

Санкт-Петербургский государственный университет  
**Математическое и информационное обеспечение  
экономической деятельности**

Калин Сергей Александрович

Выпускная квалификационная работа магистра

**Моделирование и оптимизация цепи поставок со  
случайным спросом**

Направление: 010400

Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,  
кандидат физ.-мат. наук,  
доцент  
Лежнина Е.А.

Санкт-Петербург

2019

## Содержание

Введение .....	3
Постановка задачи.....	6
Обзор литературы .....	7
Математическая модель.....	13
Определение оптимальных размеров партий .....	21
Анализ параметров на чувствительность.....	29
Программная реализация.....	33
Пример .....	36
Выводы .....	41
Заключение .....	42
Таблица обозначений .....	44
Список литературы .....	53
Приложения .....	56

## Введение

В современном мире одним из важнейших конкурентных преимуществ любой организации является способность своевременно и качественно удовлетворять запросы клиентов. Каждая уважающая себя клиенто-ориентированная компания стремится не только оправдывать, но и регулярно превосходить ожидания потребителей. При этом любая успешная организация никогда не забывает и о своей прибыли, поэтому кроме сохранения и развития лояльности клиентов, старается по возможности её максимизировать.

Существует несколько способов поддержания своевременного удовлетворения запросов потребителей и увеличения прибыли, одним из которых является уменьшение и оптимизация расходов при производстве и транспортировке. Ценным и эффективным инструментом для достижения этой цели является грамотное моделирование и оптимизация цепей поставок. Именно благодаря этим действиям появляется возможность с наименьшими затратами осуществлять доставку необходимых потребителю товаров в указанное время, в требуемом количестве, в нужное место и высокого качества.

В литературе встречается множество определений логистической цепи поставок, в данной работе под цепью поставок будем понимать взаимосвязанный набор ресурсов, организаций и процессов, начинающийся с получения сырья и простирающийся через доставку продукции или услуг конечному пользователю с помощью транспортных систем. Типичная цепочка поставок может включать в себя различные этапы, в которые входят потребители, предприятия розничной торговли, оптовики, дистрибьюторы, производители, поставщики комплектующих или сырья. Основная цель существования любой цепочки поставок – это удовлетворение потребностей клиентов в процессе получения прибыли. Именно поэтому не стоит недооценивать важность моделирования цепочки поставок и необходимо уделять этому процессу особое внимание.

Под оптимизацией логистической цепи поставок будем понимать нахождение таких параметров цепи, которые будут гарантировать минимальные расходы компании при заданных условиях. Число задач оптимизации в цепях поставок чрезвычайно велико и их состав многообразен. Однако все задачи в конечном итоге направлены на оптимизацию ресурсов, повышение конкурентоспособности компании и уменьшению её расходов. С помощью моделирования и оптимизации цепи поставок организация может существенно сократить свои расходы на всех этапах цепи, ускорить процесс транспортировки, а появившиеся деньги вложить в развитие производства или направить на дивиденды.

В реальной жизни при моделировании цепи поставок мы часто сталкиваемся с различными сложностями. Наглядным примером, является часто встречающееся, сочетание внешних и внутренних неопределенностей, которое существенно препятствует оптимальному распределению ресурсов. Внешние неопределенности могут быть связаны со случайными колебаниями спроса, так как потребительский спрос зачастую оказывается непостоянным. Внутренние же с внезапными отказами оборудования, нехваткой рабочей силы, поставкой некачественного сырья и т.д. Недостаточное внимание к проблемам, постоянно возникающих, неопределенностей при моделировании цепи поставок приводит не только к краткосрочным финансовым потерям, но и к ухудшению общего восприятия цепи поставок рынком, что влечет за собой снижение капитализации компании и негативно отражается на результатах операционной деятельности, а также может привести к оттоку клиентов. Поэтому нельзя обходить эти проблемы стороной. Именно учет всех неопределенностей может помочь существенно повысить надежность функционирования цепи поставок компании, снизить её расходы и максимизировать прибыль.

К сожалению, в современном мире многие компании не уделяют достаточного внимания оптимизации цепи поставок и тем более учету часто возникающих внешних и внутренних неопределенностей, несмотря на то, что

именно эти факторы влияют на формирование значительной части растрчиваемых ресурсов. Зачастую организации считают нецелесообразным выделять средства на разработку и оптимизацию цепи поставок, полагая, что это бесполезная трата денег. Как следствие, компании теряют огромные денежные ресурсы на производство, транспортировку и хранение продукции, не успевают вовремя поставлять продукцию и теряют доверие клиентов, увеличивая свои расходы и уменьшая возможную итоговую прибыль.

Опираясь на перечисленные выше факторы можно с уверенностью говорить, что проблема моделирования и оптимизации цепи поставок с учетом неопределенностей очень актуальна на сегодняшний день. Многие организации ежедневно не оптимально распределяют свои ресурсы, тратят большие деньги на транспортировку и хранение продукции и сырья, упуская возможную прибыль. Именно поэтому существует острая необходимость в разработке надежных методов, позволяющих оптимизировать имеющиеся ресурсы, уменьшить расходы и увеличить прибыль компании, учитывая постоянно возникающие внутренние и внешние неопределенности.

## Постановка задачи

В рамках данной работы решалась следующая задача: построение оптимизационной модели цепи поставок со случайным спросом, приближенной к реальной жизни. Разработка её программной реализации и проверка на корректность.

Для решения поставленной задачи необходимо было пройти следующие этапы:

- проанализировать существующие классы моделей цепей поставок и способы их оптимизации;
- построить модель цепи поставок с внешней и внутренней неопределенностью;
- приблизить модель к реальной жизни, отразить все этапы производства, учесть случайность спроса;
- оптимизировать, построенную модель;
- разработать приложение, реализующее модель на практике и помогающее клиенту оптимизировать ресурсы и затраты внутри цепи поставок;
- проанализировать чувствительность модели к различным параметрам;
- протестировать разработанную модель и приложение на реальных данных.

## Обзор литературы

Изучение моделирования и оптимизации логистических систем является неотъемлемой частью производства и, следовательно, имеет большое практическое значение.

Отсутствие достойного контроля за надежностью функционирования цепи поставок и учетом различных неопределенностей приводит не только к ухудшению имиджа компании, но и к огромным потерям как денежных, так и материальных ресурсов. Именно поэтому в научной среде эти вопросы не могли остаться без внимания. Авторы многих научных публикаций, осознавая важность рассмотренных проблем, предлагают различные подходы по их решению.

В издании [1] автор раскрывает нам само понятие логистики, излагая её современную концепцию, задачи, функции и предпосылки развития. В работе описываются участники логистического процесса, дается краткий исторический очерк развития логистики, раскрываются методы, за счет которых обеспечивается повышение эффективности хозяйственной деятельности с помощью рациональной организации материальных средств и экономический эффект после их использования.

Работа [18] охватывает большой круг вопросов, связанных с логистикой. Авторы описывают её роль и содержание в реалиях современного бизнеса, рассказывают о практических приемах интегрированного логистического менеджмента и его ключевых концепциях. Подробно разбираются вопросы формирования структуры логистики и общего руководства логистической деятельностью.

В научных трудах исследователи делят логистические модели на несколько категорий. При этом не всегда эти категории оказываются эквивалентными. Классификации логистических моделей представлены в работах [8-10].

В работе [9] рассматривается разделение логистических моделей на 3 класса, каждый из которых делится на три вида, состоящие из групп. Деление

на виды происходит в зависимости от степени учета в анализируемой модели логистических операций, а деление на группы определяется её сложностью. Данная классификация достаточно глубоко проработана, но тем не менее у неё имеется как минимум один существенный недостаток. Она является фасеточной, т.е. одна модель может одновременно входить сразу в несколько классов или групп. Таким образом, возникает сложность при разделении всех моделей на непересекающиеся классы.

Автор работы [10] делит все логистические модели на две группы: транзакционные и аналитические. Первые основаны на обработке исходных данных о системе поставок компании, их накоплении и связи, а также на составлении и распространении отчетов, суммирующих эти данные. Вторые используют описательные и оптимизационные модели для оценки проблемы планирования системы поставок. Недостатком использованного автором подхода, является отсутствие дальнейшего развития представленной классификации.

Иерархическая классификация оптимизационных моделей управления цепями поставок представлена в [8]. Ссылаясь на необходимые уточнения классификации моделей и методов в [10], исследователь предлагает шестиуровневую иерархию классов. На каждом уровне модели делятся по соответствующим признакам: по бизнес-функциям, степени определенности, математическим свойствам, охватываемому временному интервалу, виду переменных и бизнес-процессам. Автор работы убежден, что данная иерархическая классификация служит основой для выбора метода и средства решения конкретного класса задач, а также помогает понять область применения тех или иных моделей.

Многочисленные научно-исследовательские работы, связанные с логистикой, посвящены моделированию и оптимизации цепей поставок. В своих трудах исследователи описывают различные методы построения математических моделей. Проводят классификацию этих моделей по

определенным признакам. Сравнивают полученные модели и предлагают решения для их оптимизации.

Например, автор работы [2] рассматривает цепь поставок с позиции объектно-ориентированного системного подхода. В статье разработана классификация цепей поставок, представлен вариант сетевой модели в системе SCM и выполнен её сравнительный анализ с традиционной сетевой моделью. В работе [3] исследуется влияние внешней и внутренней неопределенности на функционирование цепи поставок. Описывается модель, учитывающая не только случайные колебания спроса, но и производительность технологических мощностей. Автор рассматривает способы оптимизации совместных планов выпуска готовой продукции и её доставки в пункты назначения с учетом влияния факторов внешней и внутренней неопределенности.

Разработка моделирования многоуровневой цепи поставок представлена в работах [6,7]. Для построения математической модели цепи авторы используют комбинацию модели управления запасами Вагнера-Уайтина и классической транспортной задачи математического программирования в динамической постановке.

Моделирование стратегического развития цепей поставок, основанное на методах онтологического инжиниринга, комплексного системно-динамического и имитационного моделирования, рассматривается в работе [11]. Исследователь описывает проблематику стратегического управления цепи поставок, анализирует основы эффективных и модельных решений в их управлении. Методологические основы интегрированного планирования и моделирования цепи поставок представлены в работе [12]. Автор уделяет особое внимание моделям линейного программирования, а также моделям смешанного целочисленного программирования, приводя примеры компьютерного моделирования цепей поставок.

Статьи [20-22] посвящены изучению надежности функционирования цепей поставок.

В [20] рассматриваются проблемы обеспечения устойчивости цепей поставок. Изучаются причины их неустойчивости в рыночной среде и специфика обеспечения надежности. Проводится сравнительный анализ методов моделирования. В [21] исследуется поддержание надежности логистических цепей на основе вероятностного подхода. Работа включает в себя анализ основных рисков, таких как сбои в процессе формирования партии, при транспортировке, недостаточном качестве продукции. Автор выводит формулы, которые помогают создать оптимальный резерв пропускной способности звена цепи поставок. В [22] предлагается комплекс показателей и методов для оценки надежности цепи поставок. Рассматриваются способы повышения надежности на основе принципов рационального резервирования и комплекса мер по оптимизации и совершенствованию отдельных составляющих цепи поставок. Совокупность этих методов в комбинации с оценками надежности позволяют организовать постоянную систему контроля и оптимизации надежности рассматриваемой цепи поставок.

