

Санкт-Петербургский государственный университет  
Кафедра моделирования электромеханических и  
компьютерных систем

Семенюк Артем Евгеньевич

Магистерская диссертация

Исследование динамики прямоугольной трехслойной  
резинометаллической пластины

Направление 04.03.01 Прикладные математика и физика  
Магистерская программа: Прикладная информатика

Научный руководитель,  
кандидат физ.-мат. наук,  
доцент  
Малькова Ю.В.

Санкт-Петербург

2019

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>Обзор литературы</b>	<b>5</b>
<b>Глава 1. Деформация двухслойной резинометаллической пластины при действии нормального давления</b>	<b>12</b>
§1. Деформация металлической пластины . . . . .	12
§2. Деформация двухслойной резинометаллической пластины . .	14
<b>Глава 2. Деформация трёхслойной резинометаллической пластины при действии постоянного давления</b>	<b>20</b>
§1. Постановка задачи . . . . .	20
§2. Решение задачи . . . . .	22
§3. Расчеты прогибов металлических пластин . . . . .	25
<b>Глава 3. Деформация двухслойной резинометаллической пластины при действии динамической нагрузки</b>	<b>28</b>
§1. Постановка задачи . . . . .	28
§2. Решение задачи . . . . .	29
§3. Расчеты прогибов металлической пластины . . . . .	32
<b>Глава 4. Деформация трёхслойной резинометаллической пластины при действии динамической нагрузки</b>	<b>34</b>
§1. Постановка задачи . . . . .	34
§2. Решение задачи . . . . .	35
§3. Расчеты прогибов металлических пластин . . . . .	39
<b>Заключение</b>	<b>41</b>
<b>Литература</b>	<b>42</b>

# Введение

На территории России землетрясения происходят в горной местности, в местах стыков тектонических плит, в регионе Северного Кавказа, в Сибири на Алтае, Байкале и Забайкалье, на Дальнем Востоке. Интенсивность сейсмических сотрясений там может достигать 8-9 и 9-10 баллов по 12-балльной макросейсмической шкале MSK-64. В настоящее время происходит увеличение количества линий метрополитена неглубокого залегания и городских автомобильных и железных дорог. Это делает проблему сейсмо- и виброизоляции очень актуальной. Анализ особенностей изоляции различных сооружений показывает, что наиболее перспективным сейчас считается применение сейсмо- и виброизоляторов на основе резинометаллических конструкций. Они позволяют защитить здания от воздействий в горизонтальных и вертикальных плоскостях и от кручения. Виброизоляторы находят применение в системах виброзащиты оборудования, например, в горных машинах различного технологического назначения, имеющих бесфундаментную схему закрепления. Стоит также отметить, что по соотношению "цена-качество" многослойные резинометаллические виброизоляторы, изготовленные из натуральных или синтетических каучуков, выигрывают по сравнению с другими системами виброизоляции.

В последние десятилетия многослойные резинометаллические панели находят все большее применение в технике и строительстве. Благодаря выбору отдельных слоев могут быть изготовлены панели с разными конструктивными свойствами. Толчок к интенсивному использованию многослойных конструкций был дан из-за развития авиации и космонавтики. Сейчас многослойные конструкции используют в основном в строительстве, при производстве транспортных средств.

Наиболее полно всем функциональным требованиям, таким как несущая способность, долговечность, требуемая звукоизоляция, низкая стоимость изготовления и др. удовлетворяют трехслойные панели, состоящие

из двух внешних и одного внутреннего слоёв. Эти слои соединены между собой и образуют монолитную систему.

Свойства многослойных панелей во многом зависят от строения слоёв. Общими для большинства многослойных панелей являются следующие свойства:

- большая несущая способность при небольшой собственной массе,
- высокая усталостная прочность при переменных нагрузках,
- хорошая звукоизоляция и теплоизоляция по сравнению с однородными панелями,
- водо- и паронепроницаемость при металлических внешних слоях.

Все типы многослойных панелей характеризуются способностью внешних слоев воспринимать усилия растяжения и сжатия и низкими прочностными показателями среднего слоя на сдвиг.

Существует большое разнообразие многослойных панелей. Внешние слои могут быть изготовлены из стали, на основе сплавов металлов, армированной волокном пластмассы, средний слой — из резины, плотной пластмассы, вспененного полимерного материала и т.д.

В работе рассматриваются задачи деформации двухслойной и трехслойной резинометаллической пластин, которые находятся под действием постоянной или динамической нагрузки.

Расчет многослойной панели на прочность состоит из двух частей, это расчеты напряжений и деформаций в зависимости от приложенной внешней нагрузки и расчеты на устойчивость всей системы в целом и устойчивость внешних слоев.

Для расчета напряжений и деформаций многослойной панели под действием поперечной нагрузки существует много теорий различной сложности. Точный расчет плоской многослойной панели с однородным средним слоем можно сделать на основе математической теории упругости для ортотропного тела. Решение уравнений производится отдельно для каждого слоя, соблюдаются условия неразрывности и деформации слоев панели. Построение точного решения по этой теории является сложным и трудоемким [20]. Упрощение расчетов получают за счет того, что предполагают

несжимаемость панели в поперечном направлении, отсутствие напряжений  $\sigma_{zz}$  по толщине панели.

В задачах о пластинах, лежащих на упругом основании, обычно предполагалось, что реакция упругого основания пропорциональна прогибу пластины. Коэффициент постели или коэффициент жесткости упругого основания выбирали из некоторых соображений. В данной работе реакция резинового основания определяется исходя из уравнений теории эластомерного слоя, разработанной в [6]. Прогиб металлической пластины и реакция упругого основания находится из системы связанных дифференциальных уравнений. Найдены функции прогибов металлических пластин.

Данная работа представляет собой продолжение исследования, представленного в выпускной бакалаврской работе, в которой рассматривались задачи об изгибе резинометаллической пластины, но в одномерном случае [15], [14].

## Обзор литературы

Для разработки и расчета многослойных конструкций используются различные аналитические и численные методы.

В монографии [10] изложены основные подходы к оценке безопасности зданий и сооружений при сейсмических и аварийных воздействиях. Исследуются проблемы живучести строительных конструкций. В частности, рассмотрены особенности применения сейсмоизоляции зданий в виде резинометаллических опор и вопросы учета волновых эффектов при расчете на землетрясения. Приведены различные примеры расчета проектируемых уникальных высотных зданий и большепролетных сооружений на особые воздействия.

В книге [20] подробно рассматриваются вопросы расчета многослойных панелей. Эта книга предназначена для инженеров. Основной акцент делается на выводы основных уравнений, примеры расчетов многослойных конструкций. Кратко рассматриваются проблемы ползучести, колебаний и звукоизоляции многослойных панелей. Расчеты конструкций показаны несколькими методами, что позволяет сравнить удобство и применимость того или иного метода в зависимости от расчетной схемы.

У [18] рассматривались четыре вида изолятора в виде прямоугольных образцов с определенным набором характеристик, предназначенных для виброизоляции зданий. По результатам статических и динамических испытаний были предложены виброизоляторы, обладающие наилучшими характеристиками при динамических испытаниях, смоделирована конструкция, пригодная для использования в строительстве.

В статье [5] проводились исследования по разработке и эксплуатации резиновых и резинометаллических виброизоляторов в виброизолирующих системах горных машин различного технологического назначения. Перед исследователями стояла задача проектирования оптимальной виброзащитной системы на базе резиновых и резинометаллических виброизоляторов,

обеспечивающих необходимые упругие и демпфирующие свойства резиновых элементов. Промышленная проверка резиновых и резинометаллических виброизоляторов на различных типах машин показала их высокую эффективность и работоспособность. Применение виброизоляторов позволило существенно снизить динамические нагрузки на опорные конструкции и улучшить санитарно-гигиенические условия труда.

В работе [4] представлена математическая модель упругого деформирования резинового слоя. Модель основана на неклассическом решении второй краевой задачи механики деформируемого тела. Для статической краевой задачи предположение, что тело с заданными силами в объеме и на поверхности находится в равновесии является исходным. В предложенном подходе конечное состояние равновесия считается заданным, а не искомым. Данная модель позволяет описать поведение резинометаллических опор при воздействии распределенной или сосредоточенной нагрузки. Приводятся численные значения расчетов напряженно-деформированного состояния резины в составе однослойных и многослойных резинометаллических опор. Статья [2] посвящена определению наиболее эффективных параметров резинометаллических опор для систем сейсмо- и виброизоляций зданий и сооружений. В ней приведены результаты экспериментов для резинометаллической опоры при статических нагрузках. Проведенные эксперименты позволили определить важные физико-механические параметры для резинометаллических опор, в частности, получен расчет жесткости резинометаллических элементов. В работе [1] приводятся результаты экспериментов с использованием вибростенда и виброметра. Цель этих экспериментов состояла в проверке эффективности использования резинометаллических опор для систем сейсмо- и виброизоляций зданий и сооружений. Было установлено, что за счет частоты собственных колебаний резинометаллические опоры гасят колебания, уменьшая их влияние на объект.

В статье [3] решается статическая задача вязкоупругости в трехмерной постановке для двухслойной цилиндрической резинометаллической сейсмоопоры. Была построена конечно-элементная модель вязкоупругого деформирования при наличии слоев из пористой резины на основе

уточненной моментной схемы конечного элемента. Проведено исследование численной сходимости конечно-элементных схем. Выполнены расчёты резинового слоя сейсмоопоры в предположении о релаксации модуля сдвига пористой резины. Получены основные параметры напряжённо-деформированного состояния в зависимости от времени и марок применяемых резин.

В работе [12] представлены результаты расчетов слоистого резино-металлического виброизолятора, основное назначение которого состоит в уменьшении негативного воздействия на людей техногенных вибраций, вызванных различными факторами. Расчеты резино-металлического виброизолятора выполнены вариационно-разностным методом. Часто для исследования резино-металлических конструкций применяют конечно-элементные комплексы. В работе [16] в пакете ANSYS сделан расчет однослойного и трехслойного резино-металлических виброизоляторов. Полученные результаты сравниваются автором с результатами испытаний. Показано, что имеет место совпадение с "достаточной для практических надобностей точностью".

В работе [19] рассматривается один из вариантов расчета многослойной пластины с жестко закрепленными краями при равномерной поперечной нагрузке. Показана возможность приведения многослойной пластины к однородной с приведенным модулем упругости. Получены уравнения прогиба пластины в виде ряда с применением метода Леви.

Книга [6] вносит значительный вклад в развитие механики многослойных резиноармированных конструкций. В ней предложен подход, основанный на двумерных моделях деформации эластомерных и армирующих слоёв. Создана дискретная теория композитных эластомерных конструкций, в которой деформация каждого слоя описывается своими уравнениями. Порядок общей системы уравнений зависит от числа слоёв. Для вывода определяющих уравнений деформации слоёв и конструкции в целом последовательно применяются асимптотические методы, использующие малую толщину слоёв, общая толщина пакета не предполагается малой. Основным результатом монографии, имеющим большое значение для



технических приложений, является создание общей теории слоистых эластомерных конструкций и разработка численных методов решения краевых задач. Создание этой теории позволило понизить размерность решаемых задач и избавиться от трудностей, связанных с учетом малой сжимаемости резины.

На основе этой монографии в работе [8] вариационным методом построена динамическая двумерная теория эластомерного слоя постоянной толщины. Рассматривался трехслойный резинометаллический элемент постоянной толщины, металлические слои считались жесткими. Поэтому рассматривалась только деформация резинового слоя с недеформируемыми лицевыми поверхностями. Создание динамической теории слоя позволило свести расчет эластомерного слоя к интегрированию одного волнового уравнения — обобщенного уравнения Гельмгольца для функции относительного изменения объема. В этой статье впервые построена динамическая теория эластомерного слоя для нестационарных задач. В пределах применимости динамической теории слоя по частоте колебаний результаты асимптотического и вариационного методов оказались близки. В работе также было уделено внимание вычислению коэффициентов динамической жесткости слоя и исследованию их зависимости от частоты колебаний.

Основной результат работы [7] состоит в проведении расчетов деформаций, напряжений, соотношений жесткости и других параметров для слоя кольцевой формы по уравнениям теории слоя и по общим уравнениям нелинейной теории упругости. Решение краевых задач осуществлялось численными методами: методом ортогональной прогонки в случае теории слоя и методом конечных элементов (МКЭ) для нелинейной краевой задачи упругости. Результаты численных экспериментов по двум методам позволили установить некоторые важные закономерности деформации слоя и оценить пределы применимости нелинейной теории слоя в зависимости от параметров задачи. На основе анализа жесткостных характеристик слоя сделана оценка области применимости модели материала Сен-Венана–Кирхгофа в зависимости от величины относительной осадки слоя. Были выполнены расчеты деформации кольцевого слоя МКЭ по уравнениям нелинейной

теории упругости для модели полулинейного материала. Выяснилось, что эта модель материала также ограничено применима в случае больших деформаций.

В работе [23] рассматривается взаимосвязь между формой многослойного резино-металлического шарнира и ее зависимостью от поверхностного давления и деформации сдвига.

Использование тонкослойных резино-металлических элементов в качестве сейсмических изоляторов является одним из доступных способов защиты зданий от сейсмической опасности. В работе [21] представлена реалистичная численная модель 9-этажного здания с тонкослойными резино-металлическими подшипниками, а также представлены расчеты колебаний этого здания под действием различных сейсмических нагрузок с течением времени. Расчет вибраций модели здания с подшипниками осуществляется с использованием средств SAP2000.

