Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики — процессов управления
Кафедра теории управления

КУЧКАРОВ Ильдус Ильдарович

Выпускная квалификационная работа

Функционалы полного типа в задаче анализа устойчивости нелинейных дифференциально-разностных систем и их приложения

Направление 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
Основная образовательная программа ВМ.5517.2017 «Методы прикладной математики и информатики в задачах управления» (магистратура)

Научный руководитель:
Заслуженный работник ВШ РФ,
профессор кафедры теории управления,
доктор физ.-мат. наук, профессор,
Жабко А. П.

Рецензент:
ООО «Персей Групп»,
замдиректора по финансам,
Климова Е. В.

Санкт-Петербург
2019

Содержание

Введение

Многие математические модели в естественных науках, инженерии и экономике описываются с помощью дифференциальных уравнений. Обыкновенные дифференциальные уравнения подразумевают зависимость скорости от текущего состояния объекта и, быть может, момента времени. Однако скорость некоторых процессов зависит не только от текущего, но и от некоторого предыдущего состояния.

Например, известно [2], что обыкновенное дифференциальное уравнение П. Ф. Ферхюльста хорошо описывает динамику популяции простейших микроорганизмов, но не подходит для моделирования численности большинства млекопитающих. Этот процесс описывается уже дифференциально-разностным уравнением, которое предложил Г. Хатчинсон [14], запаздывание в нем учитывает тот факт, что особь полноценно вступает во внутривидовую конкуренцию при достижении репродуктивного возраста.

Для таких математических моделей исследуют устойчивость по Ляпунову [8] положений равновесия. Для этого анализируют, как изменяется траектория движения при малых изменениях начальных данных от положения равновесия. Это позволяет анализировать и прогнозировать естественные процессы, проектировать надежные системы, строить стабилизирующие управления объектами и решать другие задачи.

Часто математическая модель задана системой дифференциальных уравнений, которые затруднительно проинтегрировать аналитически. В таком случае рассматривают некоторое приближение системы в окрестности положения равновесия. Доказано [8], что при выполнении определенных условий свойства устойчивости совпадают для исходной и приближенной систем, поэтому разумно исследовать свойства аппроксимирующих систем.

Наиболее изученным классом таких систем являются линейные системы дифференциальных уравнений. Для них известны способы построения решений и критерии устойчивости. Однако возможна ситуация, когда первое в широком смысле приближение не содержит линейных членов, в этом случае появляются однородные уравнения порядка выше 1.

Для анализа устойчивости в работе используется прямой метод Ляпунова. Рассматриваются два способа обобщения этого метода на дифференциально-разностные системы: подход Н. Н. Красовского [7] и подход Б. С. Разумихина [10]. Красовский предложил рассматривать функционалы, зависящие от участка траектории. Этот подход позволяет получить критерий устойчивости и является более общим, но функционалы исследовать сложнее, чем функции. Разумихин же предложил исследовать функции, но рассматривать их производные вдоль непрерывных функций, удовлетворяющих специальному условию. Этот подход позволяет получить лишь достаточные условия, но для некоторых классов систем осуществляется намного проще. В работе используются оба подхода.

Задержки в моделируемых процессах имеют разную природу, поэтому в дифференциально-разностных уравнениях используются различные запаздывания. Широко распространено постоянное запаздывание, например, оно используется в уже упомянутой модели Хатчинсона. Кроме того, запаздывание может линейно возрастать с течением времени, например, при моделировании перемешивания содержимого смесительного бака [5], движения по кольцевой дороге [17] или работы информационного сервера [4].

В работе исследуется устойчивость одного класса однородных дифференциально-разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием. Работа имеет следующую структуру. После введения идут постановка задачи и обзор литературы по данной теме. Далее следует основная часть, состоящая из двух глав. Первая глава посвящена подходу Красовского. В ней построен функционал Ляпунова-Красовского для одного однородного уравнения с линейно возрастающим запаздыванием, и на его основе получены достаточные условия устойчивости нулевого решения этого уравнения. Во второй главе рассматривается подход Разумихина, и на его основе получены достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения одной однородной системы с линейно возрастающим запаздыванием. Кроме того, во второй главе исследуются робастная устойчивость и система со смешанным запаздыванием. В конце работы представлены выводы и заключение.

Постановка задачи

Рассмотрим систему дифференциально-разностных уравнений с одним запаздыванием

$$\dot{x} = f(t, x(t), x(t - \tau(t))) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x(t) = \psi(t), \quad t \in E_{t_0}, \tag{2}$$

где $x \in \mathbf{R}^n$, $f \in C^0(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$, $\tau > 0$, $\psi(t)$ — векторная кусочно-непрерывная функция, $E_{t_0} = \{t_0\} \cup \{t - \tau(t) < t_0 \mid t \geqslant t_0\}$ — начальное множество. Пусть (1) является системой в отклонениях от положения равновесия, т. е. у системы (1) есть нулевое решение: $f(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$. Для такой системы исследуют поведение решений при ненулевом начальном условии.

Определение 1. *Нулевое решение уравнения (1) устойчиво по Ляпунову, если для любого числа $\varepsilon > 0$ и любого начального момента времени $t_0 > 0$ возможно указать такое число $\delta(\varepsilon, t_0)$, что для любой начальной функции $\psi(t)$, удовлетворяющей условию $\|\psi(t)\| < \delta$ при $t \in E_{t_0}$, для решения уравнения (1) с начальными условиями (2) $x = x(t, t_0, \psi)$ справедливо соотношение $\|x(t, t_0, \psi)\| < \varepsilon$ при всех значениях $t \geqslant t_0$.*

Определение 2. *Нулевое решение уравнения (1) асимптотически устойчиво по Ляпунову, если оно устойчиво по Ляпунову в смысле определения 1, и для всякого $t_0 > 0$ можно указать такое число $\delta_1 > 0$, что для любой начальной функции $\psi(t)$, удовлетворяющей условию $\|\psi(t)\| < \delta_1$ при $t \in E_{t_0}$, для решения уравнения (1) с начальными условиями (2) $x = x(t, t_0, \psi)$ справедливо предельное соотношение $\|x(t, t_0, \psi)\| \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$.*

