

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ – ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ

**Суркова Валерия Андреевна**

**Магистерская диссертация**

**Перелёты между окрестностями неустойчивых точек  
либрации системы Солнце-Земля**

01.04.02 – Прикладная математика и информатика

Методы прикладной математики и информатики в задачах управления

Научный руководитель,  
кандидат физ.-мат. наук,  
доцент  
Шмыров В.А.

Рецензент,  
начальник отдела программирования  
АО НИИ ТС «Синвент»  
Кохтенко Н.В.

Санкт-Петербург

2019

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|   |    |
|---|----|
| Введение.....   | 3  |
| Постановка задачи.....  | 5  |
| 1 Коллинеарные точки либрации .....                                 | 6  |
| 1.1 Точка либрации $L_1$ .....                                      | 6  |
| 1.2 Точка либрации $L_2$ .....                                      | 6  |
| 2 Проекты, связанные с точками либрации.....                        | 7  |
| 2.1 Проект ISEE-3 (International Sun-Earth Explorer 3).....         | 7  |
| 2.2 Проект SOHO (Solar and Heliospheric Observatory).....           | 7  |
| 2.3 Проект Genesis.....   | 8  |
| 3 Уравнения движения.....   | 9  |
| 3.1 Математическая модель .....                                     | 9  |
| 3.1.1 Круговая задача трёх тел.....                                 | 9  |
| 3.1.2 Уравнения Хилла .....   | 10 |
| 3.2 Численное моделирование .....                                   | 11 |
| 3.3 Оптимальное управление в окрестности точки либрации $L_2$ ..... | 18 |
| 3.4. Условно-периодические орбиты .....                             | 22 |
| 3.5 Моделирование в нелинейной системе .....                        | 24 |
| 3.5.1 Алгоритм расчёта движения.....                                | 26 |
| 3.5.2 Перелёт к окрестности $L_2$ .....                             | 31 |
| Заключение .....  | 33 |
| Список литературы .....   | 34 |

## ВВЕДЕНИЕ

В недавнее время стало актуальным использование окрестностей точек либрации системы Солнце-Земля. Эти области связаны с уже существующими космическими проектами, а также с серией запланированных. В данной работе исследуются аспекты перелетов между окрестностями коллинеарных точек либрации в околоземном пространстве в неуправляемом и управляемом режимах. Приводятся оценки необходимых импульсных воздействий для перелетов в управляемом режиме. Оценивается полезность таких перелетов с позиций экономии времени, а также энергетических затрат в задаче стабилизации движения в окрестности достигнутой точки либрации.

Моделируется движение космического аппарата (далее – КА) по условно-периодическим орбитам (гало- орбитам) в окрестности первой точки либрации. Строятся необходимые для такого движения импульсные управления с помощью разработанного и поставленного в работе алгоритма. Дается оценка для этих управлений и проводится сравнение с аналогичными энергетическими затратами в других исследованиях, посвященных такого рода полетам.

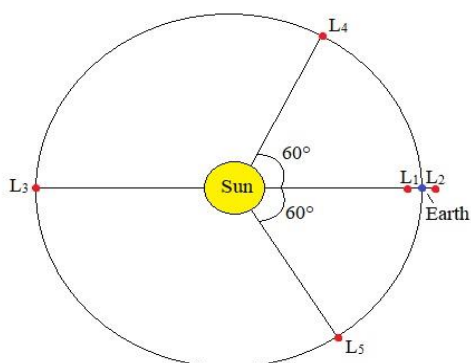


Рис.1.1 Точки Лагранжа в системе Земля - Солнце

Точки либрации (точки Лагранжа) это частные решения ограниченной круговой задачи трёх тел, о которой будет рассказано подробнее в пункте 3.1.1. Точки Лагранжа получили своё название в честь учёного Лагранжа, обнаруживший в 1772 году точки  $L_4$  и  $L_5$ , а в 1767 году были открыты

коллинеарные точки ( $L_1, L_2, L_3$ ) математиком Леонардом Эйлером.

Точки либрации имеют свойство: сумма всех трех сил (центробежной и двух гравитационных) равна нулю. Первые три (коллинеарные или прямолинейные) точки либрации неустойчивые, а прямоугольные устойчивы, и в них могут накапливаться пыль или фрагменты астероидов. Это явление наблюдается в Солнечной системе с 1906 года.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной работе мы моделируем неуправляемые и управляемые перелеты из окрестности первой точки либрации  $L_1$  в окрестность второй точки либрации  $L_2$ . Ставится и численно моделируется задача импульсного управления в маневрировании между окрестностями точек либрации и движении по гало-орбитам, а также задача оптимального управления в окрестности  $L_2$ . Результаты иллюстрируются графически.

## 1 КОЛЛИНЕАРНЫЕ ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ

### 1.1 Точка либрации $L_1$

Первая точка Лагранжа находится между двумя массивными телами  $M_1$  и  $M_2$ , где первое тело имеет большую массу относительно второго тела. Её существование объясняется тем, что гравитация  $M_1$  отчасти компенсирует гравитацию  $M_2$  (чем больше второе тело, тем дальше  $L_1$  будет находиться от него). Для системы Солнце-Земля расстояние от Земли до точки  $L_1$  составляет 1,5 млн. км.

В системе Солнце-Земля  $L_1$  является идеальным местом для космической обсерватории с целью наблюдения за Солнцем, т.к. в точке Лагранжа она не перекрывается Землей и Луной. Первый аппарат, который работал около данной точки был запущен в 1978 году и назывался ISEE-3. В 1996 году NASA запустили КА SOHO и он продолжает работу до сих пор. С этой точкой либрации также связан ряд других проектов.

### 1.2 Точка либрации $L_2$

Вторая точка Лагранжа находится за телом  $M_2$  симметрично  $L_1$  на линии, которая соединяет тела  $M_1$  и  $M_2$  (рис. 1.1). Во второй точке либрации все гравитационные силы компенсируют действие центробежных сил во вращающейся системе отсчета. Рассматриваем  $L_2$  в системе Земля-Солнце. Эта точка – идеальное место для обсерваторий и телескопов, т.к. объект в ней сохраняет свою ориентацию достаточно долго относительно  $M_1$  и  $M_2$ .

## 2 ПРОЕКТЫ, СВЯЗАННЫЕ С ТОЧКАМИ ЛИБРАЦИИ

### 2.1 Проект ISEE-3 (International Sun-Earth Explorer 3)

Также известен как Международный исследователь комет (ICE, International Cometary Explorer). Проект создавался для изучения взаимодействия солнечного ветра и магнитного поля Земли. Для реализации проекта потребовалось 3 КА.

Одной из задач данного проекта было пребывание в окрестности первой точки либрации. ISEE-3 является первым объектом, который поместили в точку либрации, этим самым доказывая, что реализация равновесия в ее области возможна.

Цели проекта:

- Исследование солнечно-земных связей на внешних границах магнитосферы Земли;
- Изучение солнечного ветра вблизи Земли и его взаимодействие с магнитосферой;
- Исследования космических лучей и солнечного излучения в радиусе 1 а.е. (астрономическая единица = 1,5 млн. км).

Вместе с этим, он исследовал комету Галей. После исследования он продолжил изучать Солнце и в 1997 году закончил свою работу.

### 2.2 Проект SOHO (Solar and Heliospheric Observatory)

Этот проект был спроектирован для наблюдения за Солнцем. КА был помещен в область  $L_1$  в 1995 году и автоматически собирал информацию о состоянии Солнца при помощи фотографий. С его помощью было открыто порядком двух тысяч околосолнечных комет.

## 2.3 Проект Genesis

КА, разработанный НАСА. Цель проекта: сбор образцов солнечного ветра. Это единственный КА, который реализовал перелёт из окрестности точки  $L_1$  в окрестность точки  $L_2$ . Сам перелёт был совершён с 2001 г. по 2004 г. Genesis сделал 4 витка в области  $L_1$ , после чего совершил полет к области второй точки либрации. В общей сумме он пролетел примерно 32 млн. км.

