

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЛОМОНОСОВА Наталья Викторовна

Выпускная квалификационная работа

**Исследование продольного и поперечного движения частиц в
линейном волноводном ускорителе**

Уровень образования:

Направление *03.04.01* «Прикладные математика и физика»

Основная образовательная программа *ВМ.5521.2017*

«Математические и информационные технологии»

Научный руководитель:

доцент каф. ТСУЭФА,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент
Рубцова И. Д.

Рецензент:

главный специалист, НИИ
Электрофизической
Аппаратуры, к.т.н., с.н.с.
Строкач А.П.

Санкт-Петербург

2019

Содержание

Введение.....	3
Обзор литературы.....	7
Постановка задачи.....	10
Общие положения (устройство ускорителя и уравнения движения).....	11
Глава 1. Продольное движение частиц.....	14
1.1. Уравнения продольного движения.....	14
1.2. Метод учета взаимодействия частиц.....	16
1.3. Оптимизация продольного движения.....	20
Глава 2. Поперечное движение частиц.....	25
2.1. Уравнения поперечного движения.....	25
2.2. Метод расчета радиальной компоненты напряженности кулоновского поля.....	30
2.3. Математическая модель продольного и поперечного движения частиц в ускорителе.....	35
2.4. Оптимизация поперечной динамики пучка.....	39
Глава 3. Численное моделирование и оптимизация динамики пучка.....	43
3.1. Параметры прибора и расчета.....	43
3.2. Результаты численного моделирования и оптимизации.....	45
Заключение.....	57
Список литературы.....	59
Приложение.....	62

Введение

Ускорители заряженных частиц – это устройства для получения высокоэнергетических пучков частиц (электронов, протонов, атомных ядер, ионов) с целью использования ускоренного пучка в научных исследованиях, промышленности, хозяйстве, медицине и других сферах [9].

Ускорение частиц осуществляется под действием электрического поля, магнитное поле лишь изменяет форму траектории частицы и служит для управления пучком, в том числе, для его фокусировки [15, 16]. Ускоряющее электрическое поле в большинстве случаев создается внешними устройствами – генераторами.

История ускорителей началась еще в первой половине XX века. Вначале их создавали для исследований, относящихся к атомной и ядерной физике. В настоящее время область применения ускорителей настолько широка, что невозможно упомянуть все. Например, ускорители используются в сельском хозяйстве, технике; в медицине – позволяют успешно лечить людей от тяжелых болезней; в фундаментальных исследованиях – для открытия новых элементарных частиц, проверки теорий возникновения Вселенной и т.д. [9].

В соответствии с различными целями и сферами применения разработаны различные типы ускоряющих и фокусирующих систем. Так, в зависимости от формы траекторий частиц ускорители делятся на циклические и линейные. Кроме того, в ускорителях могут действовать различные поля: в электростатических ускорителях частицы проходят область с большой разностью потенциалов, приобретая повышенную энергию; в индукционных – переменный магнитный поток порождает вихревое электрическое поле, которое ускоряет частицы; в резонансных ускорителях используются переменные высокочастотные электрические поля [3, 8, 9, 19].

Так как сфера применения ускорителей непрерывно расширяется и происходит модернизация техники в традиционных областях их применения, актуальна задача моделирования и оптимизации динамики заряженных частиц в ускорителях с целью получения требуемых характеристик пучка на выходе устройства.

В настоящей работе рассматривается линейный волноводный ускоритель электронов. Процессы в этом ускорителе исследуются многими авторами [7, 18 – 21, 24, 25, 32], однако задача оптимизации динамики пучка по-прежнему актуальна в связи с разнообразием устройств и областей их применения. Кроме того, накопленный опыт моделирования эволюции пучков в ускорителях на бегущей волне позволяет рассматривать этот ускоритель как своеобразный «полигон» для апробации новых подходов, моделей и методов исследования и оптимизации движения частиц.

Данная работа опирается на опыт исследований в области математического моделирования и оптимизации систем формирования заряженных пучков, проводимых на кафедре теории систем управления электрофизической аппаратурой (ТСУЭФА) под руководством проф. Д.А. Овсянникова [18 – 20]. В диссертации используются подходы к моделированию и оптимизации продольного и поперечного движения частиц с учетом их взаимодействия, апробированные на кафедре ТСУЭФА для различных устройств [6, 7, 17 – 20, 24, 27, 28, 31, 32]. Работа выполнена в рамках исследований кафедры в области динамики интенсивных пучков [20, 21, 24, 25, 31, 32], а также создания комплексов программ, осуществляющих моделирование и оптимизацию динамики заряженных пучков в ускоряющих и фокусирующих системах [27, 30].

