

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления
Кафедра механики управляемого движения

Бабков Денис Олегович

**Математический расчет коррекции девиции
коленного сустава при помощи ортопедических
средств**

Магистерская диссертация

01.04.02 – Прикладная математика и информатика

Математическое моделирование в задачах естествознания

**Научный
руководитель:**

доктор мед. наук,
профессор

Шишкин В.И.

Рецензент:

заведующий
травматологическим
отделением Клинической
больницы РАН

Кованько Вячеслав Николаевич

Санкт-Петербург

2019

Содержание

Введение	3
Обзор литературы	5
Глава 1. Обозначения	7
Глава 2. Математическая модель	8
Глава 3. Расчет коррекции девиации при помощи ортопедического средства с использованием скручивающего момента.....	11
Глава 4. Анализ коррекции девиации при помощи ортопедического средства с использованием скручивающего момента	15
Глава 5. Расчет коррекции девиации при помощи ортопедического средства с использованием сжатия	18
Заключение	22
Список литературы	23
Приложение	25

Введение

Коленный сустав (*лат. articulatio genus*) – сустав, соединяющий бедренную кость, большеберцовую кость и надколенник – это один из важнейших элементов опорно-двигательной, обеспечивающий нам возможность передвижения. Его целостность и здоровья – необходимые условия для нормального существования человека. Есть множество заболеваний, связанных с данным органом. Главным и наиболее частым из них является артроз коленного сустава. [1]

Артроз коленного сустава – это нарушения процесса образования клеток суставного хряща и субхондральной кости вследствие механических или биологических причин: наследственные, эволюционные, метаболические и травматические. [2]

В независимости от причин его делят на несколько стадий, каждая последующая тяжелее предыдущей. Все они имеют свои методы лечения, но в основном, сегодняшняя медицина сконцентрирована на последнем этапе заболевания. Нам кажется, что такой подход не является обязательным и другие методы также достойны самого пристального внимания. Безусловно, хирургическое вмешательство, как крайняя мера, почти неизбежно при самой тяжелой стадии остеоартроза. Однако, для более легких стадий возможно применение других методов.

Одним из них является рассматриваемая нами коррекция девиации коленного сустава при помощи ортопедических средств, предложенный в [3]. В этой работе использовалась простая математическая модель и она носила скорее экспериментальный характер.

Целью нашей работы будет математический расчет коррекции девиации коленного сустава при помощи ортопедических средств.

Для выполнения поставленной цели необходимо решить ряд задач:

- изучить строение коленного и голеностопного сустава;
- найти и математически выразить связь между ними;

- провести расчеты и указать необходимые характеристики ортопедических средств для коррекции девиации коленного сустава.

Обзор литературы

В современных клиниках предлагают различные способы лечения [17], среди которых можно выделить: PRP-терапия. Лечебная физкультура, массаж и мануальная терапия, терапия вытяжением (тракционная), физиотерапия. Также довольно часто предлагается полное или частичное протезирование коленного сустава. Во многом рассмотренные в последствии расчеты были основаны на работах, связанных с данной методикой.

Недавно в работе Головахи М.Л. [3] был предложен для серьезного рассмотрения способ лечения при помощи ортопедической стельки

Первые ортопедические стельки, или «ортезы стопы», как их называют специалисты, начали изготавливать в XVIII веке в Голландии. А уже в конце следующего столетия в 1887 году в США был сделан первый индивидуальный ортез на основе гипсового слепка стопы, снятого в положении сидя. При получении слепка нога человека нагружалась неполностью, вследствие чего ходить в таких ортопедических стельках было крайне неудобно.[4] Из-за этого долгое время стельки не пользовались большим спросом. Но в 50-60-е годы XX века они вызвали новый всплеск обсуждения, так как специалисты начали считать, что положение стопы влияет не только на саму стопу [5,6], но также на позвоночник [7], таз [8], и всю нижнюю конечность [9], включая коленный сустав. В [3] обратили внимание на последнее свойство и попытались оказать воздействие на коленный сустав при помощи стельки, уменьшая последствия остеоартроза.

