент при дополнительном обучении во втором для него периоде будет владеть уровнем жестких навыков ;
* – тестируемый является агентом с низким уровнем гибких навыков ;
* – тестируемый является агентом с высоким уровнем гибких навыков ;
* , – тестируемый агент во втором для него периоде станет агентом с низким уровнем жестких навыков без дополнительного обучения и с ним соответственно;
* , – кандидат на подписание долгосрочного контракта во втором для него периоде станет агентом с высоким уровнем жестких навыков без вклада фирмой в дополнительное обучение и с ним соответственно;
* , – младший агент в следующем периоде будет относиться к типу без и с дополнительным обучением соответственно;
* , – младший агент в следующем периоде будет относиться к типу без и с дополнительным обучением соответственно;
* , – тестируемый во втором для него периоде будет относиться к типу без и с дополнительным вкладом в его обучение соответственно;
* , – тестируемый во втором для него периоде будет относиться к типу без и с дополнительным вкладом в его обучение соответственно;
* – тест на гибкие навыки показал верный результат;
* – тест на гибкие навыки показал ошибочный результат;
* – тест на начальные жесткие навыки показал верный уровень навыков;
* – тест на начальные жесткие навыки показал неверный уровень навыков.

События и несовместны, образуют полную группу событий, и, в следствие, сумма их вероятностей равна 1. Аналогично для событий и . Тогда вероятности данных событий: , , , .

Полные вероятности [12] обладания младшим агентом уровнем гибких навыков , и начальным уровнем жестких навыков , в предположении, что тест может ошибаться, примут вид:

,

Вероятности владения агентом одним из уровней навыков (уровни навыков до классификации агентов) в предположении, что тест показал верный результат, равны 0 или 1. Соответственно, для жестких навыков: вероятности того, что агент обладает начальным уровнем профессиональных навыков , предполагая, что результат тестирования верный, принимают значения 0 или 1.

Если тестирование показало ошибочный результат, младший агент может обладать любым уровнем способностей, в том числе и тем, что показал тест. Так как владение агентом одним из уровней гибких навыков и ошибка теста являются независимыми событиями, вероятности обладания младшим сотрудником определенным гибким навыком при ошибочном тестировании: , где – априорные вероятности владения агентом одним из уровней мягких навыков, полученные при анализе статистической информации о состоянии рынка. Аналогично для начальных жестких навыков: , где , в свою очередь, априорные вероятности обладания агентом одним из уровней начальных профессиональных навыков.

Вероятности того, что агент владеет и уровнем надпрофессиональных навыков , и уровнем начальных жестких навыков , учитывая, что события и являются независимыми, получим перемножением соответствующих вероятностей:

Каждый агент может обладать только одной парой навыков. Исходя из этого при сложении вероятностей для получим вероятности событий :

При дополнительном обучении агента эта формула примет вид:

В свою очередь сложение всех , то есть вероятностей обладания агентом уровнем жестких навыков, меньшим 0.7, даст вероятность того, что в следующем периоде сотрудник станет агентом с уровнем профессиональных навыков :

Аналогично для случая с дополнительным вкладом фирмой в обучение:

Соответственно, сумма вероятностей владения агентом одним из уровней профессиональных навыков, меньшим или большим 0.7, то есть, будет равна вероятности события для случая не вкладывания фирмой в дополнительное обучение и вероятности события при вкладе:

Аналогично находим вероятности событий и :

В итоге для каждого агента получаем вероятности того, что он является агентом одного из двух типов по каждому виду способностей при дополнительном обучении и без него. При попарном перемножении полученных вероятностей, находим вероятности событий , , , , , , , :

,

,

,

,

## 2.3 Долгосрочный контракт при неточном тестировании

При неточном тестировании агентов на выявление их текущих навыков фирма может оценить ожидаемую прибыль, которую она получит в следующем периоде при подписании долгосрочного контракта с данным сотрудником, зависящую от вероятностей становления агентом во втором для него периоде сотрудником того или иного из 4 типов пар способностей.

В предположении, что за первый для агента период работы раскрываются его подлинные способности, долгосрочный контракт, заключаемый фирмой с агентом при неточной информации о его навыках, может быть представлен вектором данных о том, сколько агент будет получать во втором для него периоде в зависимости от того, какими уровнями навыков он будет обладать: , где *,*.