Будем использовать следующее обозначение для поэлементного возведения вектора в степень

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x_1^\mu \\ x_2^\mu \\ \vdots \\ x_n^\mu \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим систему однородных дифференциально-разностных уравнений с запаздыванием пропорциональным времени, т. е. $\tau(t) = (1-\alpha)t$, $0 < \alpha < 1$,

$$\dot{x} = -Ax^{\mu}(t) + Bx^{\mu}(\alpha t), \quad t \geqslant t_0 > 0 \tag{3}$$

с начальными условиями

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [\alpha t_0, t_0], \quad t_0 > 0,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $A = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$, $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1,n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\varphi(t)$ — кусочно-непрерывная функция, $\mu > 1$ — рациональное число с нечетными числителем и знаменателем.

Задачей данной работы является исследование устойчивости нулевого решения системы (3) с помощью прямого метода Ляпунова.

Обзор литературы

В [8] опубликована диссертация А. М. Ляпунова, где не только введены определения различных видов устойчивости, но и предложены два основных метода ее исследования, которые применяются до сих пор. Первый, который также называют обратным, метод заключается непосредственном анализе поведения решений. Во втором или прямом методе для анализа используются специальные функции Ляпунова. Также в этой работе доказаны теоремы об устойчивости по линейному приближению, которые позволяют в некоторых случаях для исследования устойчивости сводить нелинейную систему к линейной.

В [1] подробно излагается теория линейных дифференциально-разностных уравнений и систем как с постоянными, так и с переменными коэффициентами. Уделено внимание асимптотическому поведению и устойчивости решений. Также показаны результаты о расположении корней квазиполиномов, которые встречаются при анализе устойчивости линейных систем.

В [13] помимо всего прочего описывается метод шагов, который позволяет последовательно получать решение за счет рассмотрения обыкновенного дифференциального уравнения на конечном отрезке. Этот метод и сейчас используется для численного интегрирования систем с запаздыванием. Также в [13] исследуются периодические решения дифференциально-разностных уравнений.

В [6] исследуется устойчивость инвариантных множеств динамический системы в метрическом пространстве. Эти системы являются обобщением других классов моделей, например, к ним можно свести системы обыкновенных дифференциальных уравнений или системы разностных уравнений. На основе этой общей теории получены результаты для устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

В [7] описывается прямой метод Ляпунова, некоторые обобщения и приложения. Важным в контексте данной работы является обобщение функций Ляпунова для дифференциально-разностных систем. Н. Н. Красовский предложил рассматривать вместо функций функционал Ляпунова, который учитывает поведение решения не в одной точке, а на некотором сегменте кривой.

В [10] описывается другой подход к обобщению прямого метода Ляпунова на дифференциальные системы с запаздыванием. Б. С. Разумихин предложил рассматривать производную только на функциях, удовлетворяющих специальному условию, это упростило анализ знакоопределенности производной. Такой подход позволяет получить достаточные условия устойчивости решений.

В [15, 11, 12] доказаны критерии устойчивости дифференциальных линейных систем с постоянным запаздыванием и предложены конструктивные алгоритмы построения квадратичных функционалов полного типа Ляпунова-Красовского для линейных систем с постоянным запаздыванием. Позже в [16] эти результаты обобщены для уравнений нейтрального типа, для уравнений с распределенным запаздыванием, предложен способ построения матрицы Ляпунова. Кроме того, в [9] построен функционал полного типа для линейных систем уже с линейно возрастающим запаздыванием.

С помощью метода Разумихина в работе [4] исследуется устойчивость и неустойчивость однородного дифференциального уравнения с линейно возрастающим запаздыванием и получено достаточное условие асимптотической устойчивости и неустойчивости в зависимости от коэффициентов.

В [5] предложен гибридный метод анализа устойчивости и получены достаточные критерии асимптотической устойчивости и неустойчивости линейной системы с линейно возрастающим запаздыванием.

В [3] линейное дифференциальное уравнение с линейно возрастающим запаздыванием сведено к линейному нестационарному уравнению с постоянным запаздыванием. С помощью преобразования Лапласа получено достаточное условие неустойчивости.

Глава 1. Метод Ляпунова-Красовского

1.1 Описание метода

В этой главе будем рассматривать уравнение

$$\dot{y}(\tau) = t_0 e^{\tau} \left(-a y^{\mu}(\tau) + b y^{\mu}(\tau - h)\right), \quad \tau \geqslant \tau_0 = 0, \tag{4}$$

которое получено из (3) при $n = 1$ после замены времени $\tau = \ln \frac{t}{t_0}$ и переменных $y(\tau) = x(t_0 e^{\tau})$. Заметим, что в этом случае запаздывание постоянно и связано с исходным запаздыванием следующим соотношением $\alpha = e^{-h}$.

Как уже было сказано, в подходе Красовского функционал $v(t, \varphi)$ зависит от участка траектории $\varphi(\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$. Для начала введем понятие положительно-определенного функционала.

Определение 3. *Функционал $v(t, \varphi)$ называется положительно-определенным, если существует $H > 0$ такое, что:*

1. $v(t, \varphi)$ определен для $t \geq 0$, $\varphi \in PC([-h, 0], R^n)$, $\|\varphi\|_h \leq H$,

2. $v(t, 0_h) = 0$, $t \geq 0$

3. Существует положительно определенная функция $v_1(x)$ такая, что $v_1(\varphi(0)) \leq v(t, \varphi)$, $t \geq 0$, $\varphi \in PC([-h, 0], R^n)$, $\|\varphi\|_h \leq H$,

4. Для любого $t_0 \geq 0$ функционал $v(t_0, \varphi)$ непрерывен в точке 0_h.