Пакеты тонкослойных резинометаллических элементов также успешно используются в качестве подшипников, виброизоляторов, амортизаторов и т. д. В статье [24] рассматриваются панели резинометаллических элементов плоского типа прямоугольной формы при сжатии. Получены следующие формулы для конструкции упаковки: зависимость критических внешних нагрузок от условий нагрузки, условий плотности упаковки, от геометрических параметров слоев и механических свойств материалов слоев. Учитывается зависимость механических модулей эластомера от уровня нагрузки на сжатие. Предполагается, что неэластомерные слои являются либо абсолютно жесткими, либо могут подвергаться только растягивающей деформации в плоскости. Полученные решения сравниваются с экспериментальными данными других авторов.

Статическая и динамическая жесткость резины, используемая в резиновых подшипниках исследуется в [22]. В первой части этой статьи используется метод конечных элементов для моделирования поведения резины при сжатии и сдвиге. Во второй части этой работы резиновые прокладки моделируются как трехпараметрические общие жидкости Максвелла для динамической оценки жесткости. Комбинируя оригинальный

резиновый подшипник с дополнительным упругим изгибом или даже второй резиной, можно изменить исходную жесткость резины как в направлении сжатия, так и в направлении сдвига. Наконец, предложены и продемонстрированы конструкции для снижения жесткости при высокочастотном сдвиге или для повышения жесткости при сжатии в стационарном состоянии резиновых подшипников.

В [26] рассматриваются ударные и виброизоляторы, которые обычно изготавливаются из эластомерных материалов. Эластомерные материалы дают много инженерных преимуществ благодаря их высокой эластичности, хорошим динамическим свойствам, низкой объемной сжимаемости, сопротивлением агрессивным факторам окружающей среды и др. Недостатком эластомерного материала являются старение, то есть изменение его свойств с течением времени. В данной работе влияние старения эластомерных материалов на демпфирующие свойства амортизаторов рассматривается на основе механических моделей эластомеров — мод Максвелла и Бюргерса. Усталостная выносливость, то есть способность длительное время противостоять механическим воздействиям, изучается на основе экспериментов по динамическому сдвигу со слоистыми резинометаллическими структурами. Эксперименты показывают, что такие конструкции имеют очень высокую усталостную долговечность до 100 миллионов циклов.

В статье [25] рассматривается поведение свинцово-резиновых подшипников китайского производителя, подверженного сейсмическому воздействию. Были решены некоторые задачи с использованием специализированных программных комплексов. Предполагалось, что вычислительная модель представляет собой одноместный генератор с сосредоточенной массой. Проведено исследование закономерностей горизонтального смещения верхней части подшипника относительно нижней части, вызванной землетрясениями. Поведение структуры опоры было сопоставлено с аналогичными опорами другого производителя. Представлены результаты исследовательской работы и сделаны выводы об эффективности использования подшипников этого конкретного типа и модели.

Расчеты зданий с резинометаллическими опорами часто

выполняют в программных комплексах Лира 10.6, Scad Office 21, Ing+, Stark и т. д. Они позволяют моделировать опоры с помощью специальных конечных элементов, описывающих идеализированные линейные или, в лучшем случае, идеализированные билинейные диаграммы работы опор. Однако действительная диаграмма работы резинометаллических опор существенно нелинейная. В настоящее время существуют программные комплексы, такие как Ansys/LS-Dyna, Abaqus, позволяющие более точно учитывать характер работы опор за счет использования материалов, реализующих идеализированные нелинейные диаграммы деформирования.

В работе [11] рассмотрены способы моделирования резинометаллических опор в программных комплексах Ansys/LS-Dyna и Лира 10.6. Для получения достоверных результатов было проведено сравнение диаграмм работы и периодов собственных колебаний опор при их численном моделировании в программных комплексах с результатами заводских испытаний.

Как видно из приведенного обзора, исследования резинометаллических конструкций в настоящее время являются востребованными.

# Глава 1. Деформация двухслойной резинометаллической

## пластины при действии нормального давления

### §1. Деформация металлической пластины

Рассмотрим прямоугольную металлическую пластину, края которой свободно оперты и на которую действует равномерно распределённое по всей площади постоянное давление  $q$ . Длины сторон пластины равны  $a$  и  $b$  соответственно,  $h$  — толщина пластины.

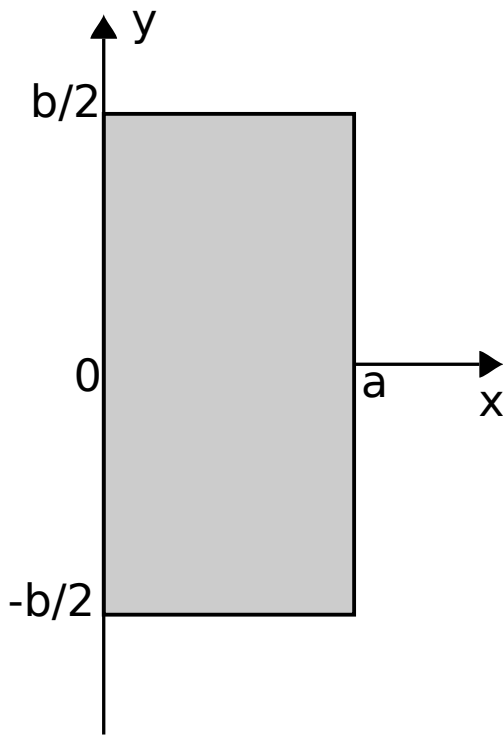


Рис. 1.1: Металлическая пластина

На краях пластины имеют место следующие граничные условия

$$\begin{aligned} w(x, y) \Big|_{x=0, x=a} &= 0, & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0, x=a} &= 0, \\ w(x, y) \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} &= 0, & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} &= 0. \end{aligned}$$

Уравнение прогиба имеет вид [17]

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q, \quad (1.1)$$

где  $q$  — постоянное давление,  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  — цилиндрическая жесткость,  $E$ ,  $\nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона пластины.

В книге [17] было предложено представить решение задачи для свободно опертой прямоугольной пластины в виде ряда

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (1.2)$$

Каждый член ряда удовлетворяет граничным условиям на двух краях  $x = 0$  и  $x = a$ ,  $Y_m(y)$  — функции, определяемые таким образом, чтобы удовлетворить уравнению (1.1) и граничным условиям на краях  $y = \pm b/2$ .

Положим

$$w(x, y) = w_1(x) + w_2(x, y) = \frac{q}{24D}(x^4 - 2ax^3 + a^3x) + w_2(x, y).$$

Функция  $w_1(x)$  представляет собой прогиб равномерно нагруженной полосы, параллельной оси  $Ox$ ,  $w_2(x, y)$  есть решение однородного уравнения (1.1)

$$\frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_2}{\partial y^4} = 0. \quad (1.3)$$

и оно должно удовлетворять всем граничным условиям.

Возьмем функцию  $w_2(x, y)$  в виде ряда (1.2), подставим в (1.3) и получим уравнение, которое остается верным при любых  $x$  только в том случае, если имеют места равенства

$$Y_m^{IV} - 2\frac{m^2\pi^2}{a^2}Y_m^{II} + \frac{m^4\pi^4}{a^4}Y_m = 0.$$

В силу симметрии относительно оси  $Ox$   $m = 1, 3, 5, \dots$  и решение имеет вид

$$Y_m(y) = \frac{qa^4}{D} \left( A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right).$$

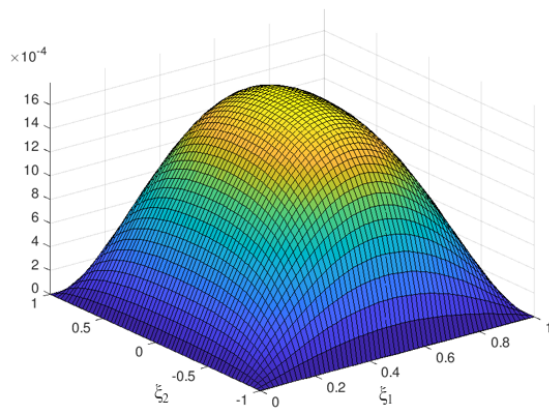
Разложим функцию  $w_1(x)$  в тригонометрический ряд

$$\frac{q}{24D}(x^4 - 2ax^3 + a^3x) = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi x}{a}.$$

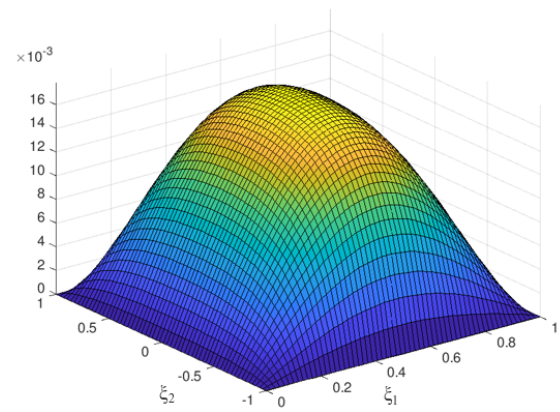
Определим постоянные интегрирования из граничных условий на  $y = \pm b/2$  и окончательно получим

$$w(x, y) = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left( 1 - \frac{\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m + 2}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \operatorname{ch} \frac{2\alpha_m y}{b} + \frac{\alpha_m y}{\operatorname{ch} \alpha_m b} \operatorname{sh} \frac{2\alpha_m y}{b} \right) \sin \frac{\pi m x}{a}, \quad \alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}. \quad (1.4)$$

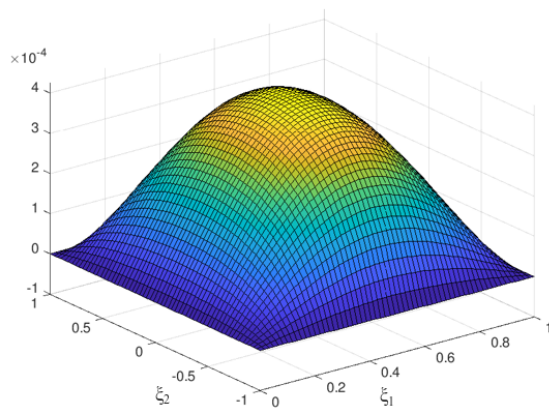
На рис. 1.2 представлены графики зависимости прогибов мелаллической пластины от безразмерных переменных  $\xi_1 = x/a$ ,  $\xi_2 = 2y/b$  при  $a = 10$  см,  $b = 10$  см,  $E_0 = 2,1 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>,  $\nu_0 = 0,3$ .



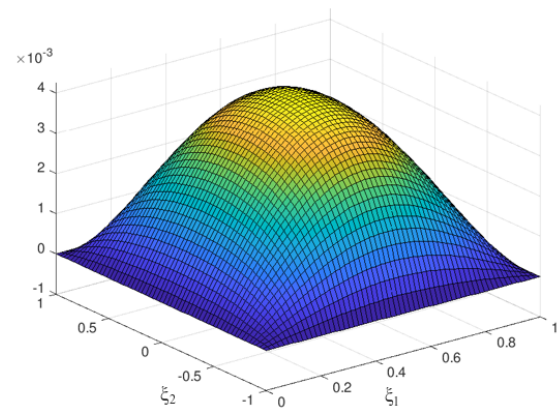
а)  $q = 1 \text{ кг/см}^2, h = 1 \text{ см}$



б)  $q = 10 \text{ кг/см}^2, h = 1 \text{ см}$



в)  $q = 1 \text{ кг/см}^2, h = 2 \text{ см}$



г)  $q = 10 \text{ кг/см}^2, h = 2 \text{ см}$

Рис. 1.2: Прогиб металлической пластины.

Отметим, что и толщина пластины, и приложенная нагрузка значительно влияют на величину прогиба.

## §2. Деформация двухслойной резинометаллической пластины

### Постановка задачи

Рассмотрим металлическую прямоугольную пластину толщиной  $h_0$ , лежащую на упругом эластомерном слое толщиной  $h$  (рис. 1.3). Верхняя пластина нагружена равномерно распределённым по всей площади постоянным давлением  $q$ .

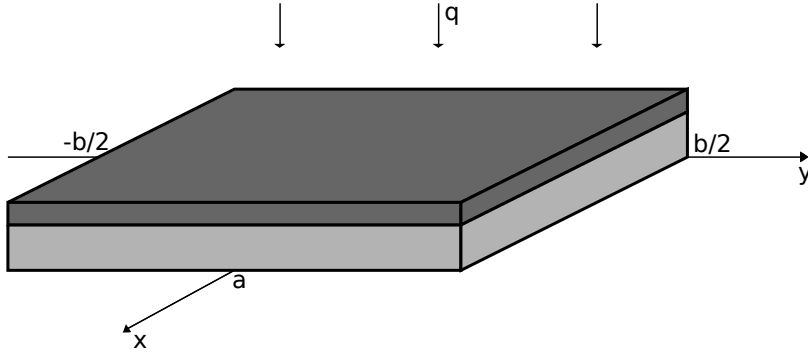


Рис. 1.3: Двухслойная резинометаллическая пластина

Основание резинового слоя неподвижно  $w_{layer} = 0, z = 0$ . На поверхностях соединения пластины и резинового слоя имеют место условия непрерывности напряжений и перемещений

$$\sigma_{33,layer} = \sigma_{33,plate}, \quad w = w_{layer}, \quad z = h.$$

Слои металла и резины жестко соединены. Пластина шарнирно опёрта по контуру, то есть прогиб металлической пластины и изгибающий момент вдоль края равны нулю

$$\begin{aligned} w(x, y) \Big|_{x=0, x=a} &= 0, & w(x, y) \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} &= 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0, x=a} &= 0, & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} &= 0. \end{aligned}$$

Края резинового слоя свободны, так как нормальные напряжения слоя определяются формулой  $\sigma_{33} = Ke$ , где  $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$  — модуль объёмного сжатия резины,  $E$  и  $\nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона резины,  $e$  — относительное приращение объёма. Тогда условие на краях будет  $e(x, y) = 0$ .