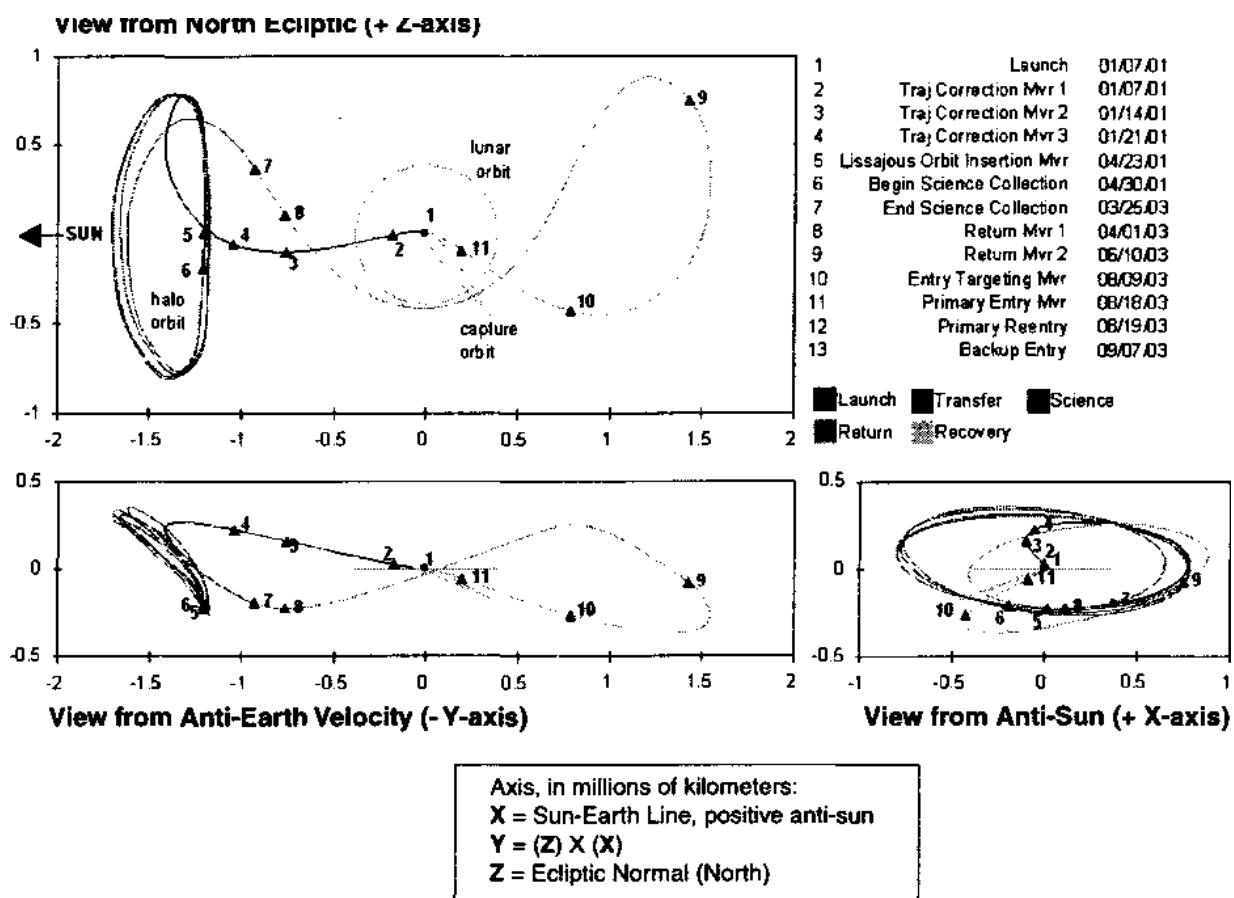


Рис.2.1 Примерная траектория полёта аппарата Genesis



### 3 УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

#### 3.1 Математическая модель

##### 3.1.1 Круговая задача трёх тел

Задача трёх тел – одна из базовых задач небесной механики, в которой вычисляется движение трёх тел, связанных только гравитационными силами. Предположим, что три тела (в поставленной задаче это Солнце, Земля и КА) движутся по круговым орбитам и третье тело пренебрежимо мало по сравнению с другими двумя телами. Эти уточнения позволяют перейти к ограниченной круговой задаче трёх тел (далее – ОКЗТТ).

ОКЗТТ – математическая модель, в рамках которой два массивных тела движутся по круговым орбитам вокруг общего центра масс, а третье тело обладает пренебрежимо малой массой по отношению к первым двум и не оказывает на них гравитационного воздействия.

Рассмотрим уравнения движение КА в рамках ОКЗТТ в неподвижной системе координат, где центром является Солнце.

$$\ddot{\bar{x}} = -\frac{\gamma m_1 \bar{x}}{\|\bar{x}\|^3} + \gamma m_2 \left( \frac{Rl(t) - \bar{x}}{\|Rl(t) - \bar{x}\|^3} - \frac{l(t)}{R^2} \right) \quad (1')$$

где  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)^T$  – геоцентрические координаты КА,  $m_1, m_2$  – массы Солнца и Земли,  $\gamma$  – гравитационная постоянная,  $R$  – расстояние от Солнца до Земли, измеряемое в астрономических единицах (далее – а.е.), приблизительно равная 150 млн км,  $l(t)$  – единичный вектор, направленный по линии Земля-Солнце. В задаче движение происходит в области эклиптики, соответственно, единичный вектор будет равен

$$l(t) = (\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0)$$

где  $\omega$  – угловая скорость Земли.

### 3.1.2 Уравнения Хилла

Для качественного исследования движения КА в окрестности точки либрации и построения управлений удобно использовать более простую модификацию модели ОКЗТТ – модель Хилла. Уравнения модели Хилла, т.н. уравнения Хилла или хилловское приближение, проще, чем уравнения ОКЗТТ, но в то же время считаются нелинейными. Все переменные в этой модели остаются связанными. Приведем уравнения Хилла в одной из его форм для системы Солнце-Земля [2,3]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1 + x_2, & \dot{y}_1 &= -\frac{3x_1}{\|x\|^3} + 2x_1 + y_2; \\ \dot{x}_2 &= y_2 - x_1, & \dot{y}_2 &= -\frac{3x_2}{\|x\|^3} - x_2 - y_1; \\ \dot{x}_3 &= y_3, & \dot{y}_3 &= -\frac{3x_3}{\|x\|^3} - x_3, \end{aligned} \quad (1)$$

$x = (x_1, x_2, x_3)$  - положение космического аппарата во вращающейся системе координат,  $y = (y_1, y_2, y_3)$  - импульсы,  $\|\cdot\|$  - евклидова норма.

Неуправляемая система (1) ( $u(x, y) = 0$ ) имеет гамильтонову форму с гамильтонианом:

$$H(x, y) = \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{3}{\|x\|} - \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{\|x\|^2}{2} + x_2y_1 - x_1y_2. \quad (2)$$

Точки либрации  $L_1$  и  $L_2$  во вращающейся системе координат неподвижны и имеют следующие координаты

$$\begin{aligned} L_1: x^* &= (1, 0, 0), & y^* &= (0, 1, 0). \\ L_2: x^{**} &= (-1, 0, 0), & y^{**} &= (0, -1, 0). \end{aligned}$$

Линеаризированные уравнения системы (1) имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + y_1, & \dot{y}_1 &= 8(x_1 - 1) + (y_2 - 1); \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + y_2, & \dot{y}_2 &= -4x_2 - y_1; \\ \dot{x}_3 &= y_3, & \dot{y}_3 &= -4x_3. \end{aligned} \quad (3)$$

и имеют следующий набор собственных значений

$$\lambda_1 = \sqrt{1 + 2\sqrt{7}}, \lambda_2 = -\sqrt{1 + 2\sqrt{7}}, \lambda_3 = i\sqrt{2\sqrt{7} - 1}$$

$$\lambda_4 = -i\sqrt{2\sqrt{7} - 1}, \lambda_5 = 2i, \lambda_6 = -2i.$$

Откуда, из положительности собственного числа  $\lambda_1 = \sqrt{1 + 2\sqrt{7}}$  следует неустойчивость точки либрации.

### 3.2 Численное моделирование

В данном разделе показано моделирование траектории движения КА из области точки  $L_1$  в область точки  $L_2$  и, посредством импульса, увеличиваем скорость в выбранной области пространства.

Ниже приведены результаты численного моделирования, показывающие неустойчивость коллинеарной точки либрации.

На рисунке 3.1 иллюстрируется неуправляемое движение, промоделированное в рамках уравнений (1) на временном промежутке 2 единицы времени с начальными координатами (4)

$$x_1 = 0.97, x_2 = 0, x_3 = 0, y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 0, T = 2 \quad (4)$$

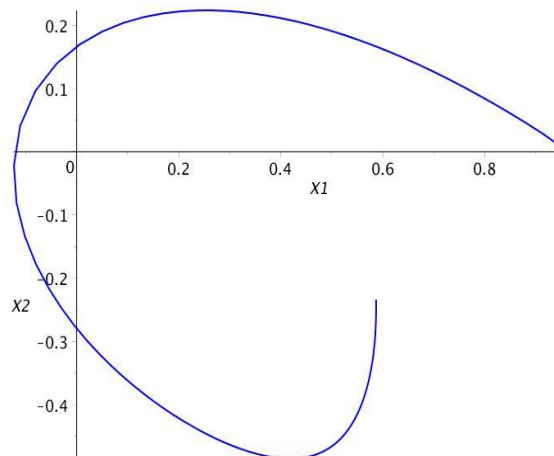


Рис.3.1 Неуправляемое движение на временном промежутке  $T = 2$

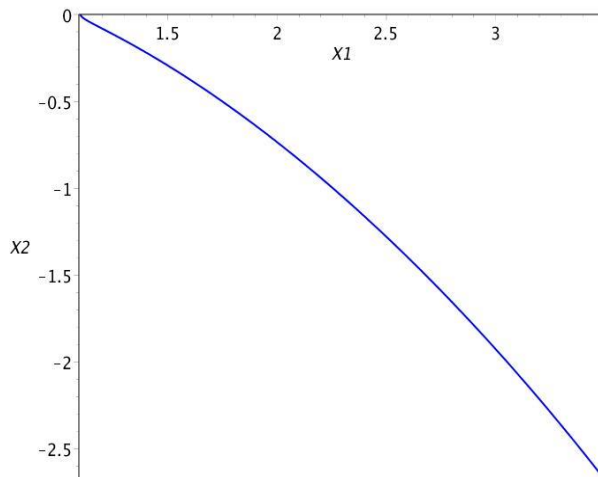


Рис.3.2 Неуправляемое движение с уходом из точки либрации к Солнцу

На рисунках 3.1 и 3.2 представлены характеры ухода из окрестности точки либрации. Связано это с различными энергетическими константами (значениями гамильтониана (2)) на траекториях движения системы (1).

На рисунке 3.3 представлен перелет из области точки либрации  $L_1$  в область точки либрации  $L_2$  за  $T = 6$  с изначальными данными (4) в неуправляемом режиме.