Голеностопный сустав (лат. *articulatio talocruralis*) — подвижное соединение большеберцовой, малоберцовой и таранной костей человека [10]. Именно через него, меняя угол наклона стопы, мы можем оказать влияние на коленный сустав. В работе Осипенко М.А. [11] коленный сустав рассматривается как упругий цилиндр, и, хотя в указанном примере изменение угла наклона стопы происходит в перпендикулярном, более свободно

изгибаемом, направлении, малость рассматриваемых углов наклона позволяет использовать данное представление и в нашем случае.

Глава 1. Обозначения

Здесь используются обозначения:

l_1 – высота лодыжки,

l_2 – длина большеберцовой кости,

r – радиус большеберцовой кости,

θ_1 – угол поворота сечения I (лодыжки),

θ_2 – угол поворота сечения II (большеберцовой кости),

ϕ – угол девиации коленного сустава,

ϕ^* – угол подъёма стопы,

\vec{P} – вес тела,

\vec{F} – проекция силы тяжести на верхнюю грань большеберцовой кости,

E – модуль Юнга для сустава,

J – момент инерции сечения,

\vec{N} – осевое напряжение,

S – площадь сечения,

\vec{M} – изгибающий момент,

1 – лодыжка,

2 – сустав,

3 – большеберцовая кость,

k_0 – коэффициент жесткости коленного сустава,

x – величина деформации при сжатии.

Глава 2. Математическая модель

Прежде всего, рассмотрим схематичное представление нижней части ноги (от стопы до нижней части коленного сустава)

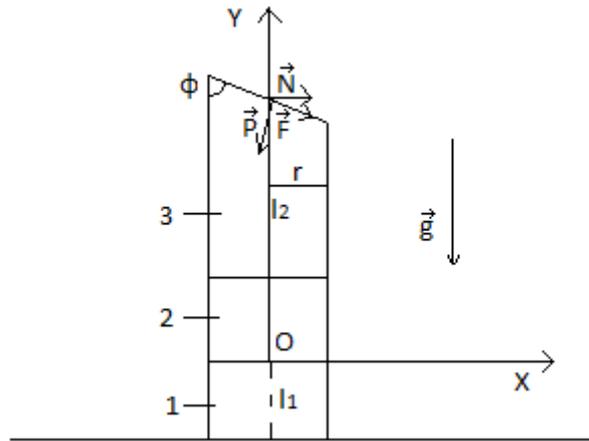


Рис.1

В данной схеме нами были приняты некоторые допущения:

1. мы считаем, что сечение сустава представляет собой круг с радиусом r ;
2. сустав представляет собой упругий цилиндр;
3. ширина сустава достаточно незначительна, что бы мы считали начало координат находящимся одновременно и на верхней грани лодыжки, и на нижней грани большеберцовой кости;
4. мы не рассматриваем сустав как шарнир в сочленении 2-х стержней, в том смысле, что не учитываем трение, возникающее между суставом и костями;
5. осевая нагрузка равномерно распределена по всей длине стержня(кости);
6. вес тела, давящий на коленный сустав равен полному весу человека;
7. так как слишком большой изгиб стопы будет травмировать голеностопный сустав мы ограничим подъем стопы до 5 градусов ($\phi^* < \frac{\pi}{36}$);

8. предполагается, что в оптимальном состоянии верхняя часть большеберцовой кости располагается параллельно земле;
9. радиус сустава, большеберцовой кости и лодыжки одинаков;

Из-за артроза большеберцовая кость имеет срез на верхней грани, для простоты будем считать, что он направлен в сторону оси X. По этой причине, осевая нагрузка также направлена в сторону оси X (по построению), и мы можем выразить осевое напряжение[12] как:

$$N(x) = \frac{F}{S} \quad (1)$$

$$F = P * \sin \phi \quad (2)$$

$$S = \frac{\pi * r^2}{\sin \phi} \quad (3)$$

Из (1), (2), (3) следует:

$$N(x) = \frac{P * \sin^2 \phi}{2 * r^2 * \pi} \quad (4)$$

Теперь можно вычислить изгибающий момент – момент внешних сил относительно балок [13], который является суммой всех сил, приложенных к балке. Наш случай не дискретный, а потому сумма заменяется интегрированием осевого напряжения по длине бруска:

$$M = r * \int_{-r}^r N(x) dx \quad (5)$$

Подставляя (4) в (5) получаем:

$$M = r * \frac{P * \sin^2 \phi}{2 * r^2 * \pi} * 2 * r = \frac{4}{\pi} * P * \sin^2 \phi \quad (6)$$