Нагрузка на пластину, лежащую на эластомерном слое, складывается из давления  $q$  и реакции резинового слоя, равной  $Ke$ . Уравнение её прогиба имеет вид [6]

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q - Ke(x, y), \quad (1.5)$$

где  $D = \frac{E_0 h_0^3}{12(1-\nu_0^2)}$  — цилиндрическая жесткость металлической пластины,  $E_0$  и  $\nu_0$  — её модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

Задача сжатия резинового слоя сводится к решению уравнения



Гельмгольца для функции относительного приращения объёма

$$a^2 \left( \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial y^2} \right) - 12ce = -\frac{12c}{h}w, \quad c = \frac{G}{K} \frac{a^2}{h^2}, \quad (1.6)$$

где  $G$  — модуль сдвига.

### Решение задачи

Выразим из равенства (1.6) функцию  $w(x, y)$  и подставим её в (1.5)

$$D \frac{a^2 h}{12c} \left( \frac{\partial^6 e}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 e}{\partial y^6} + 3 \frac{\partial^6 e}{\partial x^4 \partial y^2} + 3 \frac{\partial^6 e}{\partial x^2 \partial y^4} \right) - \quad (1.7)$$

$$- Dh \left( \frac{\partial^4 e}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 e}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 e}{\partial y^4} \right) - Ke = -q.$$

Введём замену переменных  $x = a\xi_1$  и  $y = b\xi_2/2$

$$\frac{1}{a^6} \frac{\partial^6 e}{\partial \xi_1^6} + \frac{64}{b^6} \frac{\partial^6 e}{\partial \xi_2^6} + \frac{12}{a^4 b^2} \frac{\partial^6 e}{\partial \xi_1^4 \partial \xi_2^2} + \frac{48}{a^2 b^4} \frac{\partial^6 e}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^4} -$$

$$- \frac{12c}{a^2} \left( \frac{1}{a^4} \frac{\partial^4 e}{\partial \xi_1^4} + \frac{8}{a^2 b^2} \frac{\partial^4 e}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^2} + \frac{16}{b^4} \frac{\partial^4 e}{\partial \xi_2^4} \right) - \frac{12cK}{Da^2 h} e = -\frac{12cq}{Da^2 h}.$$

Решение уравнения ищем в виде суммы  $e(\xi_1, \xi_2) = e_1 + e_2$ ,  $e_1$  — решение однородного дифференциального уравнения,  $e_2$  — частное решение неоднородного уравнения.

Решение однородного уравнения представим в виде [17]

$$e_1(\xi_1, \xi_2) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(\xi_2) \sin(\pi m \xi_1). \quad (1.8)$$

Получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left( Y_m^{VI} - (48\pi^2 m^2 + 12c) \frac{b^2}{64a^2} Y_m^{IV} + (12\pi^2 m^2 + 96c) \frac{\pi^2 m^2 b^4}{64a^4} Y_m^{II} - \right.$$

$$\left. - \left( \frac{\pi^6 m^6}{a^4} + \frac{12c\pi^4 m^4}{a^4} + \frac{12cK}{hD} \right) \frac{b^6}{64a^2} Y_m \right) \sin(\pi m \xi_2) = 0.$$

Мы пришли к уравнениям относительно неизвестных функций  $Y_m(\xi_2)$

$$Y_m^{VI} - (48\pi^2 m^2 + 12c) \frac{b^2}{64a^2} Y_m^{IV} + (12\pi^2 m^2 + 96c) \frac{\pi^2 m^2 b^4}{64a^4} Y_m^{II} -$$

$$- \left( \frac{\pi^6 m^6}{a^4} + \frac{12c\pi^4 m^4}{a^4} + \frac{12cK}{hD} \right) \frac{b^6}{64a^2} Y_m = 0.$$

С учетом симметрии относительно оси  $Ox$  их решения имеют вид

$$Y_m = c_{1m} \operatorname{ch}(\lambda_m \xi_2) + c_{2m} \operatorname{ch}(\alpha_m \xi_2) \cos(\beta_m \xi_2) + c_{3m} \operatorname{sh}(\alpha_m \xi_2) \sin(\beta_m \xi_2), \quad (1.9)$$

где  $\lambda_m$  — вещественный корень характеристического уравнения,  $\alpha_m, \beta_m$  — вещественная и мнимая части комплексных корней.

Частное решение неоднородного уравнения раскладываем в ряд Фурье по  $\sin(\pi m \xi_1)$  и получим

$$e_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4q}{\pi m K} \sin(\pi m \xi_1).$$

Неизвестные постоянные определяются из граничных условий. Условия на краях  $x = 0$  и  $x = a$  выполняются за счет представления функции относительного объема в виде ряда (1.8). Рассмотрим оставшиеся граничные условия. На краю резинового слоя отсутствует относительное приращение объема  $e|_{\xi_2=1} = 0$  и  $w|_{\xi_2=1} = 0$ . Отсюда

$$Y_m|_{\xi_2=1} = 0, \quad \frac{d^2 Y_m}{d\xi_2^2} \Big|_{\xi_2=1} = 0, \quad \frac{d^4 e}{d\xi_2^4} \Big|_{\xi_2=1} = 0.$$

Последнее условие получено дифференцированием уравнения Гельмгольца (1.6).

Решая систему уравнений относительно  $c_{1m}, c_{2m}$  и  $c_{3m}$  получим

$$\begin{aligned} c_{1m} &= -\frac{q(\beta_m^2 + \alpha_m^2)^2}{K(\lambda_m^4 + 2(\beta_m^2 - \alpha_m^2)\lambda_m^2 + (\beta_m^2 + \alpha_m^2)^2) \operatorname{ch} \lambda_m}, \\ c_{2m} &= A_m(\operatorname{sh} \alpha_m \sin \beta_m((\beta_m^4 - \alpha_m^2)\lambda_m^2 + (\beta_m^2 - 6\alpha_m^2\beta_m^2 + \alpha_m^4)) + \\ &\quad + \operatorname{ch} \alpha_m \cos \beta_m(4(\alpha_m^3\beta_m - \beta_m^3\alpha_m) - 2\alpha_m\beta_m\lambda_m^2)), \\ c_{3m} &= -A_m(\operatorname{ch} \alpha_m \cos \beta_m((\beta_m^2 - \alpha_m^2)\lambda_m^2 + (\beta_m^4 - 6\alpha_m^2\beta_m^2 + \alpha_m^4)) + \\ &\quad + \operatorname{sh} \alpha_m \sin \beta_m(2\alpha_m\beta_m\lambda_m^2 + 4(\alpha_m\beta_m^3 - \alpha_m^3\beta_m))), \\ A_m &= \frac{q\lambda_m^2}{K(2\alpha_m\beta_m\lambda_m^4 + 4(\alpha_m\beta_m^3 - \alpha_m^3\beta_m)\lambda_m^2 + 2\alpha_m\beta_m^5 + 4\alpha_m^3\beta_m^3 + 2\alpha_m^5\beta_m)} \times \\ &\quad \times \frac{1}{(\operatorname{sh} \alpha_m^2 \sin \beta_m^2 + \operatorname{ch} \alpha_m^2 \cos \beta_m^2)}. \end{aligned}$$

Таким образом, для функции относительного приращения объема получили выражение

$$e(\xi_1, \xi_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{4qh}{\pi m K} + c_{1m} \operatorname{ch}(\lambda_m \xi_2) + c_{2m} \operatorname{ch}(\alpha_m \xi_2) \cos(\beta_m \xi_2) + c_{3m} \operatorname{sh}(\alpha_m \xi_2) \sin(\beta_m \xi_2) \right) \sin(\pi m \xi_1).$$

Теперь можем определить прогиб металлической пластины

$$w = he - \frac{ha^2}{12c} \left( \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 e}{\partial \xi_1^2} + \frac{4}{b^2} \frac{\partial^2 e}{\partial \xi_2^2} \right),$$

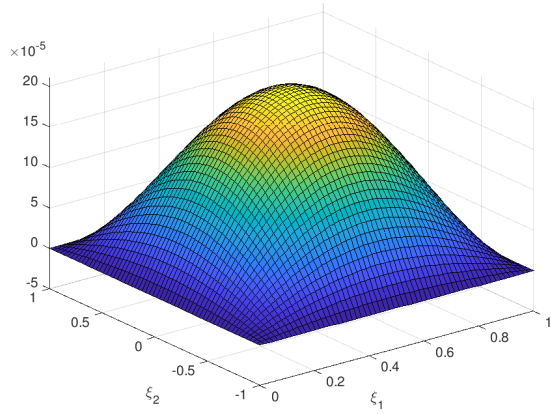
$$w(\xi_1, \xi_2) = \sum_{m=1}^{\infty} h \left[ \frac{4q}{\pi m K} - \frac{b^2 c_{1m}}{48ca^2} \operatorname{sh}(\alpha_m \xi_2) + \operatorname{ch}(\alpha_m \xi_2) \left( c_{1m} + \frac{m^2 \pi^2}{12c} - \frac{b^2}{48ca^2} c_{1m} \lambda_m^2 \right) + \left( c_{2m} + \frac{m^2 \pi^2}{12c} c_{2m} - \frac{b^2}{48ca^2} (c_{2m} \alpha_m^2 + 2c_{3m} \alpha_m \beta_m - c_{2m} \beta_m^2) \right) \operatorname{ch}(\alpha_m \xi_2) \cos(\beta_m \xi_2) + \left( c_{3m} + \frac{m^2 \pi^2 c_{3m}}{12c} - \frac{b^2 (c_{3m} \alpha_m^2 - 2c_{2m} \alpha_m \beta_m - c_{3m} \beta_m^2)}{48ca^2} \right) \operatorname{sh}(\alpha_m \xi_2) \sin(\beta_m \xi_2) \right] \sin(\pi m \xi_1). \quad (1.10)$$

Выполнен расчет прогибов металлической пластины для следующих параметров:

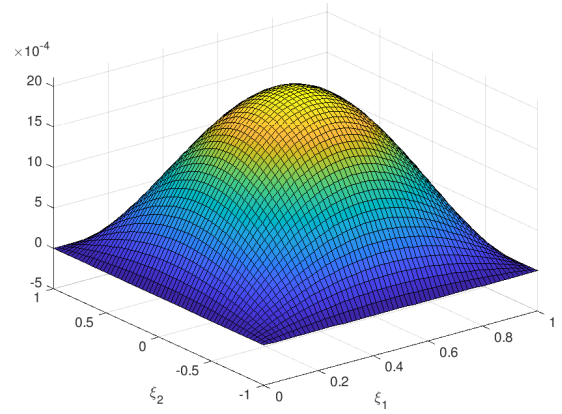
$$K = 25 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^2, \quad a = 10 \text{ см}, \quad b = 10 \text{ см}, \quad h_0 = 1 \text{ см}, \quad G = 10 \text{ кг/см}^2, \\ E_0 = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2, \quad \nu_0 = 0,3.$$

На рис. 1.4 представлены графики зависимости прогиба металлической пластины, лежащей на резиновом слое, от безразмерных переменных  $\xi_1, \xi_2$ .

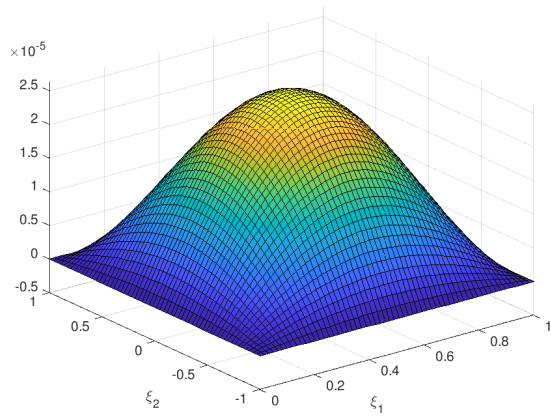
Из рис. 1.2 и рис. 1.4 следует, что наличие резинового слоя уменьшает прогиб металлической пластины.



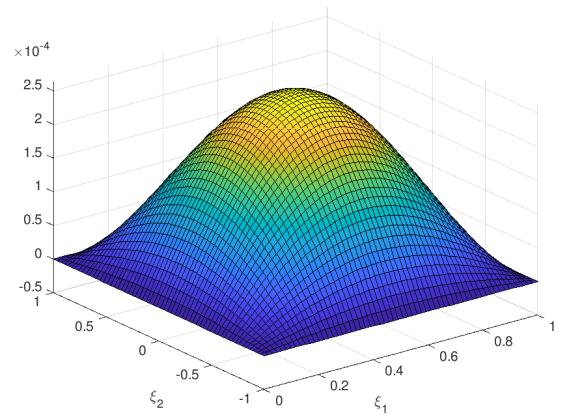
а)  $q = 1 \text{ кг/см}^2, h = 1 \text{ см}$



б)  $q = 10 \text{ кг/см}^2, h = 1 \text{ см}$



в)  $q = 1 \text{ кг/см}^2, h = 2 \text{ см}$



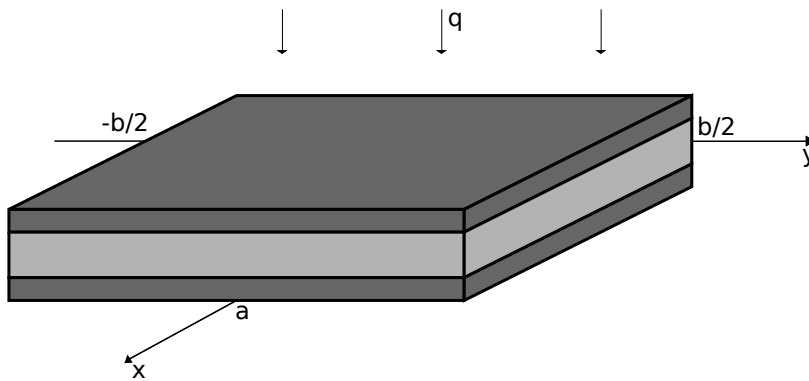
г)  $q = 10 \text{ кг/см}^2, h = 2 \text{ см}$

Рис. 1.4: Прогиб металлической пластины при постоянной нагрузке.

