Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет Прикладной математики - процессов управления
Кафедра ТСУЭФА

Саакян Аветик Темиевич

Магистерская диссертация

Моделирование периодической системы лезвийных катодов

Руководитель образовательной программы,
доктор физ.-мат. наук,
профессор Овсянников Д.А.

Научный руководитель,
доктор физ.-мат. наук,
профессор Виноградова Е.М.

Санкт-Петербург

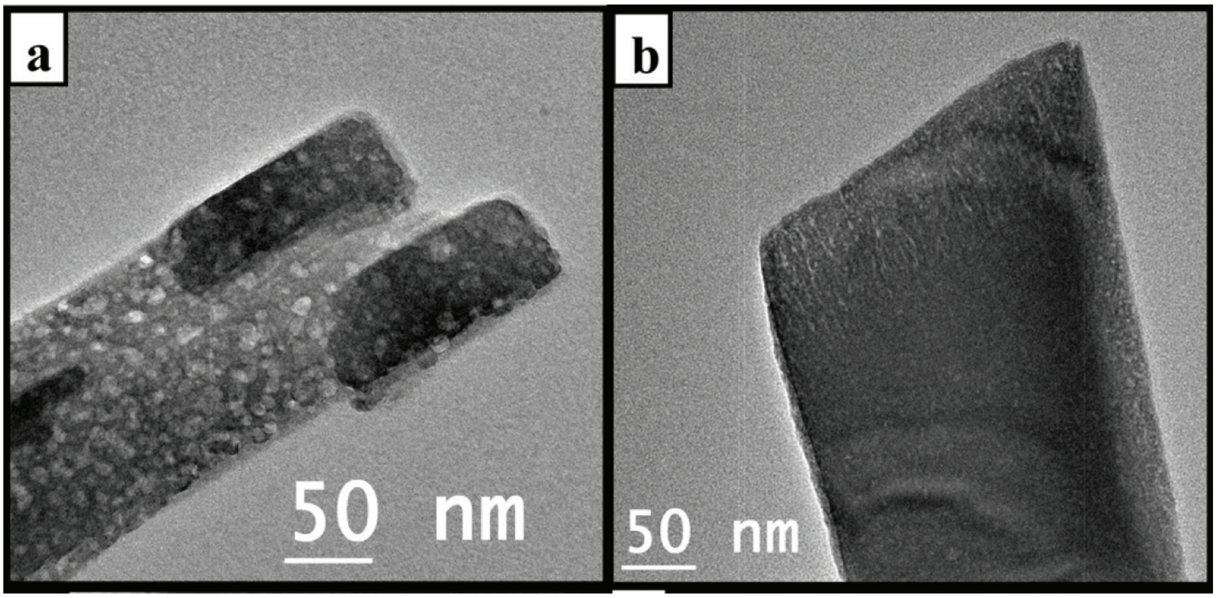
2019

Оглавление

Введение

Данная магистерская диссертация посвящена вычислению распределения электростатического потенциала диодной эмиссионной периодической системы с лезвийными катодами.

Принцип действия эмиттеров основаных на явлении полевой электронной эмиссии, имеют уникальные свойства [1-17].



Лезвийный эмиттер [18]

Интерес к вакуумной нано- и микроэлектронной оптике, в настоящее время, значительно вырос. Их основой являются процессы формирования, транспортировки и фокусировки пучков заряженных частиц электрическими и магнитными полями [1].

Впервые, в 1897 г., полевая эмиссия была обнаружена Р. У. Вудом. Позднее (1928 – 1929 г.) Л. Нордхейм и Р. Фаулер на основе туннельного эффекта [3] дали теоритеческое обьяснение полевой электронной эмиссии, также ими была получена формула, описывающая взаимосвязь плотности автоэлектронного тока j с напряженностью электрического поля E.

В первую очередь, полевая электронная эмиссия является источником электронов применяемых в электронных микроскопах, плоских дисплеях, используется для большого круга устройст и приборов. Он перспективен в рентгеновской и обычной электронной микроскопии, в рентгеновской дефектоскопии, в рентгеновских микроанализаторах и электронно-лучевых приборах. Полевые эмиттеры могут также употребляться в микроэлектронных устройствах и в чувствительных индикаторах изменения напряжения. Металлические полевые эмиттеры используются, когда требуется высокая плотность тока, то есть там, где необходимы большие токи, либо концентрированные электронные пучки [3].

Электронно-вакуумные устройства на основе полевой эмиссии применяются во многих сферах научных исследований [13 - 15], в создании новых более высокоточных приборов и, так же, в технологии производства экономически выгодных устройств микро- и нано электроники. Главным преимуществом таких устройств являются их малые геометрические размеры, монохроматические пучки, малые затраты мощности для эффективной работы. Также, полевые эмиссионные устройства используются в том числе и в световых индикаторах, плоских дисплеях и лампах. Полевой катод, состоящий из различных углеродных материалов, может являться источником электронов.

Получить небольшие значения эмиссионного тока позволяют, как правило, одиночные полевые острия. Увеличивая площадь эмиссии и используя в качестве полевого катода многослойную систему или эмиттер лезвийной формы с острым краем, можно увеличить полный ток в системе.

Глава 1. Моделирование одиночной диодной системы с полевым эмиттером лезвийной формы

В данной главе решается предварительная задача о распределении поля в диодной системе с одиночным катодом лезвийной формы. (Рис. 1).

1.1. Физическая модель диодной системы с полевым эммитером лезвийной формы

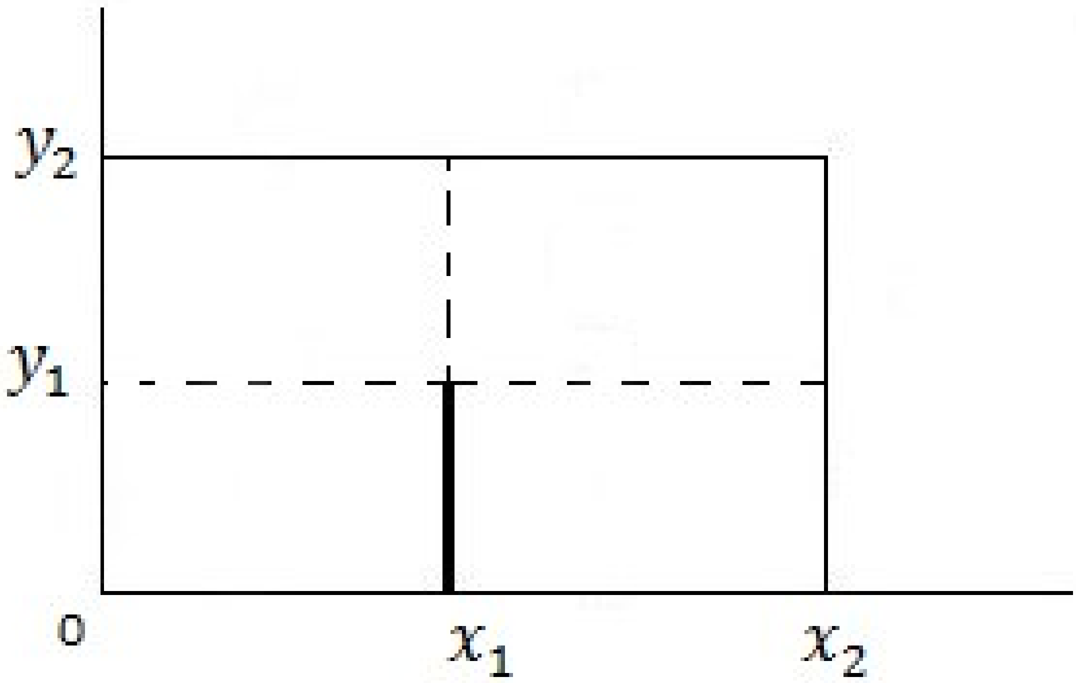


Рис. 1 Схематическое изображение диодной системы с полевым эммитером лезвийной формы

Катод расположен на плоской подложке, анод — плоскость, параллельная подложке.

Параметры задачи:

$x = x_1$, $(0 < y < y_1)$ – поверхность катода лезвийной формы;

$x_1 = \dfrac{1}{2}\, x_2$ - плоскость симметрии задачи;

$y = 0$, $(0 < x < x_2)$ – плоскость, задающая поверхность подложки;

$y = y_2$, $(0 < x < x_2)$ – плоскость, задающая поверхность анода;

$U(0, y) = f_1(y)$, $(0 \le y \le y_2)$ - граничные условия на плоскости $x = 0$;

$U(x_2, y) = f_1(y)$, $(0 \le y \le y_2)$ - граничные условия на плоскости $x = x_2$;

$U(x_1, y) = 0$, $(0 \le y \le y_1)$ - граничные условия на эмиттере;

$U(x, 0) = 0$, $(0 \le x \le x_1)$ - граничные условия на подложке эмиттера;

$U(x, y_2) = f_2(y)$, $(0 \le x \le x_2)$ - граничные условия на аноде;

1.2. Математическая модель диодной системы с полевым эммитером лезвийной формы

Для нахождения распределения электростатического потенциала $U(x, y)$ требуется решить уравнение Лапласа:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

В силу того, что $x = x_1$ - плоскость симметрии, то достаточно рассмотреть область $0 \leq x \leq x_1$, $0 \leq y \leq y_2$.