Целью работы является математическое и численное моделирование продольного и поперечного движения интенсивного квазипериодического пучка заряженных частиц в линейном волноводном ускорителе, а также многокритериальная оптимизация динамики пучка.

В данном ускорителе поперечное движение частиц существенно зависит от продольного, а продольное движение может моделироваться независимо от поперечного [18, 19], поэтому исследование проводится в два этапа.

На первом этапе (глава 1) рассматривается продольное движение частиц без учета поперечного. Получена система уравнений, описывающая движение электронов вдоль структуры. Независимой переменной является аналог времени, что обусловлено удобством расчета поля пространственного заряда [23]. Учитывается зависимость динамики частиц от центрального движения, рассчитываемого как «центр тяжести» пучка. Процессы группирования и ускорения исследуются в рамках метода крупных частиц [1, 23], используются модельные частицы-диски конечной толщины. Так как пучок предполагается квазипериодическим, исследуется движение одного сгустка. Представлен метод учета взаимодействия частиц. Особенность этого метода состоит в том, что плотность распределения заряда по длине сгустка моделируется тригонометрическим полиномом, напряженность кулоновского поля представляется в аналогичном виде [21, 25, 31, 32]. Вводятся кусочно-гладкие управляющие функции, характеризующие поле ускоряющей волны. Предложены их параметризация и способ выбора управляющих параметров. Проводится многокритериальная оптимизация продольного движения частиц с целью обеспечения высокого качества группировки пучка по фазам, минимизации энергетической неоднородности пучка на выходе и получения коэффициента захвата частиц в режим ускорения не ниже заданного значения. Предложены соответствующие критерии качества. Многокритериальный подход позволяет найти компромисс между целями оптимизации, которые могут оказаться противоречивыми [4 – 7, 26]. Получены приближенная компромиссная кривая и соответствующие приближенно эффективные управления. Выбрано и фиксировано одно из

таких управлений, позволившее существенно улучшить характеристики продольного движения.

На втором этапе (глава 2) исследуется продольная и поперечная динамика пучка при выбранном и фиксированном управлении продольным движением. Представлена система уравнений, описывающая радиальное движение частиц [18]; независимой переменной, как и в случае продольного движения, является приведенное время. Получено выражение для поперечной составляющей напряженности поля объемного заряда в виде тригонометрического полинома. Выполнена линеаризация этого выражения по поперечной координате, что позволило использовать метод огибающих для моделирования поперечной динамики пучка [4, 10, 14, 17]. Проведена многокритериальная оптимизация поперечной динамики с целью удержания пучка в ходе движения внутри апертуры канала, а также минимизации радиуса и эффективного эмиттанса пучка на выходе ускорителя. Как и в случае продольного движения, используются кусочно-гладкие управляющие функции и аналогичная параметризация. Получены приближенное множество Парето и множество приближенно-эффективных управлений. Оптимизация позволила значительно уменьшить радиус пучка на протяжении ускоряющего тракта и эффективный эмиттанс пучка на выходе прибора.

Рассмотренные в главах 1 и 2 математические модели и методы реализованы в программном комплексе на языке C++. Проведено исследование движения электронов в волноводном ускорителе с длиной ускоряющей волны 10 см, энергией инжекции 60 кэВ и длиной канала ускорения 78 см. В главе 3 представлены результаты численного моделирования и оптимизации динамики пучка в ускорителе, полученные на обоих этапах исследования. Дан анализ результатов.

Обзор литературы

Исследованию и оптимизации динамики заряженных частиц в системах формирования пучков посвящена обширная литература.

Основные принципы действия ускоряющих систем, теория ускорения и фокусировки заряженных частиц, классификация и применение ускорителей описаны в работах [3, 8, 9, 14, 19]. Для изучения физических законов, на которых основано функционирование ускоряющих и фокусирующих систем, методов отыскания соответствующих электромагнитных полей, законов движения частиц в указанных полях могут быть использованы книги [15, 16].

Модернизация ускорителей, разработка новых устройств и освоение новых областей применения невозможны без предварительного моделирования и анализа динамики частиц. Эта тематика затронута в работах многих авторов [14, 17 – 20, 23].