Между изгибающим моментом и углом поворота сечения I существует связь [14], и ее можно выразить следующим образом:

$$\theta_2(y) = \frac{M*y}{E*J} + C_2 \quad (7)$$

Мы предположили, что сечение сустава является кругом. Исходя из данного предположения, мы можем представить [15] J как:

$$J = \frac{\pi*r^4}{4} \quad (8)$$

Для вычисления C_1 воспользуемся тем, что на конце больше берцовой кости ($y = l$) известен:

$$\theta_2(l_2) = \phi \quad (9)$$

Решая систему (7), (9) мы получаем:

$$C_2 = \phi - \frac{4*P*\sin^2 \phi*l_2}{\pi*E*J} \quad (10)$$

Именно этот угол изображен на рис.2

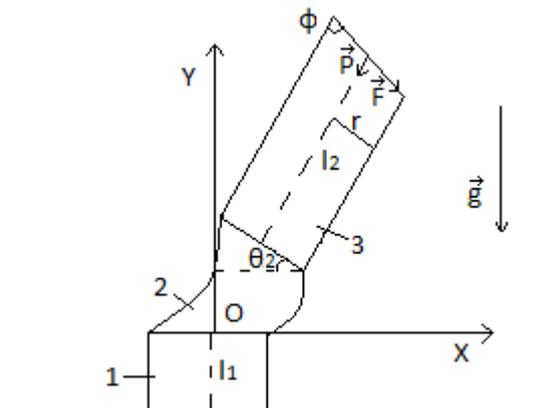


Рис.2

Глава 3. Расчет коррекции девиации при помощи ортопедического средства с использованием скручивающего момента

Наша итоговая цель состоит в том, чтобы устранить или минимизировать последствия легкой степени артроза. Для этого необходимо сделать так, чтобы нагрузка на верхнюю часть большеберцовой кости распространялась равномерно. Иными словами, нужно сделать так чтобы верхняя грань большеберцовой кости расположилась параллельно земле. Для этого необходимо повернуть большеберцовую кость на угол $\frac{\pi}{2} - \phi$. Это произойдет в том случае, если в точке O, где $y = 0$, сумма угла поворота сечения I и угла поворота сечения II будет равна $\frac{\pi}{2} - \phi$, то есть:

$$\theta_1(0) + \theta_2(0) = \frac{\pi}{2} - \phi \quad (11)$$

В итоге мы хотим получить схему, изображенную на Рис.3

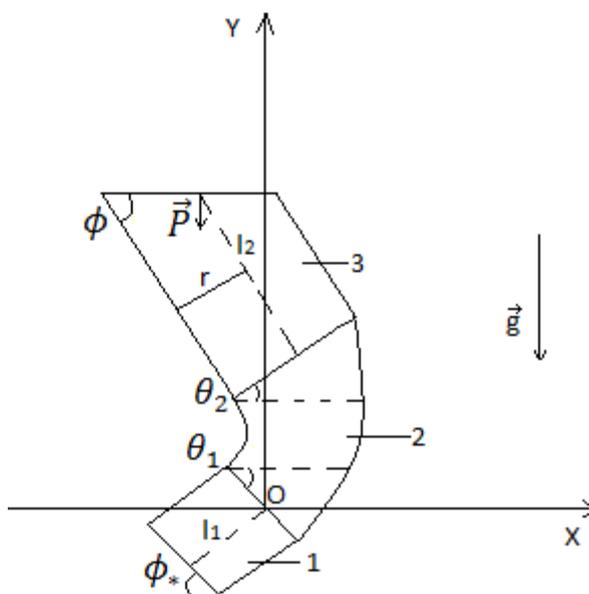


Рис.3

Из третьего закона Ньютона известно, что сила действия равна силе противодействия. Поэтому можно считать, что сила, действующая на

подошву, равна весу тела – P – по модулю. Таким образом, мы можем провести вычисления аналогичные вышеуказанным и получить:

$$\theta_1(-l_1) = \frac{\pi}{2} - \phi_* \quad (12)$$

$$\theta_1(-l_1) = \frac{4 * P * \cos^2 \phi_* * (-l_1)}{\pi * E * J} + C_1 \quad (13)$$