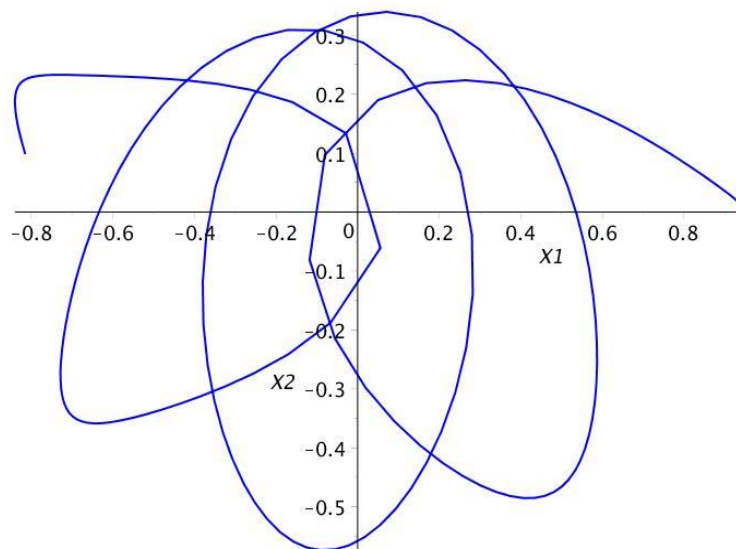


Рис.3.3 Смоделированный перелет из области точки  $L_1$  в область точки  $L_2$

В отличие от ограниченной задачи трех тел в рамках уравнений Хилла (1) точки либрации располагаются от Земли на одинаковом расстоянии и у них одинаковые энергетические константы. Этот факт в данной работе используется при реализации импульсных управлений, т.е. строятся такие приращения  $\Delta y_1$  и  $\Delta y_2$ , чтобы система (1) сохраняла свою энергетическую константу, т.е. значение гамильтониана в начальный момент.

Для начальных данных (4) считаем энергетическую константу в начале движения

$$\begin{aligned}
 H(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) := & \frac{1}{2} y_1^2 + \frac{1}{2} y_2^2 + \frac{1}{2} y_3^2 \\
 & - \frac{3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} - x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 + \frac{1}{2} x_3^2 + x_2 y_1 \\
 & - x_1 y_2
 \end{aligned}$$

-4.503683505

В данной работе ставится задача импульсного управления, т.е. в некоторых точках на траектории полета, выбираемые эмпирически, задаем мгновенное приращение скорости. Из геометрических соображений подбираем моменты времени  $T = 1.45; 1.485; 2.375$ . (рис. 3.4, 3.5, 3.6 соответственно), соответствующие точки назовём «первой», «второй» и «третьей».

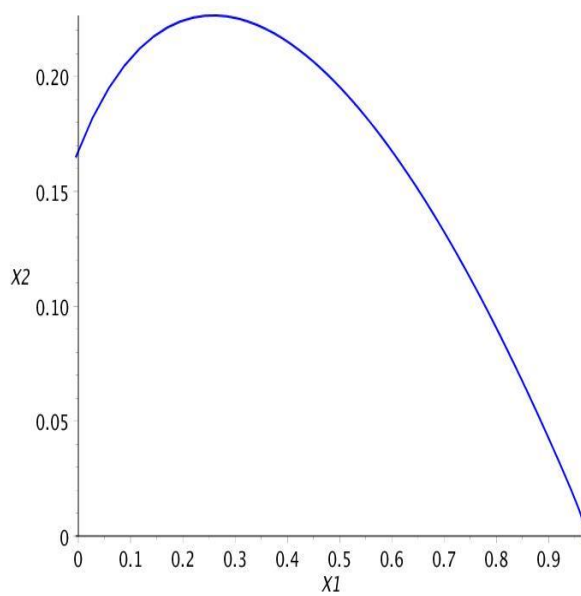


Рис.3.4 «Первая» точка при  $T=1.45$

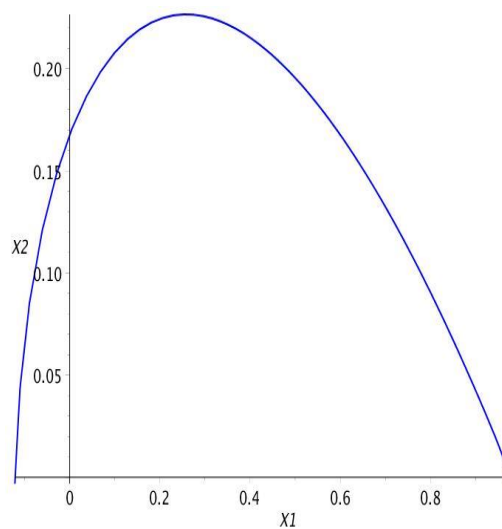


Рис. 3.5 «Вторая» точка при  $T=1.485$

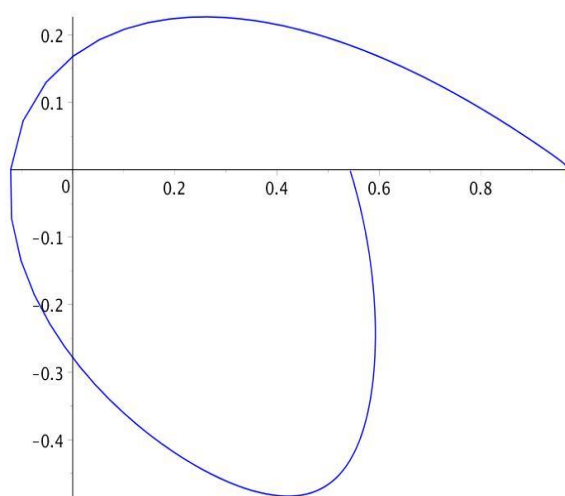


Рис.3.6 «Третья» точка при  $T=2.375$

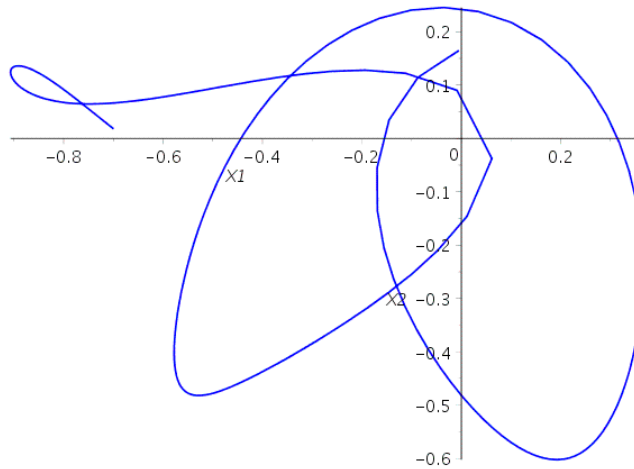
Рассмотрим первую точку. Задаем в этой точке приращение импульса  $\Delta y_1 = -0.4$ . Следом, посредством вычислений, представленных ниже, находим приращение импульса  $\Delta y_2$  так, чтобы энергетическая константа сохранилась.

```
x1 := -0.005126230218489965
x2 := 0.16475502504746997
x3 := 0
y1 := -5.0406572469804805
y3 := 0
H(y2) := -6.312860280 + 1/2 y2^2 + 0.005126230218489965 y2
1.897077709, -1.907330170
```

Следующим шагом моделируем движение с построенным импульсом на временном промежутке  $T = 4.45$ .

$$\begin{aligned} \text{sys} := & \frac{d}{dt} x1(t) = x2(t) + y1(t), \quad \frac{d}{dt} x2(t) = -x1(t) + y2(t), \\ & \frac{d}{dt} x3(t) = y3(t), \quad \frac{d}{dt} y1(t) = -\frac{3 x1(t)}{(x1(t)^2 + x2(t)^2 + x3(t)^2)^{3/2}} \\ & + 2 x1(t) + y2(t), \quad \frac{d}{dt} y2(t) = -\frac{3 x2(t)}{(x1(t)^2 + x2(t)^2 + x3(t)^2)^{3/2}} \\ & - x2(t) - y1(t), \quad \frac{d}{dt} y3(t) = -\frac{3 x3(t)}{(x1(t)^2 + x2(t)^2 + x3(t)^2)^{3/2}} \\ & - x3(t) \end{aligned}$$

```
fons := {x1(t), x2(t), x3(t), y1(t), y2(t), y3(t)}
F := proc(x_rkf45) ... end proc
```



```
[t = 1.45, x1(t) = -0.577470784097560, x2(t) =
-0.413163221161740, x3(t) = 0., y1(t) = 0.442759668531113,
y2(t) = -1.24250174431474, y3(t) = 0.]
```

Примечание - занимаемое время достижения окрестности точки Лагранжа  $L_2$  уменьшилось на 1.55 единиц времени, по сравнению с траекторией, представленной на рисунке 3.3.

Рассмотрим эвристически подобранный импульс, при котором КА долетит до области точки  $L_2$  за меньший промежуток времени, чем в предшествующем моделировании. При  $\Delta y_1 = -0.8$  и  $\Delta y_2 = 0.790886$  КА движется до окрестности второй точки либрации на временном промежутке  $T = 2.95$  (рис.3.7).