Аналитическое и численное моделирование динамики заряженных пучков часто осуществляется в рамках метода крупных частиц [1, 23]. При этом моделируется движение не отдельных частиц, а их совокупностей, близко расположенных в фазовом пространстве, т.е. сгустков определенной формы, учитывающей симметрию задачи. Особое место среди методов моделирования динамики заряженных пучков занимают методы учета пространственного заряда, рассмотренные, в частности, в работах [19, 20, 23]. Отметим, что метод крупных частиц во многих случаях дает возможность получить аналитические выражения для напряженности указанных полей [18 – 20, 24, 25, 31].

Описание динамики пучков взаимодействующих частиц может строиться на основе интегро-дифференциальных моделей [24, 25, 31, 32]; такой подход позволяет использовать при оптимизации направленные методы [17 – 19, 32].

Ввиду развития техники и расширения области применения систем формирования пучков, актуальны задачи оптимизации динамики заряженных частиц в этих системах с целью получения требуемых характеристик пучка [2, 17 – 19, 21, 25, 27 – 29, 32].

На кафедре Теории систем управления электрофизической аппаратурой (ТСУЭФА) ведутся обширные исследования в области моделирования и оптимизации динамики заряженных пучков в ускоряющих и фокусирующих системах, причем основное внимание уделяется разработке математических методов моделирования и оптимизации изучаемых процессов [5, 18 – 21, 24, 25 – 32]. Результаты исследований находят применение при проектировании и выборе параметров устройств, используемых в науке, хозяйстве, медицине. Предложенный профессором Д.А. Овсянниковым подход [18, 19] во многих случаях позволяет сформулировать оптимизационную задачу как задачу управления ансамблем траекторий соответствующей системы дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений и получить аналитическое выражение для градиента функционала качества, что дает возможность строить направленные методы оптимизации [17 – 19, 29, 32]. Следует отметить эффективный подход, предложенный А.Д. Овсянниковым [17], а именно, совместную оптимизацию программного движения (выделенного, центрального) и движений частиц пучка (возможно, в отклонениях от программного).

Значительный интерес представляют задачи моделирования и оптимизации поперечного движения частиц в ускорителях. Отметим, что при моделировании поперечного движения частиц часто используется метод огибающих [4, 10, 14, 17]. Среди возможных оптимизационных задач основными являются задачи фокусировки, минимизации роста эффективного эмиттанса и согласования параметров пучка на входе в ускоритель [17 – 19, 29].

При исследовании динамики пучка в ускоряющей и фокусирующей структуре неизбежно возникает необходимость применения численных методов моделирования и оптимизации. Теория и опыт использования таких методов в задачах электрофизики рассмотрены, например в книгах [4 – 6, 13, 23, 27 – 29].

При оптимизации динамики пучка могут применяться направленные методы (если получено аналитическое выражение градиента функционала качества) или методы поиска [22], а также методы Монте-Карло [6, 11, 12]. Если имеется несколько целей оптимизации, то возможно введение нескольких критериев качества и использование многокритериального подхода [4, 5, 26, 28]. Опыт подобной оптимизации динамики заряженных пучков накоплен на кафедре ТСУЭФА.

Исследование задачи обычно завершается разработкой вычислительных алгоритмов и соответствующего программного обеспечения. Примером работ по данной тематике является [30].

В настоящей работе используются многие подходы, модели и методы, описанные в представленной литературе. Работа опирается на опыт исследований в области моделирования и оптимизации динамики заряженных пучков, проводимых на кафедре ТСУЭФА. Так, математическая модель продольного и поперечного движения пучка строится при использовании материала [17, 19, 20, 25, 31]. Численное моделирование продольной динамики пучка выполнено в рамках метода крупных частиц, используется дисковая модель пучка [1, 20, 23]. Поперечное движение частиц моделируется на основе метода огибающих [10, 17 – 19]. При расчете кулоновского поля используется аппроксимация плотности заряда тригонометрическим полиномом [20, 25, 31]. Критерии качества управляемого процесса выбраны на основе работ [17 – 19, 29]. Проведена многокритериальная оптимизация динамики пучка при использовании методики [4 – 7, 25, 26, 28].

Постановка задачи

1. Представить математическую модель, описывающую продольную и поперечную динамику интенсивного квазипериодического пучка в линейном волноводном ускорителе;
2. Разработать программное обеспечение с целью реализации модели, а также проведения многокритериальной оптимизации динамики пучка;
3. Выполнить численное моделирование продольного движения без учета поперечного;
4. Провести оптимизацию продольного движения, используя многокритериальный подход;
5. Осуществить численное моделирование продольного и поперечного движения частиц при оптимизированном управлении продольным движением; провести многокритериальную оптимизацию поперечного движения;
6. Представить графически и проанализировать полученные результаты.