Не зависимо от того, какие истинные навыки раскроются у агента, подписание долгосрочного контракта накладывает на него обязательство продолжать работать в данной организации, которая в свою очередь также берет на себя ответственность по сотрудничеству с данным агентом в следующем периоде.

Обозначим за и вероятности принадлежности агента к одному из четырех типов без дополнительного обучения и с ним соответственно. Схема вычисления данных вероятностей была приведена в предыдущем разделе.

При составлении функции ожидаемой прибыли фирма составляет математическое ожидание части прибыли, получаемой фирмой в зависимости от ожидаемых способностей агента. В результате ожидаемая прибыль фирмы примет вид:

* Для случая без дополнительного обучения:

;

* При дополнительном обучении:

,

где .

В свою очередь, условия о принятии долгосрочного контракта со стороны агента будут состоять из превышения математическим ожиданием его прибыли математического ожидания его внешних вариантов для каждого типа способностей для случая его дополнительного обучения и без него.

В результате фирма для расчета максимальной ожидаемой прибыли, которую она сможет осуществить с рассматриваемым агентом, решает две оптимизационных задачи: при дополнительном вкладе в обучение младшего агента и без данного вклада. Рассмотрим решение первой из описанных задач, которое будет отличаться от решения второй отсутствием компоненты затрат на обучение и значениями вероятностей. Данная оптимизационная задача примет вид:

 (15)

 (16)

Будем пользоваться следующими обозначениями:

,

,

где

*,*

.

Аналогично решению задачи в случае точного выявления уровней навыков младшего агента (5)-(6) проведем решение данной задачи (15)-(16) обобщенным методом Лагранжа.

Рассмотрим задачу максимизации, не учитывая ограничение (16). Приравняем к нулю частные производные целевой функции по :

 (17)

 (18)

 (19)

 (20)

Из полученных равенств (17-20) имеем подозрительные на экстремум значения параметров:

 ()

Рассмотрим матрицу Гессе частных производных второго порядка данной целевой функции:

Знаки её угловых миноров будут чередоваться, начиная с отрицательного, следовательно, по критерию Сильвестра [5] данная матрица будет отрицательно определена, что является достаточным условием того, что при полученных значениях параметров (21) целевая функция достигает максимума без учета ограничения (16).

Подставим значения долей (21) в (16) и получим , при которых эти доли будут максимизировать ожидаемую прибыль фирмы, удовлетворяя ограничению со стороны агента:

 (22)

Если для значения ценности проекта фирмы данное условие (22) не выполняется, то есть,

 , (23)

проводим решение дальше, представляя ограничение (16) в виде равенства. Распишем функцию Лагранжа, а также её частные производные по искомым параметрам и множителю Лагранжа, которые, в свою очередь, приравняем к нулю:

;

 (24)

 (25)

 (26)

 (27)

 (28)

Выражая из равенств (36) – (39), учитывая, что вероятности принадлежности агента к тому или иному типу, способности агентов и дополнительная ценность проекта фирмы строго положительны, получаем:

 (29)

Откуда, при учете, что значения долей не должны быть равны нулю

Таким образом все значения искомых параметров равны между собой. Обозначим:

 (30)

Тогда из равенства (28) получим:

 ()

Следовательно, из (29)-(31) получим решение системы (24)-(28):

 (32)

 (33)

Построим окаймленную матрицу Гессе [11] и проанализируем знаки её угловых миноров, начиная с -ого, где – количество ограничений. Если за обозначить функцию ограничения, то для рассматриваемой задачи общий вид симметричной матрицы будет следующим:

При вычислении производных и подстановке в полученную матрицу из найденного решения (32) - (33) системы (24) - (28), учитывая условие (3) и тот факт, что все известные параметры для фирмы положительны, знак первого из рассматриваемых угловых миноров совпадет со знаком , далее знаки миноров чередуются. При выполнении данных условий полученное значение долей (32) является оптимальным для рассматриваемой задачи максимизации при выполнении условия (23).