В ходе моделирования цепи поставок можно выделить несколько составляющих. Одним из таких составляющих является прогнозирование рыночного спроса на продукцию. Этот компонент является одним из ключевых элементов при разработке моделей цепей, поэтому этой проблеме в науке уделяется особое внимание.

Статья [19] посвящена критериям правильного выбора метода прогнозирования рыночного спроса. Автор утверждает, что среди исследователей существует два мнения. Первое говорит о том, что количественный анализ является приоритетным при прогнозировании, а качественный выступает в роли дополнения. Второе мнение утверждает, что только их синтез может гарантировать качественное и надежное прогнозирование. В статье рассматриваются принципы, на которые должны опираться методы и проводится сравнительный анализ некоторых из них. Концепция прогнозирования рыночного спроса в условиях конкуренции

представлена в работе [23]. Автор рассматривает различные модели прогнозирования и оценки прогноза на конкурентном рынке.

Методы прогнозирования рыночного спроса подробно описаны в работах [13,14].

Систематизированное изложение методов прогнозирования объемов продаж, наиболее часто применяемых на практике, представлено в работе [13]. Большое внимание уделяется прикладному значению рассматриваемых методов и интерпретации получаемых результатов. К сожалению, в статье выделяется недостаточное количество времени объяснению математико-статистического аппарата, но этот недостаток компенсируется ссылками на специальную литературу. В [14] описываются математико-статистический аппарат прогнозирования. Авторы подробно разъясняют методы прогнозирования и имитационного моделирования.

В статье [15] рассматривается модифицированный подход к прогнозированию спроса. Этот подход предполагает применение специальных статистических методов обработки результатов наблюдений не только за доходами, ценами и расходами, но и выявление других доминантных факторов, влияющих на качественные характеристики продукции.

Очередной составляющей при моделировании цепи поставок является правильное моделирование управления запасами. Эта проблема является не менее важной, чем прогнозирование спроса, и поэтому не остается без внимания и в научных литературе.

Рассмотрение основных математических моделей управления запасами представлено в [17]. В работе автор поднимает вопрос о структуризации запасов. Кроме статистических, динамических и вероятностных моделей управления запасами, исследованию подвергаются и многопродуктовые модели.

В работе [16] представлены основные модели управления запасами в условиях изменяющейся потребности. Модели, основанные на

использовании классических моделей теории управления запасами, рассматриваются в монографиях [4,5].

Задача оптимизации системы управления запасами в формате модели принятия решений в условиях неопределенности рассматривается в работе [12]. Считается, что цена за единицу товара и его годовое потребление неизвестны, а учитываются только случайные потери прибыли. Модель, представленная в работе, позволяет анализировать стратегии диверсификации поставок между предложениями поставщиков.

Опираясь на многочисленные труды научной литературы, многие из которых опубликованы совсем недавно, можно с уверенностью сказать, что вопросам исследования логистических систем в последнее время уделяется большое внимание. Таким образом, моделирование и оптимизация цепи поставок со случайным спросом является крайне актуальной темой для исследования.

## Математическая модель

Построим математическую модель, описывающую цепь поставок некоторого производства.

Будем рассматривать компанию, имеющую следующие активы:

1. предприятие-производитель некоторой продукции со складом
2. пункты реализации данной продукции.

Для изготовления продукции компании необходимы комплектующие, которые приобретаются у предприятий-поставщиков других компаний за отдельную плату.

Опишем цепь поставок, которая осуществляется на рассматриваемом производстве.

**Поставщики.** Пусть имеются  $I$  сторонних предприятий, производящих комплектующие элементы, которые поставляются на единственное предприятие-изготовитель, выпускающее готовую продукцию. Каждое  $i$ -е предприятие-поставщик производит  $L_i$  видов комплектующих из  $R_i$  видов имеющихся производственных ресурсов. Будем предполагать, что все предприятия-поставщики выпускают различные комплектующие.

Обозначим через  $x_{li}$  количество комплектующих  $l$ -го вида  $l = 1 \dots L_i$ , планируемых для выпуска  $i$ -м предприятием-поставщиком, для доставки на предприятие изготовитель готовой продукции.

В реальном мире при производстве не обойтись без бракованной продукции, поэтому введём коэффициент  $\alpha_{li}$  – обозначающий долю исправных комплектующих  $l$ -го вида при производстве на предприятии-поставщике  $i$ . Обозначим через  $x'_{li}$  количество комплектующих  $l$ -го вида, которое необходимо произвести на предприятии  $i$ , чтобы выполнить план производства, т.е.

$$x_{li} = \alpha_{li} x'_{li}$$

Единица комплектующего  $l$ -го вида на предприятии  $i$  изготавливается за время  $t_{li}$ . Общее время на изготовление всех комплектующих на предприятии  $i$  будет выражаться следующей формулой:

$$T_i = \sum_{l=1}^{L_i} t_{li} x'_{li}$$

**Доставка комплектующих на предприятие, изготавливающее готовую продукцию.** Все комплектующие поступают на единственное предприятие-изготовитель.

Доставка может осуществляться как напрямую, так и через  $J$  промежуточных пунктов перевалки  $P'_1, P'_2, \dots, P'_J$ , которые имеют собственные склады с ограниченной вместимостью. Это могут быть транспортные хабы, таможни и т.п. Пропускная способность (или вместимость складов) перевалочного пункта  $P'_j$  составляет  $\omega'_j, j = \overline{1, J}$ .

Пусть  $x_{li}^j$  - количество комплектующих  $l$ -го вида предприятия  $i$ , которое поставляется через промежуточный пункт  $P'_j$ .

Количество комплектующих  $l$ -го вида, планируемое для доставки напрямую со складов предприятия поставщика в пункт назначения, обозначим  $x_{li}^S$ .

Время перевозки комплектующих с  $i$ -го стороннего предприятия напрямую до предприятия-изготовителя обозначается  $T_i^S$ . Время перевозки комплектующих с  $i$ -го стороннего предприятия через промежуточный пункт  $j$  до предприятия-изготовителя обозначается  $T_i^j$ .

$$T_i^j = t_{ij} + t_j + t_{j1}$$

где  $t_{ij}$  – время перевозки до  $j$ -го перевалочного пункта,  $t_j$  – время простоя на перевалочном пункте,  $t_{j1}$  – время перевозки с перевалочного пункта до предприятия-изготовителя.

Производить транспортировку напрямую или через промежуточные пункты, решает сама компания. Её решение зависит от стоимости перевозки

и приоритетным является более дешевый вариант. Обозначим за  $T_i^{Ch}$  – время, за которое осуществляется перевозка, выбранным компанией способом.

Тогда общее минимальное время на изготовление всех необходимых комплектующих и их транспортировка до предприятия изготовителя при условии, что заказ пришел одновременно на все предприятия изготовители будет выражаться следующей формулой:

$$T_1 = \max_i (T_i + T_i^{Ch})$$

**Производство продукции.** Из комплектующих на предприятии выпускается продукция  $K$  наименований. Для того, чтобы произвести единицу конечной продукции  $k$ -го вида нам необходимо затратить  $a_{lik}$ ,  $l = \overline{1, L_i}$ ,  $k = \overline{1, K}$ , комплектующих  $l$ -вида.

Обозначим через  $y_k$  – количество готовой продукции  $k$ -го вида, запланированное для выпуска. Вспомним, что при реальном производстве не обойтись без брака. Пусть  $\beta_k$  – коэффициент, показывающий долю исправной продукции  $k$ -го вида,  $y'_k$  – количество продукции  $k$ -го вида, которое необходимо произвести на предприятии-изготовителе, чтобы выполнить план производства т.е.

$$y_k = \beta_k y'_k$$

Тогда количество комплектующих  $l$ -го вида произведенных на  $i$ -ом предприятии изготовителе комплектующих и доставленных на предприятие изготовитель готовой продукции для производства товаров удовлетворяет следующему выражению:

$$x_{li} = \sum_{k=1}^K y'_k a_{lik}$$

Единица продукции  $k$ -го вида изготавливается за время  $t_k$ . Общее время на изготовление всей продукции будет выражаться следующей формулой:

$$T' = \sum_{k=1}^K t_k y'_k$$

**Хранение комплектующих.** До использования все комплектующие хранятся на складе производителя. Однако случаются ситуации, когда на складе производителя нет возможности хранить все комплектующие и возникает необходимость арендовать сторонние помещения. Пусть  $x_l^0$  - количество комплектующих  $l$ -го вида, которое может содержаться на складе производителя. Как только имеющийся склад переполняется, производитель принимает решение использовать сторонние склады за дополнительную плату. Количество комплектующих  $l$ -го вида с предприятия  $i$ , которое будет храниться на стороннем складе  $g$  ( $g = 1, \dots, G$ ) выражается следующей формулой:

$$x_{lg} = x_{li} - x_l^0$$

Пусть  $c_{lig}$ - стоимость хранения комплектующего  $l$ -го вида с предприятия поставщика  $i$  на складе  $g$ . Тогда затраты на хранение комплектующих на сторонних складах будут равны следующей величине:

$$R_{\text{хр1}} = \sum_{g=1}^G \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^L c_{lig} x_{lg}$$

В работе будем предполагать, что предприятие-производитель может хранить комплектующие только на сторонних складах и стоимость хранения комплектующего на любом из сторонних складов одинакова.

**Доставка готовой продукции.** Вся произведенная продукция доставляется в  $M$  конечных пунктов реализации  $D_1, D_2, \dots, D_M$ . При этом доставка может осуществляться как напрямую, так и через  $N$  пунктов перевалки  $P''_1, P''_2, \dots, P''_N$ , которые имеют собственные склады с ограниченной вместимостью. Пропускная способность перевалочного пункта  $P''_n$  составляет  $\omega''_n$ ,  $n = \overline{1, N}$ . Пусть  $y_{km}^n$  - количество готовой продукции  $k$ -го вида, которое планируется для перевалки в пункте  $P''_n$  при перевозке в конечный пункт  $D_m$ , будем учитывать, что пропускная способность промежуточных пунктов перевалки не должна быть превышена. Вся поступившая в перевалочные пункты продукция должна быть вывезена.

Количество готовой продукции  $k$ -го вида, которое планируется для доставки напрямую со складов производителя в пункт назначения  $D_m$  обозначим  $y_{km}^S$ .

Время перевозки продукции с предприятия-изготовителя напрямую до пункта назначения  $D_m$  обозначается  $T_m^S$ . Время перевозки продукции с предприятия-изготовителя до пункта назначения  $m$  через промежуточный пункт  $n$ , включая простой на пункте, обозначается  $T_m^n$ :

$$T_m^n = t_n^1 + t_n + t_{nm}$$

где  $t_n^1$  – время перевозки до  $n$ -го перевалочного пункта,  $t_n$  – время простоя на перевалочном пункте,  $t_{nm}$  – время перевозки с перевалочного пункта до пункта назначения  $D_m$ .

Производить транспортировку продукции напрямую или через промежуточные пункты, решает сама компания. Её решение так же, как и в случае с комплектующими, зависит от стоимости перевозки и приоритетным является менее затратный вариант. Обозначим за  $T_m^{Ch}$  – время, за которое осуществляется перевозка, выбранным компанией способом на пункт реализации  $D_m$ .