Общие положения

(устройство ускорителя и уравнения движения)

В работе рассматривается ускоритель на бегущей волне [3, 14, 18, 19].

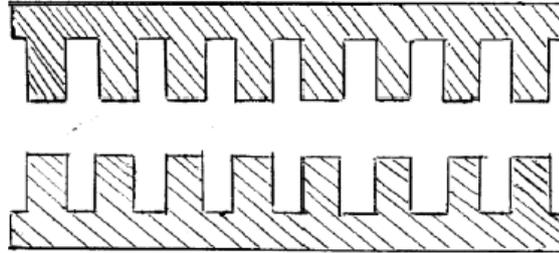


Рис.1 Канал волноводного ускорителя в разрезе

Ускоритель имеет вид полой цилиндрической трубы; внутри находятся диафрагмы. В диафрагмированном волноводе возбуждаются бегущие электромагнитные волны с ненулевой продольной составляющей электрического поля. Фазовая скорость основной гармоники (так называемой ускоряющей волны) благодаря наличию диафрагм близка к скорости частиц. Это делает возможным использование принципа автофазировки для группирования и ускорения пучка: в каждый момент имеется синхронная частица, которая ускоряется вместе с фронтом бегущей волны; частицы, захваченные в колебательный процесс вокруг синхронной, ускоряются вместе с ней [3, 19].

Задача исследователя состоит в адекватном моделировании динамики пучка и в выборе законов изменения амплитуды ускоряющей волны, ее фазовой скорости и фокусирующего магнитного поля вдоль структуры. Физически указанные законы реализуются посредством выбора расположения и размеров диафрагм, радиуса и длины канала ускорителя, мощности и частоты питающего генератора, а также характеристик устройств, создающих магнитное поле [18, 19].

Движение частиц в электромагнитном поле описывается уравнением Ньютона-Лоренца [15]:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (1)$$

где \vec{p} – импульс частицы, q – заряд частицы, \vec{v} – скорость частицы, \vec{E} – напряженность электрического поля, \vec{B} – индукция магнитного поля.

Учтем, что напряженность электрического поля и индукция магнитного поля имеют следующие составляющие: высокочастотное ускоряющее поле ($\vec{E}^{(RF)}$, $\vec{B}^{(RF)}$), поле собственного заряда ($\vec{E}^{(int)}$, $\vec{B}^{(int)}$) и поле, созданное магнитными фокусирующими системами ($\vec{B}^{(M)}$).

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}^{(RF)} + \vec{E}^{(int)}, \\ \vec{B} &= \vec{B}^{(RF)} + \vec{B}^{(int)} + \vec{B}^{(M)}. \end{aligned}$$

Продольная компонента поля ускоряющей волны на оси канала имеет вид:

$$E^{(RF)} = E(t, z) = E_0(z) \sin \varphi, \quad (2)$$

Здесь t – время, z – продольная координата, $E_0(z)$ – амплитуда волны, φ – фаза волны; фаза волны представляется как

$$\varphi = \varphi(t, z) = \omega \int_0^z \frac{d\chi}{v_\phi(\chi)} - \omega t + \varphi_0, \quad (3)$$

где ω – циклическая частота, v_ϕ – фазовая скорость волны, φ_0 – начальная фаза.

Для удобства воспользуемся цилиндрической системой координат (r, θ, z) , исходя из геометрии канала ускорения (см. рис. 1).

$$\vec{r} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z,$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r + \dot{z}\vec{e}_z + z\dot{\vec{e}}_z, \quad (4)$$

$$\dot{\vec{e}}_z = 0, \quad \dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\vec{e}_\theta, \quad \dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{e}_r. \quad (5)$$

Из (4) и (5) получим:

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z, \quad v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}, \quad v_z = \dot{z}. \quad (6)$$

Подставляя (4), (5), (6) в уравнение Ньютона-Лоренца, имеем:

$$\frac{d(m\dot{r})}{dt} - mr(\dot{\theta})^2 = q(E_r + r\dot{\theta}B_z - \dot{z}B_\theta), \quad (7)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d(mr^2\dot{\theta})}{dt} = q(E_\theta + \dot{z}B_r - \dot{r}B_z), \quad (8)$$

$$\frac{d(m\dot{z})}{dt} = q(E_z + \dot{r}B_\theta - r\dot{\theta}B_r). \quad (9)$$

Здесь (7) – уравнение радиального движения, (8) – уравнение азимутального движения, (9) – уравнение продольного движения.