В условиях рассматриваемой модели бонус, выплачиваемый агенту в случае реализации полной дополнительной ценности проекта, не может быть меньшим либо равным нулю, а также не может составлять полную величину дополнительной ценности или превышать её:

 ()

 ()

Проверим, какие из полученных решений удовлетворяют данным условиям модели. Выполнение неравенств (34) - (35) для значений долей (21) очевидно. Для значений (32) строгие неравенства (13) выполняются в силу условий превышения внешних вариантов агентов их фиксированных зарплат для всех типов сотрудников. Проверим, при каких значениях дополнительной ценности проекта фирмы выполняются условия (35):

Таким образом доказано следующее утверждение:

**Утверждение 4.**

При заключении долгосрочного контракта с младшим агентом оптимальные стимулирующие доли дополнительной ценности проекта и сам вид оптимального долгосрочного контракта в случае неточного выявления начальных уровней навыков и присутствии информации о текущем распределении навыков среди начинающих специалистов на рынке, зависят от условий, которым удовлетворяет дополнительная ценность проекта *R,* следующим образом:

* без дополнительного вклада в обучение:
	+ для фирмы с дополнительной ценностью , удовлетворяющей условию :

,

;

для фирмы с :

,

;

* + фирма с не сможет обеспечить себе услуги агента с вероятностями его принадлежности к каждому типу агентов в зависимости от их способностей ,

где

,

,

,

*,*

;

* c дополнительным вкладом в обучение:
	+ для фирмы с дополнительной ценностью , удовлетворяющей условию :

;

;

* + для фирмы с :

,

;

* + фирма с не сможет обеспечить себе услуги агента с вероятностями его принадлежности к каждому типу агентов в зависимости от их способностей, равными ,

где

,

,

,

*,*

. ■

Подставляя полученные доли дополнительной ценности проекта в функцию чистой прибыли фирмы, получим следующие утверждения для первого и второго типа задач:

**Утверждение 5.**

Максимальная прибыль в следующем периоде при заключении долгосрочного контракта с младшим агентом для случая неточного выявления его навыков и присутствия информации о текущем распределении навыков среди начинающих специалистов на рынке без дополнительного обучения агента:

* для фирмы с составит:

;

* для фирмы с :

,

где

,

,

,

*,*

. ■

**Утверждение 6.**

Максимальная прибыль в следующем периоде при заключении долгосрочного контракта с младшим агентом для случая неточного выявления его навыков и присутствия информации о текущем распределении навыков среди начинающих специалистов на рынке с дополнительным вкладом в обучение агента:

* для фирмы с составит:

;

* для фирмы с :

;

где

,

,

,

*,*

. ■

В приложении 2 приведен код программы, реализованной в программном пакете Python, позволяющий своей работой проиллюстрировать численное решение данной задачи. Принцип работы программы можно разбить на два этапа. В первом из них вводится статистическая информация о процентном соотношении начинающих специалистов на рынке труда в зависимости от их уровней навыков, коэффициенты надежности тестов, а также полученные в ходе тестирования уровни навыков. Программа вычисляет и выдает на выходе вероятности принадлежности агента к каждому из 4 типов при дополнительном обучении и без него. Во втором этапе вводятся параметры составляющих дохода фирмы, величины издержек на тестирование и обучение младших агентов, фиксированные размеры зарплат и внешние варианты для каждого типа агентов. Программа рассчитывает оптимальный долгосрочный контракт для рассматриваемого агента при дополнительном вкладе в обучение фирмой и без данного вклада, если обеспечение услуг данного сотрудника для фирмы является возможным.

Для примеров распределения гибких и начальных жестких навыков среди начинающих специалистов на рынке из раздела 2.1, представленных в таблицах 4 и 5, в предположении, что тест показал уровни гибких начальных и профессиональных навыков у тестируемого равными и , а коэффициенты надежности тестов принимают значения и , получим следующий результат:

, , ,

, 0.625, ,

Положим все известные параметры для фирмы такими же, как в разделе 2.4, то есть: , , , .

Тогда оптимальные долгосрочные контракты для рассматриваемого агента без дополнительного обучения и с ним примут вид:

В свою очередь, ожидаемые прибыли фирмы для случая, когда фирма не вкладывается в дополнительное обучение, и с данным вкладом равны соответственно:

,

Таким образом, в условиях рассматриваемого примера, вклад фирмой в дополнительное обучение агента принесет ей меньшую прибыль.

# Заключение

При отсутствии информации о результатах поиска старших сотрудников в следующем периоде фирмы стремятся к заключению долгосрочных контрактов с младшими агентами, выявление навыков которых обеспечивает фирмы большей гарантией успешной реализацией их проектов в будущем.