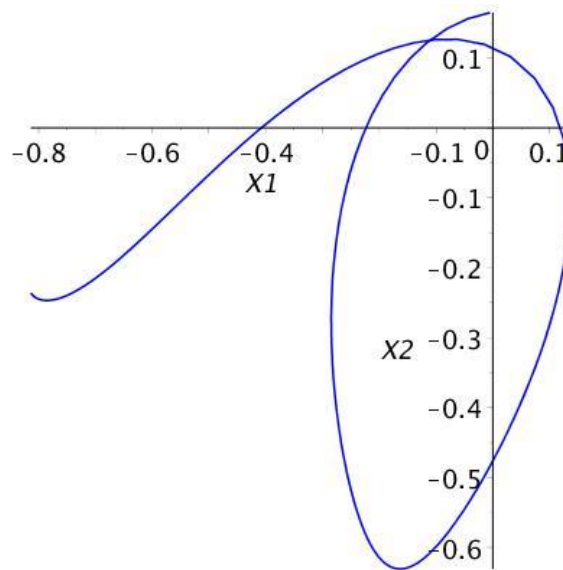


Рис.3.7 Моделирование перелёта из первой точки за время  $T = 1.5$

Рассмотрим «вторую» выбранную точку, которая достигается за время  $T = 1.485$  с начальными данными (4). Эвристически подобрали приращение импульса  $\Delta y_1 = -1$  и  $\Delta y_2 = 5.99537$  (рис.3.8), т.к. чем больший импульс берем, тем больше мы огибаем область  $L_2$  (рис.3.9). Достижение окрестности точки либрации осуществляется за время  $T = 3.985$ .



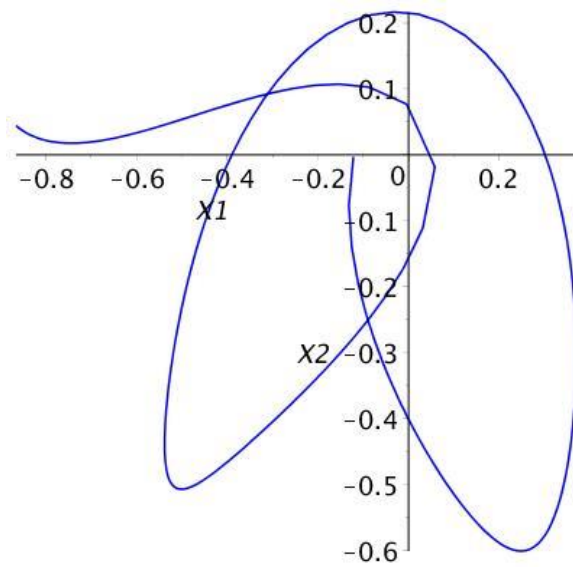


Рис.3.8 Моделирование перелёта из второй точки с приращением импульса  $\Delta u_1 = -1$

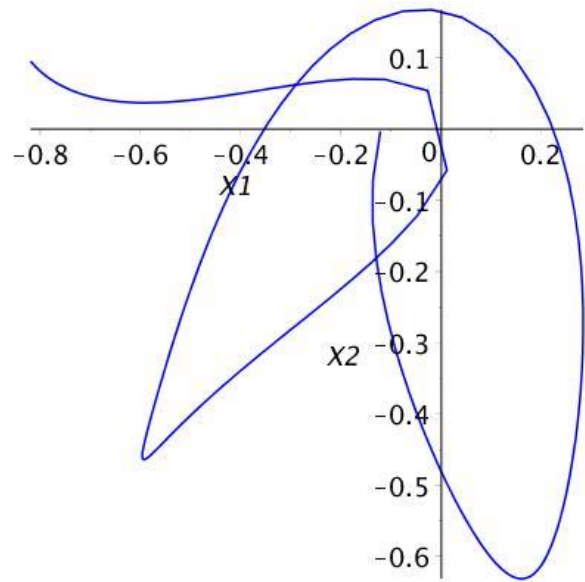


Рис.3.9 Моделирование перелёта из второй точки с приращением импульса  $\Delta u_1 = -1.4$

Рассмотрим «третью» точку, которая достигается за время  $T = 2.375$ . Максимально возможное приращение импульса составило  $\Delta u_1 = -1$  и  $\Delta u_2 = 0.996131$  (рис. 3.10). Достижением окрестности точки либрации происходит за время  $T = 3$ , общее время полета составляет 5.375 единиц времени.

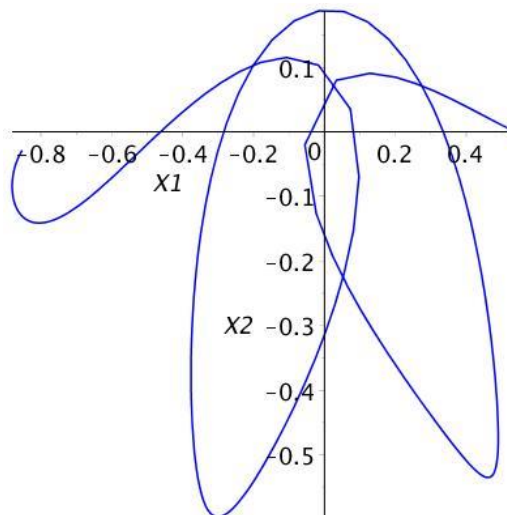


Рис.3.10 Моделирование перелёта из третьей точки с приращением импульса  $\Delta u_1 = -1$

Исходя из проделанного нами моделирования, можем сделать вывод, что самое быстрое маневрирование получается из «первой» точки.

### 3.3 Оптимальное управление в окрестности точки либрации $L_2$

На рис. 3.7, 3.8 и 3.10 представлены траектории, на которых достигается окрестность точки либрации  $L_2$  из «первой», «второй» и «третьей» условных точек, в которых были реализованы импульсные управления. В данном разделе изучается задача достижения точки либрации  $L_2$  в модели линейно-квадратичной задачи [4] с начальными данными, равными конечным положениям на рисунках 3.7, 3.8 и 3.10 в фазовом пространстве. В публикациях [5-6] представлен функционал вида

$$J(u) = \int_{t_0}^{\infty} (X^T EX + u^2) dt \rightarrow \min, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

для управляемой системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + y_1, & \dot{y}_1 &= 8x_1 + y_2 + u(x, y); \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + y_2, & \dot{y}_2 &= -4x_2 - y_1; \end{aligned} \quad (6)$$

где управление входит при  $\dot{y}_1$ , что означает, что оно действует по линии Земля-Солнце [5]. Такое управление обеспечивает асимптотическую устойчивость движения [4], что будет способствовать достижению малой окрестности точки либрации. Стабилизирующее управление в задаче (5)-(6) ищется в виде синтеза в рамках задачи линейно-квадратичной оптимизации и имеет вид

$$u_{opt} = -16.3523x_1 - 1.3926x_2 - 5.4944y_1 - 1.7580y_2 \quad (7)$$

Дальнейшее моделирование с управлением (7) реализуется в нелинейной управляемой системе (8)

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= y_1 + x_2, & \dot{y}_1 &= -\frac{3x_1}{\|x\|^3} + 2x_1 + y_2 + u_{opt} \\
\dot{x}_2 &= y_2 - x_1, & \dot{y}_2 &= -\frac{3x_2}{\|x\|^3} - x_2 - y_1 \\
\dot{x}_3 &= y_3, & \dot{y}_3 &= -\frac{3x_3}{\|x\|^3} - x_3
\end{aligned} \tag{8}$$

Отметим, что при реализации управляющего воздействия, управляемая система (8) теряет гамильтонов вид.

Смоделируем траекторию управляемого движения с начальными данными, полученными в результате движения по траектории на рисунке на рис. 3.7.

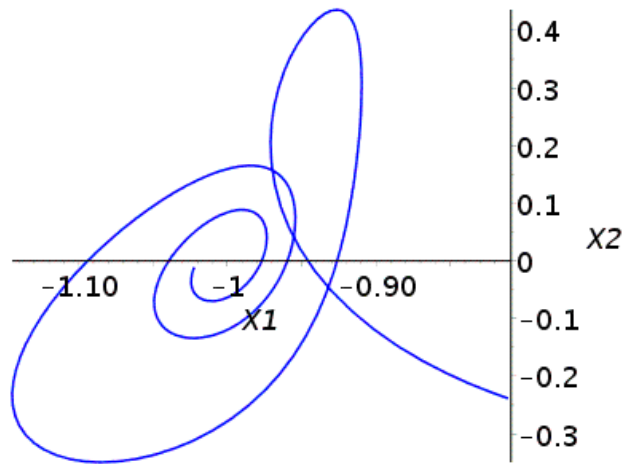
```

q1 := -16.3523
q2 := -1.3926
q3 := -5.4944
q4 := -1.7580
u(t) := -16.3523 x1(t) - 18.1103 - 1.3926 x2(t) - 5.4944 y1(t)
        - 1.7580 y2(t)

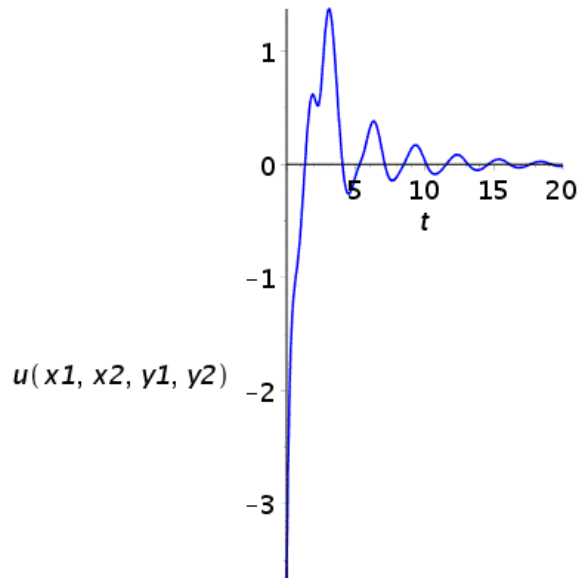
sys :=  $\frac{d}{dt} x1(t) = x2(t) + y1(t)$ ,  $\frac{d}{dt} x2(t) = -x1(t) + y2(t)$ ,
 $\frac{d}{dt} x3(t) = y3(t)$ ,  $\frac{d}{dt} y1(t) = -\frac{3 x1(t)}{(x1(t)^2 + x2(t)^2 + x3(t)^2)^{3/2}}$ 
- 14.3523 x1(t) - 0.7580 y2(t) - 18.1103 - 1.3926 x2(t)
- 5.4944 y1(t),  $\frac{d}{dt} y2(t) = -\frac{3 x2(t)}{(x1(t)^2 + x2(t)^2 + x3(t)^2)^{3/2}}$ 
- x2(t) - y1(t),  $\frac{d}{dt} y3(t) = -\frac{3 x3(t)}{(x1(t)^2 + x2(t)^2 + x3(t)^2)^{3/2}}$ 
- x3(t)

fons := {x1(t), x2(t), x3(t), y1(t), y2(t), y3(t)}
F := proc(x_rkf45) ... end proc