В работе исследуется динамика интенсивного квазипериодического пучка электронов в ускорителе на бегущей волне. Далее рассмотрим поэтапно моделирование продольного движения и его оптимизацию, а затем поперечное движение.

Глава 1. Продольное движение частиц

1.1. Уравнения продольного движения

При исследовании продольного движения будем считать, что частицы движутся вблизи оси структуры. В этом случае продольное движение мало зависит от поперечного [3, 18, 19]; пренебрегая этой зависимостью и учитывая, что магнитное фокусирующее поле постоянно во времени и потому не порождает электрического поля, получим из (9):

$$\frac{d(m\dot{z})}{dt} = q(E_z^{(RF)} + E_z^{(int)}). \quad (1.1.1)$$

Перейдем в (1.1.1) к безразмерным величинам: пусть независимая переменная $\tau = \frac{ct}{\lambda}$ – приведенное время, $\xi = \frac{z}{\lambda}$ – приведенная координата, где λ – длина ускоряющей волны в свободном пространстве. Воспользовавшись известным релятивистским соотношением [15, 22] ($\beta\gamma = \frac{mv}{m_0c}$ – приведенный импульс), получим, что $m\dot{\xi} = \lambda\beta\gamma m_0c$. Положим $q = -e$, где e – абсолютная величина заряда электрона. Используя все эти преобразования и также выражение для основной гармоники (2) ускоряющего поля, получим:

$$\frac{d(\beta\gamma)}{d\tau} = -\frac{e\lambda}{m_0c^2} E_0(\lambda\xi)\sin\varphi + \frac{e\lambda}{m_0c^2} E_z^{(int)}(\xi, \xi_c, \beta\gamma_c, R), \quad (1.1.2)$$

где

$$\varphi = \varphi(\tau, \xi) = 2\pi \int_0^\xi \frac{d\chi}{\beta_\phi(\chi, \nu)} - 2\pi\tau + \varphi_0. \quad (1.1.3)$$

Здесь ξ_c , $\beta\gamma_c$ – соответственно координата и приведенный импульс центра сгустка; R – приведенный (т.е. отнесенный к длине волны λ) радиус

пучка, который при исследовании продольного движения предполагается постоянным; \mathcal{U} – вектор управляющих параметров.

Введем управляющие функции: $\alpha(\xi, \nu) = \frac{e\lambda E_0(\lambda\xi)}{m_0 c^2}$ – безразмерный параметр амплитуды напряженности высокочастотного поля, $\beta_\phi(\xi, \nu)$ – приведенная фазовая скорость ускоряющей волны. Данные функции зависят от управляющих параметров \mathcal{U} ; по управляющим параметрам производится оптимизация (см. раздел 1.3). В рассматриваемой модели будем полагать, что функции $\alpha(\xi, \nu)$ и $\beta_\phi(\xi, \nu)$ – кусочно-гладкие.

Используя релятивистские соотношения и уравнение (1.1.1), после дифференцирования (1.1.3) по τ получим систему уравнений, описывающих продольное движение электронов в линейном волноводном ускорителе:

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{d\tau} = \frac{\beta\gamma}{\sqrt{1+(\beta\gamma)^2}} \\ \frac{d(\beta\gamma)}{d\tau} = -\alpha(\xi, \nu)\sin\varphi + \frac{e\lambda}{m_0 c^2} E_z^{(\text{int})}(\xi, \xi_c, \beta\gamma_c, R) \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = 2\pi \left(\frac{1}{\beta_\phi(\xi, \nu)} \frac{\beta\gamma}{\sqrt{1+(\beta\gamma)^2}} - 1 \right) \end{cases} \quad (1.1.4)$$

с начальными условиями

$$\xi(\tau_0) = \xi_0, \quad \beta\gamma(\tau_0) = (\beta\gamma)_0, \quad \varphi(\tau_0) = \varphi_0(\xi_0, \beta\gamma_0). \quad (1.1.5)$$

Фазовые переменные в системе (1.1.4) ξ и $\beta\gamma$; размерность фазового пространства равняется двум. Третье уравнение в системе (1.1.4) введено для удобства.