Граничные условия задачи заданы следующим образом:

$$\begin{aligned}
&U(x, 0) = 0,\ 0 \leq x \leq x_1 \\
&U(x, y_2) = f_2(x),\ 0 \leq x \leq x_1, \\
&U(x_1, y) = 0,\ 0 \leq y \leq y_1, \\
&U(0, y) = f_1(y),\ 0 \leq y \leq y_2, \\
&\left.\frac{\partial U(x, y)}{\partial x}\right|_{x=x_1} = 0,\ y_1 \leq y \leq y_2.
\end{aligned} \tag{2}$$

1.3. Решение граничной задачи для нахождения распределения потенциала

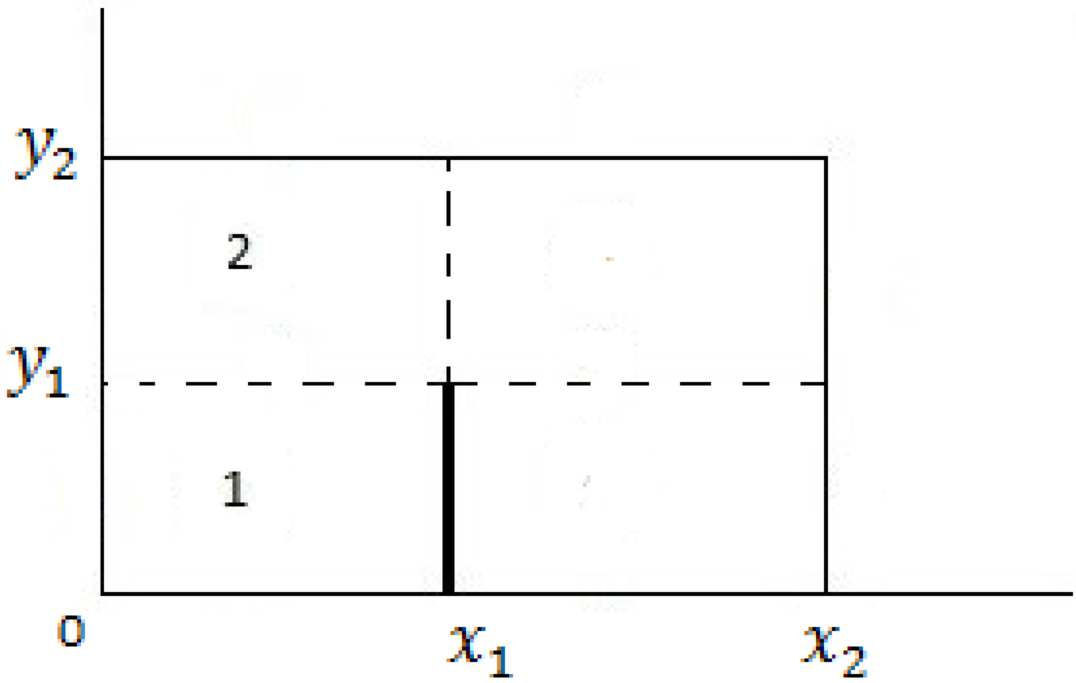


Рис. 2 Схематическое изображение одной ячейки диодной системы с полевым эммитером лезвийной формы

Для решения граничной задачи (1) – (2) разобьем рассматриваемую область на две части и выпишем соответсвующие граничные условия:

Область 1: $0 \le x \le x_1,\ 0 \le y \le y_1;$

$$U_1(0,y) = f_1(y), \quad U_1(x,0) = 0, \quad U_1(x_1,y) = 0.$$

Область 2: $0 \le x \le x_1,\ y_1 \le y \le y_2;$

$$U_2(0,y) = f_1(y), \quad \left.\frac{\partial U_2(x,y)}{\partial x}\right|_{x=x_1} = 0, \quad U_2(x,y_2) = f_2(x).$$

Общее решение уравнения Лапласа в соответствии с методом разделения переменных можно записать в виде:

$$\begin{aligned} U = (Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x})(C\cos\lambda y + D\cos\lambda y) + \\ + (A_1\cos\beta x + B_1\sin\beta x)(C_1 e^{\beta x} + D_1 e^{-\beta x}), \end{aligned} \tag{3}$$

где λ и β - собственные числа, определяемые из однородных граничных условий.

Пусть

$$U(x,y) = \begin{cases} U_1(x,y), & \text{область 1}, \\ U_2(x,y), & \text{область 2}. \end{cases}$$

После разбиения представленной области на две рассматриваемые части, общее решение (3) имеет вид:

$$\begin{aligned} U_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sinh(\lambda_n(x_1 - x))}{\sinh(\lambda_n x_1)} \sin(\lambda_n y) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\sinh(\mu_k y)}{\sinh(\mu_k y_1)} \sin(\mu_k x), \end{aligned} \tag{4}$$

где $\lambda_n = \dfrac{\pi n}{y_1}, \quad \mu_k = \dfrac{\pi k}{x_1}, \quad a_n = \dfrac{2}{y_1}\int\limits_0^{y_1} f_1(y)\sin(\lambda_n y)dy;$

$$\begin{aligned} U_2(x,y) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(d_l \frac{\sinh\big(\nu_l(y_2 - y)\big)}{\sinh(\nu_l(y_2 - y_1)\big)} + p_l \frac{\sinh\big(\nu_l(y - y_1)\big)}{\sinh(\nu_l(y_2 - y_1)\big)} \right) \times \\ \times \sin(\nu_l x) + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \frac{\cosh(\alpha_m(x_1 - x))}{\cosh(\alpha_m x_1)} \sin(\alpha_m(y - y_1)), \end{aligned} \tag{5}$$

где $p_l = \dfrac{2}{x_1} \int\limits_0^{x_1} f_2(x) \sin(\nu_l x) dx, \quad \nu_l = \dfrac{(2l+1)\pi}{2x_1},$

$c_m = \dfrac{2}{y_2 - y_1} \int\limits_{y_1}^{y_2} f_1(y) \sin(\alpha_m (y - y_1)) dy, \quad \alpha_m = \dfrac{\pi m}{y_2 - y_1}.$

1.4. Вывод системы линейный алгебраических уравнений

Рассмотрим задачу (1) – (2) с описанными выше областями и граничными условиями, тогда решение задачи имеет вид (4), (5). Непрерывность потенциала и производной потенциала по нормали к границе раздела областей (1) – (2) выполняется в силу построенного решения:

$$\begin{aligned} &U_1(x, y_1) = U_2(x, y_1), \\ &\left.\frac{\partial U_1(x, y)}{\partial y}\right|_{y=y_1} = \left.\frac{\partial U_2(x, y)}{\partial y}\right|_{y=y_1}. \end{aligned}$$

Построим алгоритм нахождения неизвестных b_k и d_l в общем случае, когда $f_1(y)$ и $f_2(x)$ являются функциями от y и x соответственно.

1. Выпишем условие непрерывности потенциала на границе:

$$U_1(x, y_1) = U_2(x, y_1).$$

$$U_1(x, y_1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sinh(\lambda_n(x_1 - x))}{\sinh(\lambda_n x_1)} \sin(\lambda_n y_1) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\mu_k x),$$

$*)\quad \sin(\lambda_n y_1) = \sin(\pi n) = 0 \Rightarrow U_1(x, y_1) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\mu_k x),$

$$U_2(x, y_1) = \sum_{l=0}^{\infty} d_l \sin(\nu_l x).$$

Приравнивая полученные выражения, получи:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\mu_k x) = \sum_{l=0}^{\infty} d_l \sin(\nu_l x), \tag{6}$$

затем умножим полученное равенство на $\sin(\mu_j x)$ и проинтегрируем обе части на промежутке $[0, x_1]$. Получим интегралы в левой и правой части нашего равенства:

$$\int\limits_0^{x_1} \sin(\mu_k x)\sin(\mu_j x)dx = \begin{cases} \frac{x_1}{2}, & \text{при } k = j, \\ 0, & \text{при } k \neq j; \end{cases} \tag{7}$$

$$I_{j,l}^{(1)} = \int\limits_0^{x_1} \sin(\mu_j x)\sin(\nu_l x)dx = \frac{\mu_j(-1)^{j+l}}{\nu_l^2 - \mu_j^2}. \tag{8}$$

Перепишем равенство (6):

$$b_j \frac{x_1}{2} = \sum_{l=0}^{\infty} d_l I_{j,l}^{(1)}. \tag{9}$$

2. Выпишем условие непрерывности производной потенциала на границе:

$$\left.\frac{\partial U_1(x,y)}{\partial y}\right|_{y=y_1} = \left.\frac{\partial U_2(x,y)}{\partial y}\right|_{y=y_1}.$$

$$\left.\frac{\partial U_1(x,y)}{\partial y}\right|_{y=y_1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n \frac{\sinh(\lambda_n(x_1 - x))}{\sinh(\lambda_n x_1)}\cos(\lambda_n y_1) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} b_k \mu_k \coth(\mu_k y_1)\sin(\mu_k x).$$

$*)\quad \cos(\lambda_n y_1) = \cos(\pi n) = (-1)^n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial U_1(x,y)}{\partial y}\right|_{y=y_1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n\lambda_n \frac{\sinh(\lambda_n(x_1-x))}{\sinh(\lambda_n x_1)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} b_k\mu_k \coth(\mu_k y_1)\sin(\mu_k x);$$

$$\left.\frac{\partial U_2(x,y)}{\partial y}\right|_{y=y_1} = \sum_{l=0}^{\infty}\Big(-\nu_l d_l \coth(\nu_l(y_2-y_1)) +$$

$$+ \frac{p_l\nu_l}{\sinh(\nu_l(y_2-y_1))}\Big)\sin(\nu_l x) + \sum_{m=1}^{\infty} c_m\alpha_m \frac{\cosh(\alpha_m(x_1-x))}{\cosh(\alpha_m x_1)}.$$