В [16] доказан критерий устойчивости тривиального решения (4).

Теорема 1. *Нулевое решение* (4) *устойчиво тогда и только тогда, когда существует положительно-определенный функционал $v(t, \varphi)$ такой, что значение $v(t, x_t)$ не возрастает как функция времени t.*

Также для оценки производной функционала нам понадобится обобщенное неравенство Коши-Буняковского.

Теорема 2. *Пусть $y_i \geqslant 0$, $i = \overline{1, n}$, $\sum\limits_{j=1}^{n} w_j = 1$, $w_j > 0$, $j = \overline{1, n}$, тогда*

$$\prod_{j=1}^{n} y_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} w_j y_j^{\frac{1}{w_j}}$$

1.2 Достаточные условия устойчивости

Для (4) построим функционал

$$v(\tau,\varphi)=\varphi^k(0)+kt_0\gamma\int\limits_{-h}^{0}e^{\tau+\theta+h}\varphi^{k-1+\mu}(\theta)d\theta,$$

где k — натуральное, четное число. Этот функционал является положительно определенным.

Рассмотрим значение $v(\tau,y_\tau)$:

$$v(\tau,y_\tau)=y^k(\tau)+kt_0\gamma\int\limits_{-h}^{0}e^{\tau+\theta+h}y^{k-1+\mu}(\tau+\theta)d\theta=$$

$$=y^k(\tau)+kt_0\gamma\int\limits_{\tau-h}^{\tau}e^{t+h}y^{k-1+\mu}(t)dt.$$

Из обобщенного неравенства Коши-Буняковского следует следующая оценка

$$|by^{k-1}(\tau)y^{\mu}(\tau-h)|\leqslant$$
$$\leqslant|b|\left(\frac{k-1}{k-1+\mu}\beta^{\frac{k-1+\mu}{k-1}}y^{k-1+\mu}(\tau)+\frac{\mu}{k-1+\mu}\beta^{-\frac{k-1+\mu}{\mu}}y^{k-1+\mu}(\tau-h)\right),$$

где $\beta>0$ — некоторый параметр.

Тогда

$$\frac{dv(\tau,y_\tau)}{d\tau}\leqslant$$
$$\leqslant kt_0e^{\tau}\left[\left(\gamma e^h-a+|b|\frac{k-1}{k-1+\mu}\beta^{\frac{k-1+\mu}{k-1}}\right)y^{k-1+\mu}(\tau)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\mu}{k-1+\mu}|b|\beta^{-\frac{k-1+\mu}{\mu}}-\gamma\right)y^{k-1+\mu}(\tau-h)\right]$$

Для того, чтобы значение $v(\tau,y_\tau)$ не возрастало достаточно $\frac{dv(\tau,y_\tau)}{d\tau}\leqslant0$. Таким образом, имеем систему неравенств

$$\gamma e^h-a+|b|\frac{k-1}{k-1+\mu}\beta^{\frac{k-1+\mu}{k-1}}\leqslant0,$$

$$\frac{\mu}{k-1+\mu}|b|\beta^{-\frac{k-1+\mu}{\mu}}-\gamma\leqslant 0.$$

Возьмем $\gamma=\frac{\mu}{k-1+\mu}|b|\beta^{-\frac{k-1+\mu}{\mu}}$, тогда второе неравенство обратится в равенство, а первое перепишем в виде

$$\frac{\mu}{k-1+\mu}|b|e^h\beta^{-\frac{k-1+\mu}{\mu}}+|b|\frac{k-1}{k-1+\mu}\beta^{\frac{k-1+\mu}{k-1}}\leqslant a.$$

Минимизируя левую часть по $\beta>0$, получим

$$\left(e^h\right)^{\frac{\mu}{k-1+\mu}}|b|\leqslant a. \tag{5}$$

Таким образом, доказана

Лемма 1. *Если* $|b|\leqslant a\alpha^{\frac{\mu}{k-1+\mu}}$, *то нулевое решение* (4) *устойчиво по Ляпунову.*

Заметим, что k может быть сколь угодно большим. При $a>|b|$ перепишем (5) в виде

$$\log_\alpha\frac{|b|}{a}\geqslant\frac{\mu}{k-1+\mu}.$$

Получим, что при $a>|b|$, можно взять любое четное k, удовлетворяющее условию

$$k\geqslant 1-\mu+\frac{\mu}{\log_\alpha\frac{|b|}{a}},$$

тогда по лемме 1 нулевое решение (4) устойчиво по Ляпунову. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 3. *Если* $|b|<a$, *то нулевое решение* (4) *устойчиво по Ляпунову.*

Замечание 1. *Метод, использованный в доказательстве теоремы, может быть применен для анализа устойчивости нулевого решения уравнения* (4) *с непостоянными параметрами и с неопределенными коэффициентами.*

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t)=-x(t)+0.5x(0.7t). \tag{6}$$

На рис. 1 изображены графики решений для различных начальных функций:

$$\varphi(t) = \pm R$$

$$\varphi(t) = R\sin(kt), \quad k = \overline{1, 10}$$

$$\varphi(t) = \pm R\frac{t - \alpha t_0}{t_0 - \alpha t_0}$$

где $t \in [0.7, 1]$, $\max\limits_{t\in[0.7,1]} |\varphi(t)| = R = 25$. Видно, что для таких начальных функций решение по модулю убывает с ростом t.