Тогда общее время на изготовление и перевозку всей продукции с предприятия изготовителя до всех пунктов назначения будет выглядеть следующим образом:

$$T'' = \max_m (T' + T_m^{Ch})$$

**Хранение продукции.** Также, как и комплектующие, продукцию надо где-то хранить. Пусть  $y_{km}^0$  - количество продукции  $k$ -го вида, которое может содержаться на складе пункта назначения. Как только склад переполняется, компания принимает решение арендовать сторонний склад за дополнительную плату. Тогда количество продукции  $k$ -го вида, имеющееся в распоряжении пункта назначения  $D_m$ , которое будет храниться на стороннем складе  $h$  ( $y_{kh}$ ), выражается следующей формулой:

$$y_{kmh} = y_{km} - y_{km}^0$$

где  $y_{km}$  - общее количество произведенной продукции  $k$ -го вида в пункте назначения  $D_m$ .

Пусть  $c_{kmh}$  - стоимость хранения продукции  $k$ -го вида на складе  $h$ . Тогда расходы на хранение продукции на сторонних складах будут равны:

$$R_{xp2} = \sum_{h=1}^H \sum_{k=1}^K c_{kmh} y_{kmh}$$

В работе будем предполагать, что пункт реализации может хранить продукцию только на сторонних складах и стоимость хранения продукции на любом из сторонних складов одинакова.

**Стоимость транспортировки.** Пусть  $c_{i1}^{(1)}$  – затраты на доставку партии комплектующих с  $i$ -го предприятия-поставщика на предприятие-изготовитель;  $c_{ij1}^{(2)}$  – стоимость перевозки партии комплектующих с  $i$ -го предприятия-поставщика, включая его перевалку и хранение в промежуточном пункте  $P'_j$ . Размер одной партии заказа с предприятия  $i$  будем обозначать:  $q_{комп,i}$ . Тогда транспортные расходы на перевозку комплектующих до предприятия-изготовителя будут выглядеть следующим образом:

$$R_{тр1} = \sum_{i=1}^I c_{i1}^{(1)} \frac{\sum_{l=1}^{L_i} x_{li}^S}{q_{комп,i}} + \sum_{i=1}^I c_{ij1}^{(2)} \frac{\sum_{l=1}^{L_i} x_{li}^j}{q_{комп,i}}$$

Пусть  $c_{1m}^{(4)}$  – стоимость перевозки продукции  $k$ -го вида со склада предприятия в пункт назначения  $D_m$ .  $c_{1nm}^{(5)}$  – стоимость перевозки партии готовой продукции  $k$ -го вида, включая её перевалку в пункт  $P''_n$ . Размер одной партии заказа будем обозначать:  $q_{прод,m}$ . Тогда транспортные расходы на перевозку готовой продукции в пункты  $D_m$  примут вид:

$$R_{тр2} = \sum_{m=1}^M c_{1m}^{(4)} \frac{\sum_{k=1}^K y_{km}^S}{q_{прод,m}} + \sum_{m=1}^M c_{1nm}^{(5)} \frac{\sum_{k=1}^K y_{km}^n}{q_{комп,i}}$$

**Общие расходы.** Пусть  $c_{ii}^{(0)}$  - затраты на приобретение единицы комплектующей  $l$ -го вида у предприятия  $i$ .  $c_k^{(3)}$  затраты на производство единицы готовой продукции  $k$ -го вида. Тогда выражение для суммарных расходов компании, связанных с производством, хранением комплектующих и готовой продукции, её перевалкой и перевозкой от предприятия-изготовителя в пункты назначения можно представить следующим образом:

$$R_c = \sum_{i=1}^I \sum_{l_i=1}^{L_i} c_{li}^{(0)} \sum_{k=1}^K y'_k a_{lik} + R_{\text{тр1}} + \sum_{k=1}^K c_k^{(3)} y'_k + R_{\text{тр2}} + R_{\text{хр1}} + R_{\text{хр2}}$$

**Спрос на пунктах реализации.** Будем предполагать, что величина спроса на  $k$ -й вид продукции в пункте потребления с номером  $m$  в рассматриваемый период времени  $t$  является случайной величиной  $d_{km}$  с нормальным законом распределения с математическим ожиданием  $MO_{km}$  и среднеквадратическим отклонением  $\sigma_{km}$  все случайные величины  $d_{km}$  непрерывны и независимы друг от друга.

Обозначим через:

$$v_{km} = \begin{cases} y_{k1m}, & \text{если поставка напрямую} \\ y_{k1nm}, & \text{если через пункт перевалки} \end{cases}$$

$$m = \overline{1, M}, k = \overline{1, K}$$

- суммарное количество готовой продукции  $k$ -го вида, которое планируется для доставки в пункт назначения  $D_m$  в соответствии с планом, составленным до реализации случайного спроса  $d_{km}$ . Могут возникнуть следующие варианты. Если  $v_{km} < d_{km}$ , то спрос на продукцию не будет удовлетворен, и величина:

$$R^0 = \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^M p_{km} \max(0, d_{km} - v_{km})$$

показывает суммарные потери предприятия из-за потери потенциальной прибыли. Здесь  $p_{km}$  – продажная цена единицы продукции  $k$ -го вида на пункте потребления  $D_m$ .

В противоположном случае  $v_{km} > d_{km}$ , т.е. возникает необходимость в хранении избытка продукции, и тогда величина потерь будет выражаться следующим образом:

$$R^1 = \sum_{k=1}^K s_k \sum_{m=1}^M \max(0, v_{km} - d_{km})$$

где  $s_k$  – расходы на хранение или утилизацию единицы продукции. Если срок годности мал, то  $s_k$  равняется стоимости изготовления единицы продукции плюс стоимость её утилизации.

Предполагается, что политика компании направлена на полное удовлетворение спроса потребителей. Т.е. лучше доставить больше, чем доставить меньше.

**Задача.** Наша цель – увеличить прибыль компании, управляя логистической цепочкой, то есть максимизировать функцию:

$$Pr = \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^M p_{km} v_{km} - R(q_{\text{комп},i}, q_{\text{прод},m})$$

где  $R(q_{\text{комп},i}, q_{\text{прод},m})$  - общие расходы компании, вычисляемые следующим образом, при этом один из элементов  $R^0$  или  $R^1$  будет равен нулю:

$$R(q_{\text{комп},i}, q_{\text{прод},m}) = R_c + R^0 + R^1$$

Чтобы увеличить доход компании, необходимо уменьшить логистические издержки. Таким образом, нужно найти решение задачи

$$R \xrightarrow{q_{\text{комп},i}, q_{\text{прод},m}} \min$$

Таким образом, необходимо вычислить оптимальный план транспортировки, размеры и периодичность заказов комплектующих и производимой продукции каждого вида, чтобы минимизировать затраты в цепи.

## Определение оптимальных размеров партий

Для решения поставленной задачи разобьем её на несколько подзадач. Первая подзадача будет заключаться в определении оптимальных размеров партий комплектующих с каждого завода-поставщика комплектующих на завод-изготовитель конечной продукции и времени их заказа. Вторая подзадача будет заключаться в определении оптимальных размеров партий продукции для транспортировки с предприятия-изготовителя конечной продукции на пункты реализации и времени их заказа.

Предполагаем, что прогнозируемый спрос подчиняется нормальному закону распределения и нам известно, математическое ожидание товаров  $MO_{km}$ , которые купят потребители на каждом пункте реализации на определенном отрезке времени, а также среднеквадратическое отклонение спроса  $\sigma_{km}$ . Попробуем найти оптимальный размер партий товара и комплектующих. Разобьем цепь поставок на два этапа:

1. Заказ, транспортировка комплектующих на предприятие-изготовитель конечной продукции и их хранение;
2. Изготовление конечной продукции на предприятии-изготовителе, транспортировка продукции в пункты реализации и её хранение.

В реальном мире при любом производстве не обойтись без перебоев. Они могут быть связаны с природными катастрофами, забастовками отказом оборудования и т.п. Поэтому для нахождения оптимального размера при формировании заказа будут учитываться так называемые сбои. Под сбоями будем подразумевать перебои в поставках. Для 1 этапа цепи сбои будут связаны с перебоями в поставках от предприятий-изготовителей комплектующих, для 2 этапа с перебоями в поставках от предприятия-изготовителя продукции.

Первыми, кто сформулировал модель EOQD со сбоями в поставках, были небезызвестные Парлар и Беркин [26]. Однако их модель содержала некоторые неточности и не решалась в замкнутой форме.

Позже Снайдер [27] аппроксимировал стоимость цикла поставки и вывел формулу для нахождения оптимального размера заказа, которой мы и будем пользоваться в данной работе.

**Нахождение оптимальных размеров партий.** Будем называть интервал, в котором поставщик нормально функционирует, активным интервалом (периодом), а интервал, в котором нарушается его функционирование неактивным интервалом (периодом).

Длительность активного и неактивного периода распределены экспоненциально. Активный период поставщика комплектующих с параметром  $\lambda_i$  (возможность срыва поставок, *disruption rate*), неактивный с параметром  $\mu_i$  (скорость восстановления, *recovery rate*). Активный период предприятия по производству продукции с параметром  $\gamma$ , неактивный с параметром  $\eta$ .

Вероятность того, что предприятие-поставщик  $i$  находится в неактивном интервале, учитывая результаты, полученные Снайдером, в произвольный момент времени равна:

$$\alpha_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}$$

Вероятность того, что предприятие-изготовитель конечной продукции находится в неактивном интервале, учитывая результаты, полученные Снайдером, в произвольный момент времени равна:

$$\beta = \frac{\gamma}{\gamma + \eta}$$

Согласно формуле, полученной Снайдером[27] оптимальный размер заказа должен находиться следующим образом.

$$Q = \frac{\sqrt{(\beta'Dh)^2 + 2h\mu(KD\mu + D^2p\beta')} - \beta'Dh}{h\mu}$$

Где  $\beta'$  - вероятность того что поставщик находится в неактивном состоянии,  $D$  – уровень спроса в рассматриваемый период,  $h$  - стоимость

хранения за единицу в рассматриваемый период,  $\mu$  – параметр неактивного периода,  $K$  – стоимость заказа,  $p$  – стоимость продукции.

Пользуясь этой формулой найдем оптимальные размеры заказа комплектующих для предприятия-изготовителя конечной продукции и готовой продукции для пунктов реализации.

Начнем с первого этапа, т.е. с заказа комплектующих.

Вероятность того, что поставщик комплектующих находится в неактивном состоянии, мы обозначили  $\alpha_i$ . Уровень спроса на комплектующие определенного поставщика будет равен потребности в этих комплектующих, зависит от математического ожидания спроса в рассматриваемом периоде и удовлетворяет следующему выражению:

$$D = x_{li} = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K MO_{km} a_{lik}$$

При том очевидно, что комплектующие, которые будут транспортироваться на предприятие-изготовитель, также будут равняться  $D$ , т.е.:

$$D = x_{li} = x_{li}^S \text{ или } D = x_{li} = x_{li}^J$$

Стоимость хранения за единицу в рассматриваемый период будет выражаться следующей формулой:

$$h = c_{lig}$$

Параметр неактивного периода предприятия поставщика  $i$ ,  $\mu = \mu_i$ . . Если комплектующие поставляются напрямую, то стоимость заказа будет равна стоимости транспортировки комплектующего напрямую  $K = c_{i1}^{(1)}$ , а стоимость продажи комплектующих  $p = \frac{\sum_{m=1}^M p_{km}}{M \times a_{lik}}$ .