# Глава 2. Деформация трёхслойной резинометаллической пластины при действии постоянного давления

## §1. Постановка задачи

Рассмотрим две прямоугольные металлические пластины, между которыми помещён упругий эластомерный слой высотой  $h$  (рис. 2.1). Толщина металлических пластин  $h_0$ . Длины сторон пластин равны  $a$  и  $b$  соответственно.



Верхняя металлическая пластина нагружена равномерно распределённым по всей площади постоянным давлением  $q$ . На поверхностях соединения пластин и резинового слоя имеют место условия непре-

Рис. 2.1: Трёхслойная резинометаллическая пластина  
рывности напряжений и перемещений

$$\sigma_{33}^+ = \sigma_{33}^{(1)}, \quad \sigma_{33}^- = \sigma_{33}^{(2)},$$

$$w_1 = w^+, \quad z = h_0, \quad w_2 = w^-, \quad z = h_0 + h.$$

Здесь  $w^\pm$  — перемещения верхней и нижней поверхностей резинового слоя,  $w_1, w_2$  — прогибы верхней и нижней пластины соответственно.

Слои металла и резины жестко соединены. Как и в предыдущей

задаче, пластины шарнирно опёрты по краям

$$\begin{aligned} w_1(x, y) \Big|_{x=0, x=a} &= 0, & \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \Big|_{x=0, x=a} &= 0, \\ w_2(x, y) \Big|_{x=0, x=a} &= 0, & \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \Big|_{x=0, x=a} &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} w_1(x, y) \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} &= 0, & \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} &= 0, \\ w_2(x, y) \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} &= 0, & \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Края резинового слоя свободны, функция относительное приращение объёма на краях равна нулю.

Нагрузка на пластину, лежащую на эластомерном слое, складывается из давления  $q$  и реакции резинового слоя, равной  $Ke$ . Уравнение её прогиба имеет вид [6]

$$D \left( \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} \right) = q - Ke(x, y). \quad (2.3)$$

Нагрузка на пластину, лежащую под эластомерным слоем, равна реакции резинового слоя. Следовательно, уравнение для прогиба будет иметь следующий вид

$$D \left( \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_2}{\partial y^4} \right) = Ke(x, y), \quad (2.4)$$

где  $w_1$  и  $w_2$  — прогибы верхней и нижней металлических пластин, соответственно.

Задача сжатия резинового слоя сводится к решению уравнения Гельмгольца для функции относительного приращения объёма

$$a^2 \left( \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial y^2} \right) - 12ce = -\frac{12c}{h} (w_1 - w_2), \quad c = \frac{G a^2}{K h^2}. \quad (2.5)$$

## §2. Решение задачи

Для решения задачи из уравнения (2.4) выразим функцию  $e(x, y)$  и подставим ее в уравнение (2.5). Получим

$$\begin{aligned} & \frac{a^2 D}{K} \left( \frac{\partial^6 w_2}{\partial x^6} + 3 \frac{\partial^6 w_2}{\partial x^2 \partial y^4} + 3 \frac{\partial^6 w_2}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 w_2}{\partial y^6} \right) - \\ & - 12c \frac{D}{K} \left( \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_2}{\partial y^4} \right) = \frac{12c}{h} (w_2 - w_1). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Складываем уравнения (2.3) и (2.4) и делаем замену переменных  $w_1 + w_2 = u_1$

$$D \left( \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_1}{\partial y^4} \right) = q.$$

Решение этого уравнения имеет вид (см. (1.4))

$$u_1(x, y) = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} f_m(y) \sin \frac{\pi mx}{a}, \quad \alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}. \quad (2.7)$$

Выразим теперь прогиб верхней пластины  $w_1 = u_1 - w_2$  и подставим в уравнение (2.6). Мы получим уравнение относительно одной неизвестной функции  $w_2(x, y)$

$$\begin{aligned} & \frac{a^2 D}{K} \left( \frac{\partial^6 w_2}{\partial x^6} + 3 \frac{\partial^6 w_2}{\partial x^2 \partial y^4} + 3 \frac{\partial^6 w_2}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 w_2}{\partial y^6} \right) - \\ & - 12c \frac{D}{K} \left( \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_2}{\partial y^4} \right) = \frac{12c}{h} (2w_2 - u_1). \end{aligned}$$

Представим функцию  $w_2(x, y)$  в виде ряда

$$w_2(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \sin \frac{\pi mx}{a}. \quad (2.8)$$

Члены этого ряда удовлетворяют граничным условиям (2.1).

Соотношения (2.7) и (2.8) подставим в уравнение (2.6)

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ Y_m^{VI} - \frac{3}{a^2} (m^2\pi^2 + 4c) Y_m^{IV} + \frac{3}{a^4} m^2\pi^2 (m^2\pi^2 + 8c) Y_m^{II} - \right. \\ \left. - \left( \frac{\pi^6 m^6}{a^6} + 12c \frac{\pi^4 m^4}{a^6} + \frac{24Kc}{Dha^2} \right) Y_m \right] \sin \frac{\pi mx}{a} = \\ = \frac{48Kcqa^2}{D^2 h \pi^5} \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \sin \frac{\pi mx}{a}. \end{aligned}$$

Придем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно  $Y_m(y)$

$$\begin{aligned} Y_m^{VI} - \frac{3}{a^2} (m^2\pi^2 + 4c) Y_m^{IV} + \frac{3}{a^4} m^2\pi^2 (m^2\pi^2 + 8c) Y_m^{II} - \\ - \left( \frac{\pi^6 m^6}{a^6} + 12c \frac{\pi^4 m^4}{a^6} + \frac{12Kc}{Dha^2} \right) Y_m = \frac{48qcKa^2}{hD^2\pi^5} f_m. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Решения этих уравнений ищем в виде суммы решений однородных дифференциальных уравнений и частных решений неоднородных уравнений. С учетом четности функции  $Y_m(y)$  решения этой системы имеют вид [9]

$$Y_m = c_{1m} \operatorname{ch}(\lambda_{1m}y) + c_{2m} \operatorname{ch}(\lambda_{2m}y) + c_{3m} \operatorname{ch}(\lambda_{3m}y) + q_m(y), \quad (2.10)$$

где  $\lambda_{im}$  — корни характеристического уравнения,  $c_{im}$  — неизвестные постоянные, определяемые с помощью граничных условий, а  $q_m(y)$  — частные решения уравнений (2.9).

Введем следующие обозначения

$$b_m = \frac{m\pi}{a}, \quad a_{1m} = -\frac{3}{a^2} (m^2\pi^2 + 4c), \quad a_{2m} = \frac{3}{a^4} m^2\pi^2 (m^2\pi^2 + 8c),$$

$$a_{3m} = -\left( \frac{\pi^6 m^6}{a^6} + 12c \frac{\pi^4 m^4}{a^6} + \frac{12Kc}{Dha^2} \right), \quad a_{4m} = \frac{48qcKa^2}{hD^2\pi^5 m^5},$$

$$a_{5m} = -\frac{48qcKa^2}{hD^2\pi^5} \frac{\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m + 2}{2 \operatorname{ch} \alpha_m}, \quad a_{6m} = \frac{48qcKa^2}{hD^2\pi^5} \frac{\alpha_m}{b \operatorname{ch} \alpha_m}.$$



Тогда частные решения системы (2.9)

$$q_m(y) = \frac{a_{4m}}{a_{3m}} + \frac{1}{b_m^6 + a_{1m}b_m^4 + a_{2m}b_m^2 + a_{3m}} \left[ \left( a_{5m} - \right. \right. \\ \left. \left. - 2a_{6m} \frac{3b_m^5 + 2b_m^3 a_{1m} + b_m a_{2m}}{b_m^6 + a_{1m}b_m^4 + a_{2m}b_m^2 + a_{3m}} \right) \operatorname{ch}(b_m y) + a_{6m} y \operatorname{sh}(b_m y) \right].$$

Преобразуем граничные условия (2.2).

$$\sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \sin \frac{\pi m x}{a} \Big|_{y=\frac{b}{2}} = 0, \quad \sum_{m=1}^{\infty} Y_m''(y) \sin \frac{\pi m x}{a} \Big|_{y=\frac{b}{2}} = 0.$$

Эти уравнения должны быть справедливыми для любых  $x$ , значит, мы имеем два условия

$$Y_m \Big|_{y=\frac{b}{2}} = 0, \quad \frac{d^2 Y_m}{dy^2} \Big|_{y=\frac{b}{2}} = 0.$$

Так как относительное приращение объема на краях пластины равно нулю, то мы можем записать

$$e(x, b/2) = \sum_{m=1}^{\infty} e_m(y) \sin \frac{\pi m x}{a} \Big|_{y=\frac{b}{2}} = 0.$$

Из уравнения (2.4) получим

$$\frac{d^4 Y_m}{dy^4} \Big|_{y=\frac{b}{2}} = 0.$$

Таким образом, у нас есть три условия для определения неизвестных постоянных  $c_{im}$  и они имеют вид

$$c_{1m} = - \frac{e^{\lambda_{1m} b/2} R_{1m}}{2(e^{b\lambda_{1m}} + 1)(\lambda_{2m}^2 - \lambda_{1m}^2)(\lambda_{3m}^2 - \lambda_{1m}^2)e^{b_m b/2}},$$

$$c_{2m} = - \frac{e^{\lambda_{2m} b/2} R_{2m}}{2(e^{b\lambda_{2m}} + 1)(\lambda_{1m}^2 - \lambda_{2m}^2)(\lambda_{3m}^2 - \lambda_{1m}^2)e^{b_m b/2}},$$

$$c_{3m} = - \frac{e^{\lambda_{3m} b/2} R_{3m}}{2(e^{b\lambda_{3m}} + 1)(\lambda_{2m}^2 - \lambda_{3m}^2)(\lambda_{1m}^2 - \lambda_{3m}^2)e^{b_m b/2}},$$

где

$$A_{1m} = \frac{a_{4m}}{a_{3m}}, \quad A_{3m} = \frac{a_{6m}}{B_m}, \quad B_m = \frac{1}{b_m^6 + a_{1m}b_m^4 + a_{2m}b_m^2 + a_{3m}}$$

$$A_{2m} = B_m \left( a_{5m} - 2a_{6m} \frac{3b_m^5 + 2b_m^3 a_{1m} + b_m a_{2m}}{b_m^6 + a_{1m}b_m^4 + a_{2m}b_m^2 + a_{3m}} \right),$$

$$R_{1m} = (b_m^2 - \lambda_{2m}^2)(b_m^2 - \lambda_{3m}^2)[2A_{2m}(e^{b_m b} + 1) + bA_{3m}(e^{b_m b} - 1)] + \\ + 4b_m A_{3m}(e^{b_m b} + 1)(b_m^2 - \lambda_{2m}^2 - \lambda_{3m}^2) + 4\lambda_{2m}^2 \lambda_{3m}^2 A_{1m} e^{b_m b/2},$$

$$R_{2m} = (b_m^2 - \lambda_{1m}^2)(b_m^2 - \lambda_{3m}^2)[2A_{2m}(e^{b_m b} + 1) + bA_{3m}(e^{b_m b} - 1)] + \\ + 4b_m A_{3m}(e^{b_m b} + 1)(b_m^2 - \lambda_{1m}^2 - \lambda_{3m}^2) + 4\lambda_{1m}^2 \lambda_{3m}^2 A_{1m} e^{b_m b/2},$$

$$R_{3m} = (b_m^2 - \lambda_{2m}^2)(b_m^2 - \lambda_{1m}^2)[2A_{2m}(e^{b_m b} + 1) + bA_{3m}(e^{b_m b} - 1)] + \\ + 4b_m A_{3m}(e^{b_m b} + 1)(b_m^2 - \lambda_{1m}^2 - \lambda_{2m}^2) + 4\lambda_{1m}^2 \lambda_{2m}^2 A_{1m} e^{b_m b/2}.$$

Таким образом, функции прогибов верхней и нижней металлических пластин имеет вид

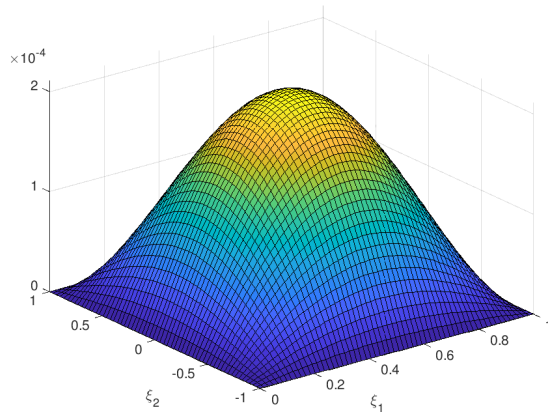
$$w_1(x, y) = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left( 1 - \frac{\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m + 2}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \operatorname{ch} \frac{2\alpha_m y}{b} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha_m}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \frac{2y}{b} \operatorname{sh} \frac{2\alpha_m y}{b} \right) \sin \frac{\pi m x}{a} - \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \sin \frac{\pi m x}{a}, \quad (2.11)$$

$$w_2(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \left( c_{1m} \operatorname{ch}(\lambda_{1m} y) + c_{2m} \operatorname{ch}(\lambda_{2m} y) + \right. \\ \left. + c_{3m} \operatorname{ch}(\lambda_{3m} y) + q_m(y) \right) \sin \frac{\pi m x}{a}. \quad (2.12)$$

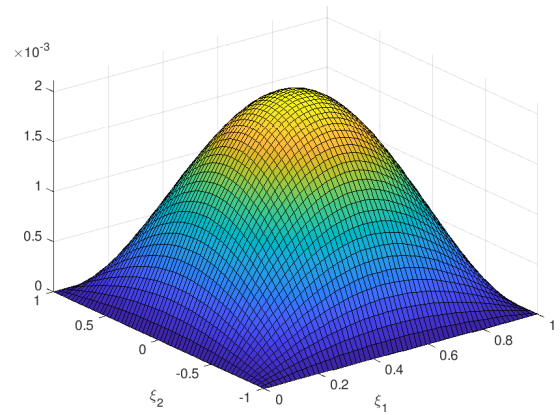
### §3. Расчеты прогибов металлических пластин

Был выполнен расчёт прогибов металлических пластин для следующих параметров:  $K = 25 \cdot 10^3$  кг/см<sup>2</sup>,  $h_0 = 1$  см,  $a = 10$  см,  $b = 10$  см,  $E_0 = 2,1 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>,  $\nu_0 = 0,3$ ,  $G = 10$  кг/см<sup>2</sup>.