В результате, условие непрерывности производной потенциала на границе имеет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n\lambda_n \frac{\sinh(\lambda_n(x_1-x))}{\sinh(\lambda_n x_1)} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\mu_k \coth(\mu_k y_1)\sin(\mu_k x) =$$
$$= \sum_{l=0}^{\infty}\Big(-\nu_l d_l \coth(\nu_l(y_2-y_1)) + \frac{p_l\nu_l}{\sinh(\nu_l(y_2-y_1))}\Big)\times$$
$$\times \sin(\nu_l x) + \sum_{m=1}^{\infty} c_m\alpha_m \frac{\cosh(\alpha_m(x_1-x))}{\cosh(\alpha_m x_1)}, \tag{10}$$

затем умножим полученное равенство на $\sin(\mu_j x)$ и проинтегрируем обе части на промежутке $[0, x_1]$. Получим интегралы в левой и правой части нашего равенства:

$$I^{(2)}_{n,j} = \int_0^{x_1} \sinh(\lambda_n(x_1-x))\sin(\mu_j x)dx =$$
$$= \frac{\mu_j}{\lambda_n^2+\mu_j^2}\sinh(\lambda_n x_1), \tag{11}$$

$$
\begin{aligned}
I^{(3)}_{m,j} &= \int\limits_0^{x_1} \cosh(\alpha_m(x_1 - x)) \sin(\mu_j x) dx = \\
&= \frac{\mu_j}{\alpha_m^2 + \mu_j^2}\Big((-1)^{j+1} + \cosh(\alpha_m x_1)\Big).
\end{aligned} \tag{12}
$$

Перепишем равенство (10), используя формулы (7-8), (11-12):

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n \lambda_n}{\sinh(\lambda_n x_1)} I^{(2)}_{n,j} + \frac{x_1}{2} b_j \mu_j \coth(\mu_j y_1) = \\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{p_l \nu_l}{\sinh(\nu_l(y_2 - y_1))} - \nu_l d_l \coth(\nu_l(y_2 - y_1))\right) I^{(1)}_{j,l} + \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m \alpha_m}{\cosh(\alpha_m x_1)} I^{(3)}_{m,j}.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Выразим из (9) переменные b_j и подставим в (13), получим систему:

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n a_n \lambda_n}{\sinh(\lambda_n x_1)} I^{(2)}_{n,j} + \mu_j \coth(\mu_j y_1) \sum\limits_{l=0}^{\infty} d_l I^{(1)}_{j,l} = \\
= \sum\limits_{l=0}^{\infty}\left(\dfrac{p_l \nu_l}{\sinh(\nu_l(y_2 - y_1))} - \nu_l d_l \coth(\nu_l(y_2 - y_1))\right) I^{(1)}_{j,l} + \\
+ \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{c_m \alpha_m}{\cosh(\alpha_m x_1)} I^{(3)}_{m,j}, \\
b_j = \dfrac{2}{x_1} \sum\limits_{l=0}^{\infty} d_l I^{(1)}_{j,l}.
\end{cases}
$$

Преобразуем полученную систему. Перенесем все слагаемые связанные с переменными d_l влево, а остальные слагаемые перенесем вправо, приходим к системе:

$$\begin{cases} \sum\limits_{l=0}^{\infty} d_l I_{j,l}^{(1)} [\mu_j \coth(\mu_j y_1) + \nu_l \coth(\nu_l (y_2 - y_1))] = \\ = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a_n \lambda_n}{\sinh(\lambda_n x_1)} I_{n,j}^{(2)} + \sum\limits_{l=0}^{\infty} \frac{p_l \nu_l}{\sinh(\nu_l (y_2 - y_1))} I_{j,l}^{(1)} + \\ + \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{c_m \alpha_m}{\cosh(\alpha_m x_1)} I_{m,j}^{(3)}, \\ b_j = \frac{2}{x_1} \sum\limits_{l=0}^{\infty} d_l I_{j,l}^{(1)}. \end{cases} \tag{14}$$

Итак, система (14) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений. Решив систему относительно d_l, найдем коэффициенты b_j, подставив во второе уравнение (14) вычисленные значения d_l.

Глава 2. Моделирование периодической системы эмиттеров лезвийной формы

В силу того, что, как правило, одиночный полевой эмиттер дает очень маленькое значение эмиссионного тока, в реальных системах используются многоэмиттерные катоды. В представленной Главе 2 вычисляется распределение электростатического потенциала во всей области диодной периодической системы на основе полевого катода лезвийной формы и плоского анода (см. Рис. 3).

2.1. Физическая модель диодной периодической системы с лезвийным катодом

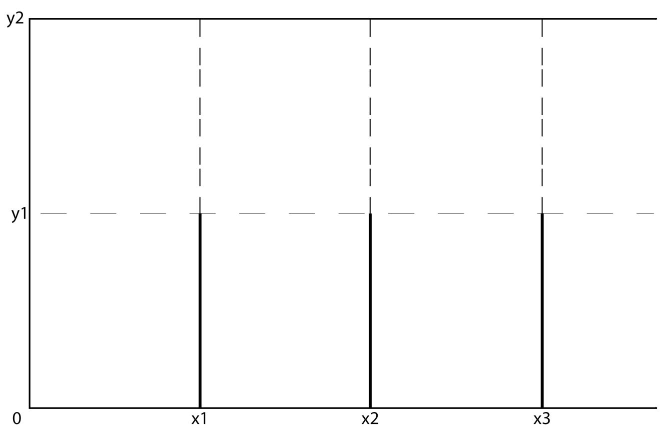


Рис. 3 Схематическое изображение диодной периодической системы с лезвийным катодом

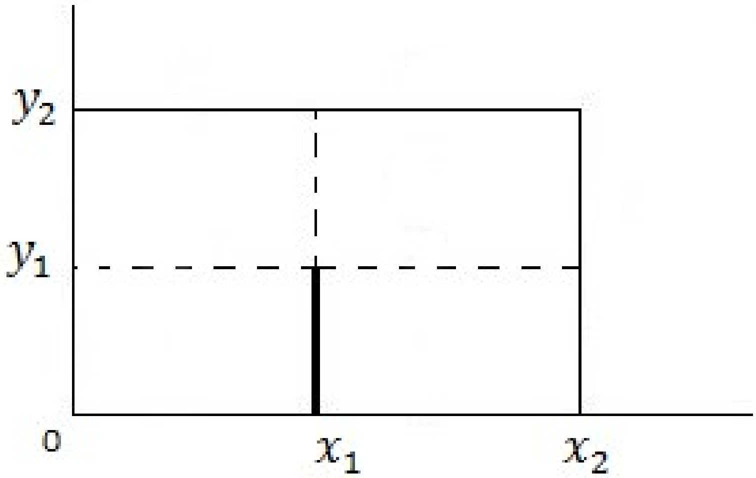


Рис. 4 Схематическое изображение одной ячейки диодной периодической системы с лезвийным катодом

Катод расположен на плоской подложке, анод — плоскость, параллельная подложке.

Параметры задачи:

$x = x_1, \ \ (0 < y < y_1)$ – поверхность катода лезвийной формы;

$x_1 = \dfrac{1}{2}\, x_2$ – плоскость симметрии задачи;

$y = 0, \ \ (0 < x < x_2)$ – плоскость, задающая поверхность подложки;

$y = y_2, \ \ (0 < x < x_2)$ – плоскость, задающая поверхность анода;

$\left.\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \ \ (0 \le y \le y_2)$ – граничные условия на плоскости $x = 0$;

$\left.\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x}\right|_{x=x_2} = 0, \ \ (0 \le y \le y_2)$ – граничные условия на плоскости $x = x_2$;

$U(x_1, y) = 0, \quad (0 \leq y \leq y_1)$ – граничные условия на эмиттере;

$U(x, 0) = 0, \quad (0 \leq x \leq x_1)$ – граничные условия на подложке эмиттера;

$U(x, y_2) = f_2(y), \quad (0 \leq x \leq x_2)$ – граничные условия на аноде;

2.2. Математическая модель диодной периодической системы с лезвийным катодом

Для нахождения распределения электростатического потенциала $U(x, y)$ требуется решить уравнение Лапласа:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0. \tag{15}$$

В силу симметрии задачи по плоскости $x = x_1$, рассмотрим область $0 \leq x \leq x_1$, $0 \leq y \leq y_2$.