```



[ $t = 10.$ ,  $x1(t) = -1.02229145008917$ ,  $x2(t) = -0.0110703745103318$ ,  $x3(t) = 0.$ ,  $y1(t) = 0.0305364946542876$ ,  $y2(t) = -0.900084329526529$ ,  $y3(t) = 0.$ ]



>

Таким же образом моделируем траектории движения с управлением (7) с начальными данными, полученными в результате движения по траекториям на рис. 3.8 и 3.10. В результате получим ниже представленные графики (рис. 3.11, 3.12, 3.13, 3.14)

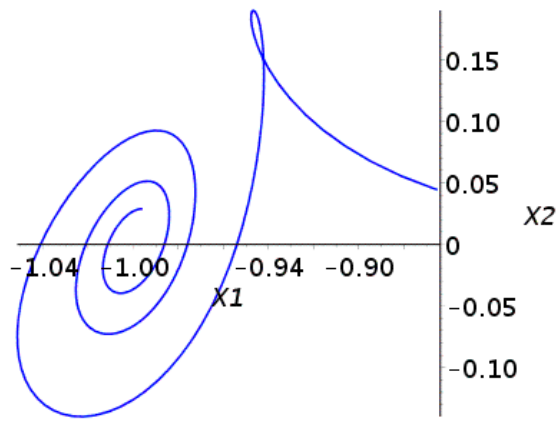


Рис. 3.11 Движение с управлением (7). Второе моделирование.

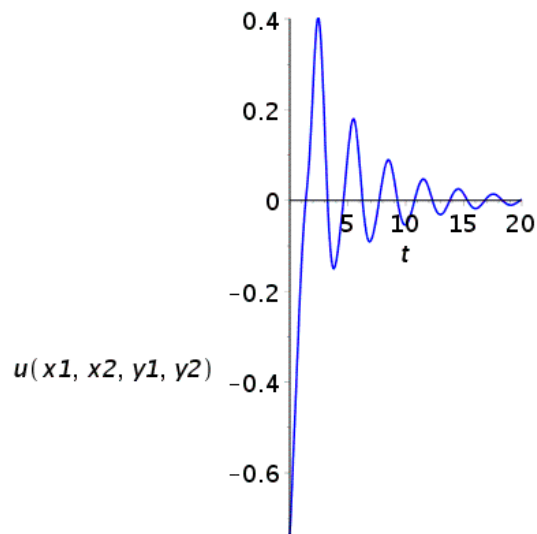


Рис. 3.12 График управления при движении по траектории, представленной на рисунке 3.11

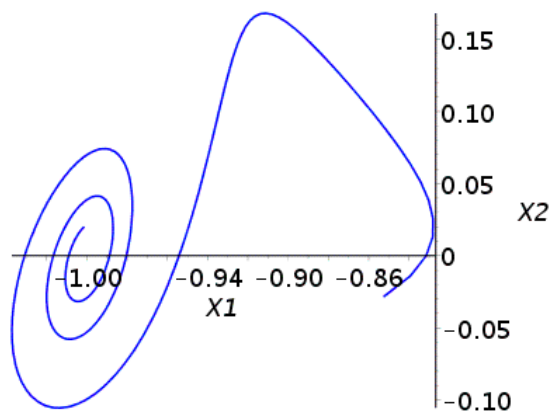


Рис. 3.13 Движение с управлением (7). Третье моделирование.

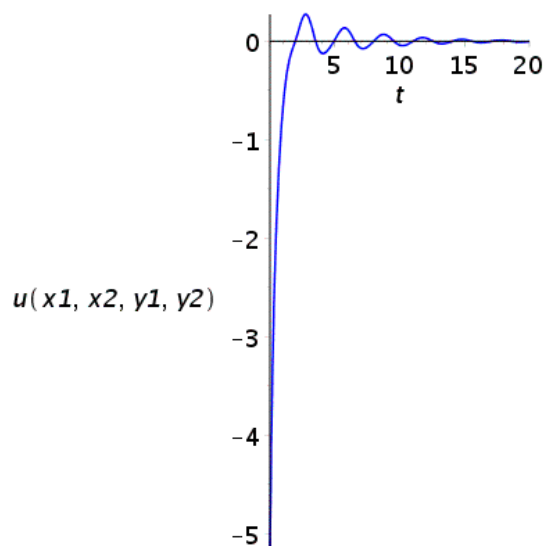


Рис. 3.14 График управления при движении по траектории, представленной на рисунке 3.13

Из представленных результатов численного моделирования видно, что оптимальное управление минимальное по модулю в начальный момент (рис. 3.12) получается, если за начальные данные взять фазовые координаты на конце траектории 3.8.

### 3.4. Условно-периодические орбиты

В 2001 г. к точке  $L_1$  системы Солнце-Земля был запущен КА “Genesis”. Перелёт в окрестность точки либрации был осуществлён по одноимпульсной схеме, при переходе на целевую квазипериодическую орбиту потребовалось выполнение небольшого манёвра. Периодичность выполнения манёвров поддержания орбиты КА в окрестности точки либрации составила около 90 суток. Траектория КА “Genesis” приведена на рис. 3.15

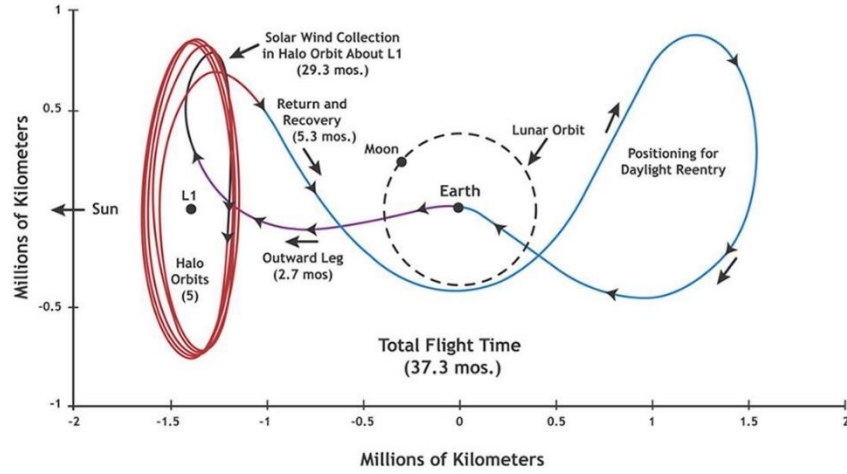


Рис. 3.15 Траектория полета КА «Genesis»

Мы приступили к освоению материала, посвященному теме условно-периодических орбит около окрестности точки либрации, базируясь на работах отечественных ученых И.С. Ильина и М.Л.Лидова [6-8]. В зарубежных и отечественных работах сформировалась определенная терминология, посвященная классификации условно-периодических орбит в окрестности неустойчивой точки. В данной работе мы будем использовать определение «гало-орбита», введенное М.Л. Лидовым. [6]

Для нашего случая решение линеаризованных уравнений приближения Хилла (3) будет выглядеть следующим образом [10]

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^1 (C e^{\lambda_1 t} + D e^{\lambda_2 t}) + k_1 A \sin(\varphi_e + \omega_e t) \\ b_1^2 (C e^{\lambda_1 t} - D e^{\lambda_2 t}) - k_2 A \cos(\varphi_e + \omega_e t) \\ -\frac{1}{2} B \cos(\varphi_n + 2t) \\ b_1^3 (C e^{\lambda_1 t} - D e^{\lambda_2 t}) - k_3 A \cos(\varphi_e + \omega_e t) \\ C e^{\lambda_1 t} + D e^{\lambda_2 t} + \frac{A}{v_1} \sin(\varphi_e + \omega_e t) \\ B \sin(\varphi_n + 2t) \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\text{где } \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{1 + 2\sqrt{7}}, \quad k_1 = \frac{b_1^2}{b_1^1}, \quad k_2 = \frac{v_2}{v_1}, \quad k_3 = \frac{v_3}{v_1}, \quad k_4 = \frac{b_1^3}{b_1^1},$$

$$\omega_1 = \sqrt{2\sqrt{7} - 1}, \quad v_1 = \frac{2 - \sqrt{7}}{1 + \sqrt{7}}, \quad v_2 = \frac{\sqrt{2\sqrt{7} - 1}}{1 + \sqrt{7}},$$

$$v_3 = \frac{17 - 7\sqrt{7}}{(1 + \sqrt{7})\sqrt{2\sqrt{7} - 1}}, \quad b_1^1 = -\frac{\sqrt{7} + 2}{\sqrt{7} - 1}, \quad b_1^2 = \frac{\sqrt{1 + 2\sqrt{7}}}{\sqrt{7} - 1},$$

$$b_1^3 = \frac{17 + 7\sqrt{7}}{(\sqrt{7} - 1)\sqrt{2\sqrt{7} + 1}}$$

где  $t$  – время, а  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, k_1, k_2, \lambda$  определяются массами Земли, Солнца и радиусом земной орбиты,  $A, B, C, D, \varphi_1, \varphi_2$  – постоянные интегрирования.