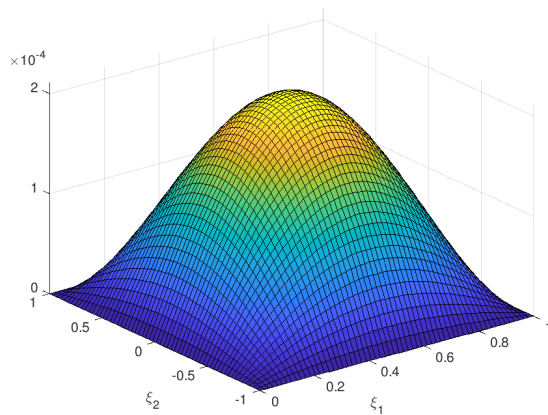
На рис. 2.2, 2.3 представлены графики функции прогибов верхней и нижней металлических пластин от безразмерных переменных  $\xi_1 = x/a$ ,  $\xi_2 = 2y/b$  при действии различной постоянной нагрузки и различной толщине резинового слоя.



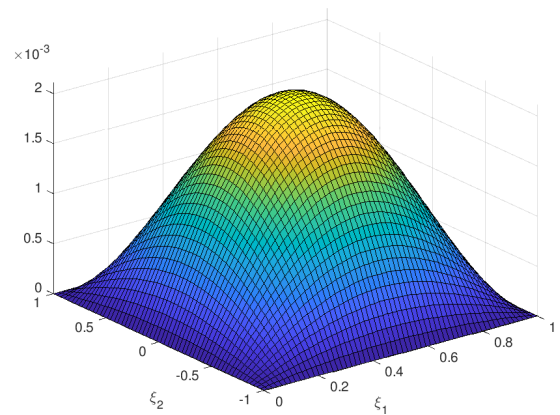
а)  $q = 1 \text{ кг/см}^2$ ,  $h = 1 \text{ см}$



б)  $q = 10 \text{ кг/см}^2$ ,  $h = 1 \text{ см}$

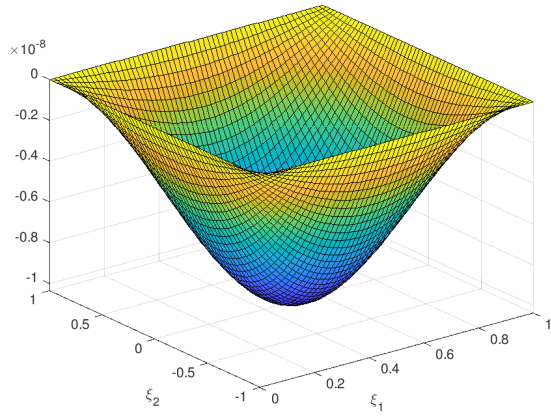


в)  $q = 1 \text{ кг/см}^2$ ,  $h = 2 \text{ см}$

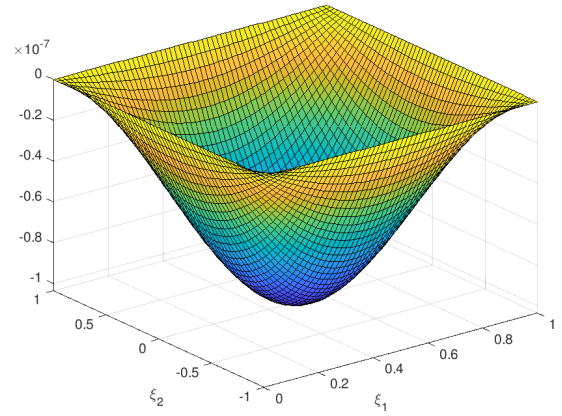


г)  $q = 10 \text{ кг/см}^2$ ,  $h = 2 \text{ см}$

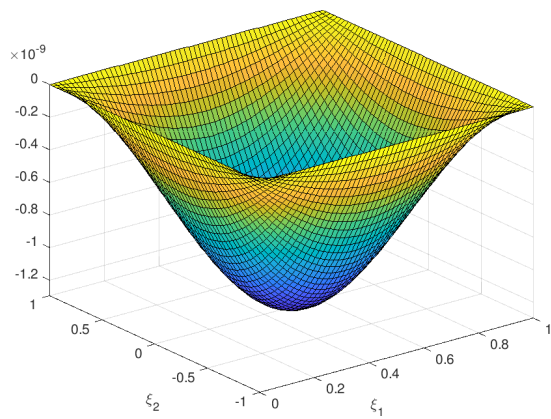
Рис. 2.2: Прогиб верхней металлической пластины при постоянной нагрузке.



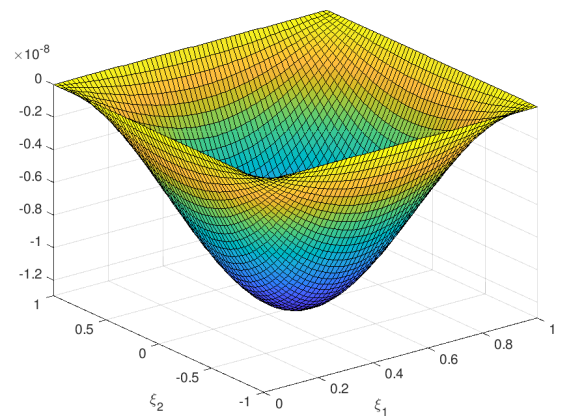
а)  $q = 1 \text{ кг/см}^2, h = 1 \text{ см}$



б)  $q = 10 \text{ кг/см}^2, h = 1 \text{ см}$



в)  $q = 1 \text{ кг/см}^2, h = 2 \text{ см}$



г)  $q = 10 \text{ кг/см}^2, h = 2 \text{ см}$

Рис. 2.3: Прогиб нижней металлической пластины при постоянной нагрузке.

# Глава 3. Деформация двухслойной резинометаллической пластины при действии динамической нагрузки

## §1. Постановка задачи

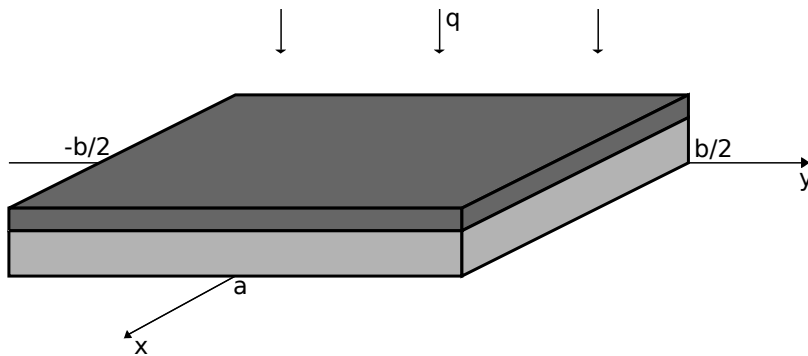


Рис. 3.1: Двухслойная резинометаллическая пластина

Рассматривается прямоугольная металлическая пластина толщиной  $h_0$ , лежащая на упругом эластомерном слое толщиной  $h$ , длиной  $a$  и шириной  $b$  (рис 3.1). На металлическую пластину действует

распределенная по всей площади динамическая нагрузка вида  $\sigma_{zz,plate} = q(t) = A \sin pt$  при  $z = h + h_0$ , где  $A$  — амплитуда,  $p$  — частота вынужденных или свободных колебаний.

Пластина шарнирно оперта по контуру  $x = 0$ ,  $x = a$  и  $y = \pm \frac{b}{2}$ , т. е. прогиб металлической пластины и изгибающий момент вдоль края равны нулю:

$$\begin{aligned} w(x, y, t) \Big|_{\substack{x=0, \\ x=a}} &= 0, & w(x, y, t) \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} &= 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, y, t) \Big|_{\substack{x=0, \\ x=a}} &= 0, & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, y, t) \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} &= 0. \end{aligned}$$

Основание резинового слоя неподвижно  $w_{layer} = 0$ ,  $z = 0$ .

На поверхности контакта пластины и резинового слоя имеют место условия непрерывности напряжений и перемещений  $\sigma_{zz,layer} = \sigma_{zz,plate}$ ,

$w = w_{layer}, z = h.$

Края резинового слоя  $x = 0, x = a$  и  $y = \pm \frac{b}{2}$  свободны от напряжений,  $e(x, y, t) = 0.$

Динамическое уравнение для прогиба пластины имеет вид

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(t) - K e(x, y, t), \quad (3.1)$$

$\rho$  — плотность металлической пластины.

Задача динамического сжатия резинового слоя сводится к решению уравнения Гельмгольца для функции относительного приращения объема

$$a^2 \left( \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial y^2} \right) - 12 \bar{c} e = - \frac{12 \bar{c}}{h} w, \quad (3.2)$$

$$\bar{c} = \frac{c k^2}{12 \left( \frac{2}{k} \operatorname{tg} \left( \frac{k}{2} \right) - 1 \right)}, \quad c = \frac{G a^2}{K h^2}, \quad k = \frac{p h}{v},$$

где  $v$  — скорость волны сдвига.

## §2. Решение задачи

Представим функции прогиба и относительного приращения объема в виде

$$w(x, y, t) = w^*(x, y) \sin(pt),$$

$$e(x, y, t) = e^*(x, y) \sin(pt).$$

Подставим эти равенства в (3.1) и (3.2) и с учетом  $q(t) = A \sin(pt)$  получим систему

$$D \left( \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w^*}{\partial y^4} \right) - \rho h_0 p^2 w^* = A - K e^*, \quad (3.3)$$

$$a^2 \left( \frac{\partial^2 e^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e^*}{\partial y^2} \right) - 12 \bar{c} e^* = - \frac{12 \bar{c}}{h} w^*. \quad (3.4)$$

Из соотношения (3.4) выразим  $w^*$  и подставим в (3.3)

$$\begin{aligned}
& D \frac{ha^2}{12\bar{c}} \left( -\frac{\partial^6 e^*}{\partial x^6} - \frac{\partial^6 e^*}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{12\bar{c}}{a^2} \frac{\partial^4 e^*}{\partial x^4} - 2 \frac{\partial^6 e^*}{\partial x^4 \partial y^2} - 2 \frac{\partial^6 e^*}{\partial x^2 \partial y^4} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{24\bar{c}}{a^2} \frac{\partial^4 e^*}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{\partial^6 e^*}{\partial x^2 \partial y^4} - \frac{\partial^6 e^*}{\partial y^6} + \frac{12\bar{c}}{a^2} \frac{\partial^4 e^*}{\partial y^4} \right) + \\
& \quad + \rho h_0 p^2 \frac{ha^2}{12\bar{c}} \left( \frac{\partial^2 e^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e^*}{\partial y^2} - \frac{12\bar{c}}{a^2} e^* \right) + K e^* = A
\end{aligned}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^6 e^*}{\partial x^6} + 3 \frac{\partial^6 e^*}{\partial x^4 \partial y^2} + 3 \frac{\partial^6 e^*}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{\partial^6 e^*}{\partial y^6} - \frac{12\bar{c}}{a^2} \left( \frac{\partial^4 e^*}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 e^*}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 e^*}{\partial y^4} \right) - \\
& \quad - \frac{\rho h_0 p^2}{D} \left( \frac{\partial^2 e^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e^*}{\partial y^2} \right) - \left( \frac{12\bar{c}K}{Dha^2} - \frac{12\bar{c}\rho h_0 p^2}{Da^2} \right) e^* = -\frac{12\bar{c}A}{Dha^2}. \quad (3.5)
\end{aligned}$$

Введем замену переменных  $x = a\xi_1, y = \frac{b}{2}\xi_2$ , тогда

$$\begin{aligned}
& \frac{64}{b^6} \frac{\partial^6 e^*}{\partial \xi_2^6} + \frac{48}{a^2 b^4} \frac{\partial^6 e^*}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^4} - \frac{12\bar{c}}{a^2} \frac{16}{b^4} \frac{\partial^4 e^*}{\partial \xi_2^4} + \frac{12}{a^4 b^2} \frac{\partial^6 e^*}{\partial \xi_1^4 \partial \xi_2^2} - \frac{12\bar{c}}{a^2} \frac{8}{a^2 b^2} \frac{\partial^4 e^*}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^2} - \\
& \quad - \frac{\rho h_0 p^2}{D} \frac{4}{b^2} \frac{\partial^2 e^*}{\partial \xi_2^2} + \frac{1}{a^6} \frac{\partial^6 e^*}{\partial \xi_1^6} - \frac{12\bar{c}}{a^2} \frac{1}{a^4} \frac{\partial^4 e^*}{\partial \xi_1^4} - \frac{\rho h_0 p^2}{D} \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 e^*}{\partial \xi_1^2} - \\
& \quad - \left( \frac{12\bar{c}K}{Dha^2} - \frac{12\bar{c}\rho h_0 p^2}{Da^2} \right) e^* = -\frac{12\bar{c}A}{Dha^2}.
\end{aligned}$$

Для квадратной пластины это уравнение будет иметь вид

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^6 e^*}{\partial \xi_2^6} + \frac{3}{4} \frac{\partial^6 e^*}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^4} - 4\bar{c} \frac{\partial^4 e^*}{\partial \xi_2^4} + \frac{3}{16} \frac{\partial^6 e^*}{\partial \xi_1^4 \partial \xi_2^2} - \frac{3\bar{c}}{2} \frac{\partial^4 e^*}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^2} - \frac{\rho h_0 p^2}{D} \frac{b^4}{16} \frac{\partial^2 e^*}{\partial \xi_2^2} + \\
& \quad + \frac{1}{64} \frac{\partial^6 e^*}{\partial \xi_1^6} - \frac{3\bar{c}}{16} \frac{\partial^4 e^*}{\partial \xi_1^4} - \frac{\rho h_0 p^2}{D} \frac{b^4}{64} \frac{\partial^2 e^*}{\partial \xi_1^2} - \left( \frac{3\bar{c}Kb^4}{16Dh} - \frac{3\bar{c}\rho h_0 p^2 b^4}{16D} \right) e^* = -\frac{3\bar{c}Ab^4}{16Dh}. \quad (3.6)
\end{aligned}$$

Решение уравнения (3.6) представим в виде суммы

$$e^* = e_1^* + e_2^*,$$

где  $e_1^*$  — решение однородного дифференциального уравнения,  $e_2^*$  — частное решение неоднородного уравнения.

Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^6 e_1^*}{\partial \xi_2^6} + \frac{3}{4} \frac{\partial^6 e_1^*}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^4} - 3\bar{c} \frac{\partial^4 e_1^*}{\partial \xi_2^4} + \frac{3}{16} \frac{\partial^6 e_1^*}{\partial \xi_1^4 \partial \xi_2^2} - \frac{3\bar{c}}{2} \frac{\partial^4 e_1^*}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^2} - \frac{\rho h_0 p^2}{D} \frac{b^4}{16} \frac{\partial^2 e_1^*}{\partial \xi_2^2} + \\
& \quad + \frac{1}{64} \frac{\partial^6 e_1^*}{\partial \xi_1^6} - \frac{3\bar{c}}{16} \frac{\partial^4 e_1^*}{\partial \xi_1^4} - \frac{\rho h_0 p^2}{D} \frac{b^4}{64} \frac{\partial^2 e_1^*}{\partial \xi_1^2} - \left( \frac{3\bar{c}Kb^4}{16Dh} - \frac{3\bar{c}\rho h_0 p^2 b^4}{16D} \right) e_1^* = 0. \quad (3.7)
\end{aligned}$$

Его общее решение ищем в виде

$$e_1^*(\xi_1, \xi_2) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(\xi_2) \sin(\pi m \xi_1). \quad (3.8)$$

Подставим (3.8) в (3.7)

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left( Y_m^{VI} - \left( \frac{3\pi^2 m^2}{4} + 3\bar{c} \right) Y_m^{IV} + \left( \frac{3\pi^4 m^4}{16} + \frac{3\bar{c}\pi^2 m^2}{2} - \frac{\rho h_0 p^2 b^4}{16D} \right) Y_m^{II} - \right. \\ \left. - \left( \frac{\pi^6 m^6}{64} + \frac{3\bar{c}\pi^4 m^4}{16} - \frac{\rho h_0 p^2 \pi^2 m^2 b^4}{64D} + \frac{3\bar{c}Kb^4}{16Dh} - \frac{3\bar{c}\rho h_0 p^2 b^4}{16D} \right) Y_m \right) \sin(\pi m \xi_1) = 0.$$

Получили систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$Y_m^{VI} - \left( \frac{3\pi^2 m^2}{4} + 3\bar{c} \right) Y_m^{IV} + \left( \frac{3\pi^4 m^4}{16} + \frac{3\bar{c}\pi^2 m^2}{2} - \frac{\rho h_0 p^2 b^4}{16D} \right) Y_m^{II} - \\ - \left( \frac{\pi^6 m^6}{64} + \frac{3\bar{c}\pi^4 m^4}{16} - \frac{\rho h_0 p^2 \pi^2 m^2 b^4}{64D} + \frac{3\bar{c}Kb^4}{16Dh} - \frac{3\bar{c}\rho h_0 p^2 b^4}{16D} \right) Y_m = 0. \quad (3.9)$$

Решения (3.9) имеют вид

$$Y_m(\xi_2) = c_{1m} \operatorname{ch}(\lambda_m \xi_2) + c_{2m} \operatorname{ch}(\alpha_m \xi_2) \cos(\beta_m \xi_2) + c_{3m} \operatorname{sh}(\alpha_m \xi_2) \sin(\beta_m \xi_2),$$

где  $c_{im}$  — неизвестные постоянные, подлежащие определению,  $\lambda_m$  — вещественный корень характеристического уравнения,  $\alpha_m$  и  $\beta_m$  — вещественная и мнимая части комплексных корней.

Частное решение неоднородного уравнения (3.6) разложим в ряд Фурье по  $\sin(\pi m \xi_1)$

$$e_2^*(\xi_1, \xi_2) = \frac{4A}{\pi(K - \rho h_0 h p^2)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin(\pi m \xi_1) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\xi_2) \sin(\pi m \xi_1).$$

Таким образом, общее решение уравнения (3.6) имеет вид

$$e^*(\xi_1, \xi_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \left( c_{1m} \operatorname{ch}(\lambda_m \xi_2) + c_{2m} \operatorname{ch}(\alpha_m \xi_2) \cos(\beta_m \xi_2) + \right. \\ \left. + c_{3m} \operatorname{sh}(\alpha_m \xi_2) \sin(\beta_m \xi_2) + f_m(\xi_2) \right) \sin(\pi m \xi_1).$$

Для определения неизвестных постоянных  $c_{im}$  используем граничные условия

$$Y_m = 0, \quad \frac{d^2 Y_m}{d\xi_2^2} = 0, \quad \frac{d^4 Y_m}{d\xi_2^4} = 0, \quad \xi_2 = 1. \quad (3.10)$$



Неизвестные постоянные  $c_{im}$  имеют следующий вид

$$c_{1m} = -\frac{2f_m e^{\lambda_m} (\alpha_m^4 + 2\alpha_m^2 \beta_m^2 + \beta_m^4)}{(1 + e^{2\lambda_m}) B_m},$$

$$c_{2m} = \frac{\lambda_m^2 e^{\alpha_m} f_m}{\alpha_m \beta_m B_m C_m} \left( 2\alpha_m \beta_m \cos \beta_m (1 + e^{2\alpha_m}) (2\alpha_m^2 - \lambda_m^2 - 2\beta_m^2) + \right. \\ \left. + \sin \beta_m (1 - e^{2\alpha_m}) (6\alpha_m^2 \beta_m^2 + \alpha_m^2 \lambda_m^2 - \beta_m^2 \lambda_m^2 - \alpha_m^4 - \beta_m^4) \right),$$

$$c_{3m} = -\frac{\lambda_m^2 e^{\alpha_m} f_m}{\alpha_m \beta_m B_m C_m} (\cos \beta_m (1 + e^{2\alpha_m}) (\alpha_m^4 + \beta_m^4 + \beta_m^2 \lambda_m^2 - \\ - 6\beta_m^2 \alpha_m^2 - \alpha_m^2 \lambda_m^2) + 2\alpha_m \beta_m \sin \beta_m (e^{2\alpha_m} - 1) (\lambda_m^2 - 2\alpha_m^2 + 2\beta_m^2)),$$

где

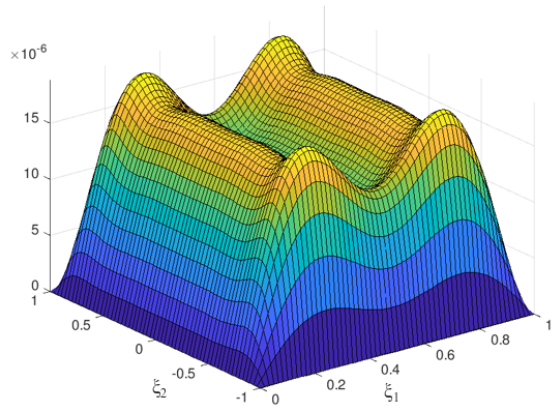
$$B_m = \alpha_m^4 + \beta_m^4 + \lambda_m^4 + 2\beta_m^2 \lambda_m^2 + 2\beta_m^2 \alpha_m^2 - 2\alpha_m^2 \lambda_m^2, \\ C_m = 1 + e^{4\alpha_m} + 2e^{2\alpha_m} \cos 2\beta_m.$$

Функция прогиба  $w^*$  имеет вид

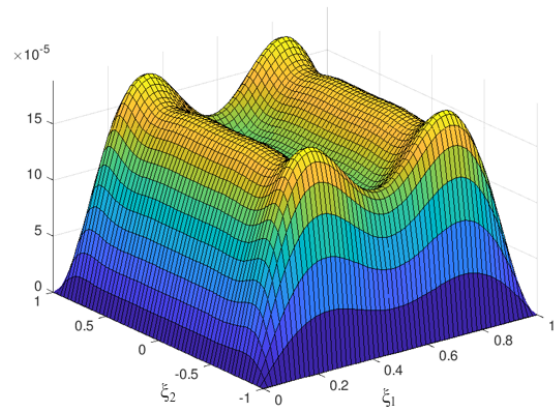
$$w^* = h e^* - \frac{h a^2}{12\bar{c}} \left( \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 e^*}{\partial \xi_1^2} + \frac{4}{b^2} \frac{\partial^2 e^*}{\partial \xi_2^2} \right).$$

### §3. Расчеты прогибов металлической пластины

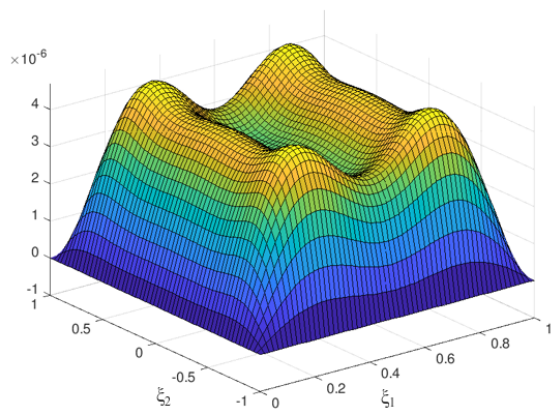
На рис. 3.2 представлены графики прогибов металлической пластины при следующих параметрах:  $K = 25 \cdot 10^3$  кг/см<sup>2</sup>,  $h_0 = 1$  см,  $a = 10$  см,  $b = 10$  см,  $E_0 = 2,1 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>,  $\nu_0 = 0,3$ ,  $G = 10$  кг/см<sup>2</sup>,  $k = 1,61$ ,  $\rho = 1,2 \cdot 10^{-3}$  кг/см<sup>3</sup>,  $p = 500$  с<sup>-1</sup>.



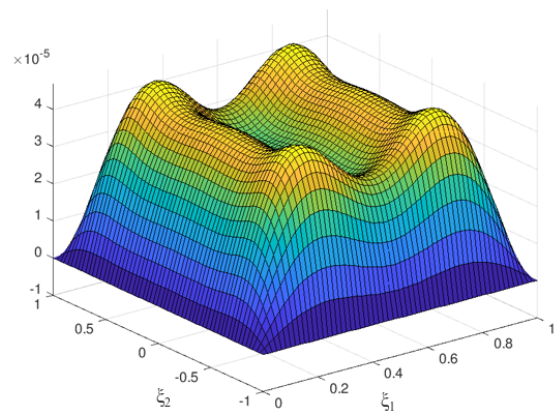
а)  $A = 1 \text{ кг/см}^2, h = 1 \text{ см}$



б)  $A = 10 \text{ кг/см}^2, h = 1 \text{ см}$



в)  $A = 1 \text{ кг/см}^2, h = 2 \text{ см}$



г)  $A = 10 \text{ кг/см}^2, h = 2 \text{ см}$

Рис. 3.2: Прогиб металлической пластины при динамической нагрузке.

# Глава 4. Деформация трёхслойной резинометаллической пластины при действии динамической нагрузки

## §1. Постановка задачи

Рассматриваются 2  
прямоугольные металли-  
ческие пластины толщи-  
ной  $h_0$ , между которыми  
помещён упругий эла-  
стомерный слой высо-  
той  $h$ , длиной и шири-  
ной  $b$  (рис. 4.1). Верхняя  
металлическая пластина  
подвергается динамической нагрузке вида  $q(t) = A \sin(pt)$ .