Граничные условия задачи заданы следующим образом:

$$\begin{aligned}
&U(x, 0) = 0,\ 0 \leq x \leq x_1\\
&U(x, y_2) = U_0(x),\ 0 \leq x \leq x_1,\\
&U(x_1, y) = 0,\ 0 \leq y \leq y_1,\\
&\left.\frac{\partial U(x, y)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,\ y_1 \leq y \leq y_2,\\
&\left.\frac{\partial U(x, y)}{\partial x}\right|_{x=x_1} = 0,\ y_1 \leq y \leq y_2.
\end{aligned} \tag{16}$$

2.3. Решение граничной задачи для нахождения распределения потенциала

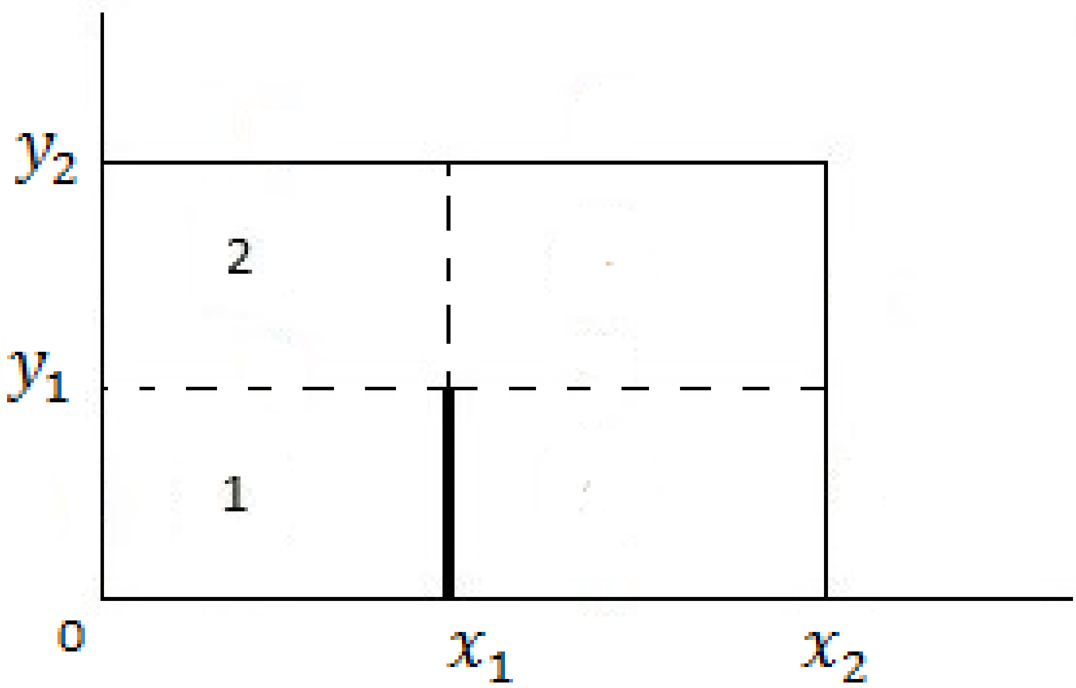


Рис. 5 Схематическое изображение одной ячейки диодной периодической системы с лезвийным катодом

Для решения граничной задачи (15) – (16) разобьем рассматриваемую область на две части и выпишем соответсвующие граничные условия:

Область 1: $0 \le x \le x_1,\ 0 \le y \le y_1;$

$$U_1(x,0) = 0, \quad \left.\frac{\partial U_1(x,y)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad U_1(x_1,y) = 0.$$

Область 2: $0 \le x \le x_1,\ y_1 \le y \le y_2;$

$$U_2(x,y_2) = U_0(x), \quad \left.\frac{\partial U_2(x,y)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial U_2(x,y)}{\partial x}\right|_{x=x_1} = 0.$$

Общее решение уравнения Лапласа в соответствии с методом разделения переменных можно записать в виде:

$$U = (Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x})(C\cos\lambda y + D\cos\lambda y) + \\ + (A_1\cos\beta x + B_1\sin\beta x)(C_1 e^{\beta x} + D_1 e^{-\beta x}), \tag{17}$$

где λ и β - собственные числа, определяемые из однородных граничных условий.

Пусть

$$U(x,y) = \begin{cases} U_1(x,y), & \text{область 1,} \\ U_2(x,y), & \text{область 2.} \end{cases}$$

После разбиения представленной области на две рассматриваемые части, общее решение (17) имеет вид:

$$U_1(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\sinh(\lambda_k y)}{\sinh(\lambda_k y_1)} \cos(\lambda_k x), \tag{18}$$

где $\lambda_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2x_1}$;

$$U_2(x,y) = b_0 \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1} + c_0 \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \frac{\sinh\big(\beta_n (y_2 - y)\big)}{\sinh(\beta_n (y_2 - y_1))} + c_n \frac{\sinh\big(\beta_n (y - y_1)\big)}{\sinh(\beta_n (y_2 - y_1))} \right) \cos(\beta_n x), \tag{19}$$

где $c_0 = \dfrac{1}{x_1} \int\limits_0^{x_1} U_0(x) dx$, $c_n = \dfrac{2}{x_1} \int\limits_0^{x_1} U_0(x) \cos(\beta_n x) dx$, $\beta_n = \dfrac{\pi n}{x_1}$.
Функция $U_0(x)$ (см. граничные условия), имеет вид:

$$U_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(\beta_n x).$$

2.4. Вывод системы линейный алгебраических уравнений

Рассмотрим задачу (15) – (16) с описанными выше областями и граничными условиями, тогда решение задачи имеет вид (18), (19). Непрерывность потенциала и производной потенциала по нормали к границе раздела областей (1) – (2) выполняется в силу построенного решения:

$$\begin{aligned} &U_1(x, y_1) = U_2(x, y_1), \\ &\left.\frac{\partial U_1(x,y)}{\partial y}\right|_{y=y_1} = \left.\frac{\partial U_2(x,y)}{\partial y}\right|_{y=y_1}. \end{aligned}$$

Построим алгоритм нахождения неизвестных a_k, b_n в общем случае, когда $U_0(x)$ является функцией от x и, вообще говоря, $U_0(x) \neq const$ (если $U_0(x) = const \Rightarrow c_0 = U_0,\ c_n = 0,\ \forall n$).

1. Выпишем условие непрерывности потенциала на границе:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(\lambda_k x) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(\beta_n x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos(\beta_n x),$$

затем умножим полученное равенство на $\cos(\lambda_i x)$ и проинтегрируем обе части на промежутке $[0, x_1]$, получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^{x_1} \cos(\lambda_k x)\cos(\lambda_i x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_0^{x_1} \cos(\beta_n x)\cos(\lambda_i x) dx.$$

Из условия ортогональности собственных функций следует:

$$\int\limits_0^{x_1} \cos(\lambda_n x)\cos(\lambda_i x)dx = \begin{cases} \dfrac{x_1}{2}, & \text{при } n = i, \\ 0, & \text{при } n \neq i; \end{cases}$$

равенство примет вид:

$$a_k \frac{x_1}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int\limits_0^{x_1} \cos(\beta_n x)\cos(\lambda_k x)dx.$$

Вычислим полученный интеграл:

$$\int\limits_0^{x_1} \cos(\beta_n x)\cos(\lambda_k x)dx = \Big(\frac{\sin(x(\beta_n - \lambda_k))}{2(\beta_n - \lambda_k)} + \frac{\sin(x(\beta_n + \lambda_k))}{2(\beta_n + \lambda_k)}\Big)\Big|_0^{x_1} =$$

$$= \frac{\sin(x_1(\beta_n - \lambda_k))}{2(\beta_n - \lambda_k)} + \frac{\sin(x_1(\beta_n + \lambda_k))}{2(\beta_n + \lambda_k)} =$$

$$= \frac{(\beta_n + \lambda_k)\sin(x_1(\beta_n - \lambda_k)) + (\beta_n - \lambda_k)\sin(x_1(\beta_n + \lambda_k))}{2(\beta_n^2 - \lambda_k^2)},$$

и определим числитель данного выражения:

$$(\beta_n + \lambda_k)\sin(x_1(\beta_n - \lambda_k)) + (\beta_n - \lambda_k)\sin(x_1(\beta_n + \lambda_k)) =$$

$$= \beta_n\Big(\sin(x_1\beta_n + x_1\lambda_k) + \sin(x_1\beta_n - x_1\lambda_k)\Big) -$$

$$-\lambda_k\Big(\sin(x_1\beta_n + x_1\lambda_k) - \sin(x_1\beta_n - x_1\lambda_k)\Big) =$$

$$= 2\beta_n \sin(x_1\beta_n)\cos(x_1\lambda_k) - 2\lambda_k \cos(x_1\beta_n)\sin(x_1\lambda_k) =$$

$$*)\beta_n = \frac{\pi n}{x_1}: \ \sin(x_1\beta_n) = \sin(\pi n) = 0; \quad \cos(x_1\beta_n) = (-1)^n;$$

$$*)\lambda_k = \frac{(2k+1)\pi}{2x_1}: \ \sin(x_1\lambda_k) = (-1)^k; \ \ \cos(x_1\lambda_k) = 0;$$

$$= -2\lambda_k(-1)^n(-1)^k = 2\lambda_k(-1)^{n+k+1}.$$

Получаем,

$$\int\limits_0^{x_1} \cos(\beta_n x)\cos(\lambda_k x)dx = \frac{\lambda_k(-1)^{n+k+1}}{\beta_n^2 - \lambda_k^2}. \qquad (20)$$

Равенство примет вид:

$$a_k = \frac{2}{x_1}\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{\lambda_k(-1)^{n+k+1}}{\beta_n^2 - \lambda_k^2}$$

2. Выпишем условие непрерывности производной потенциала на границе:

$$\left.\frac{\partial U_1(x,y)}{\partial y}\right|_{y=y_1} = \left.\frac{\partial U_2(x,y)}{\partial y}\right|_{y=y_1}.$$

$$\left.\frac{\partial U_1(x,y)}{\partial y}\right|_{y=y_1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\lambda_k \coth(\lambda_k y_1)\cos(\lambda_k x),$$

$$\left.\frac{\partial U_2(x,y)}{\partial y}\right|_{y=y_1} = \frac{c_0 - b_0}{y_2 - y_1} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(-b_n\beta_n\coth(\beta_n(y_2-y_1)) +$$

$$+\frac{c_n\beta_n}{\sinh(\beta_n(y_2-y_1))}\Big)\cos(\beta_n x),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\lambda_k \coth(\lambda_k y_1)\cos(\lambda_k x) = \frac{c_0 - b_0}{y_2 - y_1} +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(-b_n\beta_n\coth(\beta_n(y_2-y_1)) + \frac{c_n\beta_n}{\sinh(\beta_n(y_2-y_1))}\Big)\cos(\beta_n x),$$