Тогда согласно формуле, полученной Снайдером[27], оптимальный размер заказа комплектующих вида  $l$  с предприятия  $i$  будет находится следующим образом:

$$q_{\text{комп},l,i}^* = \frac{\sqrt{(\alpha_i x_{li}^S c_{lig})^2 + 2c_{lig}\mu_i(c_{i1}^{(1)} x_{li}^S \mu_i + x_{li}^{S^2} \frac{\sum_{m=1}^M p_{km}}{M \times a_{lik}} \alpha_i)}}{c_{lig}\mu_i} - \frac{\alpha_i x_{li}^S c_{lig}}{c_{lig}\mu_i}$$

Если комплектующие доставляются через пункты перевалки, то стоимость заказа будет равна  $K = c_{ij}^{(2)}$  и размер заказа будет вычисляться следующим способом:

$$q_{\text{комп},l,i,j}^* = \frac{\sqrt{(\alpha_i x_{li}^j c_{lig})^2 + 2c_{lig}\mu_i(c_{ij1}^{(2)} x_{li}^j \mu_i + x_{li}^{j^2} \frac{\sum_{m=1}^M p_{km}}{M \times a_{lik}} \alpha_i)}}{c_{lig}\mu_i} - \frac{\alpha_i x_{li}^j c_{lig}}{c_{lig}\mu_i}$$

Теперь рассмотрим определение оптимальных размеров заказа для каждого из пунктов реализации.

Вероятность того, что предприятие-производитель конечной продукции находится в неактивном состоянии, равняется  $\beta$ .

Уровень спроса на продукцию вида  $k$  будет связан с математическим ожиданием спроса в рассматриваемом периоде в выбранном пункте реализации с номером  $m$  и удовлетворяет следующему выражению:

$$D = MO_{km}$$

Очевидно, что продукция вида  $k$ , которая будет транспортироваться на рассматриваемый конечный пункт реализации, также будет равняться  $D$ , т.е.:

$$D = y_{km}^S \text{ или } D = y_{km}^n$$

Стоимость хранения за единицу продукции вида  $k$  на выбранном пункте реализации в рассматриваемый период будет выражаться следующей формулой:

$$h = c_{km}h$$

Параметр неактивного периода предприятия-производителя конечной продукции,  $\mu = \eta$ . Если продукция вида  $k$  поставляется напрямую, то стоимость заказа будет равна стоимости транспортировки конечной продукции напрямую  $K = c_{1m}^{(4)}$ , а стоимость продажи продукции вида  $k$   $p = p_{km}$ .

Тогда оптимальный размер заказа продукции вида  $k$  для магазина под номером  $m$  с предприятия изготовителя конечной продукции будет выражаться по следующей формуле:

$$q^*_{\text{прод},k,m} = \frac{\sqrt{(\beta M O_{km} c_{kmh})^2 + 2c_{kmh}\eta(c_{1m}^{(4)} M O_{km}\eta + M O_{km}^2 p_{km}\beta)}}{c_{kmh}\eta} - \frac{\beta M O_{km} c_{kmh}}{c_{kmh}\eta}$$

Если конечная продукция доставляется через пункты перевалки, то стоимость заказа будет равна  $K = c_{1nm}^{(5)}$  и размер заказа будет вычисляться следующим способом:

$$q^*_{\text{прод},k,n,m} = \frac{\sqrt{(\beta M O_{km} c_{kmh})^2 + 2c_{kmh}\eta(c_{1nm}^{(5)} M O_{km}\eta + M O_{km}^2 p_{km}\beta)}}{c_{kmh}\eta} - \frac{\beta M O_{km} c_{kmh}}{c_{kmh}\eta}$$

**Определение моментов заказа.** После того, как мы рассчитали оптимальные размеры партий заказов, возникает логичный вопрос, в какие моменты нам необходимо их формировать. Очевидно, что заказывать надо в тот момент, когда ещё существует остаток комплектующих(продукции), и этого остатка хватит, чтобы удовлетворять спрос до момента прибытия нового заказа. Но при этом не будем забывать, что спрос является случайной величиной.

Для начала рассмотрим пункты реализации конечной продукции. Математическое ожидание показывает ожидаемый спрос на продукцию вида  $k$  на рассматриваемом интервале в пункте реализации с номером  $m$ . Тогда, чтобы удовлетворять ожидаемый спрос, в момент формирования заказа в распоряжении пункта реализации должно оставаться как минимум  $M O_{km} \frac{T_{m2}}{t}$  конечной продукции вида  $k$ , где  $T_{m2}$  – время производства и доставку продукции в пункт назначения с номером  $m$ .

При этом необходимо учитывать, что в распоряжении компании находится не только продукция, хранящаяся на складах, но и продукция, которая находится в пути и ещё не прибыла в пункт реализации.

Несмотря на известное математическое ожидание, величина спроса всё равно остается случайной. Так как политика рассматриваемой компании направлена на удовлетворение спроса всех потребителей, необходимо вычислить страховой запас, который позволил бы обеспечить продукцией потребителей поверх математического ожидания. При вычислении этого страхового запаса обратимся к [28], автор в работе также рассматривает модель с нормально распределенным случайным спросом, и его формулу вычисления страхового запаса можно адаптировать для нашей разработанной модели.

Опираясь на формулу в [28] страховой запас продукции вида  $k$  на пункте реализации конечной продукции с номером  $m$  должен быть равен следующей величине:

$$SS_{\text{прод},k,m} = z_0 \sigma_{km} \sqrt{\frac{T_{m2}}{t}}$$

где  $z_0$  находится из таблицы нормального распределения.

Тогда в момент формирования заказа конечной продукции вида  $k$  на пункте реализации с номером  $m$  должна оставаться продукция в следующем объеме:

$$ROP_{\text{прод},k,m} = MO_{km} \frac{T_{m2}}{t} + z_0 \sigma_{km} \sqrt{\frac{T_{m2}}{t}}$$

Формирование заказа будет происходить следующим образом. Изначально на пункте реализации под номером  $m$  имеется необходимое количество продукции. Как только размер продукции на складах достигает  $ROP_{\text{прод},k,m}$  или компания понимает, что в следующий момент времени количество продукции станет меньше чем  $ROP_{\text{прод},k,m}$ , формируется заказ и отправляется на предприятие-производитель готовой продукции. Проходит

единица времени, теперь компания понимает, что в распоряжении пункта реализации находится продукция со складов и через  $T_{m2} - 1$  поступит количество продукции равное размеру заказа. Если количество всей описанной продукции равно  $ROP_{\text{прод},k,m}$  или компания понимает, что в следующий момент времени количество продукции будет меньше  $ROP_{\text{прод},k,m}$ , то делается следующий заказ, иначе компания ждет ещё единицу времени и т.д.

Теперь рассмотрим, в какой момент стоит формировать заказ комплектующих на предприятии-изготовителе конечной продукции.

Как уже отмечалось, математическое ожидание показывает ожидаемый спрос на продукцию вида  $k$  на рассматриваемом интервале в пункте реализации с номером  $m$ . Комплектующие связаны с продукцией следующей формулой:

$$x_{li} = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K MO_{km} a_{lik}.$$

Тогда, чтобы удовлетворять ожидаемый спрос на комплектующие, в момент формирования заказа предприятию поставщику комплектующих  $i$ , в распоряжении предприятия-производителя конечной продукции должно быть, как минимум  $\sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K MO_{km} a_{lik} \frac{T_{i1}}{t}$  комплектующих этого вида. Где  $T_{i1}$  – время на производство и доставку комплектующих с предприятия  $i$ .

Так как величина спроса на продукцию является случайной величиной, опираясь на формулу в [28] страховой запас комплектующих, поставляемых с предприятия-поставщика  $i$ , на предприятии-производителе конечной продукции должен быть равен следующей величине:

$$SS_{\text{комп},l} = z_0 \sigma_{li} \sqrt{\frac{T_{i1}}{t}}$$

где  $\sigma_{li} = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \sigma_{km} a_{lik}$  – среднеквадратичное отклонение спроса на комплектующие, поставляемые предприятием-поставщиком  $i$  в рассматриваемый период, а  $z_0$  находится из таблицы нормального распределения.

Тогда в момент формирования заказа комплектующих с предприятия поставщика  $i$  в распоряжении предприятия-производителя конечной продукции должны оставаться комплектующие данного вида в следующем объеме:

$$ROP_{\text{комп},l,i} = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K MO_{km} a_{lik} \frac{T_{i1}}{t} + z_0 \sigma_{li} \sqrt{\frac{T_{i1}}{t}}$$

Формирование заказа будет происходить следующим образом. Изначально на предприятии-производителе конечной продукции имеется необходимое количество комплектующих. Как только размер комплектующих на складах достигает  $ROP_{\text{комп},l,i}$  или компания понимает, что в следующий момент времени количество комплектующих станет меньше чем  $ROP_{\text{комп},l,i}$ , формируется заказ и отправляется на предприятие-поставщик комплектующих под номером  $l$ . Проходит единица времени, теперь компания понимает, что в распоряжении предприятия-производителя конечной продукции находятся комплектующие со складов и через  $T_{i1} - 1$  поступит количество комплектующих, равное размеру заказа. Если количество всех описанных комплектующих равно  $ROP_{\text{комп},l,i}$  или компания понимает, что в следующий момент времени количество комплектующих будет меньше  $ROP_{\text{комп},l,i}$ , то делается следующий заказ, иначе компания ждет ещё единицу времени и т.д.

Как в формуле расчета точки формирования заказа конечной продукции, так и в формуле расчета точки формирования заказа комплектующих первое слагаемое является частью текущего запаса для покрытия среднего объема за период выполнения заказа. Второе слагаемое является страховым запасом для удовлетворения издержек спроса, которые возникают из-за того, что спрос является случайной величиной.

## Анализ параметров на чувствительность

Исследуем зависимость величины оптимального размера заказа от различных параметров. Для этого оценим влияние изменения некоторых исходных характеристик на результирующую величину оптимального размера заказа. Так как формула вычисления оптимального размера заказа комплектующих на предприятии-изготовителе конечной продукции аналогична формуле вычисления оптимального размера заказа на пунктах реализации, для исследования будем рассматривать заказ на одном из пунктов реализации конечной продукции с предприятия-производителя.

Начнем исследование с проверки на чувствительность от параметра  $\lambda$  (возможность срыва поставок, *disruption rate*) активного периода предприятия-изготовителя конечной продукции. Для этого зафиксируем все параметры кроме параметра активного периода, который будем изменять на отрезке  $[0.01;3]$ . Для каждого значения из отрезка вычислим оптимальный размер заказа конечной продукции. По результатам исследования, был построен график изменения оптимального размера заказа продукции в зависимости от этого параметра (см. рис. 1).