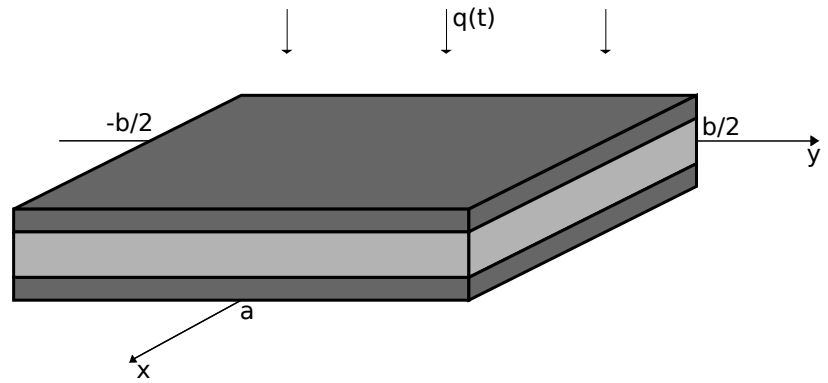


Рис. 4.1: Трёхслойная резинометаллическая пластина

На поверхностях соединения пластин и резинового слоя имеют место условия непрерывности напряжений и перемещений, края резинового слоя свободны и пластины опреты по контуру

$$\begin{aligned}
 w_1(x, y, t) \Big|_{\substack{x=0, \\ x=a}} &= 0, & w_1(x, y, t) \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} &= 0, \\
 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}(x, y, t) \Big|_{\substack{x=0, \\ x=a}} &= 0, & \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}(x, y, t) \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} &= 0, \\
 w_2(x, y, t) \Big|_{\substack{x=0, \\ x=a}} &= 0, & w_2(x, y, t) \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} &= 0, \\
 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}(x, y, t) \Big|_{\substack{x=0, \\ x=a}} &= 0, & \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}(x, y, t) \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} &= 0.
 \end{aligned}$$

Система уравнений имеет вид

$$D\left(\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4}\right) + \rho h_0 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = q(t) - Ke(x, y, t),$$

$$D\left(\frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_2}{\partial y^4}\right) + \rho h_0 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = Ke,$$

$$a^2\left(\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial y^2}\right) - 12\bar{c}e = \frac{12\bar{c}}{h}(w_1 - w_2).$$

## §2. Решение задачи

Пусть

$$w_1(x, y, t) = w_1^*(x, y) \sin(pt),$$

$$w_2(x, y, t) = w_2^*(x, y) \sin(pt),$$

$$e(x, y, t) = e^*(x, y) \sin(pt),$$

Получаем систему из трёх уравнений

$$D\left(\frac{\partial^4 w_1^*}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w_1^*}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_1^*}{\partial y^4}\right) - p^2 \rho h_0 w_1^* = A - Ke^*,$$

$$D\left(\frac{\partial^4 w_2^*}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w_2^*}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_2^*}{\partial y^4}\right) - p^2 \rho h_0 w_2^* = Ke^*,$$

$$a^2\left(\frac{\partial^2 e^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e^*}{\partial y^2}\right) - 12\bar{c}e^* = \frac{12\bar{c}}{h}(w_1^* - w_2^*).$$

Складываем и вычитаем первое и второе уравнения системы друг с другом

$$D\Delta\Delta(w_1^* + w_2^*) - p^2 \rho h_0 (w_1^* + w_2^*) = A,$$

$$D\Delta\Delta(w_1^* - w_2^*) - p^2 \rho h_0 (w_1^* - w_2^*) = A - 2Ke^*.$$

С учётом замены переменных

$$u_1 = w_1^* + w_2^*, \quad u_2 = w_2^* - w_1^*$$

система окончательно примет вид

$$D\left(\frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_1}{\partial y^4}\right) - p^2 \rho h_0 u_1 = A, \quad (4.1)$$

$$D\left(\frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u_2}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_2}{\partial y^4}\right) - p^2 \rho h_0 u_2 = A - 2Ke^*, \quad (4.2)$$

$$a^2\left(\frac{\partial^2 e^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e^*}{\partial y^2}\right) - 12\bar{c}e^* = -\frac{12\bar{c}}{h}u_2. \quad (4.3)$$

Уравнения (4.2) и (4.3) решаются совместно.

Решение (4.1) ищем в виде  $u_1 = u_1^{(1)} + u_1^{(0)}$ , где  $u_1^{(1)}$  — общее решение однородного уравнения,  $u_1^{(0)}$  — частное решение неоднородного, сделав предварительно замену  $x = a\xi_1, y = \frac{b}{2}\xi_2$ .

Решение однородного уравнения представим в виде

$$u_1^{(1)}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{m=1}^{\infty} U_{1m}(\xi_2) \sin(\pi m \xi_1). \quad (4.4)$$

Частное решение (4.1) раскладываем в ряд Фурье по  $\sin(\pi m \xi_1)$

$$u_1^{(0)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4A}{\pi m p^2 \rho h_0} \sin(\pi m \xi_1). \quad (4.5)$$

Выражение (4.4) подставляем в однородное уравнение и получаем дифференциальные уравнения

$$U_{1m}^{IV} - \frac{\pi^2 m^2 b^2}{2a^2} U_{1m}^{II} + \left(\frac{\pi^4 m^4 b^4}{16a^4} - \frac{p^2 \rho h_0 b^4}{16D}\right) U_{1m} = 0. \quad (4.6)$$

Решения (4.6) имеют вид

$$U_{1m} = c_{1m}^{(1)} \operatorname{ch}(\lambda_{1m}^{(1)} \xi_2) + c_{2m}^{(1)} \operatorname{ch}(\lambda_{2m}^{(1)} \xi_2),$$

где

$$\lambda_{1,2m}^{(1)} = \sqrt{\frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4b_2}}{2}},$$

$$b_1 = \frac{\pi^2 m^2 b^2}{2a^2}, \quad b_2 = \frac{\pi^4 m^4 b^4}{16a^4} - \frac{p^2 \rho h_0 b^4}{16D}.$$

$\lambda_{im}^{(1)}$  — корни характеристического уравнения,  $c_{im}^{(1)}$  — неизвестные постоянные, подлежащие определению.

Таким образом решение уравнения (4.1) имеет вид

$$u_1(\xi_1, \xi_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \left( c_{1m}^{(1)} \operatorname{ch}(\lambda_{1m}^{(1)} \xi_2) + c_{2m}^{(1)} \operatorname{ch}(\lambda_{2m}^{(1)} \xi_2) + \frac{4A}{\pi m p^2 \rho h_0} \right) \sin(\pi m \xi_1). \quad (4.7)$$

Решим уравнения (4.2) и (4.3). Из соотношения (4.3) выразим  $u_2$  и подставим в (4.2). С учётом замены переменных  $x = a\xi_1, y = \frac{b}{2}\xi_2$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^6 e^*}{\partial \xi_2^6} + \frac{3b^2}{4a^2} \frac{\partial^6 e^*}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^4} - \frac{3\bar{c}b^2}{a^2} \frac{\partial^4 e^*}{\partial \xi_2^4} + \frac{3b^4}{16a^4} \frac{\partial^6 e^*}{\partial \xi_1^4 \partial \xi_2^2} - \frac{3\bar{c}b^4}{2a^4} \frac{\partial^4 e^*}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^2} - \\ & - \frac{\rho h_0 p^2 b^4}{16D} \frac{\partial^2 e^*}{\partial \xi_2^2} + \frac{b^6}{64a^6} \frac{\partial^6 e^*}{\partial \xi_1^6} - \frac{3\bar{c}b^6}{16a^6} \frac{\partial^4 e^*}{\partial \xi_1^4} - \frac{\rho h_0 p^2 b^6}{64a^2 D} \frac{\partial^2 e^*}{\partial \xi_1^2} - \\ & - \left( \frac{24\bar{c}K}{Dha^2} - \frac{12\bar{c}\rho h_0 p^2}{Da^2} \right) \frac{b^6}{64} e^* = - \frac{3\bar{c}Ab^6}{16Dha^2}. \end{aligned}$$

Для квадратной пластины это уравнение будет иметь вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^6 e^*}{\partial \xi_2^6} + \frac{3}{4} \frac{\partial^6 e^*}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^4} - 4\bar{c} \frac{\partial^4 e^*}{\partial \xi_2^4} + \frac{3}{16} \frac{\partial^6 e^*}{\partial \xi_1^4 \partial \xi_2^2} - \frac{3\bar{c}}{2} \frac{\partial^4 e^*}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^2} - \frac{\rho h_0 p^2 b^4}{D} \frac{\partial^2 e^*}{16 \partial \xi_2^2} + \\ & + \frac{1}{64} \frac{\partial^6 e^*}{\partial \xi_1^6} - \frac{3\bar{c}}{16} \frac{\partial^4 e^*}{\partial \xi_1^4} - \frac{\rho h_0 p^2 b^4}{D} \frac{\partial^2 e^*}{64 \partial \xi_1^2} - \left( \frac{3\bar{c}Kb^4}{8Dh} - \frac{3\bar{c}\rho h_0 p^2 b^4}{16D} \right) e^* = - \frac{3\bar{c}Ab^4}{16Dh}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Решение уравнения (4.8) представим в виде суммы

$$e^* = e_1^* + e_2^*,$$

где  $e_1^*$  — решение однородного дифференциального уравнения,  $e_2^*$  — частное решение неоднородного уравнения (4.8).

Рассмотрим однородное уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^6 e_1^*}{\partial \xi_2^6} + \frac{3}{4} \frac{\partial^6 e_1^*}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^4} - 3\bar{c} \frac{\partial^4 e_1^*}{\partial \xi_2^4} + \frac{3}{16} \frac{\partial^6 e_1^*}{\partial \xi_1^4 \partial \xi_2^2} - \frac{3\bar{c}}{2} \frac{\partial^4 e_1^*}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^2} - \frac{\rho h_0 p^2 b^4}{D} \frac{\partial^2 e_1^*}{16 \partial \xi_2^2} + \\ & + \frac{1}{64} \frac{\partial^6 e_1^*}{\partial \xi_1^6} - \frac{3\bar{c}}{16} \frac{\partial^4 e_1^*}{\partial \xi_1^4} - \frac{\rho h_0 p^2 b^4}{D} \frac{\partial^2 e_1^*}{64 \partial \xi_1^2} - \left( \frac{3\bar{c}Kb^4}{8Dh} - \frac{3\bar{c}\rho h_0 p^2 b^4}{16D} \right) e_1^* = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Его общее решение ищем в виде ряда

$$e_1^* = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(\xi_2) \sin(\pi m \xi_1). \quad (4.10)$$

После подстановки (4.10) в (4.9) получили систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$Y_m^{VI} - \left( \frac{3\pi^2 m^2}{4} + 3\bar{c} \right) Y_m^{IV} + \left( \frac{3\pi^4 m^4}{16} + \frac{3\bar{c}\pi^2 m^2}{2} - \frac{\rho h_0 p^2 b^4}{16D} \right) Y_m^{II} - \left( \frac{\pi^6 m^6}{64} + \frac{3\bar{c}\pi^4 m^4}{16} - \frac{\rho h_0 p^2 \pi^2 m^2 b^4}{64D} + \frac{3\bar{c}Kb^4}{8Dh} - \frac{3\bar{c}\rho h_0 p^2 b^4}{16D} \right) Y_m = 0. \quad (4.11)$$

Решения (4.11) имеют вид

$$Y_m(\xi_2) = c_{1m}^{(2)} \operatorname{ch}(\lambda_m^{(2)} \xi_2) + c_{2m}^{(2)} \operatorname{ch}(\alpha_m^{(2)} \xi_2) \cos(\beta_m^{(2)} \xi_2) + c_{3m}^{(2)} \operatorname{sh}(\alpha_m^{(2)} \xi_2) \sin(\beta_m^{(2)} \xi_2),$$

где  $c_{im}^{(2)}$  — неизвестные постоянные, подлежащие определению,  $\lambda_m^{(2)}$  — вещественные корни характеристического уравнения,  $\alpha_m$  и  $\beta_m$  — вещественные и мнимые части комплексно-сопряжённых корней.

Частное решение неоднородного уравнения (4.8) разложим в ряд Фурье по  $\sin(\pi m \xi_1)$

$$e_2^* = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4A}{\pi m (2K - \rho h_0 h p^2)} \sin(\pi m \xi_1).$$

Следовательно, общее решение уравнения (4.8) имеет вид

$$e^*(\xi_1, \xi_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \left( c_{1m}^{(2)} \operatorname{ch}(\lambda_m^{(2)} \xi_2) + c_{2m}^{(2)} \operatorname{ch}(\alpha_m^{(2)} \xi_2) \cos(\beta_m^{(2)} \xi_2) + c_{3m}^{(2)} \operatorname{sh}(\alpha_m^{(2)} \xi_2) \sin(\beta_m^{(2)} \xi_2) + \frac{4A}{\pi m (2K - \rho h_0 h p^2)} \right) \sin(\pi m \xi_1).$$

Теперь можем определить функцию  $u_2$

$$u_2(\xi_1, \xi_2) = h e^* - \frac{a^2 h}{12\bar{c}} \left( \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 e^*}{\partial \xi_1^2} + \frac{4}{b^2} \frac{\partial^2 e^*}{\partial \xi_2^2} \right).$$

Функции прогибов металлических пластин равны

$$\begin{aligned}
w_1(\xi_1, \xi_2) = & \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left( c_{1m}^{(1)} \operatorname{ch}(\lambda_m^{(1)} \xi_2) + c_{2m}^{(1)} \operatorname{ch}(\alpha_m^{(1)} \xi_2) \sin(\beta_m^{(1)} \xi_2) + \right. \\
& + \frac{4A}{\pi m p^2 \rho h_0} + \left( c_{1m}^{(2)} \operatorname{ch}(\lambda_m^{(2)} \xi_2) + (c_{2m}^{(2)})^2 \operatorname{ch}(\alpha_m \xi_2) \cos(\beta_m \xi_2) + \right. \\
& + c_{3m}^2 \operatorname{sh}(\alpha_m \xi_2) \sin(\beta_m \xi_2) + \left. \frac{4A}{\pi m (2K - \rho h_0 h p^2)} \right) \frac{h(\pi^2 m^2 + 12\bar{c})}{12\bar{c}} + \\
& + \frac{a^2 h}{3\bar{c} b^2} \left( c_{1m}^{(2)} (\lambda_m^{(2)})^2 \operatorname{ch}(\lambda_m^{(2)} \xi_2) + (c_{2m}^{(2)})^2 \alpha_m^2 \operatorname{ch}(\alpha_m \xi_2) \cos(\beta_m \xi_2) - \right. \\
& - (c_{2m}^{(2)})^2 \beta_m^2 \operatorname{ch}(\alpha_m \xi_2) \cos(\beta_m \xi_2) + c_{3m}^2 \alpha_m^2 \operatorname{sh}(\alpha_m \xi_2) \sin(\beta_m \xi_2) - \\
& - c_{3m}^2 \beta_m^2 \operatorname{sh}(\alpha_m \xi_2) \sin(\beta_m \xi_2) + 2c_{3m}^2 \alpha_m \beta_m \operatorname{ch}(\alpha_m \xi_2) \cos(\beta_m \xi_2) - \\
& \left. \left. - 2(c_{2m}^{(2)})^2 \alpha_m \beta_m \operatorname{sh}(\alpha_m \xi_2) \sin(\beta_m \xi_2) \right) \right) \sin(\pi m \xi_1), \tag{4.12}
\end{aligned}$$