затем умножим полученное равенство на $\cos(\lambda_i x)$ и проинтегрируем обе части на промежутке $[0, x_1]$, получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_k \coth(\lambda_k y_1) \int_0^{x_1} \cos(\lambda_k x)\cos(\lambda_i x) dx =$$

$$= \frac{1}{y_2 - y_1} \int_0^{x_1} (c_0 - b_0)\cos(\lambda_i x) dx -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} b_n \beta_n \coth\big(\beta_n (y_2 - y_1)\big) \int_0^{x_1} \cos(\beta_n x)\cos(\lambda_i x) dx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\sinh(\beta_n (y_2 - y_1)\big)} \int_0^{x_1} c_n \cos(\beta_n x)\cos(\lambda_i x) dx.$$

Применяя условие ортогональности собственных функций, формулу (20) и, вычислив интеграл, приходим к равенству:

$$\int_0^{x_1} (c_0 - b_0)\cos(\lambda_k x) dx = \int_0^{x_1} c_0 \cos(\lambda_k x) dx - b_0 \int_0^{x_1} \cos(\lambda_k x) dx =$$

$$= \int_0^{x_1} c_0 \cos(\lambda_k x) dx - b_0 \frac{\sin(\lambda_k x_1)}{\lambda_k} = \int_0^{x_1} c_0 \cos(\lambda_k x) dx - \frac{b_0 (-1)^k}{\lambda_k}.$$

Пусть $I_{n,k} = \int\limits_0^{x_1} c_n \cos(\beta_n x)\cos(\lambda_k x) dx$, тогда равенство примет вид:

$$a_k \lambda_k \coth(\lambda_k y_1) \frac{x_1}{2} = \frac{1}{y_2 - y_1} \Big(I_{0,k} - \frac{b_0 (-1)^k}{\lambda_k} \Big) -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n\beta_n\lambda_k(-1)^{n+k+1}}{\beta_n^2-\lambda_k^2}\coth\big(\beta_n(y_2-y_1)\big)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n I_{n,k}}{\sinh(\beta_n(y_2-y_1)\big)}.$$

Получили систему линейных алгебраических уравнений относительно переменных $a_k,\ b_n$:

$$\begin{cases} a_k\dfrac{x_1}{2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n\dfrac{\lambda_k(-1)^{n+k+1}}{\beta_n^2-\lambda_k^2}, \\ a_k\lambda_k\coth(\lambda_k y_1)\dfrac{x_1}{2}=\dfrac{1}{y_2-y_1}\Big(I_{0,k}-\dfrac{b_0(-1)^k}{\lambda_k}\Big)- \\ -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n\beta_n\lambda_k(-1)^{n+k+1}}{\beta_n^2-\lambda_k^2}\coth\big(\beta_n(y_2-y_1)\big)+ \\ +\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\beta_n I_{n,k}}{\sinh(\beta_n(y_2-y_1)\big)}. \end{cases} \qquad (21)$$

Преобразуем систему (21). Умножим первое уравнение на $\lambda_k\coth(\lambda_k y_1)$, затем прировняем правые части полученных равенств:

$$\lambda_k\coth(\lambda_k y_1)\sum_{n=0}^{\infty}b_n\frac{\lambda_k(-1)^{n+k+1}}{\beta_n^2-\lambda_k^2}=\frac{1}{y_2-y_1}\Big(I_{0,k}-\frac{b_0(-1)^k}{\lambda_k}\Big)-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n\beta_n\lambda_k(-1)^{n+k+1}}{\beta_n^2-\lambda_k^2}\coth\big(\beta_n(y_2-y_1)\big)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n I_{n,k}}{\sinh(\beta_n(y_2-y_1)\big)};$$

$$\coth(\lambda_k y_1)(-1)^k b_0+$$

$$+\lambda_k\coth(\lambda_k y_1)\sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{\lambda_k(-1)^{n+k+1}}{\beta_n^2-\lambda_k^2}=\frac{1}{y_2-y_1}\Big(I_{0,k}-\frac{b_0(-1)^k}{\lambda_k}\Big)-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n\lambda_k(-1)^{n+k+1}}{\beta_n^2-\lambda_k^2}\beta_n\coth\big(\beta_n(y_2-y_1)\big)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n I_{n,k}}{\sinh(\beta_n(y_2-y_1)\big)};$$

$$\Big(\coth(\lambda_k y_1)(-1)^k + \frac{(-1)^k}{\lambda_k(y_2-y_1)}\Big)b_0+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tfrac{\lambda_k(-1)^{n+k+1}}{\beta_n^2-\lambda_k^2}\Big(\lambda_k\coth(\lambda_k y_1)+\beta_n\coth\big(\beta_n(y_2-y_1)\big)\Big) =$$

$$= \frac{I_{0,k}}{y_2-y_1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n I_{n,k}}{\sinh(\beta_n(y_2-y_1))};$$

$$\begin{cases} \Big(\coth(\lambda_k y_1)(-1)^k + \dfrac{(-1)^k}{\lambda_k(y_2-y_1)}\Big)b_0+ \\ +\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \dfrac{\lambda_k(-1)^{n+k+1}}{\beta_n^2-\lambda_k^2}\Big(\lambda_k\coth(\lambda_k y_1)+ \\ +\beta_n\coth\big(\beta_n(y_2-y_1)\big)\Big) = \\ = \dfrac{I_{0,k}}{y_2-y_1} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\beta_n I_{n,k}}{\sinh(\beta_n(y_2-y_1))}, \\ a_k = \dfrac{2}{x_1}\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n \dfrac{\lambda_k(-1)^{n+k+1}}{\beta_n^2-\lambda_k^2}. \end{cases} \qquad (22)$$

Итак, система (22) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений. Решив систему относительно b_n, найдем коэффициенты a_k, подставив во второе уравнение (22) вычисленные значения b_n.

Рассмотрим случай, когда $U_0(x) = const$: $I_{0,k} = \dfrac{c_0(-1)^k}{\lambda_k}$,

$I_{n,k}=0$. Перепишем систему (22):

$$\begin{cases} \Big(\lambda_k \coth(\lambda_k y_1)+\dfrac{1}{y_2-y_1}\Big) b_0 \dfrac{(-1)^k}{\lambda_k}+ \\ +\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \dfrac{\lambda_k(-1)^{n+k+1}}{\beta_n^2-\lambda_k^2}\Big(\lambda_k \coth(\lambda_k y_1)+\beta_n \coth\big(\beta_n(y_2-y_1)\big)\Big)= \\ =\dfrac{c_0(-1)^k}{\lambda_k(y_2-y_1)}, \\ a_k=\dfrac{2}{x_1}\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n \dfrac{\lambda_k(-1)^{n+k+1}}{\beta_n^2-\lambda_k^2}. \end{cases}$$

Поделим первое равенство на $\lambda_k \coth(\lambda_k y_1)$ и умножим на $(-1)^k$, получим:

$$\begin{cases} \Big(1+\dfrac{1}{\lambda_k(y_2-y_1)}\tanh(\lambda_k y_1)\Big)\dfrac{b_0}{\lambda_k}+ \\ +\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \dfrac{\lambda_k(-1)^{n+1}}{\beta_n^2-\lambda_k^2}\Big(1+\dfrac{\beta_n}{\lambda_k}\dfrac{\coth(\beta_n(y_2-y_1))}{\coth(\lambda_k y_1)}\Big)= \\ =\dfrac{c_0\tanh(\lambda_k y_1)}{\lambda_k^2(y_2-y_1)}, \\ a_k=\dfrac{2}{x_1}\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n \dfrac{\lambda_k(-1)^{n+k+1}}{\beta_n^2-\lambda_k^2}. \end{cases} \tag{23}$$

Схема получения переменных a_k, b_n имеет вид:

$$\{a_k\},\{b_n\}=\begin{cases} \text{система (22)}, \quad \text{при } U_0\neq const, \\ \text{система (23)}, \quad \text{при } U_0=const. \end{cases}$$

Условие непрерывности нормальной составляющей вектора напряженности поля на границе раздела областей и ортогональность собственных функций приводят к СЛАУ относительно неизвестных коэффициентов, входящих в разложения потенциала в виде рядов.

Глава 3. Численные расчеты периодической системы эммитеров лезвийной формы

В главе 3 представленны результаты численных расчетов распределения электростатического потенциала для периодической многоэмиттерной системы (гл. 2).