Мы будем моделировать продольную динамику пучка, используя метод крупных частиц [1, 23]. Ввиду пространственной квазипериодичности пучка

моделируется динамика одного сгустка с учетом влияния на него остальных. Пусть модельные частицы – диски конечной толщины (так называемые диски-облака) с центрами на оси структуры, имеющие одинаковый приведенный радиус R . Пусть $\xi_i, \beta\gamma_i, \varphi_i, i = \overline{1, N}$ – приведенные координаты, приведенные импульсы и фазы модельных частиц. Учитывая все сказанное выше, продольное движение частиц в канале ускорителя будем описывать уравнениями [25]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\xi_i}{d\tau} = \frac{\beta\gamma_i}{\sqrt{1 + (\beta\gamma)_i^2}} \\ \frac{d(\beta\gamma)_i}{d\tau} = -\alpha(\xi_i, \nu) \sin \varphi_i + \frac{e\lambda}{m_0 c^2} E_z^{(\text{int})}(\xi_i, \xi_c, \beta\gamma_c, R) \\ \frac{d\varphi_i}{d\tau} = 2\pi \left(\frac{1}{\beta_\phi(\xi_i, \nu)} \frac{\beta\gamma_i}{\sqrt{1 + (\beta\gamma)_i^2}} - 1 \right) \end{array} \right. \quad (1.1.6)$$

$$\xi_c = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i, \quad (\beta\gamma)_c = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\beta\gamma)_i \quad (1.1.7)$$

с начальными условиями

$$\xi_i(0) = \xi_{i0}, \quad \beta\gamma_i(0) = (\beta\gamma)_{i0}, \quad \varphi_i(0) = \varphi_{i0}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (1.1.8)$$

В системе (1.1.4) нужно определить выражение для напряженности поля объемного заряда $E_z^{(\text{int})}(\xi, \xi_c, \beta\gamma_c, R)$. Рассмотрим способ его учета в следующем разделе.

1.2. Метод учета взаимодействия частиц

При моделировании кулоновского поля существенно используется пространственная квазипериодичность пучка. Пусть $2H$ – приведенная длина пространственного квазипериода пучка в лабораторной системе отсчета, как известно, [23]

$$2H = \frac{(\beta\gamma)_c}{\sqrt{1 + (\beta\gamma)_c^2}}.$$

Основной особенностью метода моделирования продольной компоненты напряженности поля объемного заряда является аппроксимация плотности заряда тригонометрическим полиномом, который строится при использовании метода «облака в ячейках» [23].

Мы полагаем, что модельная частица является диском с постоянным радиусом R , с зарядом $q = \frac{I\lambda}{cN}$, где I – ток пучка, и толщиной $2d$ в лабораторной системе отсчета (толщина может меняться в ходе движения). Параметры R , $2d$ являются приведенными (безразмерными).

Ниже представлен алгоритм расчета напряженности кулоновского поля [25]:

1. Введем сетку по продольной координате ξ

$$\chi_j = \xi_c - H + 2hj, \quad j = \overline{0, J},$$

где J – число шагов сетки, $2h = \frac{2H}{J}$ – размер ячейки.

2. Рассчитаем заряды сеточных ячеек

Будем считать, что плотность заряда i -ой модельной частицы с координатой центра ξ_i в лабораторной системе отсчета описывается формулой:

$$\rho^{(cloud)}(\eta, \xi, \xi_i, \beta\gamma_c) = qT(\eta)\kappa(\xi - \xi_i, \beta\gamma_c), \quad (1.2.1)$$

Здесь $\eta = \frac{r}{\lambda}$, r – полярный радиус, $T(\eta) = \begin{cases} 1, \eta \leq R \\ 0, \eta > R \end{cases}$, коэффициент формы

$$\kappa(\xi - \xi_i, \beta\gamma_c) = \frac{1}{\pi R^2 \lambda^3} \begin{cases} \frac{1}{2d}, |\xi - \xi_c| \leq d \\ 0, |\xi - \xi_c| > d \end{cases}, \quad 2d = 2bh = b \frac{\beta\gamma_c}{J \sqrt{1 + (\beta\gamma_c)^2}}, \quad 0 < b \leq 1 -$$

постоянный коэффициент – параметр сглаживания.