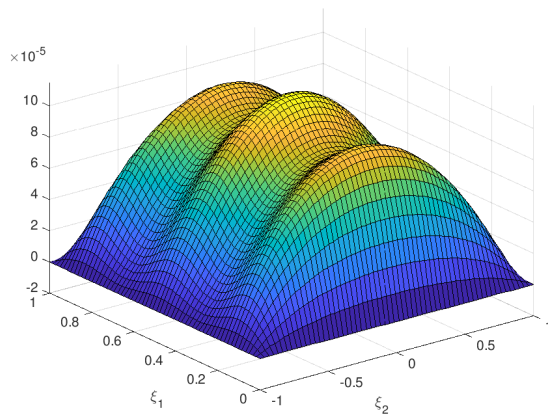
$$\begin{aligned}
w_2(\xi_1, \xi_2) = & \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left( c_{1m}^{(1)} \operatorname{ch}(\lambda_m^{(1)} \xi_2) + c_{2m}^{(1)} \operatorname{ch}(\alpha_m^{(1)} \xi_2) \sin(\beta_m^{(1)} \xi_2) + \right. \\
& + \frac{4A}{\pi m p^2 \rho h_0} + \left( c_{1m}^{(2)} \operatorname{ch}(\lambda_m^{(2)} \xi_2) + (c_{2m}^{(2)})^2 \operatorname{ch}(\alpha_m \xi_2) \cos(\beta_m \xi_2) + \right. \\
& + c_{3m}^2 \operatorname{sh}(\alpha_m \xi_2) \sin(\beta_m \xi_2) + \left. \frac{4A}{\pi m (2K - \rho h_0 h p^2)} \right) \frac{h(\pi^2 m^2 + 12\bar{c})}{12\bar{c}} - \\
& - \frac{a^2 h}{3\bar{c} b^2} \left( c_{1m}^{(2)} (\lambda_m^{(2)})^2 \operatorname{ch}(\lambda_m^{(2)} \xi_2) + (c_{2m}^{(2)})^2 \alpha_m^2 \operatorname{ch}(\alpha_m \xi_2) \cos(\beta_m \xi_2) - \right. \\
& - (c_{2m}^{(2)})^2 \beta_m^2 \operatorname{ch}(\alpha_m \xi_2) \cos(\beta_m \xi_2) + c_{3m}^2 \alpha_m^2 \operatorname{sh}(\alpha_m \xi_2) \sin(\beta_m \xi_2) - \\
& - c_{3m}^2 \beta_m^2 \operatorname{sh}(\alpha_m \xi_2) \sin(\beta_m \xi_2) + 2c_{3m}^2 \alpha_m \beta_m \operatorname{ch}(\alpha_m \xi_2) \cos(\beta_m \xi_2) - \\
& \left. \left. - 2(c_{2m}^{(2)})^2 \alpha_m \beta_m \operatorname{sh}(\alpha_m \xi_2) \sin(\beta_m \xi_2) \right) \right) \sin(\pi m \xi_1). \tag{4.13}
\end{aligned}$$

### §3. Расчеты прогибов металлических пластин

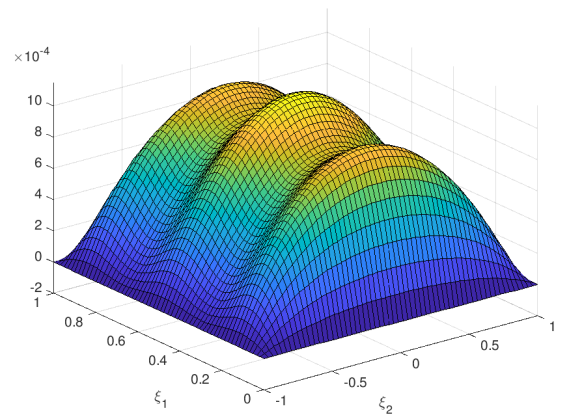
На рис. 4.2 представлены графики прогибов верхней и нижней металлических пластин для резинового слоя толщиной  $h = 1$  см и различной прикладываемой динамической нагрузки.



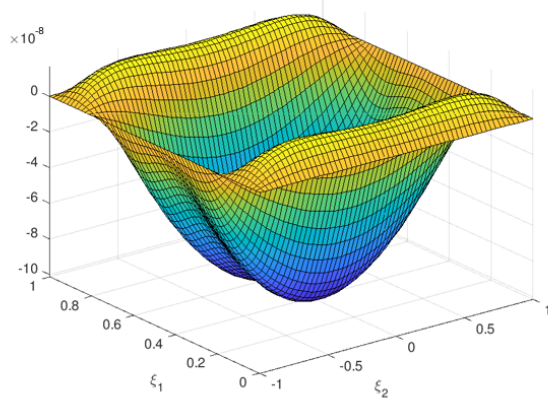
Параметры для расчёта:  $K = 25 \cdot 10^3$  кг/см<sup>2</sup>,  $h_0 = 1$  см,  $a = 10$  см,  $b = 10$  см,  $E_0 = 2,1 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>,  $\nu_0 = 0,3$ ,  $G = 10$  кг/см<sup>2</sup>,  $k = 1,61$ ,  $\rho = 1,2 \cdot 10^{-3}$  кг/см<sup>3</sup>,  $p = 500$  с<sup>-1</sup>.



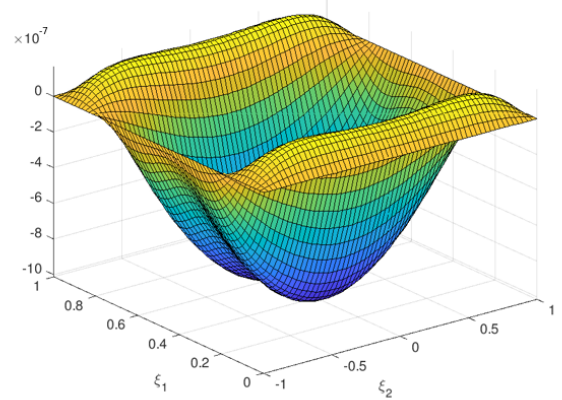
а)  $A = 1$  кг/см<sup>2</sup>



б)  $A = 10$  кг/см<sup>2</sup>



в)  $A = 1$  кг/см<sup>2</sup>



г)  $A = 10$  кг/см<sup>2</sup>

Рис. 4.2: Прогиб верхней и нижней металлических пластин при динамической нагрузке.

## Заключение

Диссертационная работа посвящена исследованию резинометаллических пластин, подверженных постоянной и динамической нагрузкам.

Впервые были получены аналитические решения задач для двухслойной и трехслойной резинометаллических пластин с использованием теории и методов расчета эластомерного слоя и многослойных панелей. Прогиб металлических пластин и реакция эластомерного слоя определялись из решения системы связанных дифференциальных уравнений в частных производных четвертого и второго порядков.

В первой главе рассматривалась металлическая пластина, лежащая на эластомерном слое, на которую действует постоянная нагрузка. Было построено аналитическое решение, построены графики прогиба пластины при различных параметрах задачи. Во второй главе найдено аналитическое решение задачи о пластине, состоящей из двух слоев металла и резинового слоя между ними, при действии постоянной нагрузки на верхний слой. Выполнены расчеты перемещений металлических пластин. В третьей главе и четвертой главах двухслойная и трехслойная пластины были подвержены гармонической динамической нагрузке. Сделан расчет прогибов металлических пластин при разных толщинах слоев и величине нагрузки.

Отметим, зависимость от приложенной нагрузки оказалась значительной, что видно из приведенных графиков. Толщина резинового слоя также существенно уменьшает величину прогиба как для постоянной, так и для динамической нагрузок.

## Литература

- [1] Аскарбеков Р.Н. Использование резинометаллических опор для защиты от вредного воздействия колебаний // Известия Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова. 2015. N 1 (34). С. 106-116.
- [2] Аскарбеков Р.Н. Определение физико-механических параметров резинометаллических опор при сжатии // Известия КГТУ им. И. Раззакова. 2015. Т.36. С. 233–238.
- [3] Гоменюк С.И., Гребенюк С.Н., Бова А.А., Юречко В.З. Исследование напряжённо-деформированного состояния резинометаллической сейсмоопоры // Вестник СГТУ. Серия: Физико-математические науки, 2014. №2. С. 64–81.
- [4] Дуйшеналиев Т.Б., Аскарбеков Р.Н. Моделирование деформаций резинометаллических опор // Известия Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова. 2018. N 2 (46). С. 28–35.
- [5] Дырда В.И., Лисица Н.И., Лисица Н.Н. Создание виброизоляторов для горных машин // Известия высших учебных заведений. Горный журнал. 2014. №5. С. 80–87.
- [6] Мальков В.М. Механика многослойных эластомерных конструкций. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1998. 320 с.
- [7] Мальков В.М., Кабриц С. А., Мансурова С. Е. Математическое моделирование нелинейной деформации эластомерного слоя // Вестник Санкт-Петербургского университета, Сер. 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2011. Вып. 3. С. 56–63.
- [8] Мальков В.М., Колесникова С.С. Построение динамической теории эластомерного слоя вариационным методом Лагранжа // Вестник СПбГУ. 2010. №3. С. 59–68.

- [9] Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск: Высшая школа, 1974. 768 с.
- [10] Мкртычев О.В. Безопасность зданий и сооружений при сейсмических и аварийных воздействиях. М.: МГСУ, 2010. 152 с.
- [11] Мкртычев О.В., Бунов А.А. Верификация конечно-элементных моделей резинометаллических опор в расчетных программных комплексах // Строительство: наука и образование. 2018. Т. 8. Вып. 4. Ст. 4.
- [12] Мондрус В.Л., Сизов Д.К. Решение краевой задачи сжатия многослойного резинометаллического виброизолятора с учётом больших упругих деформаций // Научное обозрение. 2014. №9–2. С. 386–389.
- [13] Прочность, устойчивость, колебания. Справочник / под редакцией И.А. Бригера и Я.Г. Пановко. Т.3. М.: Машиностроение, 1968. 567 с.
- [14] Семенюк А.Е., Малькова Ю.В. Динамика металлической пластины, лежащей на резиновом слое // Процессы управления и устойчивость. 2017. Т.4. № 1. С. 229–233.
- [15] Семенюк А.Е., Малькова Ю.В. Изгиб пластины, лежащей на упругом эластомерном слое // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т.3. № 1. С. 275–279.
- [16] Сизов Д.К. Статический расчёт резинометаллического виброизолятора в современных программных комплексах // Вестник МГСУ. 2008. №1. С. 148–150.
- [17] Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
- [18] Цейтлин А.И., Неустоев Э.А., Пичугин А.А., Сафонов А.А. Разработка конструкции высоконагруженных слоистых резинометаллических виброизоляторов, применяемых для виброзащиты зданий // Научный журнал строительства и архитектуры. 2008. №4. С.48–52.

- [19] Чемодуров В.Т., Канцеров П.М. Расчет многослойной пластины с приведенной жесткостью // Строительство и техногенная безопасность. 2012. №42. С. 18–25.
- [20] Штамм К., Витте Х. Многослойные конструкции. М.: Стройиздат, 1983. 300 с.
- [21] Begaliev U.T., Ormonbekov T.O., Maximov G.A., Pozdnyakov S.G., Derov A.V. Modeling of building vibrations for optimization of thin layered rubber-metal bearings used for protection from seismic hazard // Proceedings of the 2004 International Conference on Noise and Vibration Engineering, ISMA. 2004. P. 737-749.
- [22] Chen K.-S., Hong R.-C. On the Stiffness of Elastomer Bearings for Precision Machine Design // Journal of the Chinese Society of Mechanical Engineers, Transactions of the Chinese Institute of Engineers, Series C/Chung-Kuo Chi Hsueh Kung Ch'eng Hsuebo Pao. 2016. Vol. 37(6). P. 533-546.
- [23] Furuta, T., Furukawa, Y., Kamimura, T., Kanakubo, T. Relationship between shape of rubber-metal laminated bearing and dependency of face pressure and shear strain // Proceedings of the fib Symposium 2003: Concrete Structures in Seismic Regions. 2003, pp. 514-515.
- [24] Gonca V., Polukoshko S. Research of buckling stability of flat-type multilayer rubber-metal package // Engineering for Rural Development. 2014. Vol. 13. P. 341-347.
- [25] Mkrtychev, O.V., Bunov, A.A. A research on Performance Efficiency of Rubber Metal Support Structures // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2017. Vol. 269(1). P. 012067.
- [26] Polukoshko, S., Martinovs, A., Sokolova, S. Aging, fatigue and durability of rubber vibration isolation elements // Vide. Tehnologija. Resursi - Environment, Technology, Resources. 2017. Vol. 3. P. 269–275.