Из (11) следует:

$$C_1 + C_2 = \frac{\pi}{2} - \phi \quad (14)$$

$$C_1 = \frac{\pi}{2} - \phi - C_2 \quad (15)$$

Из (10), (12), (13), (15) получаем:

$$\phi_* = \frac{4 * P * \cos^2 \phi_* * l_1}{\pi * E * J} + 2 * \phi - \frac{4 * P * \sin^2 \phi * l_2}{\pi * E * J} \quad (16)$$

Введем обозначения:

$$k = \frac{E * J}{P * l_1} * \frac{\pi}{4} \quad (17)$$

$$\bar{C} = k * \left(2 * \phi - \frac{4 * P * \sin^2 \phi * l_2}{\pi * E * J} \right) \quad (18)$$

Запишем (16) в новых обозначениях:

$$k * \phi_* = \cos^2 \phi_* + \bar{C} \quad (19)$$

Данное уравнение нельзя решить аналитически, поэтому будем решать его численно. По условию построения математической модели мы работаем с числами близкими к 0. Поэтому мы можем разложить $\cos^2 \phi_*$ в ряд Тейлора:

$$\cos \phi_* = 1 - \frac{\phi_*}{2} + \dots \quad (20)$$

$$\cos^2 \phi_* = 1 - \phi_*^2 + \frac{\phi_*^4}{4} + \dots \quad (21)$$

Всеми членами этого ряда, начиная с третьего, можно пренебречь ввиду их малости. Получается квадратное уравнение относительно ϕ_* :

$$\phi_*^2 + k * \phi_* - 1 - \bar{C} = 0 \quad (22)$$

Данное уравнение имеет 2 корня:

$$\phi_{*1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 + 4 * (\bar{C} + 1)}}{2} \quad (23)$$

Отметим, что физический смысл это выражение имеет, только если подкоренное выражение больше 0. А так как $k > 0$ по построению, то рассматривать мы будем только один корень:

$$\phi_* = \frac{-k + \sqrt{k^2 + 4 * (\bar{C} + 1)}}{2} \quad (24)$$

Для того чтобы ϕ_* принадлежал области действительных чисел необходимо и достаточно выполнения условия:

$$\sqrt{k^2 + 4 * (\bar{C} + 1)} > k \quad (25)$$

Раскрывая наши обозначения, мы приходим к неравенству:

$$2 * \frac{E*J}{P*l_1} * \frac{\pi}{4} * \phi - \frac{l_2}{l_1} * \sin^2 \phi + 4 > 0 \quad (26)$$

Глава 4. Анализ коррекции девиации при помощи ортопедического средства с использованием скручивающего момента

Итоговая формула примет вид: (24*)

$$2 * \varphi_* = - \frac{E * J}{(P * l_1)} * \frac{\pi}{4} + \left(\frac{E^2 * J^2}{P^2 * l_1^2} + 4 * \frac{E * J}{P * l_1} * \left(2 * \varphi - \frac{4 * P * \sin^2 \varphi * (l_2)}{\pi * E * J} \right) + 4 \right)^{\frac{1}{2}}$$

По методу ее получения мы получили, что она имеет физический смысл, а значит, применима для решения поставленной задачи. Также было дано определение граничных условий для переменных и констант, когда применение нашего метода имеет математический смысл. Для уточнения граничных условий в физическом смысле необходимы индивидуальные вычисления.

Данную формулу для систематических расчетов можно упростить с помощью подстановки известных констант:

$$E = 600 \text{ Н/м}^2 [19] (27)$$

$$J = \frac{\pi * r^4}{4} (8)$$

Также, если не будет сказано обратного, примем среднее $r = 0.03\text{м}$, средняя масса 80 кг и девиация равна 4 градусам.