Если начальные данные подбирать так, чтобы  $C = 0$ , то с течением времени движение КА будет приближаться к движению по эллипсу в плоскости  $x_1 x_2$  и колебаниям по нормали к эклиптике. Эклиптика — это плоскость вращения Земли вокруг Солнца. Размеры предельной орбиты будут определяться параметрами  $A, B$ . Орбиты КА при  $C = D = 0$  принято называть гало-орбитами. [7]

Мы подобрали постоянные  $A$  и  $B$ , опираясь на практические рекомендации, представленные в работе [8].

### 3.5 Моделирование в нелинейной системе

Гало-орбиты определяются в линейной системе. При численном моделировании движения по гало-орбите в линейной системе КА будет находиться довольно долго на орбите. На рис. 3.19 такое движение представлено на временном промежутке порядка 7 единиц времени, что составляет приблизительно 1 год 2 месяца.

При численном моделировании движения КА по гало-орбите в нелинейной системе (1) наблюдается влияние нелинейности на характер движения, т.е. на уход с гало-орбиты через некоторое время (рис. 3.18). Таким



образом, для длительного пребывания КА в окрестности точки Лагранжа при численном моделировании в нелинейной системе (1), требуется разработать алгоритм обработки импульсных управлений, обеспечивающих пребывание КА на гало-орбите.

Мы находим начальные данные из системы (10), приравняв С и D к нулю и подбирая постоянные интегрирования А, В,  $\varphi_1, \varphi_2$ , и подставляем в следующую форму уравнений Хилла:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 + y_1 \\
 \dot{x}_2 &= x_1 + y_2 \\
 \dot{x}_3 &= y_3 \\
 \dot{y}_1 &= \frac{3x_1}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3}} + 2x_1 - y_1 \\
 \dot{y}_2 &= \frac{3x_2}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3}} - x_2 - y_1 \\
 \dot{y}_3 &= \frac{3x_3}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3}} - x_3
 \end{aligned} \tag{11}$$

Ниже представлен результат моделирование перелёта по гало-орбите (рис. 3.17, 3.18) со следующим набором начальных данных:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 1.1965416747, x_2 = -2.155293400, x_3 = -0.6560614388, y_1 \\
 &= 0.7635098625, \quad y_2 = 0.109625418, y_3 = -0.1220485441
 \end{aligned}$$

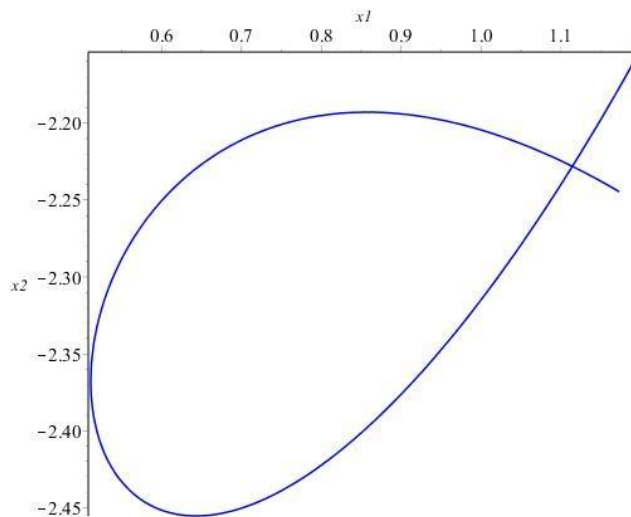


Рис. 3.17 Гало-орбита для нелинейной системы в 2D

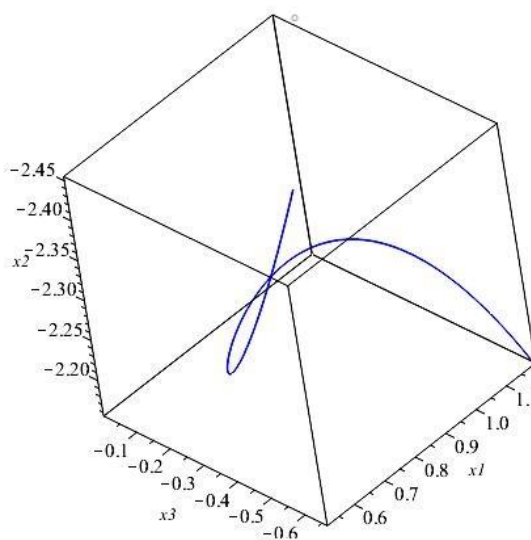


Рис. 3.18 Гало-орбита для нелинейной системы в 3D

### 3.5.1 Алгоритм расчёта движения

Далее в ходе работы мы, подбирая параметры  $A$ ,  $B$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ , моделируем движение таким образом, чтобы КА оставался на гало-орбите. Для реализации данной задачи мы задаем импульсное управление перед отклонением КА с орбиты. Для этого мы, зная координаты  $x_1$  и  $x_2$ , ищем новые значения  $A$  и  $\varphi_1$ , выражая из системы (10)

$$\begin{cases} k_1 A \sin(\varphi_1) = x_1 \\ -k_2 A \cos(\varphi_1) = x_2 \end{cases} \quad (12)$$

Полученные значения  $A$  и  $\varphi_1$  подставляем в систему (13), выраженную из системы (10)

$$\begin{cases} -k_3 A \cos(\varphi_1) = y_1 \\ A \sin(\varphi_1) = y_2 \end{cases} \quad (13)$$

Из системы (13) находим новые значения  $y_1$  и  $y_2$  и моделируем новый перелёт.

Мы взяли начальные значения  $A = -0.175$ ,  $B=0$ ,  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = \frac{\pi}{6}$ .

Представим алгоритм реализации импульсного управления:

1. Решая систему (10), получаем начальные координаты

$$x_1 = 0, x_2 = 0.09943875979, y_1 = -0.03522605035, y_2 = 0 \quad (14)$$

2. Подставляем полученные данные в линейную систему (3).

Получаем траекторию движения в линейном случае (рис. 3.19).

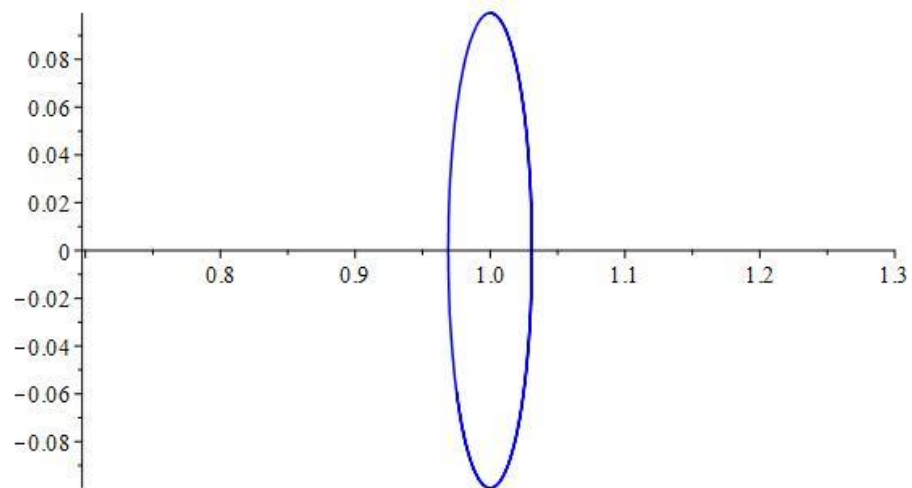


Рис. 3.19 Гало-орбита в линейной системе с начальными данными (14)

3. Т.к. в линейном случае удалось достичь маневрирования по гало-орбите, то можем подставить данные в систему (11). Получаем траекторию (рис. 3.20).

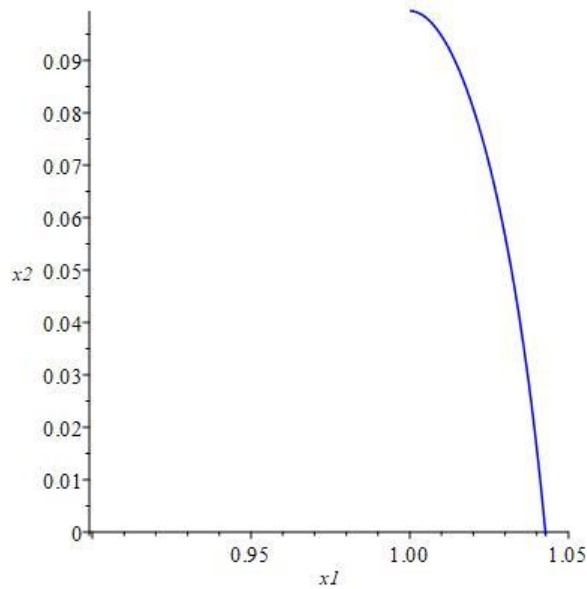


Рис. 3.20 Перелёт по гало-орбите в нелинейной системе с начальными данными (14)

4. Берём координаты на момент времени  $T=0.75$  из практических соображений и подставляем в систему (12) и находим новые значения  $A$  и  $\varphi_1$ , после чего подставляем их в систему (13).