Для численных расчетов, рассмотрим случай, когда $U_0(x) = const$. Система имеет вид (относительно $b_n,\ a_k$):

$$\begin{cases} \left(1 + \dfrac{1}{\lambda_k(y_2 - y_1)} \tanh(\lambda_k y_1)\right) \dfrac{b_0}{\lambda_k} + \\ + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \dfrac{\lambda_k (-1)^{n+1}}{\beta_n^2 - \lambda_k^2} \left(1 + \dfrac{\beta_n}{\lambda_k} \dfrac{\coth(\beta_n(y_2 - y_1))}{\coth(\lambda_k y_1)}\right) = \\ = \dfrac{c_0 \tanh(\lambda_k y_1)}{\lambda_k^2 (y_2 - y_1)}, \\ a_k = \dfrac{2}{x_1} \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n \dfrac{\lambda_k (-1)^{n+k+1}}{\beta_n^2 - \lambda_k^2}, \end{cases}$$

где коэффициенты вычисляются по формулам:

$$\lambda_k = \frac{(2k+1)\pi}{2x_1}, \quad \beta_n = \frac{\pi n}{x_1}, \quad c_0 = \frac{1}{x_1} \int\limits_0^{x_1} U_0(x) dx.$$

На рисунке 3 представленно распредление электростатического потенциала во всей области одной ячейки периодической системы, при следующих параметрах расчета:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad y_1 = 1; \quad y_2 = 2; \quad U_0(x) = 1000; \quad n, k \in [0, 10].$$

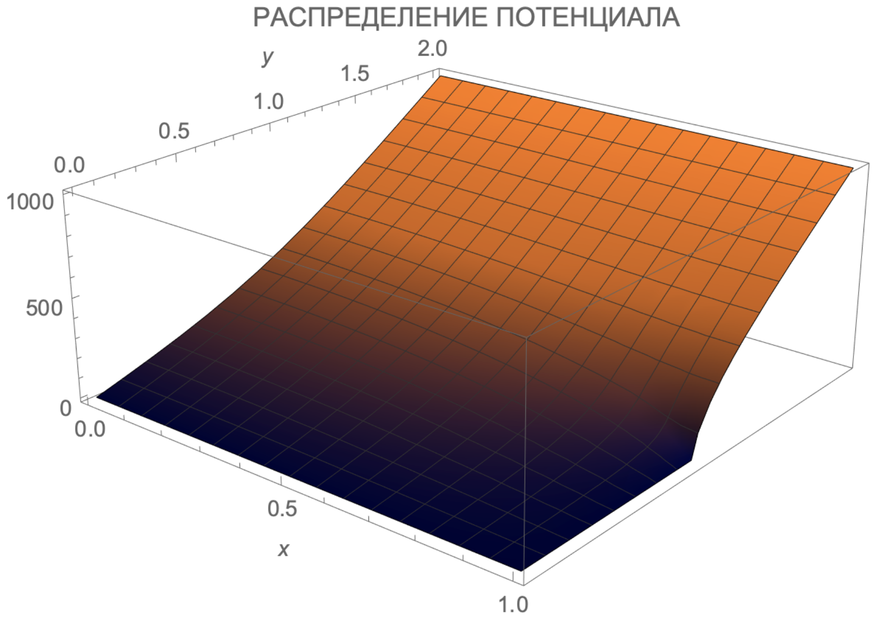


Рис. 3 Распределение электростатического потенциала

На рисунке 4 представлены эквипотенциальные линии в области 1 и области 2 соответственно (при тех же параметрах):

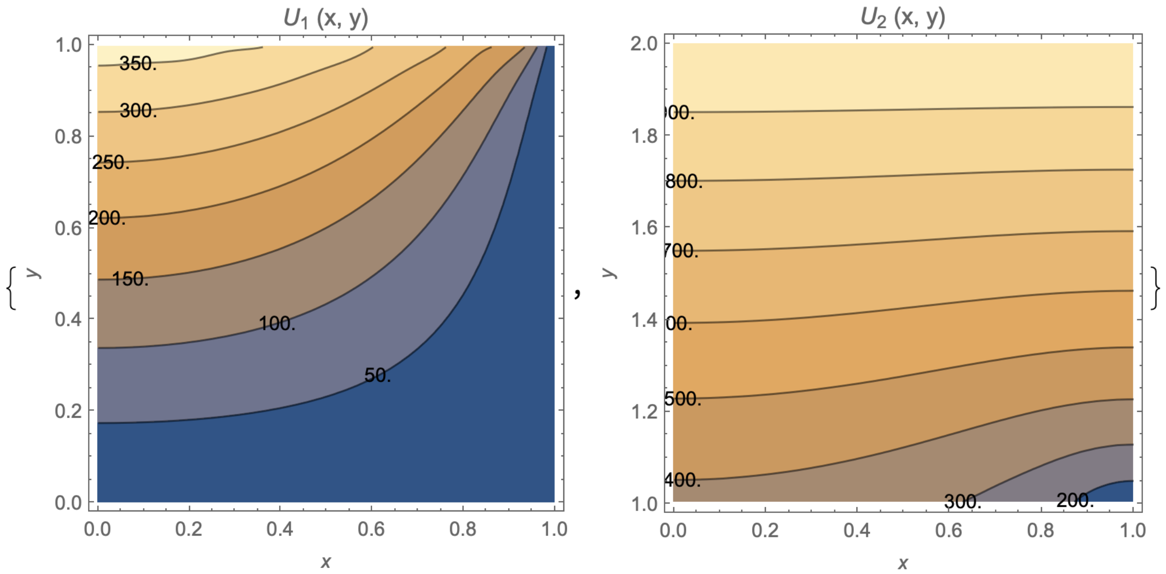


Рис. 4 Эквипотенциальные линии обоих областей

Увеличим точность подсчета, оставив остальные параметры неизменными, то есть варьируем количество n и k:

$$x_1 = 1;\;\; x_2 = 2;\;\; y_1 = 1;\;\; y_2 = 2;\;\; U_0(x) = 1000;\;\; n, k \in [0, 100].$$

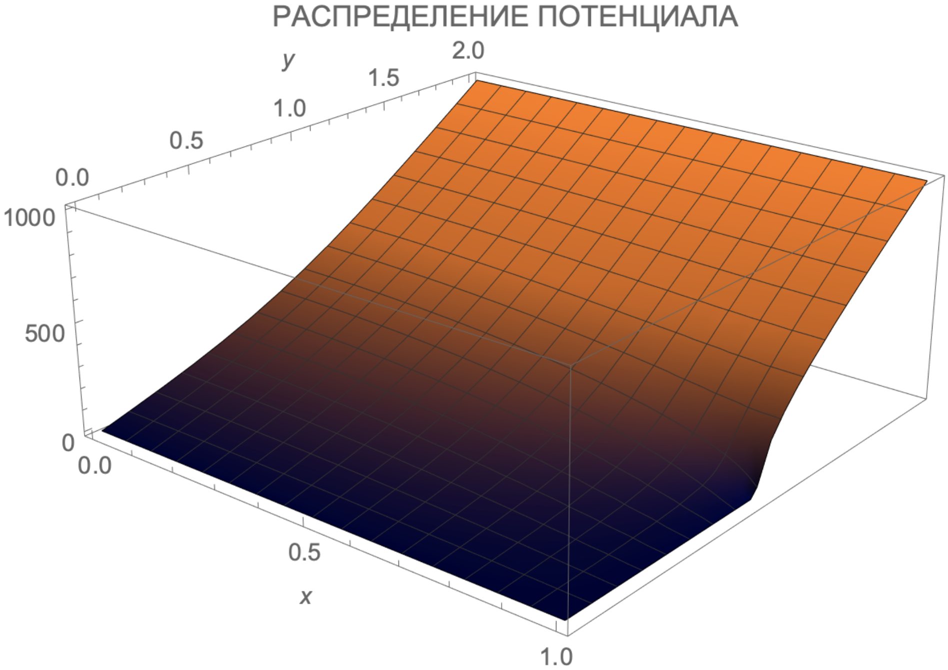


Рис. 5 Распределение электростатического потенциала

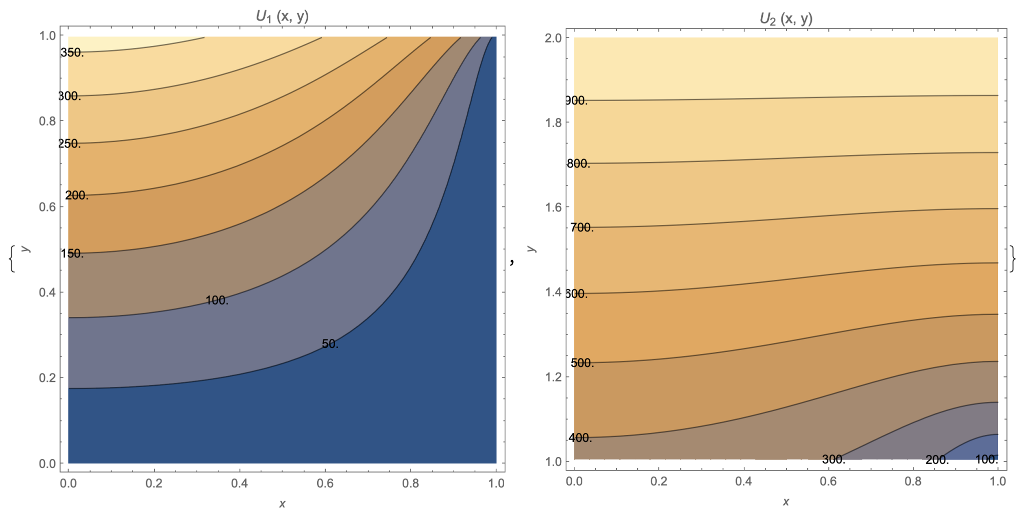


Рис. 6 Эквипотенциальные линии обоих областей

Увеличим значение x_1 и x_2, при этом не изменяя оставшиеся параметры:

$$x_1 = 25;\ \ x_2 = 50;\ \ y_1 = 1;\ \ y_2 = 2;\ \ U_0(x) = 1000;\ \ n, k \in [0, 100].$$