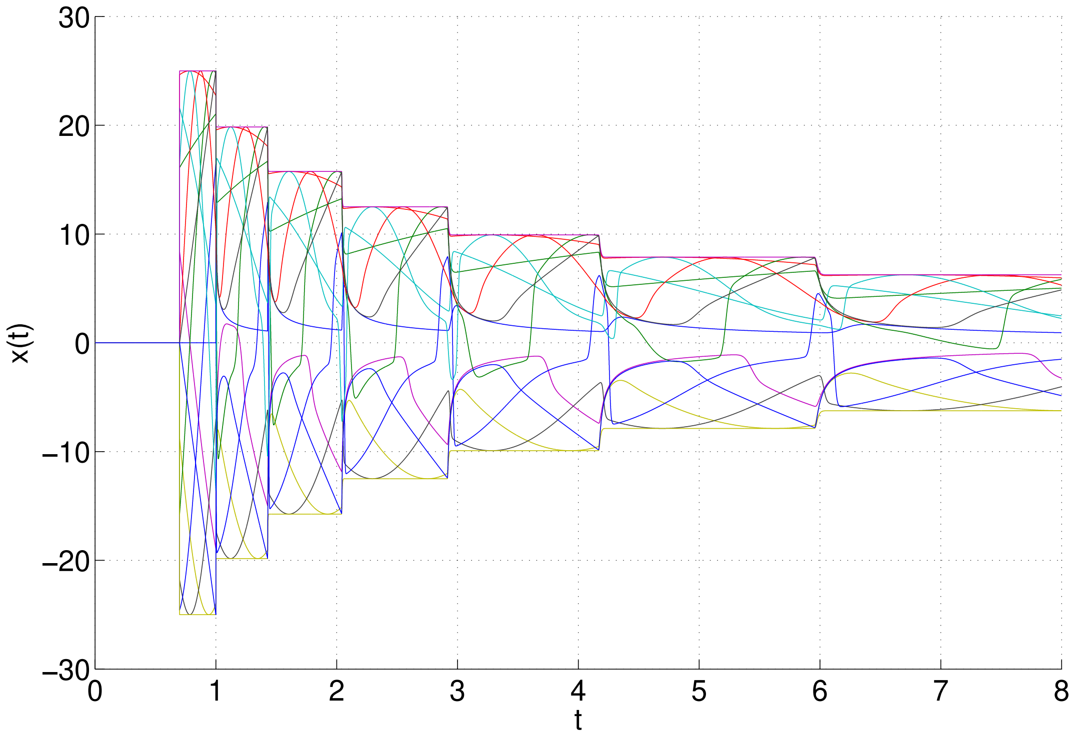

Рис. 1: Графики решений (6) с разными начальными функциями $\varphi(t)$

Глава 2. Метод Ляпунова-Разумихина

В этой главе будем рассматривать систему (3). Пусть $v(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — положительно-определенная функция.

Как уже упоминалось, отличие подхода Разумихина в том, что в нем рассматривается производная функции Ляпунова вдоль системы уравнений на непрерывных функциях, удовлетворяющих специальному условию.

Условием Разумихина в точке t называется

$$v(x(\tau)) \leqslant bv(x(t)), \text{ где } \tau \in [\alpha t, t], b > 1. \tag{7}$$

Тогда справедливы следующие достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения.

Теорема 4. [10] *Если дифференциальные уравнения с последействием (3) таковы, что возможно указать функцию $v(x)$, положительно-определенную в области $||x|| < H$, $t \geqslant t_0$, допускающую бесконечно малый высший предел, такую, что её производная в силу системы (3) является отрицательно-определенным функционалом на непрерывных функциях, удовлетворяющих условию Разумихина, то решение $x = 0$ системы (3) асимптотически устойчиво.*

2.1 Вспомогательные утверждения

Докажем две вспомогательные леммы о том, как преобразуется норма вектора при поэлементном возведении в степень.

Лемма 2. *Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 1$, тогда*

$$\min_{\|x\|^2=\gamma} \left\|x^\beta\right\|^2 = \frac{\gamma^\beta}{n^{\beta-1}}, \quad \max_{\|x\|^2=\gamma} \left\|x^\beta\right\|^2 = \gamma^\beta.$$

Доказательство. Для доказательства рассмотрим задачу оптимизации

$$\begin{cases} \min \left\|x^\beta\right\|^2, \\ \|x\|^2 = \gamma. \end{cases}$$

По методу множителей Лагранжа имеем

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{2\beta} + \lambda \left(\gamma - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) \to \min,$$

$$\begin{cases} x_i \left(\beta x_i^{2\beta-2} - \lambda \right) = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \gamma. \end{cases}$$

Отсюда следует, что у точек экстремума компоненты вектора x должны быть равны за исключением быть может некоторых нулевых.

Пусть у вектора x, у которого $\|x\|^2 = \gamma$, k равных ненулевых компонента, тогда

$$\left\|x^\beta\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^{2\beta} = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{k}} \right)^{2\beta} = \frac{\gamma^\beta}{k^{\beta-1}}.$$

Видно, что чем больше k, тем меньше значение нормы. Отсюда следует утверждение леммы. ∎

Лемма 3. *Если* $\|x\|^2 \leqslant c\|y\|^2$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $c > 1$, $\beta > 1$, *то*

$$\|x^\beta\|^2 \leqslant c^\beta n^{\beta-1} \|y^\beta\|^2.$$

Доказательство. С учетом обозначений

$$\|x\|^2 = \xi, \|y\|^2 = \zeta,$$

имеем

$$\xi \leqslant c\zeta. \tag{8}$$

По лемме 2 имеем

$$\|y^\beta\|^2 \geqslant \frac{\zeta^\beta}{n^{\beta-1}} \text{ или } \zeta^\beta \leqslant n^{\beta-1}\|y^\beta\|^2 \tag{9}$$

$$\|x^\beta\|^2 \leqslant \xi^\beta \tag{10}$$

В итоге получаем

$$\|x^\beta\|^2 \overset{(10)}{\leqslant} \xi^\beta \overset{(8)}{\leqslant} c^\beta \zeta^\beta \overset{(9)}{\leqslant} c^\beta n^{\beta-1} \|y^\beta\|^2,$$