Получаем:

$$\widetilde{y}_1 = 0.0002635976753$$

$$\widetilde{y}_2 = -0.2417629215$$

Необходимые приращения по  $y_1$  и  $y_2$  (импульсное управление), переводящее на гало-орбиту, выражаются через разность:

$$\Delta y_1 = y_1 - \widetilde{y}_1 = 0.034433250039719914$$

$$\Delta y_2 = y_2 - \widetilde{y}_2 = 0.0644331167729022$$

Отметим, единица скорости равна примерно 303,14 м/с.

5. Подставляем получившиеся значения в систему (3), проверяя тем самым правильность данных, и в систему (11), получая продолжение маневрирования КА. (рис. 3.21 и 3.22)

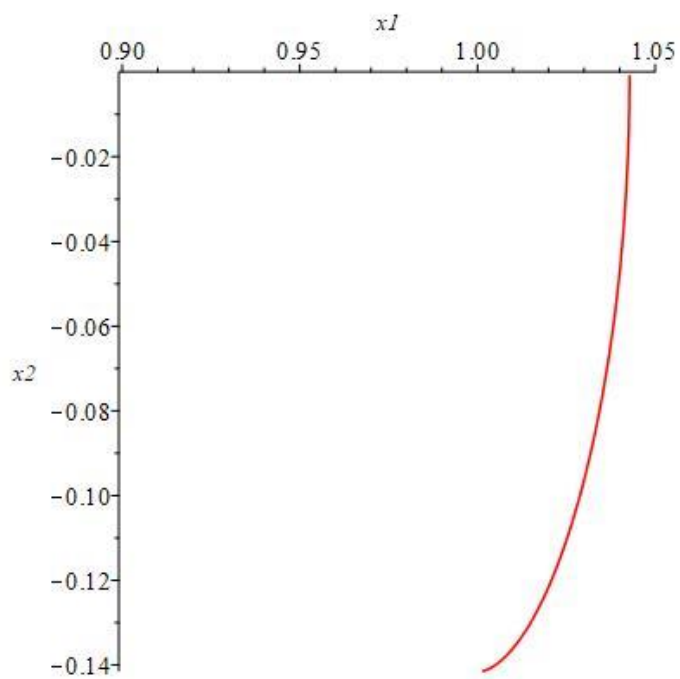


Рис. 3.21 Второй виток по гало-орбите

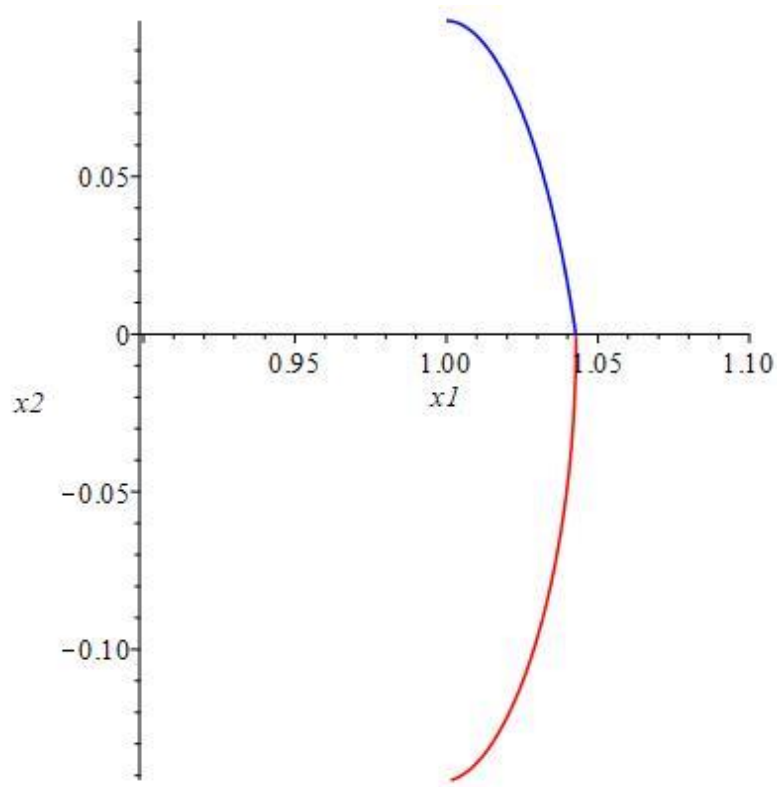


Рис. 3.22 Движение по гало-орбите с применением первого приращения

Всего было проведено 10 маневрирований, соответственно, совершено 9 импульсов, которые представлены в таблице 1. Измерение времени производится в единицах времени ( $1 \text{ а.е.} = \frac{\text{год}}{2\pi} \approx 2 \text{ месяца}$ ). [5]

Таблица 1

| $\Delta y_1$         | $\Delta y_2$       | $t$  | $t_{\text{общ}}$ |
|----------------------|--------------------|------|------------------|
| 0.034433250039719914 | 0.0644331167729022 | 0.75 | 0.75             |
| 0.0161266997134837   | 0.009075659265822  | 0.75 | 1.5              |
| 0.0773240717386412   | 0.12795786094888   | 0.75 | 2.25             |
| 0.0012832052069042   | -0.00365309206593  | 0.75 | 3                |
| 0.0176644286846145   | 0.030333886466726  | 1.5  | 4.5              |
| 0.02520942670628     | 0.03781390605954   | 2    | 6.5              |
| 0.0404865973360407   | 0.075010389847281  | 1.2  | 7.7              |
| 0.0780646171405155   | 0.12422778914692   | 1.75 | 9.45             |
| 0,0645096816122783   | 0.120006117498552  | 0.75 | 10.2             |

Общее движение представлено на рис. 3.23.

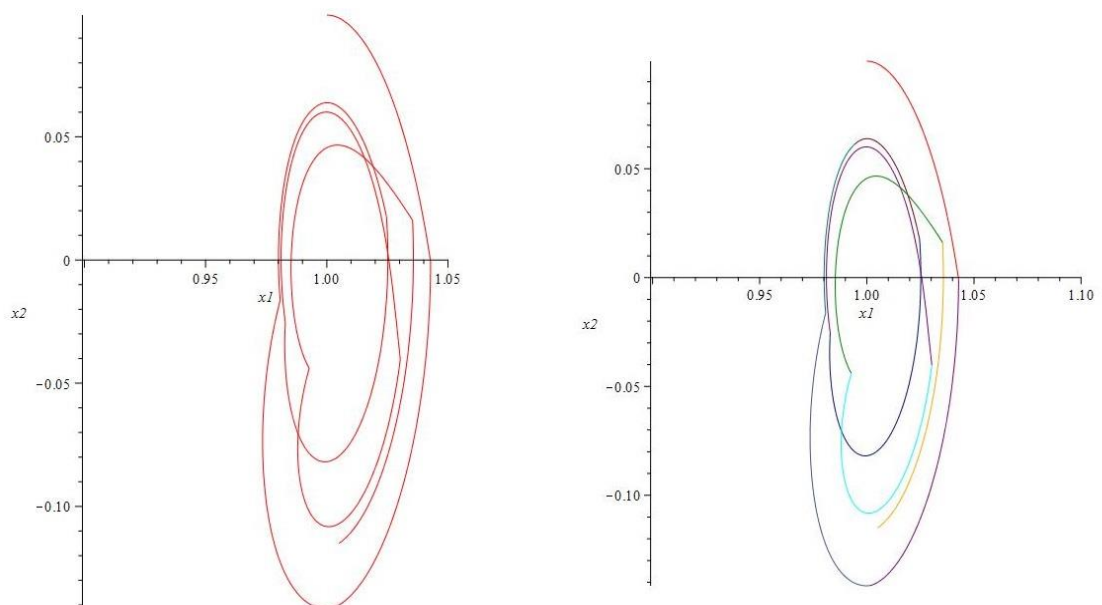


Рис. 3.23 Маневрирование по гало-орбите

### 3.5.2 Перелёт к окрестности $L_2$

Следующим шагом задачи является перелёт к окрестности второй точки либрации. Для этого задаём импульс  $\Delta y_1 = -1$  и достигаем окрестности  $L_2$  за 2.3 единицы времени. (рис. 3.24)