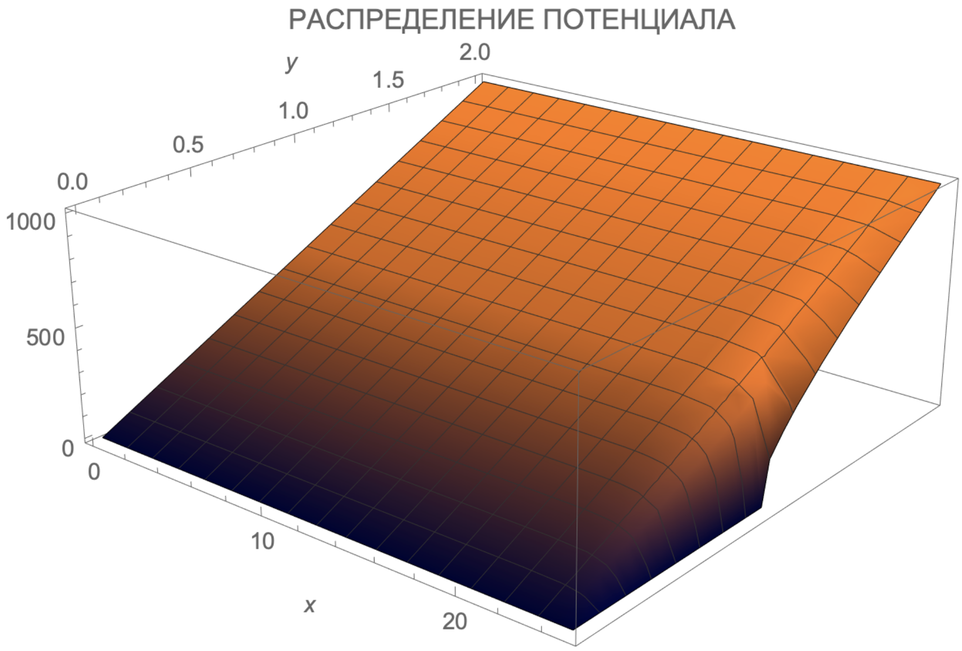


Рис. 7 Распределение электростатического потенциала

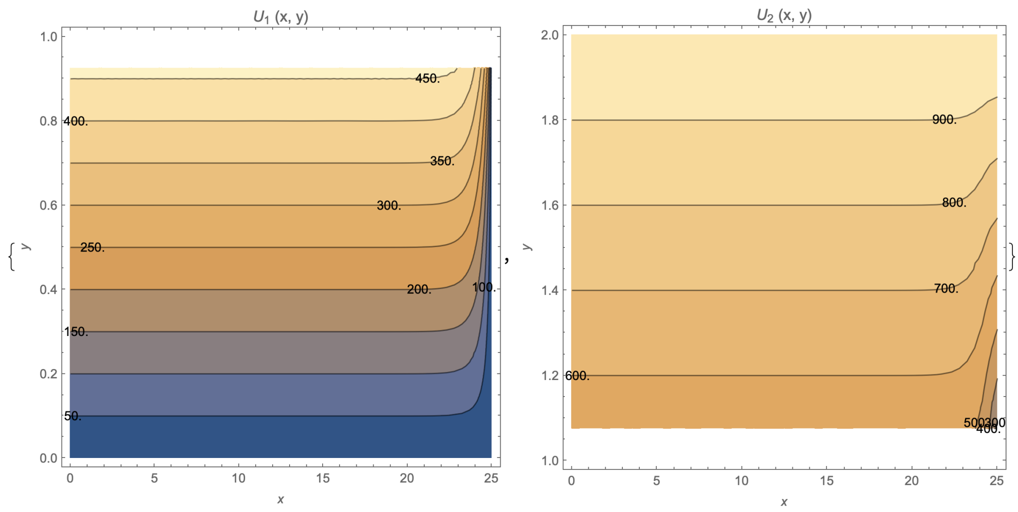


Рис. 8 Эквипотенциальные линии обоих областей

Увеличим значения y_1 и y_2, при этом не изменяя оставшиеся параметры:

$$x_1 = 1;\ \ x_2 = 2;\ \ y_1 = 25;\ \ y_2 = 50;\ \ U_0(x) = 1000;\ \ n, k \in [0, 100].$$

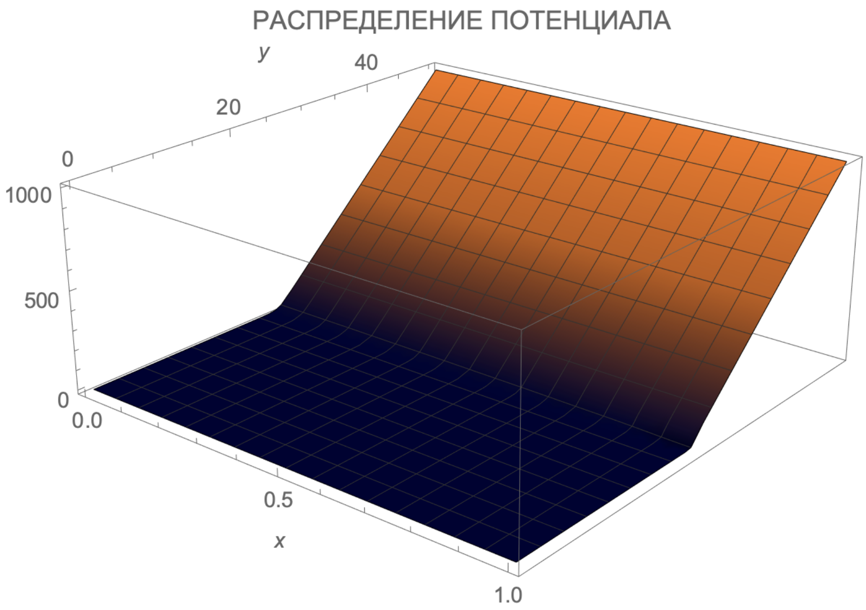


Рис. 9 Распределение электростатического потенциала

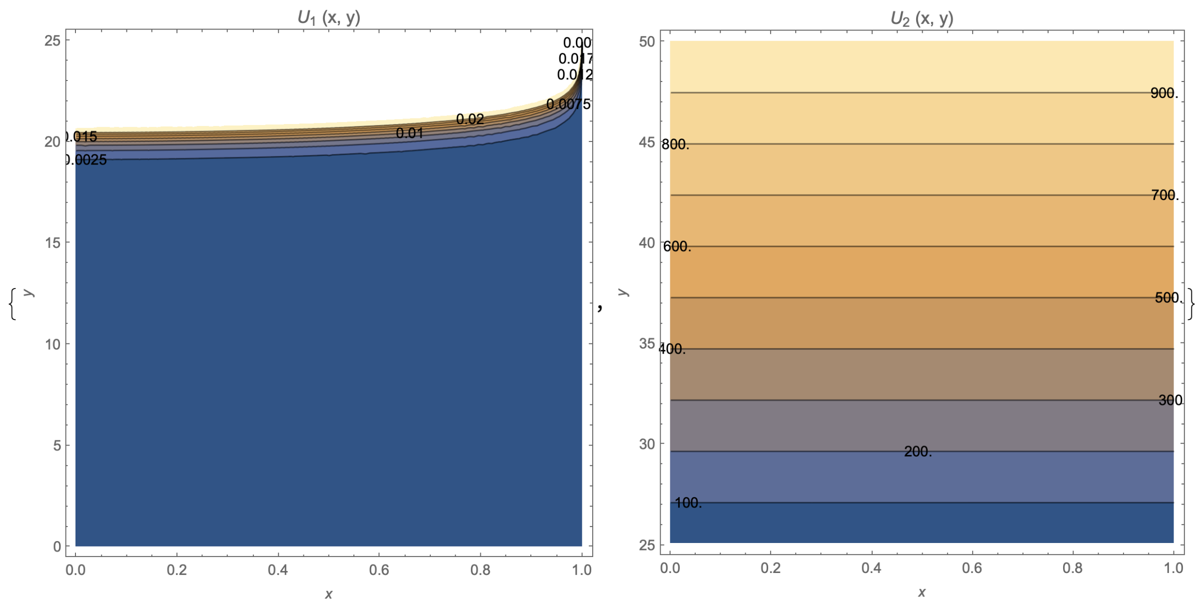


Рис. 10 Эквипотенциальные линии обоих областей

График функции $U_2(x_1, y)$:

$$x_1 = 1;\ \ x_2 = 2;\ \ y_1 = 1;\ \ y_2 = 2;\ \ U_0(x) = 1000;\ \ n, k \in [0, 100].$$