что и требовалось доказать. ∎

2.2 Достаточные условия асимптотической устойчивости

Рассмотрим вспомогательную систему без запаздывания

$$\dot{y}(t) = -Ay^\mu(t) \tag{11}$$

и функционал

$$v(x) = Vx^{\mu+1}, \tag{12}$$

где $V = \operatorname{diag}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $a_i > 0$, $i = \overline{1,n}$. Тогда производная (12) вдоль решений системы (11) равна

$$\left.\frac{dv(y)}{dt}\right|_{(11)} = -(\mu+1)\left(y^\mu(t)\right)^T VAy^\mu(t) = (\mu+1)\left(y^\mu(t)\right)^T Dy^\mu(t),$$

где $D = -VA$ — отрицательно-определенная матрица. Теперь вернемся к системе (3) и рассмотрим производную (12) вдоль решений этой системы

$$\begin{aligned}\left.\frac{dv(x)}{dt}\right|_{(3)} &= -(\mu+1)\left(x^\mu(t)\right)^T VAx^\mu(t) + (\mu+1)\left(x^\mu(t)\right)^T VBx^\mu(\alpha t) = \\ &= \frac{\mu+1}{2}\left(x^\mu(t)\right)^T Dx^\mu(t) + \\ &+ \frac{\mu+1}{2}\left(x^\mu(t) + D^{-1}VBx^\mu(\alpha t)\right)^T D\left(x^\mu(t) + D^{-1}VBx^\mu(\alpha t)\right) - \\ &- \frac{\mu+1}{2}\left(A^{-1}Bx^\mu(\alpha t)\right)^T D\left(A^{-1}Bx^\mu(\alpha t)\right)\end{aligned}$$

Пусть $V = A^{-1} \Rightarrow D = -VA = -E$, где E — единичная матрица. Тогда

$$\left.\frac{dv(x)}{dt}\right|_{(3)} = \frac{\mu+1}{2}\Big(-\left\|x^{\mu}(t)\right\|^2 - \left\|x^{\mu}(t) + D^{-1}VBx^{\mu}(\alpha t)\right\|^2 + \\ + \left\|A^{-1}Bx^{\mu}(\alpha t)\right\|^2\Big) \leqslant \\ \leqslant \frac{\mu+1}{2}\left(-\left\|x^{\mu}(t)\right\|^2 + \left\|A^{-1}B\right\|^2\left\|x^{\mu}(\alpha t)\right\|^2\right).$$

Теперь мы получим условия на коэффициенты системы, при которых производная функционала на решениях, удовлетворяющих условию Разумихина, будет отрицательно-определенной.

Рассмотрим условие (7) для функционала (12)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{\mu+1}(\alpha t) \leqslant b\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{\mu+1}(t),$$

выразим a_i через λ_i

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} x_i^{\mu+1}(\alpha t) \leqslant b\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} x_i^{\mu+1}(t).$$

Введем обозначение $\lambda_{max} = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \lambda_i$, $\lambda_{min} = \min\limits_{i=\overline{1,n}} \lambda_i$. Получим

$$\frac{1}{\lambda_{max}}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\mu+1}(\alpha t) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} x_i^{\mu+1}(\alpha t) \leqslant b\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} x_i^{\mu+1}(t) \leqslant b\frac{1}{\lambda_{min}}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\mu+1}(t).$$

Тогда

$$\left\|x^{\frac{\mu+1}{2}}(\alpha t)\right\|^2 \leqslant \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} b \left\|x^{\frac{\mu+1}{2}}(t)\right\|^2. \tag{13}$$

Мы получили условие для $\left\|x^{\frac{\mu+1}{2}}\right\|^2$, а для оценки производной функционала (12) вдоль решений (3) нам нужно условие для $\left\|x^{\mu}\right\|^2$.

Из (13) и леммы 3 при $\beta = \frac{2\mu}{\mu+1}$ следует, что на решениях системы, удовлетворяющих условию Разумихина выполняется

$$\left\|x^{\mu}(\alpha t)\right\|^2 \leqslant \left(\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} b\right)^{\frac{2\mu}{\mu+1}} n^{\frac{\mu-1}{\mu+1}} \left\|x^{\mu}(t)\right\|^2.$$

Тогда

$$\left.\frac{dv(x)}{dt}\right|_{(3)} \leqslant \frac{\mu+1}{2}\left(-\left\|x^{\mu}(t)\right\|^{2}+\left\|A^{-1}B\right\|^{2}\left\|x^{\mu}(\alpha t)\right\|^{2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{\mu+1}{2}\left\|x^{\mu}(t)\right\|^{2}\left(1-\left\|A^{-1}B\right\|^{2}\left(\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}b\right)^{\frac{2\mu}{\mu+1}} n^{\frac{\mu-1}{\mu+1}}\right)$$

Отсюда для отрицательной определенности $\left.\frac{dv(x)}{dt}\right|_{(3)}$ достаточно

$$\left\|A^{-1}B\right\|^{2}\left(\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}b\right)^{\frac{2\mu}{\mu+1}} n^{\frac{\mu-1}{\mu+1}} < 1.$$

Из условий на b

$$1 < b < \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}\frac{1}{\left(\left\|A^{-1}B\right\|^{2} n^{\frac{\mu-1}{\mu+1}}\right)^{\frac{\mu+1}{2\mu}}}$$

следует условие на коэффициенты системы

$$\left\|A^{-1}B\right\|^{2} < \left(\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}\right)^{\frac{2\mu}{\mu+1}}\frac{1}{n^{\frac{\mu-1}{\mu+1}}}.$$

Таким образом, доказана

Теорема 5. *Если матрицы A и B таковы, что выполняется условие*

$$\left\|A^{-1}B\right\|^{2} < \left(\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}\right)^{\frac{2\mu}{\mu+1}}\frac{1}{n^{\frac{\mu-1}{\mu+1}}}.$$

то нулевое решение системы (3) асимптотически устойчиво.