С учетом того, что в текущем периоде фирма не может обеспечить себе другого младшего агента, его способности и предложенный рынком внешний вариант являются для фирмы сценарием [14]. В ответ на данный сценарий фирма определяет стратегию, являющуюся выбором типа контракта с целью максимизации прибыли в следующем периоде и реализации проекта в текущем. В ходе данной работы при выборе оптимальной стратегии для фирмы для случая точного выявления навыков младшего агента получены следующие варианты:

* если фирма, в зависимости от ценности имеющегося у неё проекта, не может обеспечить себе услуги рассматриваемого агента при долгосрочном контракте в условиях данной модели, для запуска проекта фирмой в текущем периоде её оптимальной стратегией будет подписание краткосрочного контракта, в противном случае её прибыль в текущем периоде будет равна нулю;
* если дополнительное обучение рассматриваемого агента не приносит результат, оптимальной стратегией фирмы будет подписание долгосрочного контракта, имеющего вид из утверждения 1;
* если обучение агента приносит результат, фирма может сравнить прибыли, получаемые с данным агентом без дополнительного обучения и с ним, и, в зависимости от результата, выбрать решение о вкладе в дополнительное обучение и оптимальный вид контракта из утверждения 1;

При выявлении навыков младшего агента с некоторыми вероятностями фирма, опираясь на статистическую информацию о текущем распределении навыков среди начинающих специалистов на рынке, может рассчитать вероятности принадлежности агента во втором для него периоде к типам , , и без дополнительного обучения и с ним, и, в зависимости от полученных ею выводов, выбрать оптимальную стратегию:

* если фирма не сможет обеспечить себе услуги рассматриваемого агента при подписании долгосрочного контракта, аналогично варианту точного выявления навыков, её оптимальной стратегией будет заключение с данным сотрудником краткосрочного контракта для запуска проекта в текущем периоде;
* если фирма сможет реализовать проект с данным сотрудником только с вкладом в обучение или только без данного вклада, оптимальной стратегией фирмы будет выбор вида долгосрочного контракта для случая возможности сотрудничества с рассматриваемым агентом, исходя из утверждения 5;
* если фирма сможет обеспечить услуги рассматриваемого сотрудника для обоих вариантов решения вложения в дополнительное обучение, оптимальной стратегией фирмы будет выбор варианта, обеспечивающего её большей прибылью в следующем периоде, и, вследствие этого выбора, подписание одного из контрактов из утверждения 4.

Перспективой данной работы является построение прогноза о состоянии рынка старших сотрудников в следующем периоде, который может быть получен при анализе ситуации на рынке начинающих специалистов в текущем периоде и введении информации о распределении фирм в зависимости от ценностей проектов, реализуемых ими. Данный прогноз сможет помочь фирме осуществить выбор между подписанием долгосрочного контракта с младшим агентом в текущем периоде и предпочтением в пользу поиска старшего сотрудника на рынке труда в следующем периоде.

# Список литературы

1. D. B. Hanchate, R. S. Bichkar. Mathematical modeling of Lewis and COCOMO-II software cost estimation using regulatory focus theory // Applied Discrete Mathematics and Heuristic Algorithms, 2015 Vol. 1, No. 2 P. 5-25.
2. Four skills you need to succeed in 2019 // Microsoft Industry Blogs – United Kingdom URL: https://cloudblogs.microsoft.com/industry-blog/en-gb/cross-industry/2019/01/24/four-skills-2019-success/#\_ftn9 (дата обращения: 25.02.2019).
3. Inés Macho-Stadler, David Pérez-Castrillo, Nicolás Porteiro Coexistence of long-term and short-term contracts // Games and Economic Behavior, 2014 Vol. 56, P. 145-164.
4. Soft Skills // URL: https://www.investopedia.com/terms/s/soft-skills.asp (дата обращения: 20.04.2019).
5. Д. В. Беклемишев Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учеб. для вузов - 10-е изд., испр. - М: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 304стр.
6. Буре В.М., Парилина Е.М. Теория вероятностей и математическая статистика. 1-е изд. СПб.: Лань, 2013. 416 с.
7. Жабко А. П., Котина Е. Д., Чижова О.Н. Дифференциальные уравнения и устойчивость. Лань, 2015. 310 стр.
8. Корнейчук Б.В. Институциональная экономика: учебник для академического бакалавриата. 4-е изд. М.: Юрайт, 2018. 274 с.
9. Одинцова М.И. Институциональная экономика: учебник для академического бакалавриата. 4-е изд. М.: Юрайт, 2014. 459 с.
10. Побирченко В.В., Густенко В.А. Теория контрактов: актуализация в контексте исследований О. Харта и Б. Хольмстрема // Экономические исследования и разработки. 2019.
11. Рюмкин В.И. Методы решения задач нелинейного программирования: Учебное пособие. - Томск: ТГУ. 2006. - 56с
12. Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики Учебник. — М.: Наука, 1982. — 256 c.
13. Теория принятия решений в 2 т. Том 1: Учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / под ред. В. Г. Халина - М.: Юрайт, 2016. 250 с
14. Теория принятия решений в 2 т. Том 2: Учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / под ред. В. Г. Халина - М.: Юрайт, 2016. 431 с