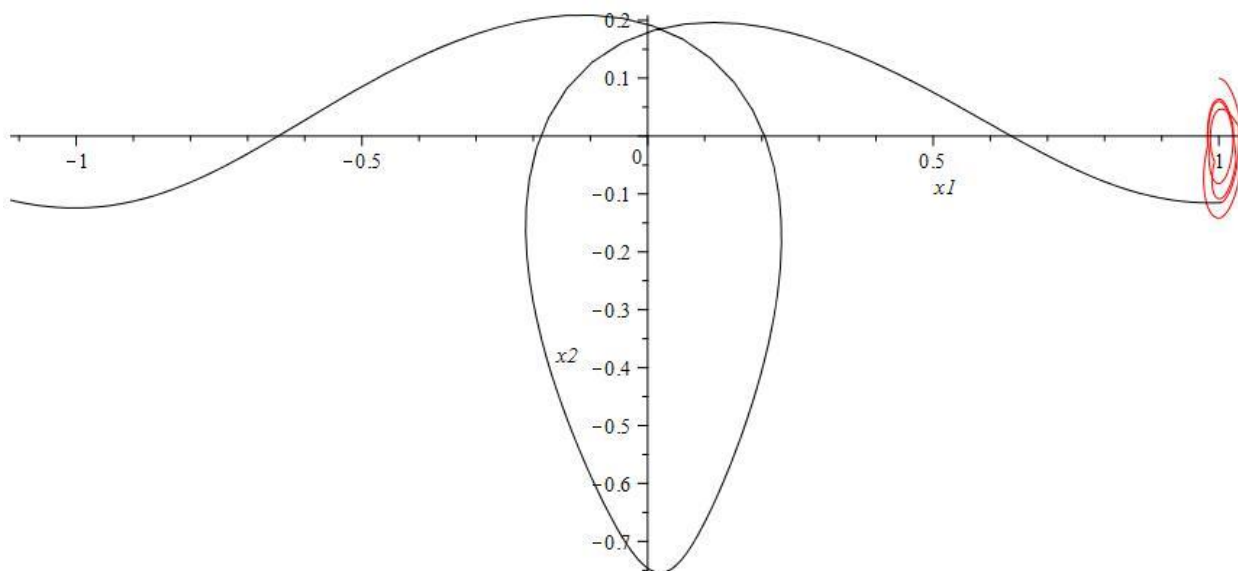


Рис.3.24 Перелёт с гало-орбиты к области второй точки либрации

Зададим на момент времени 0.55  $\Delta y_1 = -1$ ,  $\Delta y_2 = 1$  и достигаем окрестности  $L_2$  за 0.85 единицы времени. (рис. 3.25)

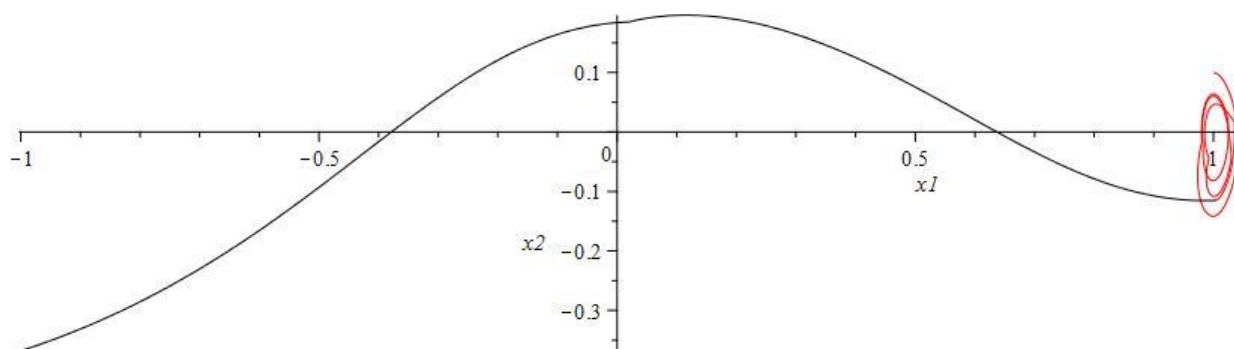


Рис.3.25 Перелёт с гало-орбиты к области второй точки либрации с импульсом

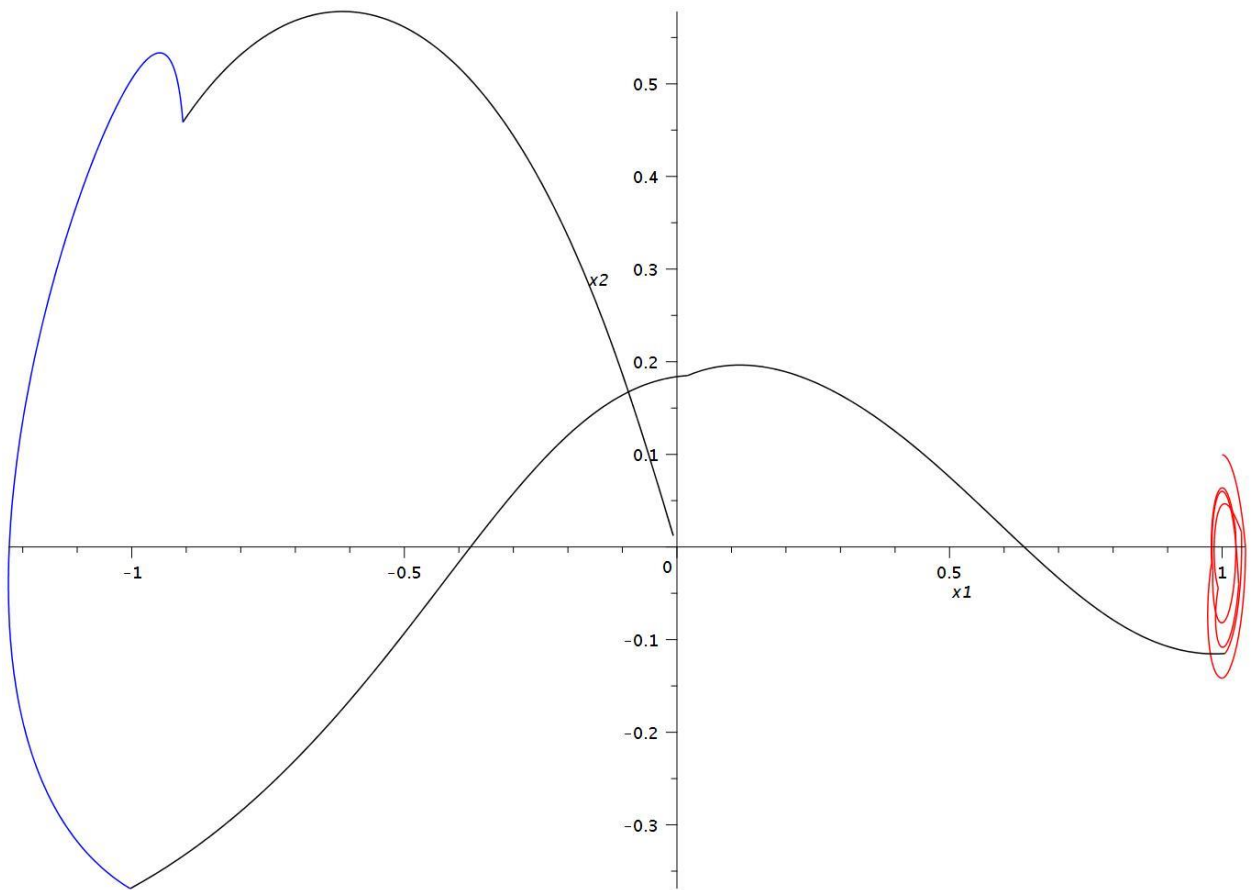


Рис. 3.26 Моделирование перелёта с окрестности точки  $L_1$  к окрестности точки  $L_2$



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- В работе исследована задача неуправляемого и управляемого перелета между окрестностями точек либрации системы Солнце-Земля;
- Построены импульсные управления, сохраняющие энергетическую константу на траекториях движения и проведен эксперимент с реализацией непрерывного оптимального управления в окрестности точки либрации;
- Был разработан алгоритм для длительного пребывания КА в окрестности первой точки либрации на гало-орбитах при реализации серии импульсных управлений;
- Проведено численное моделирование движения КА по гало-орбитам с помощью пакета Maple в нелинейной модели Хилла. Дана оценка энергетических затрат для управлений;
- Совершено маневрирование КА с гало-орбиты в окрестность второй точки либрации.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
2. A. Shmyrov, V. Shmyrov Controllable orbital motion in a neighborhood of collinear libration point // Applied Mathematical Sciences, 2014. Vol. 8, № 10. P. 487-492.
3. Шмыров В. А. Стабилизация управляемого орбитального движения космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либрации L1 // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2005. Вып. 2. С. 193 - 199.
4. Зубов В. И. Лекции по теории управления 2-е изд., испр. - СПб. : Лань, 2009. 496 с
5. Шмыров А.С., Шмыров В.А. Синтез оптимального управления орбитальным движением в окрестности коллинеарной точки либрации // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2012. № 4. С. 139-146.
6. Шмыров А. С., Шмыров В. А., Shmyrov A. S., Shmyrov V. A. Qualitative properties of controllable orbital motion in the neighborhood of collinear libration point // 7th International Symposium on Classical and Celestial Mechanics (CCMECH7). Book of abstracts. 17-21 October 2011 Moscow, Russia, 23-28 October 2011 Siedlce, Poland — Siedlce, — 2011. — P. 83-84

7. Лидов М.Л., Ляхова В.А., Н.М. Тесленко Траектории полёта Земля – Луна – Гало-орбита в окрестности точки  $L_2$  системы Земля-Солнце // Космические исследования, Т. 30, Вып. 4, 1992
8. Ильин И.С. Выбор номинальной орбиты КА «Миллиметрон» из семейства периодических орбит в окрестности точки либрации  $L_2$  системы Солнце-Земля // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 46. 21 с. URL
9. Ильин И. С., Тучин А.Г. Квазипериодические орбиты в окрестности точки либрации  $L_1$  системы Солнце-Земля // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 6. 28 с
10. A. Shmyrov, D. Shymanchuk, Maneuvering in near-Earth space with the use of the collinear libration points, 2015 International Conference on Mechanics - Seventh Polyakhov's Reading, art. no. 7106777, 2015.