На рис. 4 изображен график зависимости корректирующего угла от веса пациента. Несмотря на то, что обычно именно большой вес является одной из причин появления артроза коленного сустава, при применении нашего метода вес является одним из факторов помогающим профилактике и облегчению последствий легкой степени заболевания

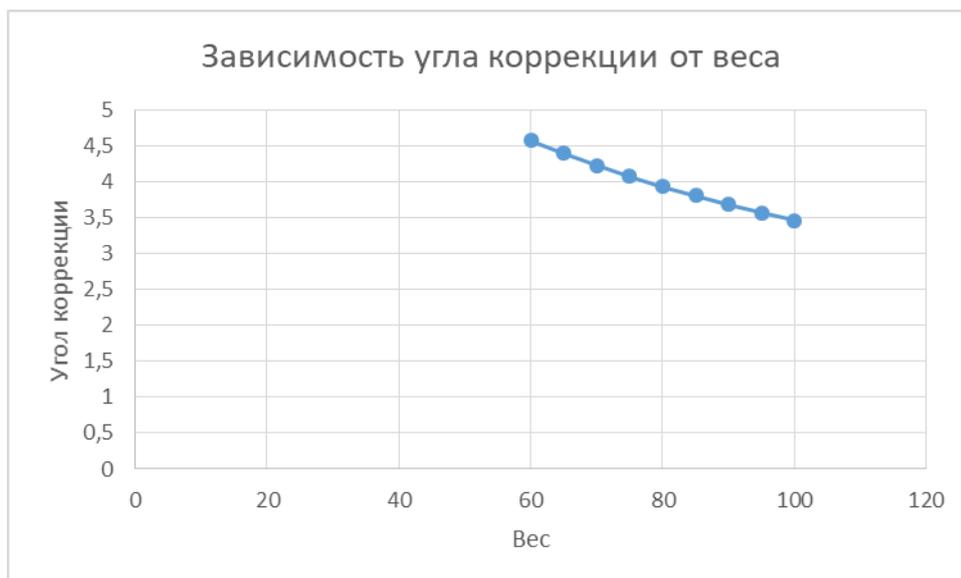


Рис. 4

На рис. 5 изображен график зависимости корректирующего угла от девиации. На нем видно, что при указанных нами данных при девиации более 3-х градусов применяемый нами метод неприменим, ввиду его травмоопасности для голеностопного сустава. Как и было сказано ранее, наш метод применим лишь в случаях малой девиации. При слишком больших отклонениях на голеностоп оказывается слишком большое давление.

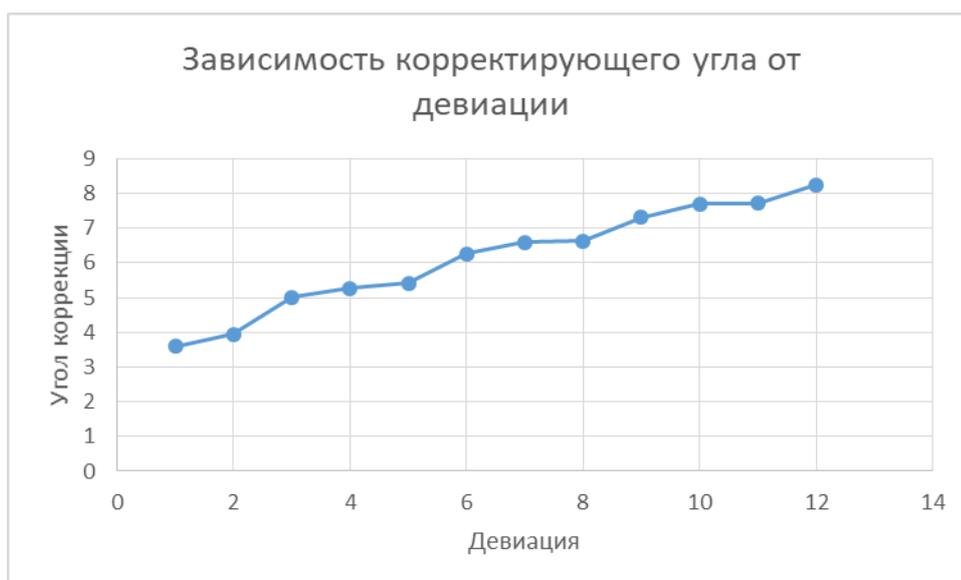


Рис. 5

Радиус голеностопного сустава также оказывает существенное влияние, что видно из графика на рис. 6. При слишком больших значениях коррекция оказывается невозможной. Однако из-за частичной связи этого показателя и веса (большой радиус кости обеспечивает повышенный вес), данные выводы требуют уточнения и индивидуальный подход для каждого пациента.