# Приложения

## Приложение 1.

Представленная программа, реализованная на языке Python, рассчитывает оптимальные стимулирующие доли дополнительной ценности проекта фирмы и её ожидаемые прибыли, которые фирма сможет реализовать с каждым типом сотрудника:

import math

import numpy as np

def fun(i):

 if R >= (8 \* (U[i] - wS\_array[i])) / p\_array[i] \*\* 2:

 alpha1 = 0.5

 P = F - T - wS\_array[i] + p\_array[i] \*\* 2 \* alpha1 \* R \* (1 - alpha1)

 b = alpha1 \* R

 A = alpha1 \* p\_array[i] \*\* 2 \* R + wS\_array[i] - (alpha1 \*\* 2 \* p\_array[i] \*\* 2 \* R) / 2

 print('Оптимальная стимулирующая доля дополнительной ценности проекта для данного агента:', alpha1)

 print('Оптимальный бонус для данного агента:', b)

 print('Прибыль фирмы:', P)

 print('Прибыль агента:', A)

 elif (8 \* (U[i] - wS\_array[i])) / p\_array[i] \*\* 2 > R > (2 \* (U[i] - wS\_array[i])) / p\_array[i] \*\* 2:

 alpha1 = math.sqrt(2 \* ((U[i] - wS\_array[i]) / (p\_array[i] \*\* 2 \* R)))

 P = F - T - wS\_array[i] + p\_array[i] \*\* 2 \* alpha1 \* R \* (1 - alpha1)

 b = alpha1 \* R

 A = alpha1 \* p\_array[i] \*\* 2 \* R + wS\_array[i] - (alpha1 \*\* 2 \* p\_array[i] \*\* 2 \* R) / 2

 print('Оптимальная стимулирующая доля дополнительной ценности проекта для данного агента:', alpha1)

 print('Оптимальный бонус для данного агента:', b)

 print('Прибыль фирмы:', P)

 print('Прибыль агента:', A)

 else:

 print('Фирма не сможет обеспечить данного сотрудника без дополнительного обучения')

def fun\_learning(i):

 if R >= (8 \* (U[i] - wS\_array[i])) / p\_array[i] \*\* 2:

 alpha2 = 0.5

 Pl = F - T - L - wS\_array[i] + p\_array[i] \*\* 2 \* alpha2 \* R \* (1 - alpha2)

 bl = alpha2 \* R

 Al = alpha2 \* p\_array[i] \*\* 2 \* R + wS\_array[i] - (alpha2 \*\* 2 \* p\_array[i] \*\* 2 \* R) / 2

 print('Оптимальная стимулирующая доля дополнительной ценности проекта для данного агента:', alpha2)

 print('Оптимальный бонус для данного агента:', bl)

 print('Прибыль фирмы:', Pl)

 print('Прибыль агента:', Al)

 elif (8 \* (U[i] - wS\_array[i])) / p\_array[i] \*\* 2 > R > (2 \* (U[i] - wS\_array[i])) / p\_array[i] \*\* 2:

 alpha2 = math.sqrt(2 \* ((U[i] - wS\_array[i]) / (p\_array[i] \*\* 2 \* R)))