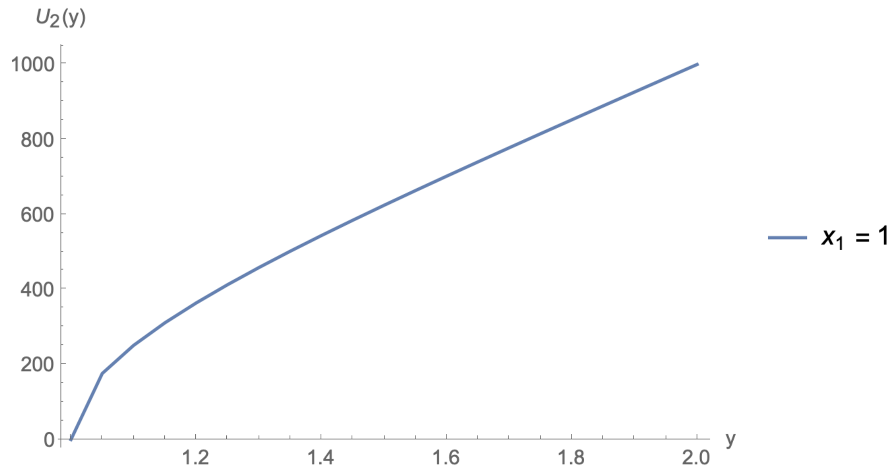
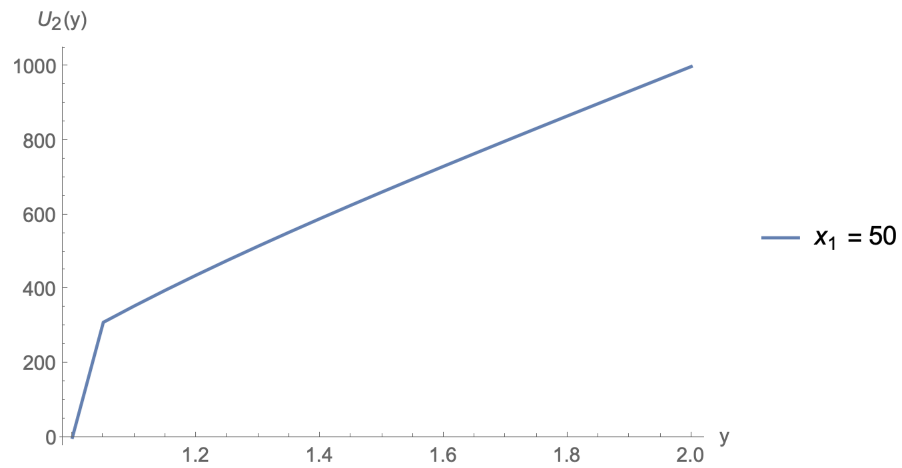


График функции $U_2(x_1, y)$:

$$x_1 = 50;\ \ x_2 = 100;\ \ y_1 = 1;\ \ y_2 = 2;\ \ U_0(x) = 1000;\ \ n, k \in [0, 100].$$



На рисунке 11 представлены графики функции $U_2(x_1, y)$ при $x_1 = 1$ и $x_1 = 50$, для следующих значений переменной $y : y_1 = 1; \;\; y_2 = 2$, при $U_0(x) = 1000; \;\; n, k \in [0, 100]$.

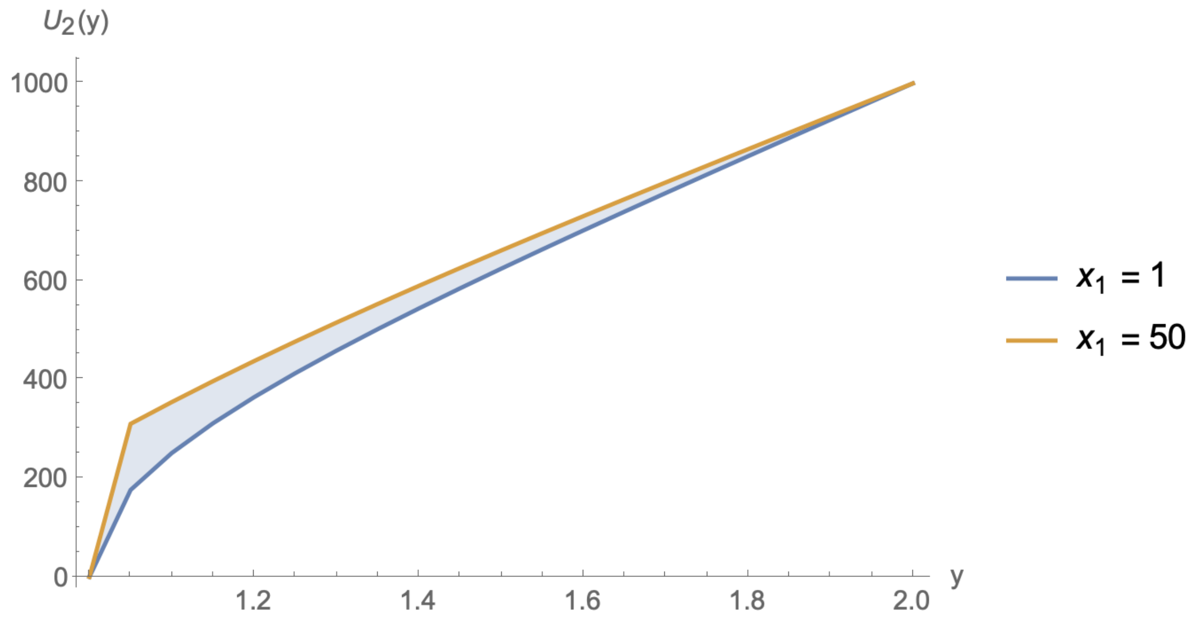


Рис. 11

Заключение

В главах 1 – 2 представлены: математическая модель одиночной диодной системы с полевым эммитером лезвийной формы (1), (2) и математическая модель периодической системы эммитеров лезвийной формы (15), (16) соответсвенно. Найдено распределение потенциала в аналитическом виде во всей области рассматриваемой системы в виде рядов по собственным функциям (4) – (5) и (18) – (19) соответственно. Пошагово описан подход к нахождению неизвественных коэффициентов в разложении распределений электростатического потенциала в соответсвующих областях, для обоих рассматриваемых задач. Нахождение неизвестных коэффициентов рядов сведено к решению системы линейных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами (14) и (22) соответсвенно.

В главе 3 рассмотрен частный случай задачи (15) с определенными граничными условиями (16). Реализована программа для вычисления аналитических формул (18) – (19), представленных в главе 2. Программа вычисляет систему линейных алгебраических уравнений, соответственно находит искомые коэффициенты рядов в распределении потенциала и само распределение потенциала во всей области исследуемой периодической системы эмиттеров лезвийной формы. Представлены численные расчеты и графики распределения электростатического потенциала.

Список литературы

1. Фурсей Г. Н. Автоэлектронная эмиссия // Соросовский образовательный журнал. 2006. Т. 11. стр. 96 - 103.

2. Виноградова Е.М., Доронин Г.Г., Егоров Н.В., Математическое моделирование двумерной диодной системы с полевым эмиттером лезвийной формы. 2019 (в печати).

3. Виноградова Е. М., Егоров Н. В., Телевный Д.С. Расчет триодной полевой эмиссионной системы с модулятором // Журнал технического физики. 2014. Т. 84 (2). стр. 136.

4. Соминский Г. Г., Тарадаев Е. П., Тумарева Т. А., Мишин М. В., Корнишин С.Ю. Простой в изготовлении многоострийный полевой эмиттер // Журнал технического физики. 2015. Т. 85. Вып. 7., стр. 85.

5. Виноградова Е. М., Егоров Н. В., Мутул М. Г., Чэ-Чоу Шень. Расчет электростатического потенциала диодной системы на основе полевого катода с острой кромкой // Журнал технической физики. 2010. Т. 80. Вып. 5. стр. 1-4

6. Телевный Д. С., Виноградова Е. М. Расчет диодной системы на основе полевого эмиттера с диэлектрической под-

ложкой // Процессы управления и устойчивость. 2014. Т. 1 (17). стр. 224 - 229.

7. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.

8. Виноградова Е.М., Егоров Н.В., Климаков А.А.. // ЖТФ. 2015. Т.85, N 2. С.20 - 23.

9. Климаков А. А., Виноградова Е. М. Оптимизация фокусирующей системы полевой пушки с острийным катодом // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 1.

10. Виноградова Е. М., Егоров Н. В. Математическое моделирование диодной системы на основе полевого эмиттера, Журнал технической физики. 2011. Т. 81. Вып. 9. стр. 1-5.

11. Елинсон М. И., Васильев Г. Ф. Автоэлектронная эмиссия. М.: Физматлит, 1958. 272 с.

12. Гусинский Г. М., Баранова Л. А., Найденов В. О. Субмикронный источник свободных электронов // Журнал технической физики. 2015. Т. 85. Вып. 3. С. 129 - 132.

13. Yunhan Li, Yonghai Sun, J T W Yeow. Nanotube field

electron emission: principles, development, and applications // IOPscience. 2015. Vol. 26, No 242001. P. 1 - 23.

14. Давидович М.В., Яфаров Р.К. Автоэмиссионная шахматная структура на основе алмазографитовых кластеров // ЖТФ. 2018. Т. 88, N 2. С. 283 - 293.

15. Егоров Н.В., Антонов А.Ю., Вараюнь М.И. // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2018. Т. 10. С. 72 - 79.

16. Листрукова А. В., Виноградова Е. М. Математическое моделирование эмиссионной системы // Процессы управления и устойчивость. 2014. Т. 1 (17). стр. 185 - 190.

17. Устинов Р. Н., Виноградова Е. М. Математическое моделирование электронно-оптической системы с диэлектрической диафрагмой конечной толщины // Процессы управления и устойчивость. 2014. Т. 1 (17). стр. 236 - 241.

18. Banerjee D., Chattopadhyay K. K., Synthesis of crystalline carbon nanofern-like structure by dc-PECVD and study of its electrical and field emission properties // Materials Research Bulletin, T. 47 (11). стр. 3868 - 3874.