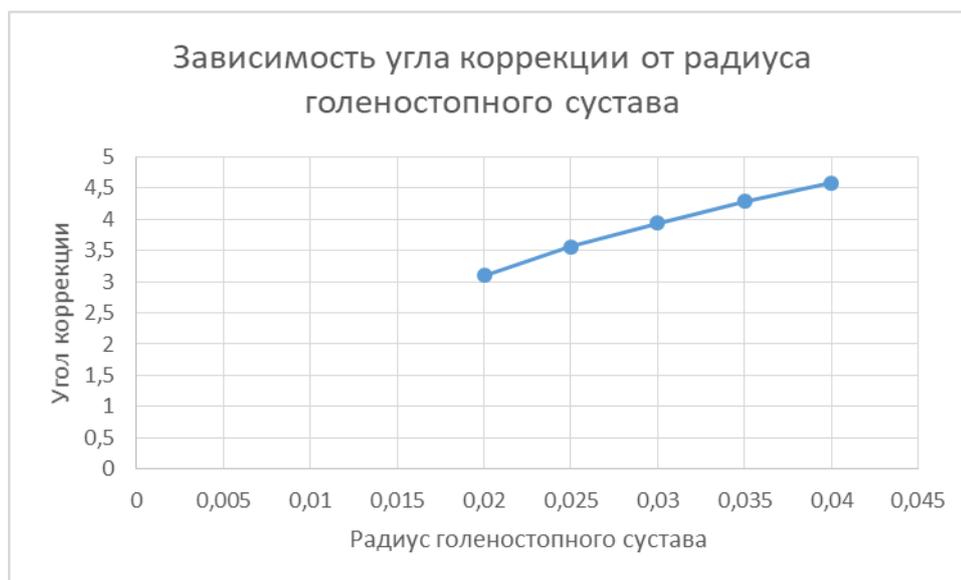


Рис. 6

В данном анализе мы не рассматривали изменение длины l_1 и l_2 , так как данные показатели слишком индивидуальны и не поддаются классификации. Однако, исходя из полученных формул, увеличение каждой из них ведет к усложнению применения нашего метода.

Глава 5. Расчет коррекции девиации при помощи ортопедического средства с использованием сжатия

Прежде мы считали, что воздействие веса человека на сустав происходит как на неупругое тело, не оказывающее упругого сопротивления. Рассмотрим данный случай (Рис. 7).

Упругость — свойство восстанавливать форму тела после прекращения воздействия других тел или полей. [18]

Деформация — изменение формы и размеров твердых тел под действием внешних сил. Деформации могут быть упругими и пластичными.

Упругая деформация — деформация, при которой после прекращения действия внешних сил тело восстанавливает прежние размеры и форму.

Пластическая (остаточная) деформация — деформация, которая не исчезает в теле после прекращения действия внешних сил.

Все виды возможных деформаций (растяжение или сжатие, сдвиг, изгиб, кручение) могут быть сведены к двум одновременно происходящим деформациям — растяжению (или сжатию) и сдвигу.

Относительная деформация — мера деформации, равная отношению абсолютной деформации Δx к первоначальному значению величины x , характеризующей размеры и форму тела.

Если к концам стержня (рис. 7) с площадью поперечного сечения S приложены направленные вдоль его оси внешние силы F_1 и F_2 ($F_1 = F_2 = F$), то длина стержня l получит положительное (при растягивании) или отрицательное (при сжатии) приращение Δl , принятое называть абсолютным удлинением. Изменение длины стержня сопровождается изменением диаметра d стержня, причем при растяжении $\Delta l > 0$, $\Delta d < 0$, при сжатии — $\Delta l < 0$, $\Delta d > 0$.

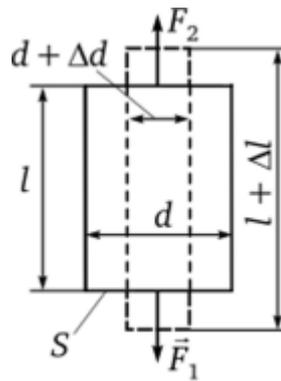


Рис. 7

Относительное удлинение (сжатие) — это отношение абсолютного удлинения Δl к начальной длине l тела:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (28)$$

Сила упругости $F_{\text{упр}}$ — сила, возникающая при деформации тела и направленная в сторону, противоположную перемещению частиц при деформации.