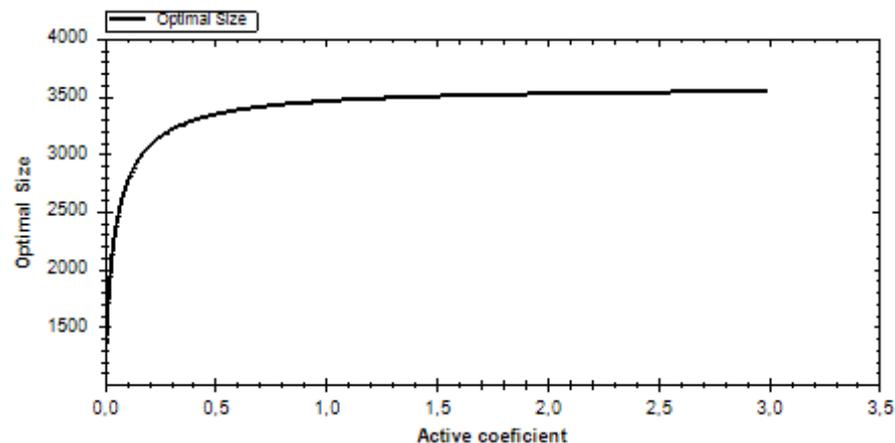


Рис. 1. График зависимости оптимального размера заказа от параметра активного периода

По графику видно, что даже малые изменения параметра  $\gamma$  на отрезке  $[0.01;0,3]$  приводят к значительным изменениям, а именно к увеличению оптимального размера заказа конечной продукции. В то же время при  $\gamma > 0.5$  изменения параметра активного периода незначительно влияют на размер

заказа. Таким образом, можно сделать следующий вывод: изменения малого параметра  $\gamma$  оказывают значительное влияние на оптимальный размер заказа, в то же время если  $\gamma$  имеет достаточно большое значение, то это влияние снижается до минимума. Такое поведение связано с тем, что вероятность нахождения предприятия-производителя продукции в неактивном состоянии, при повышении выбранного параметра, также увеличивается, что влечет за собой увеличение размера заказа. В то же время при слишком большом размере заказа растут расходы компании и дальнейшее увеличение размеров становится нецелесообразным.

Посмотрим как влияет на оптимальный размер заказа параметр неактивного периода  $\eta$  (скорость восстановления, *recovery rate*). Для этого также зафиксируем все параметры, а параметр  $\eta$  будем изменять на промежутке  $[0.01;3]$ . Для каждого значения из отрезка вычислим оптимальный размер заказа. По результатам исследования, был также построен график изменения размера заказа в зависимости от параметра неактивного периода (см. рис. 2).

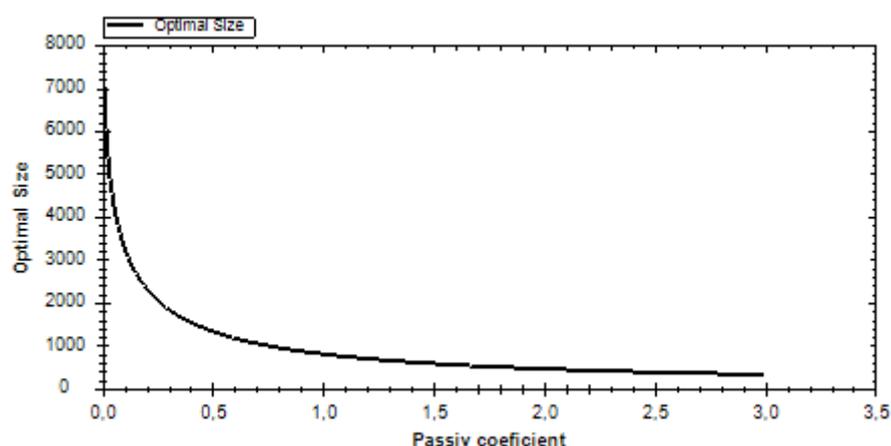


Рис. 2. График зависимости оптимального размера заказа от параметра неактивного периода

По графику видно, что даже малые изменения параметра  $\eta$  на отрезке  $[0.01;0,3]$  приводят к значительным изменениям, а именно уменьшению оптимального размера заказа. В тоже время при увеличении параметра неактивного периода его влияние на оптимальный размер заказа снижается. Таким образом, можно сделать следующий вывод: изменения малого

параметра  $\eta$  оказывают значительное влияние на оптимальный размер заказа, в то же время если  $\eta$  имеет достаточно большое значение, то это влияние снижается до минимума. Такое поведение связано с тем, что вероятность нахождения предприятия-производителя продукции в неактивном состоянии, при повышении выбранного параметра, уменьшается, что влечет за собой уменьшение размера заказа. В то же время спрос потребителей должен быть удовлетворен и дальнейшее уменьшение размеров становится невозможным.

Проверим насколько чувствителен оптимальный размер заказа к стоимости хранения продукции на стороннем складе. Зафиксируем все параметры, а стоимость хранения будем менять на интервале [10;100]. Для каждого значения вычислим оптимальный размер заказа. По результатам исследования, был построен график зависимости размера заказа от стоимости хранения (см. рис. 3).

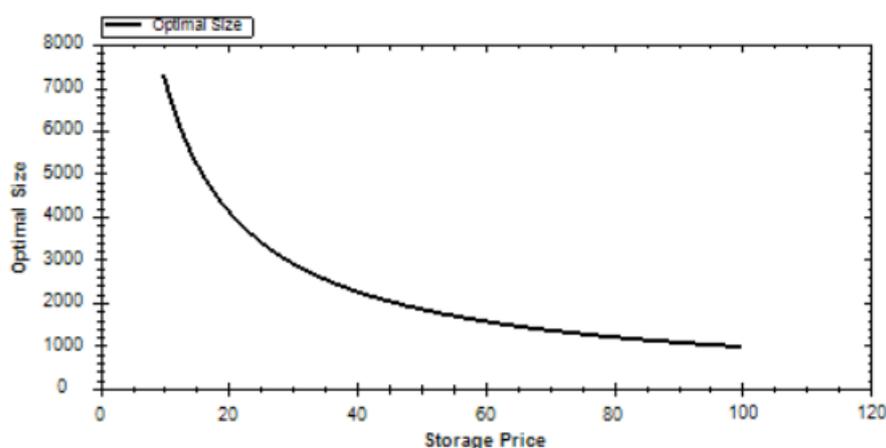


Рис. 3. График зависимости оптимального размера заказа от стоимости хранения

По графику видно, что даже малые изменения стоимости хранения на отрезке [10;20] приводят к значительным изменениям, а именно уменьшению оптимального размера заказа. В тоже время при дальнейшем увеличении стоимости хранения продукция влияние на оптимальный размер заказа снижается. Это связано с тем, что размер партии достигает отметки, которая обеспечивает удовлетворения спроса потребителей на небольшом промежутке времени и позволяет тратить на хранение товара минимальное число ресурсов из-за небольшого количества продукции, которое остается на

хранении на стороннем складе. Следовательно, можно сделать следующий вывод. Величина оптимального заказа чувствительна к изменению стоимости хранения продукции, но при больших величинах эта чувствительность уменьшается.

Таким образом, можно с уверенностью сказать, что оптимальный размер заказа чувствителен, к изменению параметров активного и неактивного состояния предприятия, если эти параметры достаточно малы. При их увеличении чувствительность к этим параметрам уменьшается. То же самое можно сказать и про стоимость хранения продукции на стороннем складе. При высокой стоимости хранения размер партии менее чувствителен к изменению этого параметра, так как количество продукции, которое остается на хранение становится минимальным.

## Программная реализация

По составленной модели было разработано десктопное приложение на языке программирования с#, которое рассчитывает оптимальные величины для заданных параметров, а также строит графики зависимостей оптимального размера заказа от выбранных параметров.

Приложение рассчитано на предприятие-производитель, выпускающее один вид продукции. Предприятие имеет в активе трех поставщиков, производящих по два вида комплектующих. Вся продукция после производства отправляется на три пункта реализации со своими параметрами.

По заданным величинам строится интерфейс для ввода параметров каждого этапа цепи. Приложение имеет следующий основной интерфейс (см. рис. 4).

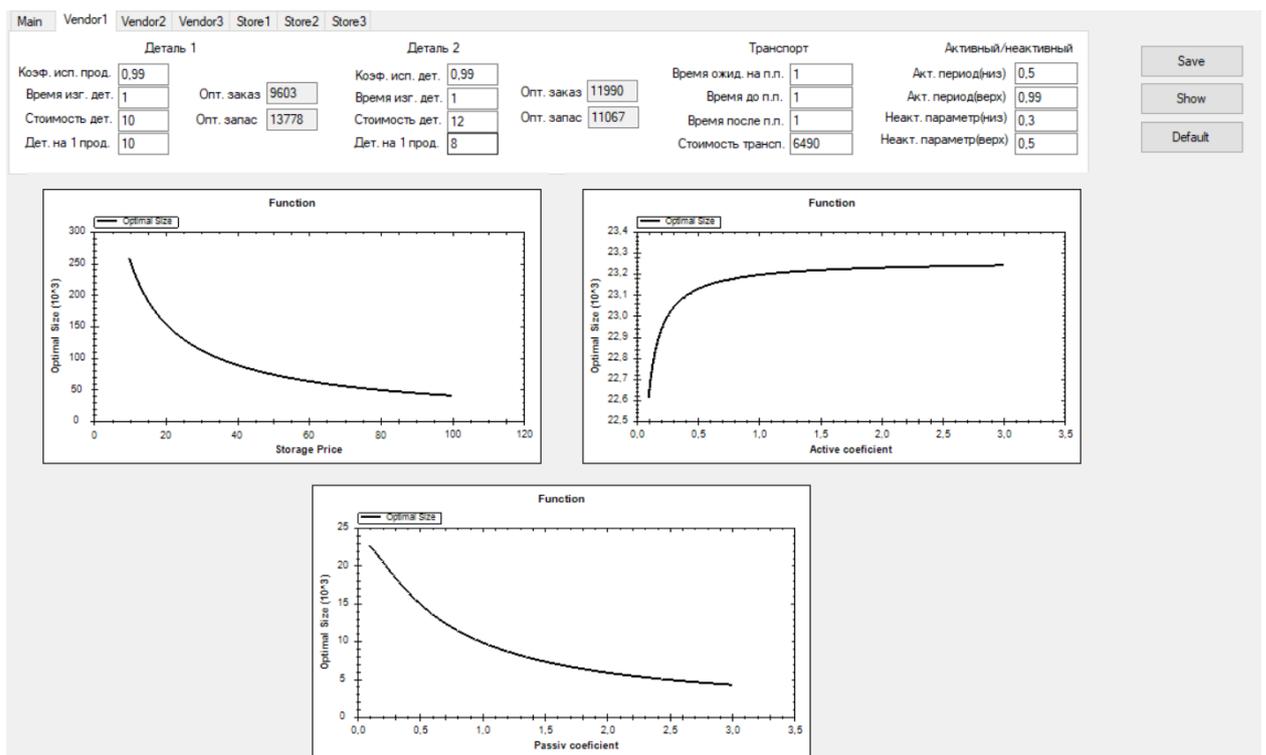


Рис. 4. Интерфейс приложения

Каждому предприятию-поставщику комплектующих выделяется отдельная вкладка с полями для ввода данных. Для каждого поставщика пользователь должен указать соответствующие ему параметры. А именно, для каждой детали необходимо ввести коэффициенты исправных деталей при

производстве, время изготовления, стоимость, требуемое количество, количество деталей на единицу продукции. Кроме того, указываются время и стоимость транспортировки деталей до предприятия-изготовителя конечной продукции, а также верхние и нижние границы параметров активного и неактивного периода. Интерфейс ввода имеет следующий вид (см. рис. 5).