Пример. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2.5 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 \end{pmatrix} x(0.7t), \quad t \geqslant 1, \\ &x(t) = \begin{pmatrix} 25\frac{t-\alpha t_0}{t_0-\alpha t_0} \\ -25\frac{t-\alpha t_0}{t_0-\alpha t_0} \end{pmatrix}, \quad t \in [0.7, 1]. \end{aligned} \tag{14}$$

На рис. 2 изображен график ее решения. Видно, что решение по модулю убывает с ростом t.

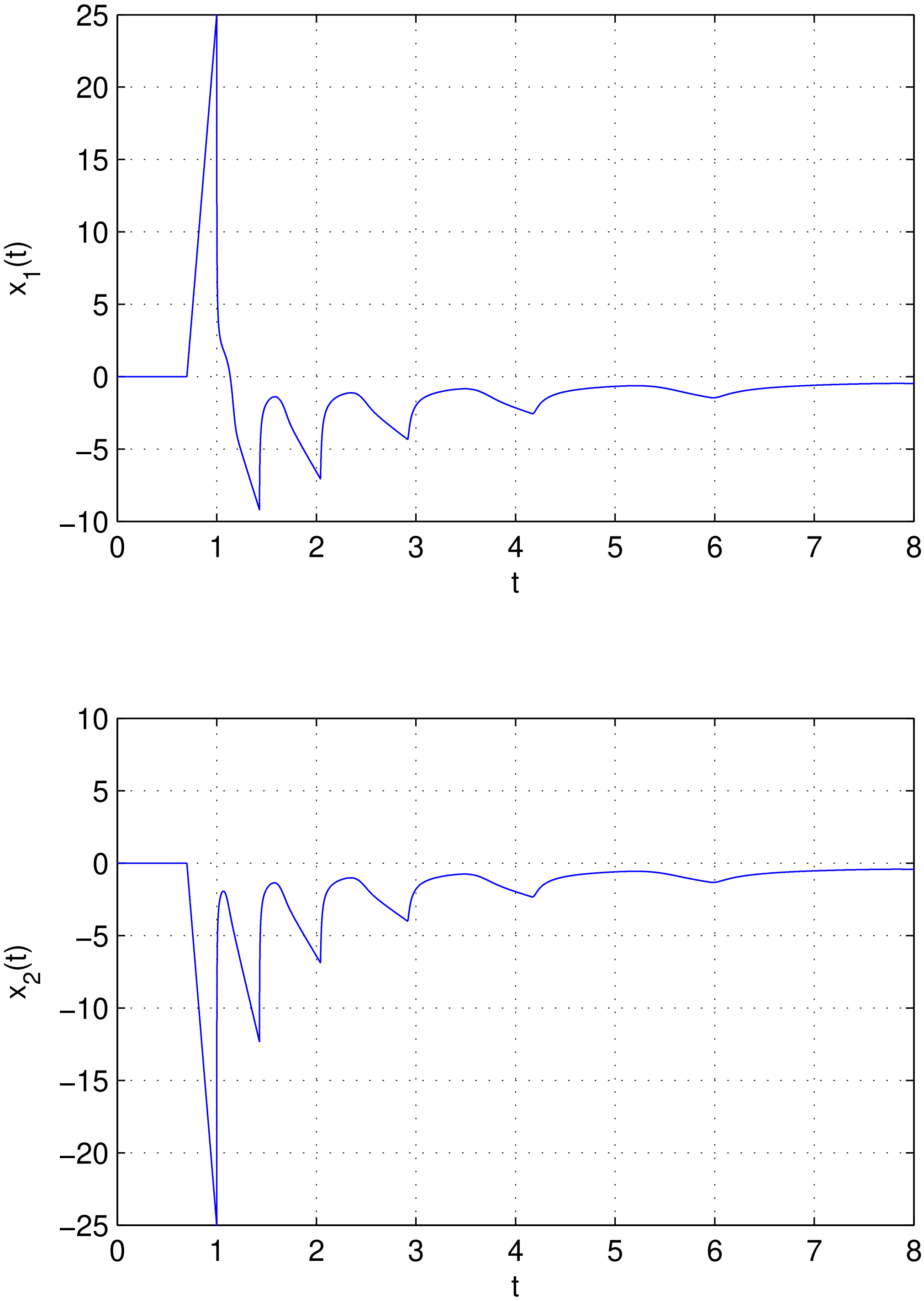

Рис. 2: Графики решений (14)

2.3 Исследование робастности

В этом параграфе будем рассматривать систему, отличающуюся от (3) неизвестными небольшими по норме матрицами Δ_1 и Δ_2

$$\dot{x} = (-A + \Delta_1)x^{\mu}(t) + (B + \Delta_2)x^{\mu}(\alpha t), \quad t \geqslant t_0 > 0 \tag{15}$$

с начальными условиями

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [\alpha t_0, t_0], \quad t_0 > 0,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $A = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$, $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1,n}$, $\Delta_1, \Delta_2, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\varphi(t)$ — кусочно-непрерывная функция, $\|\Delta_1\| = \delta_1$, $\|\Delta_1\| = \delta_2$.

Предположим, что выполнены условия теоремы 6 и нулевое решение (15) асимптотически устойчиво. Будем исследовать насколько большими могут быть δ_1 и δ_2, чтобы нулевое решение системы (15) было также асимптотически устойчивым.