Заряд j -ой ячейки $[\chi_j - h, \chi_j + h]$ описывается выражением:

$$q_j = \pi R^2 \lambda^2 q \sum_{i=1}^N \int_{\chi_j - h}^{\chi_j + h} \kappa(\xi - \xi_i, \beta\gamma_c) d\xi, \quad j = \overline{0, J-1}.$$

Будем считать, что ячейки $(\chi_0 - h, \chi_0 + h)$ и $(\chi_J - h, \chi_J + h)$ «склеены» в силу периодичности пучка. Следовательно, $q_0 = q_J$, и достаточно рассматривать ячейки с номерами $j = \overline{0, J-1}$.

3. Аппроксимируем плотность заряда тригонометрическим полиномом

Плотность заряда приближенно можно описать кусочно-постоянной функцией

$$\tilde{v}(\eta, \xi, \xi_c, \beta\gamma_c) = T(\eta) \tilde{S}(\xi, \xi_c, \beta\gamma_c),$$

$$\tilde{S}(\xi, \xi_c, \beta\gamma_c) = S_j = \frac{q_j}{2h\pi R^2 \lambda^3}, \quad \xi \in [\chi_j - h, \chi_j + h), \quad j = \overline{0, J-1}.$$

Аппроксимируем функцию $\tilde{S}(\xi, \xi_c, \beta\gamma_c)$ тригонометрическим полиномом $S(\xi, \xi_c, \beta\gamma_c)$, принимающим значения S_j в узлах сетки χ_j , $j = \overline{0, J-1}$ [20].

Полином имеет вид:

$$S(\xi, \xi_c, \beta\gamma_c) = \frac{1}{2h\pi R^2 \lambda^3} \sum_{m=0}^M \left[A_m^c \cos\left(\frac{m\pi}{H}(\xi - \xi_c)\right) + A_m^s \sin\left(\frac{m\pi}{H}(\xi - \xi_c)\right) \right].$$

Здесь

$$A_0^c = \frac{Q}{J}, \quad A_m^c = \frac{(-1)^m}{ML_m} \sum_{j=0}^{J-1} q_j \cos\left(\frac{mj\pi}{M}\right), \quad m = \overline{1, M},$$

$$A_m^s = \frac{(-1)^m}{M} \sum_{j=0}^{J-1} q_j \sin\left(\frac{mj\pi}{M}\right), \quad m = \overline{0, M}, \quad (1.2.2)$$

$$M = \frac{J}{2}, \quad L_m = \left[1 + \frac{m}{M}\right] - \text{целая часть числа } 1 + \frac{m}{M}.$$

Таким образом, объемная плотность заряда периодического пучка в лабораторной системе отсчета аппроксимируется функцией

$$v(\eta, \xi, \xi_c, \beta\gamma_c) = \frac{T(\eta)}{2h\pi R^2 \lambda^3} \sum_{m=0}^M \left[A_m^c \cos\left(\frac{m\pi}{H}(\xi - \xi_c)\right) + A_m^s \sin\left(\frac{m\pi}{H}(\xi - \xi_c)\right) \right]. \quad (1.2.3)$$

4. Расчет напряженности кулоновского поля в точке наблюдения

Периодический пучок с объемной плотностью заряда (1.2.3) создает в точке наблюдения (η, θ, ξ) , θ – любое, кулоновское поле напряженностью [19, 24]:

$$E_z(\eta, \xi, \xi_c, \beta\gamma_c) = \sum_{k=1}^{\infty} R_k(\xi, \xi_c, \beta\gamma_c) J_0\left(\mu_k \frac{\eta}{a}\right),$$

где a – приведенный радиус канала ускорителя, $\mu_k, k=1, 2, \dots$ – нули функции Бесселя $J_0(x)$,

$$R_k(\xi, \xi_c, \beta\gamma_c) = \frac{1}{2h\pi R^2 \lambda^2} \sum_{m=1}^M G_{km}(\beta\gamma_c) \left[A_m^c \sin\left(\frac{m\pi}{H}(\xi - \xi_c)\right) - A_m^s \cos\left(\frac{m\pi}{H}(\xi - \xi_c)\right) \right].$$

Здесь

$$G_{km}(\beta\gamma_c) = \frac{\pi m t_k a^2 H}{\varepsilon_0 \left((m\pi a)^2 + (1 + (\beta\gamma_c)^2) (H\mu_k)^2 \right)},$$

где

$$t_k = \frac{2RJ_1(\mu_k R/a)}{\mu_k a J_1^2(\mu_k)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.2.4)$$

коэффициенты разложения функции $T(\eta)$ в ряд Фурье-Бесселя по функциям $J_0\left(\mu_k \frac{\eta}{a}\right)$, $k = 1, 2, \dots$