Деталь 1		Деталь 2		Транспорт		Активный/неактивный	
Козф. исп. прод.	0,99	Козф. исп. дет.	0,99	Время ожид. на п.п.	1	Акт. период для расчета(низ)	0,5
Время изг. дет.	1	Время изг. дет.	1	Время до п.п.	1	Акт. период(верх)	0,99
Стоимость дет.	10	Стоимость дет.	12	Время после п.п.	1	Неакт. параметр для расчета(низ)	0,3
Дет. на 1 прод.	10	Дет. на 1 прод.	8	Стоимость трансп.	6490	Неакт. параметр(верх)	0,5

Рис. 5. Интерфейс ввода данных поставщиков

Вводу данных предприятия-производителя конечной продукции посвящена вкладка «Main». На ней указываются коэффициент исправной продукции при производстве, время на изготовление единицы продукции, стоимость производства единицы продукции. Кроме этого размещается информация о стоимости хранения продукции на сторонних складах, а также границы параметров активного и неактивного периодов. Интерфейс ввода выглядит следующим образом (см. рис. 6).

Коеф. исп. прод.		Склад		Активный/неактивный	
Козф. исп. прод.	0,99	Стоим. хран для расчета(низ)	12,5	Акт. период для расчета(низ)	0,5
Время изг. прод	1	Стоим. хран(верх)	300	Акт. период(верх)	3
Стоимость производства	20			Неакт. параметр для расчета(низ)	0,3
				Неакт. параметр(верх)	3

Рис. 6. Интерфейс ввода данных предприятия-производителя

Каждому пункту реализации, также выделена отдельная вкладка для ввода данных. Пользователю необходимо ввести стоимость хранения продукции на сторонних складах, математическое ожидание и среднеквадратическое отклонения спроса, величину периода, на котором мы рассматриваем цепь. Кроме того, указываются параметры транспортировки продукции до пунктов реализации. Сам интерфейс имеет следующий вид (см. рис. 7).

Main	Vendor1	Vendor2	Vendor3	Store1	Store2	Store3	
Магазин				Транспорт			
Спрос	100	Среднев. отклонение	10	Стоймость трансп.	4890	Период	365
Стойм. прод. для расчета(низ)	120	Стойм. прод.(верх)	200	Время до п.п.	1	Склад	
				Время ожид. на п.п.	1	Стойм. хран для расчета(низ)	10
				Время после п.п.	1	Стойм. хран(верх)	100
						Опт. заказ	
						Опт. запас	

Рис. 7. Интерфейс ввода данных пунктов реализации

Для расчёта оптимальных величин и построения графиков зависимостей необходимо нажать на кнопку «Show». После нажатия приложение выведет на экран оптимальные размеры заказов, моменты формирования заказов, а также графики зависимости оптимального размера заказа с первого пункта реализации от параметров активного и неактивного периодов и стоимости хранения продукции (см. рис. 8).

Main	Vendor1	Vendor2	Vendor3	Store1	Store2	Store3	
Деталь 1		Деталь 2		Транспорт		Активный/неактивный	
Козф. исп. прод.	0,99	Козф. исп. дет.	0,99	Время ожид. на п.п.	1	Акт. период для расчета(низ)	0,5
Время изг. дет.	1	Время изг. дет.	1	Время до п.п.	1	Акт. период(верх)	0,99
Стоймость дет.	10	Стоймость дет.	12	Время после п.п.	1	Неакт. параметр для расчета(низ)	0,3
Дет. на 1 прод.	10	Дет. на 1 прод.	8	Стоймость трансп.	6490	Неакт. параметр(верх)	0,5
		Опт. заказ	9603	Опт. заказ	11990		
		Опт. запас	13778	Опт. запас	11067		

Рис. 8. Интерфейс ввода данных поставщиков и вывода оптимальных параметров

Программа позволяет заполнить все поля данными по умолчанию, для этого пользователю надо нажать на кнопку “Default”.

Таким образом в рамках работы разработана программа, с помощью которой любой пользователь сможет с лёгкостью рассчитать оптимальные величины, которые помогут значительно сократить расходы компании. При должной доработке данной программной реализации можно получить полноценный программный продукт, от которого не отказались бы многие предприятия, стремящиеся минимизировать свои расходы и увеличить прибыль.

## Пример

Приведем пример применения результатов исследования. Для вычислений будем использовать разработанную программную реализацию.

Пусть у нас есть компания А, находящаяся в Санкт-Петербурге, производящая один вид продукта. Для того, чтобы изготовить этот продукт предприятию-производителю, необходимо шесть комплектующих, которые доставляются от трех поставщиков, которые находятся в Кингисеппе, Великом Новгороде и городе Боровичи. Цены на комплектующие, время их изготовления, коэффициент исправной продукции, а также количество необходимых комплектующих для изготовления одной детали представлены в следующей таблице (см. табл. 1).

Вид комплектующего	Цена (у.е.)	Время изготовления (день)	Коэф. исправной продукции	Кол-во комп. для изгот. ед. продукции (шт.)
Предприятие 1:				
a	10	1	0,99	2
b	12	1	0,99	5
Предприятие 2:				
c	5	1	0,99	4
d	7	1	0,99	3
Предприятие 3:				
e	10	1	0,99	6
f	8	1	0,99	5

Таблица 1. Данные по комплектующим.

Для расчетов рассмотрим реальную стоимость транспортировки. Предположим, что для перевозки комплектующих нам необходимы газели с 3-метровым фургоном. Возьмем стоимость перевозки на этих газелях с сайта крупной компании грузоперевозок «Газелькин». Для каждого поставщика параметры транспортировки выглядят следующим образом (см. табл. 2).

	Время трансп. до перевалочного пункта (день)	Время ожидания на перевалочном пункте (день)	Время трансп. после перевалочного пункта (день)	Стоимость трансп. (у.е.)
Поставщик 1 (Кингисепп):	1	1	1	6490
Поставщик 2 (Вел. Новгород):	1	1	1	8090
Поставщик 3 (Боровичи):	1	1	1	16 290

Таблица 2. Данные по транспортировке комплектующих от поставщиков.

Параметры активного и неактивного периода для предприятий-поставщиков представлены ниже (см. табл. 3).

	Параметр акт. Периода	Параметр неакт. Периода
Предприятие 1:	0,5	0,3
Предприятие 2:	0,2	0,4
Предприятие 3:	0,3	0,5

Таблица 3. Параметры активного и неактивного периода поставщиков.

Для расчетов возьмем реальную стоимость хранения. Предположим, что мы будем хранить комплектующие на паллетах. Стоимость хранения возьмем с сайта логистической компании «Ди-Эл-Джи лоджистик». Рассматриваемая цена схожа со средней стоимостью хранения у многих компаний по Санкт-Петербургу. Параметры производимой продукции и хранения комплектующих представлены в таблице ниже (см. табл. 4).

Вид комплектующего	Стоимость производства (у.е.)	Время изготовления (день)	Коэф. исправной продукции	Ст. хранения на стороннем складе (у.е.)
Продукция 1	20	1	0,99	12,5

Таблица 4. Данные по продукции.

Параметры активного и неактивного периода для предприятия-изготовителя представлены ниже (см. табл. 5).

	Параметр акт. периода	Параметр неакт. Периода
Предприятие-производитель:	0,5	0,3

Таблица 5. Параметры активного и неактивного периодов предприятия-изготовителя.

Вся произведенная продукция отправляется на пункты-реализации. Предположим, что они находятся в Сосновом Бору, Гатчине и Пушкине. Стоимость хранения продукции также возьмем с сайта логистической компании «Ди-Эл-Джи лоджистик». Параметры для каждого пункта реализации представлены в следующей таблице (см. табл. 6).

Вид продукции	Цена (руб)	Спрос (шт.)	Среднекв. откл. От спроса (шт)	Ст. хранения на стороннем складе продукции (у.е.)
Пункт реализации 1:				
Продукт 1	120	100	10	12,5
Пункт реализации 2:				
Продукт 1	150	150	12	12,5
Пункт реализации 3:				
Продукт 1	100	200	15	12,5

Таблица 6. Данные по пунктам реализации.

Предположим, что для перевозки продукции нам также необходимы газели с 3-метровым фургоном. Возьмем стоимость перевозки на этих газелях, также с сайта крупной компании грузоперевозок «Газелькин». Для каждого пункта реализации параметры транспортировки выглядят следующим образом (см. табл. 7).

	Время трансп. до перевалочного пункта (день)	Время ожидания на перевалочном пункте (день)	Время трансп. после перевалочного пункта (день)	Стоимость трансп. (у.е.)
Пункт реализации 1 (Сосновый Бор):	1	1	1	4890
Пункт реализации 2 (Гатчина):	1	1	1	3590
Пункт реализации 3 (Пушкин):	1	1	1	2290

Таблица 7. Данные по транспортировке продукции до пунктов реализации.

С помощью разработанной программной реализации введем предоставленные данные и рассчитаем оптимальные параметры для предприятия-производителя и для каждого пункта реализации (см. табл. 8).

Кому заказ		Оптимальный размер заказа (шт.)	Оптимальный остаток (шт.)
Предприятие-производитель			
Поставщик 1	дет. a	4426	2934
	дет. b	4434	7000
Поставщик 2	дет. c	4424	5645
	дет. d	4418	4289
Поставщик 3	дет. e	4434	8356
	дет. f	4432	7000
Пункт-реализации 1			
Предп- произ.	Продукт 1	954	524
Пункт-реализации 2			
Предп- произ.	Продукт 1	1431	674
Пункт-реализации 3			
Предп- произ.	Продукт 1	1908	825

Таблица 8. Результаты расчетов.

Таким образом, для оптимального распределения средств предприятию изготовителю необходимо заказывать по 4426 деталей вида «а», по 4434 деталей вида «b» у первого поставщика, по 4424 деталей вида «с», по 4429 деталей вида «d» у второго поставщика, по 4434 деталей вида «е», по 4432 деталей вида «f» у третьего поставщика. При этом, чтобы потребители были удовлетворены, необходимо, чтобы в момент заказа у предприятия было в распоряжении 2934 комплектующего «а», 7000 комплектующего «b», 5645 комплектующего «с», 4289 комплектующего «d», 8356 комплектующего «е» и 7000 комплектующего «f». Первый, второй и третий пункты реализации должны заказывать у предприятия производителя 954, 1431, 1908 продукции соответственно. При этом в распоряжении первого пункта должно оставаться 524 продукции, у второго 674 продукции, у третьего 825 продукции.

## Выводы

В рамках данной работы была построена оптимизационная модель цепи поставок со случайным спросом, приближенная к реальной жизни, а также достигнуты следующие результаты:

- Проанализированы существующие классы моделей логистической цепей поставок и способы их оптимизации;
- Построена модель логистической цепи поставок с внешней и внутренней неопределенностью. Модель приближена к реальной жизни, отражает все этапы производства продукта и учитывает случайность спроса;
- Найден и реализован способ оптимизации построенной модели;
- Разработано приложение, реализующее модель на практике и помогающее клиенту оптимизировать ресурсы и затраты внутри цепи поставок;
- С помощью разработанного приложения проанализирована чувствительность оптимального размера заказа к некоторым параметрам;
- Разработанная модель протестирована на существующих данных.

## Заключение

К сожалению, на сегодняшний день многие компании до сих пор не уделяют должного внимания моделированию и оптимизации логистических цепей поставок и как следствие несут огромные расходы из-за неоптимизированных процессов на каждом этапе производства и транспортировки.