Для этого рассмотрим функцию Ляпунова-Разумихина из предыдущего параграфа

$$v(x) = A^{-1}x^{\mu+1}.$$

Тогда

$$\left.\frac{dv(x)}{dt}\right|_{(3)} \leqslant -\frac{\mu+1}{2}\|x^{\mu}(t)\|^2 \left(1 - \left\|A^{-1}B\right\|^2 \left(\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}b\right)^{\frac{2\mu}{\mu+1}} n^{\frac{\mu-1}{\mu+1}}\right) \\ + (\mu+1)\left(\|A^{-1}\Delta_1\|\,\|x^{\mu}(t)\|^2 + \|A^{-1}\Delta_2\|\,\|x^{\mu}(t)\|\,\|x^{\mu}(\alpha t)\|\right).$$

Мы рассматриваем $x(t)$, для которых выполняется условие Разумихина, тогда

$$\|x^{\mu}(\alpha t)\| \leqslant \left(\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}b\right)^{\frac{\mu}{\mu+1}} n^{\frac{\mu-1}{2(\mu+1)}} \|x^{\mu}(t)\|.$$

Таким образом,

$$\left.\frac{dv(x)}{dt}\right|_{(3)} \leqslant -\frac{\mu+1}{2}\|x^{\mu}(t)\|^2 \left(1 - \left(\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}b\right)^{\frac{2\mu}{\mu+1}} n^{\frac{\mu-1}{\mu+1}} \left\|A^{-1}B\right\|^2 - \right. \\ \left. - 2\delta_1\|A^{-1}\| - 2\delta_2\left(\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}b\right)^{\frac{\mu}{\mu+1}} n^{\frac{\mu-1}{2(\mu+1)}}\|A^{-1}\|\right).$$

Таким образом значения δ_1 и δ_2 должны удовлетворять условиям из следующей теоремы.

Теорема 6. *Если матрицы A, B, Δ_1 и Δ_2 таковы, что выполняется условие*

$$\left(\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}\right)^{\frac{2\mu}{\mu+1}} n^{\frac{\mu-1}{\mu+1}} \left\|A^{-1}B\right\|^2 + 2\delta_1\|A^{-1}\| + 2\delta_2\left(\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}\right)^{\frac{\mu}{\mu+1}} n^{\frac{\mu-1}{2(\mu+1)}}\|A^{-1}\| < 1,$$

то нулевое решение системы (3) асимптотически устойчиво.

2.4 Случай смешанного запаздывания

В этом параграфе будем рассматривать систему с двумя запаздываниями: постоянным и линейно возрастающим

$$\dot{x} = -A_1x^\mu(t) - A_2x^\mu(t-h) + Bx^\mu(\alpha t), \quad t \geqslant t_0 > 0 \tag{16}$$

с начальными условиями

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [\min(\alpha t_0, t_0 - h), t_0], \quad t_0 > 0,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $A = A_1 + A_2 = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$, $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1,n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\varphi(t)$ — кусочно-непрерывная функция.

Аналогично предыдущему параграфу рассмотрим вспомогательную систему без запаздывания

$$\dot{y}(t) = -(A_1 + A_2)y^\mu(t) \tag{17}$$

и функционал

$$v(x) = A^{-1}x^{\mu+1},$$

где $A = A_1 + A_2$. Тогда

$$\left.\frac{dv(y)}{dt}\right|_{(17)} = -(\mu+1)\left\|y^\mu(t)\right\|^2.$$

Теперь вернемся к системе (16), с учетом вывода в предыдущем параграфе имеем

$$\left.\frac{dv(x)}{dt}\right|_{(16)} = (\mu+1)\left(x^{\mu}(t)\right)^{T} A^{-1}\Big[\left(A_2x^{\mu}(t) - A_2x^{\mu}(t-h)\right) +$$

$$+ \left(-A_1x^{\mu}(t) - A_2x^{\mu}(t) + Bx^{\mu}(\alpha t)\right)\Big] \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{\mu+1}{2}\left\|x^{\mu}(t)\right\|^2\left(1 - \left\|A^{-1}B\right\|^2\left(\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}b\right)^{\frac{2\mu}{\mu+1}} n^{\frac{\mu-1}{\mu+1}}\right) +$$

$$+ (\mu+1)\left(x^{\mu}(t)\right)^{T} A^{-1}A_2\left(x^{\mu}(t) - x^{\mu}(t-h)\right).$$

Оценим второе слагаемое по формуле конечных приращений Лагранжа:

$$(\mu+1)\left(x^{\mu}(t)\right)^{T} A^{-1}A_2\left(x^{\mu}(t) - x^{\mu}(t-h)\right) \leqslant$$

$$\leqslant h\mu(\mu+1)\left\|x^{\mu}(t)\right\|\left\|A^{-1}A_2\right\|\left\|x^{\mu-1}(t+\theta)\right\|\left\|\dot{x}(t+\theta)\right\|,$$

где $\theta \in (-h, 0)$. Заметим, что если выполнено условие Разумихина, то

$$\left\|\dot{x}(t+\theta)\right\| = \left\|-A_1x^{\mu}(t+\theta) - A_2x^{\mu}(t+\theta-h) + Bx^{\mu}(\alpha(t+\theta))\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\|A_1\| + \|A_2\| + \|B\|\right)\left(\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}b\right)^{\frac{\mu}{\mu+1}} n^{\frac{\mu-1}{2(\mu+1)}}\left\|x^{\mu}(t)\right\|$$

и

$$\left\|x^{\mu-1}(t+\theta)\right\| \leqslant \left(\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}b\right)^{\frac{(\mu-1)}{\mu+1}} n^{\frac{\mu-3}{2(\mu+1)}}\left\|x^{\mu-1}(t)\right\|.$$

Тогда

$$(\mu+1)\left(x^{\mu}(t)\right)^{T} A^{-1}A_2\left(x^{\mu}(t) - x^{\mu}(t-h)\right) \leqslant h\mu(\mu+1)\left\|A^{-1}A_2\right\| \times$$

$$\times\left(\|A_1\| + \|A_2\| + \|B\|\right)\left(\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}b\right)^{\frac{2\mu-1}{\mu+1}} n^{\frac{2\mu-4}{2(\mu+1)}}\left\|x^{\mu}(t)\right\|^2\left\|x^{\mu-1}(t)\right\|.$$