 Pl = F - T - L - wS\_array[i] + p\_array[i] \*\* 2 \* alpha2 \* R \* (1 - alpha2)

 bl = alpha2 \* R

 Al = alpha2 \* p\_array[i] \*\* 2 \* R + wS\_array[i] - (alpha2 \*\* 2 \* p\_array[i] \*\* 2 \* R) / 2

 print('Оптимальная стимулирующая доля дополнительной ценности проекта для данного агента:', alpha2)

 print('Оптимальный бонус для данного агента:', bl)

 print('Прибыль фирмы:', Pl)

 print('Прибыль агента:', Al)

 else:

 print('Фирма не сможет обеспечить данного сотрудника с дополнительным обучением')

F = float(input('Введите фиксированную величину дохода: '))

R = float(input('Введите дополнительную ценность проекта: '))

ws = float(input('Введите фиксированную зарплату старших агентов: '))

T = float(input('Введите величину издержек на тестирование: '))

L = float(input('Введите величину издержек на обучение: '))

U = [float(u\_i) for u\_i in

 input('Введите через пробел внешние варианты для типов агентов (sL, hL), (sL, hH), (sH, hL), (sH, hH): ').split()]

p\_array = np.array([0.35, 0.55, 0.65, 0.85])

wS\_array = np.zeros(4)

for k in range(4):

 wS\_array[k] = ws \* (1 + p\_array[k])

print('Без обучения, тип (sL, hL)')

fun(0)

print('С обучением, итоговый тип (sL, hH)')

fun\_learning(1)

print('Без обучения, тип (sL, hL)')

fun(1)

print('Без обучения, тип (sH, hL)')

fun(2)

print('C обучением, итоговый тип (sH, hH)')

fun\_learning(3)

print('Без обучения, тип (sH, hH)')

fun(3)

## Приложение 2.

Данная программа, написанная на языке Python, реализована для расчета вероятностей принадлежности агента к каждому из типов без дополнительного обучения и с ним, и, вследствие, для определения для рассматриваемого агента параметров оптимального контракта и ожидаемой прибыли фирмы.

import numpy as np

import math

# Подсчет вероятностей принадлежности к тому или иному типу

def h\_fun(s, h0, h\_max, t):

 return round(h\_max - (h\_max - h0) \* math.exp(-1 \* s \* t), 1)

def h\_learning\_fun(s, h0, h\_max, t):

 return round(h\_max - (h\_max - h0) \* math.exp(-1 \* (s + s \*\* 2) \* t), 1)

flag\_S = False

flag\_H0 = False

S = []

while not flag\_S:

 S = [float(s\_i) for s\_i in

 input('Введите через пробел процентные отношения для одиннадцати уровней гибких навыков: ').split()]

 if len(S) == 11:

 flag\_S = True

 elif len(S) < 11:

 print('Вы ввели менее одиннадцати значениий.')

 else:

 print('Вы ввели более одиннадцати значениий.')

H0 = []

while not flag\_H0:

 H0 = [float(h0\_i) for h0\_i in

 input('Введите через пробел процентные отношения для одиннадцати уровней жестких навыков: ').split()]

 if len(H0) == 11:

 flag\_H0 = True

 elif len(H0) < 11:

 print('Вы ввели менее одиннадцати значениий.')

 else:

 print('Вы ввели более одиннадцати значениий.')

alpha\_s = float(input('Введите коэффициент надежности тестирования для теста на гибкие навыки: '))

alpha\_h0 = float(input('Введите коэффициент надежности тестирования для теста на жесткие навыки: '))

s\_by\_test = float(input('Введите уровень гибких навыков, который показал тест: '))

h0\_by\_test = float(input('Введите уровень жестких навыков, который показал тест: '))

index\_s\_by\_test = s\_by\_test \* 10

index\_h0\_by\_test = h0\_by\_test \* 10

a = np.array(S)

for i in range(len(a)):

 a[i] = a[i] / 100

b = np.array(H0)

for j in range(len(b)):

 b[j] = b[j] / 100

p\_s = np.zeros(11)

p\_h0 = np.zeros(11)

for i in range(len(p\_s)):

 if i == index\_s\_by\_test:

 p\_s[i] = alpha\_s \* 1 + (1 - alpha\_s) \* a[i]

 else:

 p\_s[i] = alpha\_s \* 0 + (1 - alpha\_s) \* a[i]

for j in range(len(p\_h0)):

 if j == index\_h0\_by\_test:

 p\_h0[j] = alpha\_h0 \* 1 + (1 - alpha\_h0) \* b[j]

 else:

 p\_h0[j] = alpha\_h0 \* 0 + (1 - alpha\_h0) \* b[j]

p\_h = np.zeros(11)

for k in range(len(p\_h)):

 for i in range(len(p\_s)):

 for j in range(len(p\_h0)):

 if h\_fun(i / 10, j / 10, 1, 1) == k / 10:

 p\_h[k] += p\_s[i] \* p\_h0[j]

p\_sL = 0

p\_sH = 0

p\_hL = 0

p\_hH = 0

for i in range(len(p\_s)):

 if i / 10 < 0.5:

 p\_sL += p\_s[i]

 else:

 p\_sH += p\_s[i]

for k in range(len(p\_h)):

 if k / 10 < 0.7:

 p\_hL += p\_h[k]

 else:

 p\_hH += p\_h[k]

p\_hL\_with\_learning = 0

p\_hH\_with\_learning = 0

pl\_h = np.zeros(11)

for k in range(len(pl\_h)):

 for i in range(len(p\_s)):

 for j in range(len(p\_h0)):

 if h\_learning\_fun(i / 10, j / 10, 1, 1) == k / 10:

 pl\_h[k] += p\_s[i] \* p\_h0[j]

for k in range(len(pl\_h)):

 if k / 10 < 0.7:

 p\_hL\_with\_learning += pl\_h[k]

 else:

 p\_hH\_with\_learning += pl\_h[k]

Pll = p\_sL \* p\_hL

Plh = p\_sL \* p\_hH

Phl = p\_sH \* p\_hL

Phh = p\_sH \* p\_hH

Pll\_with\_learning = p\_sL \* p\_hL\_with\_learning

Plh\_with\_learning = p\_sL \* p\_hH\_with\_learning

Phl\_with\_learning = p\_sH \* p\_hL\_with\_learning

Phh\_with\_learning = p\_sH \* p\_hH\_with\_learning

print('Без дополнительного обучения:')

print('Вероятность принадлежности агента к типу (sL, hL):', Pll)

print('Вероятность принадлежности агента к типу (sL, hH):', Plh)

print('Вероятность принадлежности агента к типу (sH, hL):', Phl)

print('Вероятность принадлежности агента к типу (sH, hH):', Phh)

print('С дополнительным обучением:')

print('Вероятность принадлежности агента к типу (sL, hL):', Pll\_with\_learning)

print('Вероятность принадлежности агента к типу (sL, hH):', Plh\_with\_learning)

print('Вероятность принадлежности агента к типу (sH, hL):', Phl\_with\_learning)

print('Вероятность принадлежности агента к типу (sH, hH):', Phh\_with\_learning)

# Долгосрочный контракт

F = float(input('Введите фиксированную величину дохода: '))

R = float(input('Введите дополнителььную ценность проекта: '))

ws = float(input('Введите фиксированную зарплату старших агентов: '))

T = float(input('Введите величину издержек на тестирование: '))

L = float(input('Введите величину издержек на обучение: '))

U = [float(u\_i) for u\_i in

 input('Введите через пробел внешние варианты для типов агентов (sL, hL), (sL, hH), (sH, hL), (sH, hH): ').split()]

p\_array = np.array([0.35, 0.55, 0.65, 0.85])

q\_array = np.array([Pll, Plh, Phl, Phh])

ql\_array = np.array([Pll\_with\_learning, Plh\_with\_learning, Phl\_with\_learning, Phh\_with\_learning])

U\_array = np.array(U)

wS\_array = np.zeros(4)

EWS = 0

EU = 0

Q = 0

EWSl = 0

EUl = 0

Ql = 0

for i in range(4):

 wS\_array[i] = ws \* (1 + p\_array[i])

 EWS += q\_array[i] \* wS\_array[i]

 EU += q\_array[i] \* U\_array[i]

 Q += q\_array[i] \* p\_array[i] \*\* 2

 EWSl += ql\_array[i] \* wS\_array[i]

 EUl += ql\_array[i] \* U\_array[i]

 Ql += ql\_array[i] \* p\_array[i] \*\* 2

print('Без обучения')

EP = F - T - EWS

EA = 0

if R >= (8 \* (EU - EWS)) / Q:

 alpha = 0.5

 b = alpha \* R

 for j in range(4):