Даже те компании, которые понимают какую пользу приносит оптимизация процессов зачастую не осознают, что в цепи всегда присутствует фактор неопределенности, связанный со случайностью спроса или прекращению функционирования одного или даже нескольких поставщиков. В результате, организации неправильно рассчитывают размеры заказов, и, как итог, на предприятия и в пункты реализации приходит либо избыточное количество продукции, что несет за собой порой очень значительные дополнительные затраты на хранение, либо недостаточное количество, сопровождающееся появлением недовольных клиентов. А если при этом один из поставщиков неожиданно перестает на время функционировать, потенциальные потери, получающиеся из-за недостатка продукции и неудовлетворенных потребителей, могут достичь очень внушительных величин.

Все вышеперечисленные факторы в очередной раз показывают насколько сложно переоценить роль грамотного моделирования и своевременной оптимизации цепи поставок в жизни любой уважающей себя компании. Именно с помощью моделирования всех этапов цепи организация начинает осознавать, как функционируют все процессы, сколько денег уходит на каждый из этапов и какой из них требует наибольших вложений. Оптимизируя цепочку поставок, компания не только добивается значительного сокращения своих расходов, увеличивая свою прибыль, но и повышает лояльность своих клиентов вовремя удовлетворяя их потребности и привлекая тем самым новых потребителей.

В последнее время вопросам оптимизации стали уделять большее внимание в научной среде, что ещё раз говорит об актуальности исследований в этой области. Многие исследования посвящены оптимизации в условиях неопределенности. В данной работе разработана и оптимизирована математическая модель, которая может стать как основой для ещё более серьезных исследований, так и опорой для оптимизации процессов какой-нибудь компании. Доработав разработанную программу можно получить готовый программный продукт, который сможет автоматизировать оптимизацию любого предприятия. Кроме того программу можно использовать уже сейчас для организаций с одним предприятием-производителем конечной продукции.

### Таблица обозначений

Переменная	Что обозначает	область	Формула
$L_i$	Виды комплектующих на предприятии $i$	$l = 1, \dots, L$	
$R_i$	Ресурсы на предприятии $i$	$i = 1, \dots, I$	
$\alpha_{li}$	Доля исправных комплектующих $l$ -го вида на предприятии $i$	$i = 1, \dots, I$ $l = 1, \dots, L$	
$x'_{li}$	Количество комплектующих $l$ -го вида, которое необходимо произвести на предприятии $i$ , чтобы выполнить план производства	$i = 1, \dots, I$ $l = 1, \dots, L$	$x_{li} = \alpha_l x'_{li}$
$x_{li}$	Количество комплектующих $l$ -го вида, планируемых для выпуска $i$ -м предприятием-поставщиком, для доставки на предприятие изготовитель	$i = 1, \dots, I$ $l = 1, \dots, L$	$x_{li} = \alpha_{li} x'_{li}$ $x_{li} = \sum_{k=1}^K y'_k a_{lik}$ $x_{li} = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K MO_{km} a_{lik}$
$t_{li}$	Время для изготовления единицы комплектующего $l$ -го вида на предприятии $i$	$i = 1, \dots, I$ $l = 1, \dots, L$	
$T_i$	Общее время на изготовление всех комплектующих на предприятии $i$	$i = 1, \dots, I$	$T_i = \sum_{l=1}^L t_{li} x'_{li}$
$P'_1, P'_2, \dots, P'_J$	Хабы	$j = 1, \dots, J$	
$\omega'_j$	Пропускная способность (или вместимость складов) перевалочного пункта $P'_j$	$j = 1, \dots, J$	
$x_{li}^j$	Количество комплектующих $l$ -го вида предприятия $i$ , которое поставляется через промежуточный пункт $P'_j$ .	$i = 1, \dots, I$ $l = 1, \dots, L$ $j = 1, \dots, J$	

Переменная	Что обозначает	область	Формула
$x_{li}^S$	Количество комплектующих $l$ -го вида, планируемое для доставки напрямую со складов предприятия поставщика в пункт назначения	$i = 1, \dots, I$ $l = 1, \dots, L$	
$T_i^S$	Время перевозки комплектующих $i$ -го стороннего предприятия напрямую до производителя	$i = 1, \dots, I$	
$t_{ij}$	Время перевозки до $j$ -го промежуточного пункта	$i = 1, \dots, I$ $j = 1, \dots, J$	
$t_j$	Время простоя на промежуточном пункте $j$	$j = 1, \dots, J$	
$t_{j1}$	Время перевозки с промежуточного пункта до предприятия-изготовителя	$j = 1, \dots, J$	
$T_i^j$	Время перевозки комплектующих $i$ -го стороннего предприятия через промежуточный пункт $j$	$i = 1, \dots, I$ $j = 1, \dots, J$	
$T_i^{Ch}$	Время, за которое осуществляется перевозка, с предприятия $i$ выбранным компанией способом	$i = 1, \dots, I$	
$T_1$	Общее время на изготовление всех необходимых комплектующих и их перевозку до производителя		$T_1 = \max_i (T_i + T_i^{Ch})$
$a_{iik}$	Количество комплектующих $l$ -го вида с предприятия $i$ необходимых для производства единицы конечной продукции $k$ -го вида	$i = 1, \dots, I$ $l = 1, \dots, L$ $k = 1, \dots, K$	

Переменная	Что обозначает	область	Формула
$\beta_k$	Коэффициент, показывающий долю исправной продукции $k$ -го вида при производстве	$k = 1, \dots, K$	
$y'_k$	Количество продукции $k$ -го вида, которое необходимо произвести на предприятии-изготовителе, чтобы выполнить план производства	$k = 1, \dots, K$	
$y_k$	Количество готовой продукции $k$ -го вида, запланированное для выпуска	$k = 1, \dots, K$	$y_k = \beta_k y'_k$
$t_k$	Время на изготовление единицы продукции $k$ -го вида	$k = 1, \dots, K$	
$T'$	Общее время изготовления всей продукции		$T' = \sum_{k=1}^K t_k y'_k$
$x_l^0$	Количество комплектующих $l$ -го вида, которое может содержаться на складе производителя	$l = 1, \dots, L$	
$x_{lg}$	Количество комплектующих $l$ -го вида, которое будет храниться на стороннем складе $g$	$l = 1, \dots, L$ $g = 1, \dots, G$	
$c_{lig}$	Стоимость хранения комплектующего $l$ -го вида с предприятия $i$ на складе $g$	$i = 1, \dots, I$ $l = 1, \dots, L$ $g = 1, \dots, G$	
$R_{xp1}$	Затраты на хранение комплектующих на сторонних складах		$R_{xp1} = \sum_{g=1}^G \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^L c_{lig} x_{lg}$
$P''_1, P''_2, \dots, P''_N$	Хабы	$n = 1, \dots, N$	
$D_1, D_2, \dots, D_M$	Пункты реализации	$m = 1, \dots, M$	

Переменная	Что обозначает	область	Формула
$\omega''_n$	Пропускная способность (или вместимость складов) перевалочного пункта $P''_N$	$n = 1, \dots, N$	
$y_{km}^S$	Количество готовой продукции $k$ -го вида, которое планируется для доставки напрямую со складов производителя в пункт назначения $D_m$	$k = 1, \dots, K$ $m = 1, \dots, M$	
$y_{km}^n$	Количество готовой продукции $k$ -го вида, которое планируется для перевалки в пункте $P''_n$ при перевозке в конечный пункт $D_m$	$k = 1, \dots, K$ $n = 1, \dots, N$ $m = 1, \dots, M$	
$t_n^1$	Время перевозки до $n$ -го перевалочного пункта	$n = 1, \dots, N$	
$t_n$	Время простоя на перевалочном пункте $n$	$n = 1, \dots, N$	
$t_{nm}$	Время перевозки с перевалочного пункта $n$ до пункта назначения $D_m$	$n = 1, \dots, N$ $m = 1, \dots, M$	
$T_m^n$	Время перевозки продукции с предприятия-изготовителя до пункта назначения $m$ через промежуточный пункт $n$	$n = 1, \dots, N$ $m = 1, \dots, M$	
$T_m^{Ch}$	Время, за которое осуществляется перевозка, выбранным компанией способом на пункт реализации $D_m$	$m = 1, \dots, M$	
$T''$	Общее время на изготовление и перевозку всей продукции с предприятия изготовителя до всех пунктов реализации		$T'' = \max_m (T' + T_m^{Ch})$

Переменная	Что обозначает	область	Формула
$y_{km}^0$	Количество продукции $k$ -го вида, которое может содержаться на складе пункта назначения	$k = 1, \dots, K$ $m = 1, \dots, M$	
$Y_{km}$	Общее количество произведенной продукции $k$ -го вида в пункте назначения $D_m$	$k = 1, \dots, K$ $m = 1, \dots, M$	
$Y_{kmh}$	Количество продукции $k$ -го вида, имеющееся в распоряжении пункта назначения $D_m$ , которое будет храниться на стороннем складе $h$	$k = 1, \dots, K$ $m = 1, \dots, M$ $h = 1, \dots, H$	$Y_{kmh} = Y_{km} - y_{km}^0$
$C_{kmh}$	Стоимость хранения продукции $k$ -го вида с пункта назначения $D_m$ на складе $h$ .	$k = 1, \dots, K$ $m = 1, \dots, M$ $h = 1, \dots, H$	
$R_{xp2}$	Расходы на хранение продукции на сторонних складах		$R_{xp2} = \sum_{h=1}^H \sum_{k=1}^K C_{kmh} Y_{kmh}$
$c_{i1}^{(1)}$	Затраты на доставку партии комплектующих с $i$ -го предприятия-поставщика на предприятие изготовитель	$i = 1, \dots, I$	
$c_{ij1}^{(2)}$	Стоимость перевозки партии комплектующих $i$ -го предприятия-поставщика, включая его доставку и хранение в пункте $P'_j$	$i = 1, \dots, I$ $j = 1, \dots, J$	
$q_{\text{комп},i}$	Размер одной партии заказа с предприятия $i$	$i = 1, \dots, I$	
$R_{\text{тр}1}$	Транспортные расходы на перевозку комплектующих до предприятия-изготовителя		$R_{\text{тр}1} = \sum_{i=1}^I c_{i1}^{(1)} \frac{\sum_{l=1}^{L_i} x_{li}^S}{q_{\text{комп},i}} + \sum_{i=1}^I c_{ij1}^{(2)} \frac{\sum_{l=1}^{L_i} x_{li}^j}{q_{\text{комп},i}}$