Напряжение σ — физическая величина, равная по модулю силе упругости, действующей на единицу площади поперечного сечения тела:

$$\sigma = \frac{F_{\text{упр}}}{S}. \quad (29)$$

Закон Гука: в пределах упругой деформации напряжение прямо пропорционально относительной деформации:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (30)$$

где E — модуль Юнга (модуль Юнга равен напряжению, когда относительное удлинение равно единице, т. е. при $e = 1$ получаем $\sigma = E$).

Закон Гука справедлив только для упругих деформаций, исчезающих после прекращения действия сил.

Закон Гука можно представить в виде:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{ES} \text{ или } F = \frac{ES}{l} \Delta l. \quad (31)$$

Сопоставив данное выражение с формулой закона Гука $F = -kx$, где k — жесткость тела, получим:

$$k = \frac{FS}{l}. \quad (32)$$

Отсюда, зная k для голеностопного сустава можем вычислить изменение равнодействующей силы, влияющей на него:

$$\Delta F = P - \frac{k * l}{S} \quad (33)$$

Также мы можем узнать изменение длины опорного механизма:

$$l_0 = l - x \quad (34)$$

Все эти поправки необходимо провести после первой примерки, так как при изменении угла наклона стопы меняется так же равнодействующая всех сил в целом и сила упругости в частности.

Теперь же, выяснив новую силу, влияющую на сустав, и длину опорного механизма мы можем рассчитать необходимую коррекцию, принимая S равным площади соединения голеностопного сустава и голени:

$$2 * \varphi_* = \frac{E * J}{\left(P - \frac{k_0 * (l_1 - x)}{S}\right) * (l - x)} * \frac{\pi}{4} + \left(\frac{E^2 * J^2}{\left(P - \frac{k_0 * (l_1 - x)}{S}\right)^2 * (l - x)^2} + 4 * \frac{E * J}{\left(P - \frac{k_0 * (l_1 - x)}{S}\right) * (l - x)} * \left(2 * \varphi - \frac{4 * P - \frac{4 * k_0 * (l_1 - x)}{S} * \sin^2 \varphi * (l_2 - x)}{\pi * E * J} + 4\right)^{\frac{1}{2}} \right) (35)$$

Данную формулу можно упростить с помощью подстановки известных констант:

$$E = 600 \text{ МН/м}^2 [19] (36)$$

$$J = \frac{\pi * r^4}{4} (8)$$

$$k_0 = \frac{E * S}{l_1} [20] (37).$$

Но внести все указанные выше поправки возможно, лишь после предварительной примерки, так как значение x может быть вычислено только эмпирическим путем. Однако при осуществлении всех вычислений полученный результат будет более точным и более индивидуальным, что повышает эффективность данного подхода.

Заключение

При помощи данной математической модели голеностопного сустава, мы смогли вычислить на какой угол должна поднимать стелька голеностоп, для коррекции девиации коленного сустава. Также мы указали метод, по которому в дальнейшем можно получить более точный индивидуальный угол для каждого пациента

Данная модель сильно упрощена. Она не учитывает трение между суставными поверхностями, что может довольно сильно снизить точность результата, полученного нами. Было высказано большое количество предположений требующих дальнейшего исследования и уточнения.

В целом стелька – это сложный инструмент, предназначенный для профилактики или лечения различных заболеваний ног или других частей опорно-двигательного аппарата. Потому в нашей работе мы не делали попыток построить модель ортопедического средства, но вычислили один из важнейших параметров для ее проектирования. В дальнейшем работа может быть расширена до полноценного проектирования стельки с учетом всех показаний.