Пусть $c_1 = 2h\mu\left\|A^{-1}A_2\right\|\left(\|A_1\| + \|A_2\| + \|B\|\right)$, тогда

$$\left.\frac{dv(x)}{dt}\right|_{(16)} \leqslant -\frac{\mu+1}{2}\left\|x^{\mu}(t)\right\|^2\left(1 - \left\|A^{-1}B\right\|^2\left(\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}b\right)^{\frac{2\mu}{\mu+1}} n^{\frac{\mu-1}{\mu+1}} -\right.$$

$$\left. - c_1\left(\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}b\right)^{\frac{2\mu-1}{\mu+1}} n^{\frac{2\mu-4}{2(\mu+1)}}\left\|x^{\mu-1}(t)\right\|\right).$$

Кроме того, по лемме 2 из условия $\|x(t)\| < H$ следует, что $\|x^{\mu-1}(t)\| < H^{\mu-1}$. Таким образом, достаточным условием является соотношение

$$\left\|A^{-1}B\right\|^2 \left(\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}\right)^{\frac{2\mu}{\mu+1}} n^{\frac{\mu-1}{\mu+1}} + c_1 \left(\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}\right)^{\frac{2\mu-1}{\mu+1}} n^{\frac{2\mu-4}{2(\mu+1)}} H^{\mu-1} < 1.$$

Теорема 7. *Если существует $H > 0$ и матрицы A_1, A_2 и B, постоянное запаздывание h таковы, что выполняется условие*

$$2h\mu \left\|(A_1 + A_2)^{-1}A_2\right\| (\|A_1\| + \|A_2\| + \|B\|) \left(\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}\right)^{\frac{2\mu-1}{\mu+1}} n^{\frac{2\mu-4}{2(\mu+1)}} H^{\mu-1} +$$

$$+ \left\|(A_1 + A_2)^{-1}B\right\|^2 \left(\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}\right)^{\frac{2\mu}{\mu+1}} n^{\frac{\mu-1}{\mu+1}} < 1,$$

то нулевое решение (16) асимптотически устойчиво.

Замечание 2. *Если предположить, что рассматриваемые системы возникают в задаче стабилизации и стабилизирующее управление осуществляется с запаздыванием, то в системе (3) для выполнения достаточного условия мы можем лишь уменьшать по норме матрицу при линейно возрастающем запаздывании B, а в системе (16) — можем, кроме того, увеличивать по норме матрицу A_2, уменьшать постоянное запаздывание h и границу области устойчивости H.*

Замечание 3. *Для выполнения условий теоремы 7 при неизменных матрицах системы (16) можно заметить некоторый компромисс между постоянным запаздыванием h и границей области устойчивости H. Если хотим увеличить допустимое запаздыванием, то нужно уменьшить границу области устойчивости, и наоборот.*

Выводы

В работе применены два метода анализа устойчивости нулевого решения дифференциально-разностных уравнений для изучения одного класса однородных систем.

Полученные достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости согласуются с уже известными результатами и расширяют их. Так для устойчивости уравнения были известны достаточные условия на параметры, но построенный функционал позволяет проводить дальнейшие исследования устойчивости этого уравнения. Для исследованных в данной работе систем нет опубликованных достаточных условий асимптотической устойчивости.

Кроме того, в работе проведен анализ робастности для этого класса систем. Также было введено дополнительно постоянное запаздывание и рассмотрен этот случай.

Заключение

В результате работы получены достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости для некоторых классов систем однородных дифференциальных уравнений с линейно возрастающим запаздыванием.

Также построен функционал, с помощью которого можно анализировать устойчивость нулевого решения одного класса однородных дифференциальных уравнений с линейно возрастающим запаздыванием.

Список литературы

[1] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.

[2] Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. Динамические системы и модели биологии. М: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 400 с.

[3] Гребенщиков Б. Г., Новиков С. И. О неустойчивости системы с линейным запаздыванием, приводимой к сингулярно возмущенной системе // Известия вузов. Математика, 2010. Вып. 2, С. 3–13

[4] Жабко А. П., Чижова О. Н. Анализ устойчивости однородного дифференциально-разностного уравнения с линейным запаздыванием // Вестник СпбГУ, 2015. Сер. 10. Вып. 3. С. 105–115

[5] Жабко А. П., Чижова О. Н. Гибридный метод анализа устойчивости линейных дифференциально-разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием // Вестник ТГУ, 2015. Т. 20. Вып. 4. С. 843–850

[6] Зубов В. И. Устойчивость движения. М.: Высшая школа, 1984. 232 с.

[7] Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: ГИЗ ФИЗМАТЛИТ, 1959. 211 с.

[8] Ляпунов А. М. Общая задача устойчивости движения. Л.: Гостехиздат, 1950. 472 с.

[9] Меденников И. П. Прямой метод анализа устойчивости систем с линейно возрастающим запаздыванием // Вестник СпбГУ, 2014. Сер. 10. Вып. 3. С. 125–140

[10] Разумихин Б. С. Применение метода Ляпунова к задачам устойчивости систем с запаздыванием // АиТ, 1960. Т. 21. Вып. 6. С. 740–748.

[11] Харитонов В. Л. Функционалы Ляпунова с заданной производной. I. Функционалы полного типа // Вестник СпбГу, 2005. Сер. 10. Вып. 1. С. 110-117

[12] Харитонов В. Л. Функционалы Ляпунова с заданной производной. II. Матрицы Ляпунова // Вестник СпбГу, 2005. Сер. 10. Вып. 2. С. 199-207

[13] Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.

[14] Hutchinson G. Circular causal systems in ecology // Annals of the New York Academy of Sciences. 1948. no. 50. p. 221–246.

[15] Kharitonov V. L., Zhabko A. P. Lyapunov-Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems // Automatica, 2003. Vol. 39. P. 15–20.

[16] Kharitonov V. L Time-Delay Systems. Lyapunov Functionals and Matrices, 2013, p. 311

[17] Zhabko A., Chizhova O., Zaranik U. Stability analysis of the linear time delay systems with linearly increasing delay // Cybernetics and Physics, 2016. Vol. 5, №2, P. 67–72