Переменная	Что обозначает	область	Формула
$c_{1m}^{(4)}$	Стоимость перевозки партии продукции со склада предприятия в пункт назначения $D_m$	$m = 1, \dots, M$	
$c_{1nm}^{(5)}$	Стоимость перевозки партии готовой продукции, включая её перевалку в пункте $P''_n$	$n = 1, \dots, N$ $m = 1, \dots, M$	
$q_{\text{прод},m}$	Размер одной партии заказа	$m = 1, \dots, M$	
$R_{\text{тр}2}$	Транспортные расходы на перевозку готовой продукции в пункты $D_m$		$R_{\text{тр}2} = \sum_{m=1}^M c_{1m}^{(4)} \frac{\sum_{k=1}^K y_{km}^S}{q_{\text{прод},m}} + \sum_{m=1}^M c_{1nm}^{(5)} \frac{\sum_{k=1}^K y_{km}^n}{q_{\text{комп},i}}$
$c_{li}^{(0)}$	Затраты на приобретение единицы комплектующей $l$ -го вида с предприятия $i$	$i = 1, \dots, I$ $l = 1, \dots, L$	
$c_k^{(3)}$	Затраты на производство единицы готовой продукции $k$ -го вида	$k = 1, \dots, K$	
$R_c$	Суммарные расходы компании		$R_c = \sum_{i=1}^I \sum_{l_i=1}^{L_i} c_{li}^{(0)} \sum_{k=1}^K y'_k a_{lik} + R_{\text{тр}1} + \sum_{k=1}^K c_k^{(3)} y'_k + R_{\text{тр}2} + R_{\text{xp}1} + R_{\text{xp}2}$
$d_{km}$	Величина спроса на $k$ -й вид продукции в пункте потребления с номером $m$ в рассматриваемый период времени $t$	$k = 1, \dots, K$ $m = 1, \dots, M$	
$MO_{km}$	Математическое ожидание спроса на продукцию в рассматриваемом периоде	$k = 1, \dots, K$ $m = 1, \dots, M$	

Переменная	Что обозначает	область	Формула
$\sigma_{km}$	Среднеквадратическое отклонение спроса на продукцию в рассматриваемом периоде	$k = 1, \dots, K$ $m = 1, \dots, M$	
$v_{km}$	Суммарное количество готовой продукции $k$ -го вида, которое планируется для доставки в пункт назначения $D_m$ в соответствии с планом, составленным до реализации случайного спроса $d_{km}$	$k = 1, \dots, K$ $m = 1, \dots, M$	
$R^0$	Суммарные потери предприятия из-за потери потенциальной прибыли при $v_{km} < d_{km}$		$R^0 = \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^M p_{km} \max(0, d_{km} - v_{km})$
$s_k$	Расходы на хранение или утилизацию единицы продукции	$k = 1, \dots, K$	
$R^1$	Величина потерь при $v_{km} > d_{km}$		$R^1 = \sum_{k=1}^K s_k \sum_{m=1}^M \max(0, v_{km} - d_{km})$
$R(q_{\text{комп},i}, q_{\text{прод},m})$	Общие расходы компании		$R(q_{\text{комп},i}, q_{\text{прод},m}) = R_c + R^0 + R^1$
$Pr$	Прибыль компании		$Pr = \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^M p_{km} v_{km} - R(q_{\text{комп},i}, q_{\text{прод},m})$
$\lambda_i$	Параметр активного периода поставщика комплектующих	$i = 1, \dots, I$	
$\mu_i$	Параметр неактивного периода поставщика комплектующих	$i = 1, \dots, I$	

Переменная	Что обозначает	область	Формула
$\alpha_i$	Вероятность того, что предприятие $i$ находится в неактивном интервале	$i = 1, \dots, I$	$\alpha_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}$
$\gamma$	Параметр активного периода предприятия изготовителя конечной продукции		
$\eta$	Параметр неактивного периода предприятия изготовителя конечной продукции		
$\beta$	Вероятность того, что предприятие изготовитель конечной продукции находится в неактивном интервале		$\beta = \frac{\gamma}{\gamma + \eta}$
$q^*_{\text{комп},l,i}$	Оптимальный размер заказа комплектующих вида $l$ с предприятия $i$	$i = 1, \dots, I$ $l = 1, \dots, L$	
$q^*_{\text{комп},l,i,j}$	Оптимальный размер заказа комплектующих вида $l$ с предприятия $i$ , перевозящихся через пункт $j$	$i = 1, \dots, I$ $l = 1, \dots, L$ $j = 1, \dots, J$	
$q^*_{\text{прод},k,t}$	Оптимальный размер заказа продукции вида $k$ для магазина под номером $t$ с предприятия изготовителя конечной продукции	$k = 1, \dots, K$ $t = 1, \dots, M$	
$q^*_{\text{прод},k,n,t}$	Оптимальный размер заказа продукции вида $k$ для магазина под номером $t$ с предприятия изготовителя, перевозящихся через пункт $n$	$k = 1, \dots, K$ $n = 1, \dots, N$ $t = 1, \dots, M$	

Переменная	Что обозначает	область	Формула
$T_{m2}$	Время производства и доставку продукции в пункт назначения с номером $m$	$m = 1, \dots, M$	
$SS_{\text{прод},k,m}$	Страховой запас продукции вида $k$ на пункте реализации конечной продукции с номером $m$	$k = 1, \dots, K$ $m = 1, \dots, M$	$SS_{\text{прод},k,m} = z_0 \sigma_{km} \sqrt{\frac{T_{m2}}{t}}$
$ROP_{\text{прод},k,m}$	Объем продукции в момент формирования заказа конечной продукции вида $k$ на пункте реализации с номером $m$	$k = 1, \dots, K$ $m = 1, \dots, M$	$ROP_{\text{прод},k,m} = MO_{km} \frac{T_{m2}}{t} + z_0 \sigma_{km} \sqrt{\frac{T_{m2}}{t}}$
$T_{i1}$	Время на производство и доставку комплектующих с предприятия $i$ .	$i = 1, \dots, I$	
$\sigma_{li}$	Среднеквадратичное отклонение спроса на комплектующие, поставляемые предприятием-поставщиком $i$ в рассматриваемый период	$i = 1, \dots, I$ $l = 1, \dots, L$	$\sigma_{li} = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \sigma_{km} a_{lik}$
$SS_{\text{комп},k,m}$	Страховой запас комплектующих, поставляемых с предприятия-поставщика $i$	$k = 1, \dots, K$ $m = 1, \dots, M$	$SS_{\text{прод},k,m} = z_0 \sigma_{li} \sqrt{\frac{T_{i1}}{t}}$
$ROP_{\text{комп},l,i}$	Объем комплектующих в момент формирования заказа с предприятия поставщика $i$ в распоряжении предприятия-производителя конечной продукции	$i = 1, \dots, I$ $l = 1, \dots, L$	$ROP_{\text{комп},l,i} = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K MO_{km} a_{lk} + z_0 \sigma_{li} \sqrt{\frac{T_{i1}}{t}}$

## Список литературы

1. Гаджинский, А. М. Логистика; 15-е изд., перераб. и доп.: учебник / А. М. Гаджинский. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К0», 2008.
2. Ковалев М.Н. Моделирование цепей поставок в промышленности/Вестник Гомельского государственного технического университета им. П.О. Сухого – 2014. - № 4(56). – С.117-124.
3. Куруджи Ю. В. Разработка модели оптимизации плана выпуска и доставки продукции с учетом факторов неопределенности / Ю. В. Куруджи // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. - 2015. - № 4(3). - С. 12-15.
4. Brandimarte, P. Introduction to distribution logistics / P. Brandimarte, G. Zoretti. – NY: Wiley, 2007. – 581 p.
5. Bramel, J. The logic of logistics: theory, algorithms, and applications for logistics management / J. Bramel, D. SimchiLevi. – Berlin: Springer, 1997. – 478 p
6. Morozova, I. V. Dynamic Optimization Model for Planning of Integrated Logistical System Functioning [Text] / I. V. Morozova, M. Ya. Postan, S. N. Dashkovskiy // Proceedings of 3d International Conference “Dynamics in Logistics”, LDIC2012, Bremen, Germany.
7. Postan, M. Ya. Dynamic model for optimization of production and finished products delivery plans in supply chain [Text] / M. Ya. Postan, N. I. Chuhraj, Yu. V. Kurudzhi // Logistyka. – 2014. – Vol. 4. – P. 2345–2352
8. Бочкарев А.А. Теория и методология процессного подхода к моделированию и интегрированному планированию цепи поставок / А.А. Бочкарев // Экономика и управление народным хозяйством: теория управления экономическими системами - 2009.
9. Модели и методы теории логистики: учеб, пособие, 2-е над, / Под ред, Б. С, Лу-кинского. СПб.: Питер. 2007.
10. Шапиро Дж. Моделирование цепи поставок / Пер. с англ, под ред. В. С. Лукин-ского. СПб.: Питер, 2006.
11. Лычкина Н.Н. Стратегическое развитие и динамические модели цепей поставок: поиск эффективных модельных конструкций /Инновационные технологии в логистике и управлении цепями поставок//М.: Эс-Си-Эм Консалтинг - 2015. – С.133-144

12. Б 86 Бочкарев А. А. ПЛАНИРОВАНИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦЕПИ ПОСТАВОК: Учебно-практическое пособие. — М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2008. — 192 с. ISBN 978-5-94280-307-0
13. Бушуева Л.И. Методы прогнозирования объема продаж / Журнал "Маркетинг в России и за рубежом"/ - 2000.
14. Буре В.М., Парилина Е.М., Свиркин М.В. Математическая статистика: учеб. пособие/ Спб:Соло - 2007.
15. Хлобыст А.А. Особенности прогнозирования спроса на рынке продукции промышленного назначения// Известия Российского Государственного Педагогического Университета им. А.И.Герцена/ - 2007. - №29 т.9 – С.118-122.
16. Самарцева А.И., Гильц Н.Е. Модели управления запасами в условиях изменяющейся потребности/Актуальные проблемы авиации и космонавтики/- 2011. - №7 т.2 – С.242-243
17. Тюхтина А.А. Модели управления запасами: учеб. пособие/Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет-2017г. – 84 с.
18. Бауэрсокс Д., Клосс Д. Логистика. Интегрированная цепь поставок. – М: Олимп-Бизнес, 2008. – 640 с.
19. Vaida Pilinkienė Selection of Market Demand Forecast Methods: Criteria and Application/ENGINEERING ECONOMICS/-2008. -No 3 (58) – 19-25
- 20.[20] Ткач В.В. Проблемы моделирования цепей поставок // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Экономика и менеджмент/ - 2010. - №39(215) - С.106-110.
21. Вохмянина А.В. Методологические аспекты обеспечения надежности логистических цепей поставок// Транспорт Российской Федерации. Журнал о науке, практике, экономике /- 2013 - №5(48) – С.55-59.
22. Чурилов Р.Л. Методы оценки и повышения надежности цепей поставок: диссертация/ -2012.
23. Vaida Pilinkienė Market Demand Forecasting Models and their Elements in the Context of Competitive Market// ENGINEERING ECONOMICS/-2008. -No 3 (60) – 24-31
24. Куруджи, Ю. В. Разработка метода оценки рыночного риска при планировании работы цепи поставок при случайном спросе/ Ю. В. Куруджи // Технологический аудит и резервы производства. – 2014. – Т. 5, № 2 (19). – С. 31–35.
25. Воропаев В.И., Гельруд Я.Д. Математические модели проектного управления для заинтересованных сторон // «Управление проектами и программами», XII ВСЕРОССИЙСКОЕ СОВЕЩАНИЕ ПО ПРОБЛЕМАМ УПРАВЛЕНИЯ. – ВСПУ-2014 – Москва 16-19 июня 2014 г.

26. G M. Parlar and D. Berkin. Future supply uncertainty in EOQ models. *Naval Research Logistics*, 38:107–121, 1991.
27. L. Snyder. A tight approximation for a continuous review inventory model with supplier disruptions. Working Paper, P.C. Rossin College of Engineering and Applied Sciences, Lehigh University, Bethlehem, PA, 2011.
28. Черкесов А.Г. Экономическая теория. Математические модели: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. 52 с. 2003

## Приложения

Ссылка на код программы:

<https://github.com/Strake777/SupplyChain>