Список литературы

1. Колено, коленное сочленение // Энциклопедический словарь Брокгауза и Ефрона : в 86 т. (82 т. и 4 доп.). — СПб., 1890—1907.
2. *Покровский В. И.* Малая медицинская энциклопедия. — Советская энциклопедия, 1996. — Т. 4. — 577 с.
3. М.Л. Головаха, В.А. Филиппенко, И.В. Шишка, А.М. Горелов, О.В. Банит, С.Н. Красноперов — Применение корригирующих стелек при остеоартрозе коленного сустава с варусной деформацией
4. http://formthotics.ru/traumas/traumas_13.html
5. Smith, M.A. Flat feet in children / M.A. Smith. Br Med J 1990; 301:1331
6. Gajewski, R.: Badanie rozmieszczenia nacisków na podszwowej stronie stopy i ich rola w ocenie deformacji stóp i w projektowaniu wkładek do obuwia. Materiały konferencji CLPO nt. Obuwie Profilaktyczne i ortopedyczne dla dzieci i dorosłych. Potrzeby rynku – wymagania stóp – zaopatrzenie / R. Gajewski, B. Rajchel-Chyla. – Kraków 2005, s.88–91.
7. Стопа и позвоночник: какова взаимосвязь? // DELFIURL:
<http://www.delfi.lv/woman/zdorovje/zdorovje/stopa-i-pozvonochnik-kakova-vzaimosvyaz?id=32538217>
8. Биомеханика ноги и стопы // Библиотека обучающей и информационной литературы.URL:
http://www.uhlib.ru/medicina/vse_o_zdorove_vashih_nog_ot_mladenchestva_do_starosti/p4.php
9. Нарушения движений стопы // Портал iLive.com.ua Я живу! Здорово!
URL: http://ilive.com.ua/health/narusheniya-dvizheniy-stopu_113817i16070.html
10. Анатомия человека / Привес М. Г., Лысенков Н. К. — 9-е изд., перераб. и доп. — М.: Медицина, 1985. — С. 156-157. — 672 с. — (Учебная литература для студентов медицинских институтов).

11. Осипенко, Михаил Анатольевич. Об оптимизации упругого элемента протеза стопы / М. А. Осипенко, Ю. И. Няшин // Российский журнал биомеханики. — 2011 .— № 2 .— С. 16-23.
12. Лекция 2. Осевое растяжение - сжатие // Файловый архив студентов. URL: <http://www.studfiles.ru/preview/4257871/>
13. Лекция 6. Плоский изгиб // Сопротивление материалов Электронный учебный курс для студентов очной и заочной формы обучения URL: <http://www.soprotmat.ru/izgib.htm>
14. Изгиб.определение перемещений. // СОПРОМАТ ОН-ЛАЙН URL: http://sopromat.org/info/4/4_1.php
15. Дарков А.В., Шапиро Г.С. Сопротивление материалов. - М.: Высшая школа, 1975. с. 147
16. Why Don't Most Runners Get Knee Osteoarthritis? A Case for Per-Unit-Distance Loads Ross // H. Miller, W. Brent Edwards , Scott C. E. Brandon , Amy M. Morton , and Kevin J. Deluzio
17. Методы лечения артроза // Доктор Еламед URL: <https://dr.elamed.com/stati/metody-lecheniya-artroza/>
18. Попов И. П. Электромеханические или искусственные масса и упругость // Вестник Псковского государственного университета. — Серия: Технические науки. — 2016. № 4. — С. 89-94.
19. МОДУЛЬ ЮНГА // Живые мосты URL: <http://www.live-bridges.ru/youngs-modulus/>
20. Гука закон. Статья в физической энциклопедии.

Приложение

```
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Linq;
using System.Text;
using System.Threading.Tasks;

namespace dip
{
    class Program
    {
        static void Main(string[] args)
        {
            double fi, alpha, E, J, P, l1, l2;
            fi = double.Parse(Console.ReadLine());
            fi = fi*Math.PI /180*;
            Console.Write(fi);
            E = double.Parse(Console.ReadLine());
            J = double.Parse(Console.ReadLine());
            P = double.Parse(Console.ReadLine());
            l1 = double.Parse(Console.ReadLine());
            l2 = double.Parse(Console.ReadLine());
            double k = (E * J) / (P * l1) * Math.PI / 4;
            double C = k * (2 * fi - 4 * P * Math.Pow(Math.Sin(fi), 2) * l2 / (Math.PI *
* E * J))+1;
            alpha = (-k + Math.Sqrt(k * k + 4 * C));
            Console.Write(alpha);
        }
    }
}
```