 EP += q\_array[j] \* p\_array[j] \*\* 2 \* alpha \* R \* (1 - alpha)

 EA += q\_array[j] \* (alpha \* p\_array[j] \*\* 2 \* R + wS\_array[j] - (alpha \*\* 2 \* p\_array[j] \*\* 2 \* R) / 2)

 print('Оптимальная стимулирующая доля дополнительной ценности проекта для рассматриваемого агента:', alpha)

 print('Оптимальный долгосрочный контракт для данного агента: С =(', 0, ',', wS\_array[0], ',', b, ',', wS\_array[1],

 ',', b, ',', wS\_array[2], ',', b, ',', wS\_array[3], ',', b, ')')

 print('Ожидаемая прибыль фирмы:', EP)

 print('Ожидаемая прибыль агента:', EA)

elif (8 \* (EU - EWS)) / Q > R > (2 \* (EU - EWS)) / Q:

 alpha = math.sqrt(2 \* ((EU - EWS) / (Q \* R)))

 b = alpha \* R

 for j in range(4):

 EP += q\_array[j] \* p\_array[j] \*\* 2 \* alpha \* R \* (1 - alpha)

 EA += q\_array[j] \* (alpha \* p\_array[j] \*\* 2 \* R + wS\_array[j] - (alpha \*\* 2 \* p\_array[j] \*\* 2 \* R) / 2)

 print('Оптимальная стимулирующая доля дополнительной ценности проекта для рассматриваемого агента:', alpha)

 print('Оптимальный долгосрочный контракт для данного агента: С =(', 0, ',', wS\_array[0], ',', b, ',', wS\_array[1],

 ',', b, ',', wS\_array[2], ',', b, ',', wS\_array[3], ',', b, ')')

 print('Ожидаемая прибыль фирмы:', EP)

 print('Ожидаемая прибыль агента:', EA)

else:

 print('Фирма не сможет обеспечить данного сотрудника без проведения дополнительного обучения')

print('С обучением')

EPl = F - T - L - EWSl

EAl = 0

if R >= (8 \* (EUl - EWSl)) / Ql:

 alpha\_l = 0.5

 bl = alpha\_l \* R

 for j in range(4):

 EPl += ql\_array[j] \* p\_array[j] \*\* 2 \* alpha\_l \* R \* (1 - alpha\_l)

 EAl += ql\_array[j] \* (alpha\_l \* p\_array[j] \*\* 2 \* R + wS\_array[j] - (alpha\_l \*\* 2 \* p\_array[j] \*\* 2 \* R) / 2)

 print('Оптимальная стимулирующая доля дополнительной ценности проекта для рассматриваемого агента:', alpha\_l)

 print('Оптимальный долгосрочный контракт для данного агента: С =(', 0, ',', wS\_array[0], ',', bl, ',', wS\_array[1],

 ',', bl, ',', wS\_array[2], ',', bl, ',', wS\_array[3], ',', bl, ')')

 print('Ожидаемая прибыль фирмы:', EPl)

 print('Ожидаемая прибыль агента:', EAl)

elif (8 \* (EUl - EWSl)) / Ql > R > (2 \* (EUl - EWSl)) / Ql:

 alpha\_l = math.sqrt(2 \* ((EUl - EWSl) / (Ql \* R)))

 bl = alpha\_l \* R

 for j in range(4):

 EPl += ql\_array[j] \* p\_array[j] \*\* 2 \* alpha\_l \* R \* (1 - alpha\_l)

 EAl += ql\_array[j] \* (alpha\_l \* p\_array[j] \*\* 2 \* R + wS\_array[j] - (alpha\_l \*\* 2 \* p\_array[j] \*\* 2 \* R) / 2)

 print('Оптимальная стимулирующая доля дополнительной ценности проекта для рассматриваемого агента:', alpha\_l)

 print('Оптимальный долгосрочный контракт для данного агента: С =(', 0, ',', wS\_array[0], ',', bl, ',', wS\_array[1],

 ',', bl, ',', wS\_array[2], ',', bl, ',', wS\_array[3], ',', bl, ')')

 print('Ожидаемая прибыль фирмы:', EPl)

 print('Ожидаемая прибыль агента:', EAl)

else:

 print('Фирма не сможет обеспечить данного сотрудника c проведением дополнительного обучения')