5. Расчет напряженности потенциального поля (отнесенной к заряду силы), характеризующей действие пучка на i -ю модельную частицу

$$E_z^{(int)}(\xi, \xi_c, \beta\gamma_c) = \frac{1}{q} \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_z(\eta, \xi, \xi_c, \beta\gamma_c) \rho^{(cloud)}(\eta, \xi, \xi_c, \beta\gamma_c) \lambda^3 \eta d\eta d\theta d\xi.$$

Представим расчетную формулу для равномерно заряженных частиц с приведенной толщиной $2d$. Будем рассматривать приведенный радиус пучка R как параметр, который в дальнейшем может быть либо задан постоянным, либо вычислен через огибающую пучка.

$$E_z^{(int)}(\xi_i, \xi_c, \beta\gamma_c, R) = \frac{2a^2 H J}{\varepsilon_0 d \pi R^2 \lambda^2} \sum_{m=1}^M \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1^2\left(\mu_k \frac{R}{a}\right) / (\mu_k^2 J_1^2(\mu_k))}{((m\pi a)^2 + (\mu_k H)^2 (1 + (\beta\gamma_c)^2))} \right) \times \\ \times \sin\left(\frac{m\pi d}{H}\right) \left[A_m^c \sin\left(\frac{m\pi}{H}(\xi_i - \xi_c)\right) - A_m^s \cos\left(\frac{m\pi}{H}(\xi_i - \xi_c)\right) \right]. \quad (1.2.5)$$

1.3. Оптимизация продольного движения

Оптимизация продольной динамики пучка проводится при использовании метода многокритериальной оптимизации [4 – 6, 26, 28].

Выберем следующие три критерия качества управляемого процесса. Первый из них:

$$K_1(\nu) = \frac{1}{NL} \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^N (\varphi_i(\xi_l) - \bar{\varphi}(\xi_l))^2, \quad (1.3.1)$$

где $\bar{\varphi}(\xi_l) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi_i(\xi_l)$ – среднее значение фазы в l -ом сечении, L – число сечений ускорителя плоскостями $\xi = \xi_l$, $l = \overline{1, L}$, N – число модельных частиц. Критерий $K_1(\nu)$ характеризует фазовую неоднородность пучка в ходе движения частиц вдоль структуры.

Второй критерий характеризует средний квадрат отклонения энергии частиц на выходе прибора $\gamma(\xi_{ex}^{(i)})$ от средней энергии на выходе $\bar{\gamma}_{ex}$:

$$K_2(\nu) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\gamma(\xi_{ex}^{(i)}) - \bar{\gamma}_{ex})^2. \quad (1.3.2)$$

Третий критерий – это величина, обратная к коэффициенту захвата K_c частиц в режим ускорения:

$$K_3(\nu) = \frac{2\pi}{\Delta\varphi_0} = \frac{1}{K_c}, \quad (1.3.3)$$

где $\Delta\varphi_0$ – промежуток, занимаемый начальными фазами частиц, захваченными в режим ускорения.

Будем рассматривать задачу

$$K(\nu) = (K_1(\nu), K_2(\nu)) \xrightarrow{\nu} \min \quad (1.3.4)$$

минимизации вектора критериев $K(\nu) = (K_1(\nu), K_2(\nu))$ по параметрам $\nu \in \Pi$, где Π – S -мерный параллелепипед

$$\Pi = \{(\nu_1, \dots, \nu_S) : \nu_i^{(\min)} \leq \nu_i \leq \nu_i^{(\max)}; i = \overline{1, S}\},$$

наложив на критерий K_3 ограничение

$$K_3(\nu) \leq K^*, \quad (1.3.5)$$

где K^* – заданное число, т.е. будем требовать, чтобы коэффициент захвата K_c был не меньше некоторого порогового значения.

Управляющие параметры (ν_1, \dots, ν_s) включает в себя: 1) координаты ξ_i , $i = \overline{1, S_1}$ узлов сетки по ξ ; 2) начальные значения $\alpha(0)$, $\beta_\phi(0)$ функций $\alpha(\xi)$ и $\beta_\phi(\xi)$; 3) значения производных $\alpha'(\xi)$ и $\beta'_\phi(\xi)$ в узлах сетки. Указанные параметры выбираются случайным образом в некоторых заданных промежутках, представленных в Приложении. Ясно, что размерность вектора ν равна $S = 3S_1 + 2$.

Начальные управляющие функции $\alpha^{(0)}(\xi)$ и $\beta_\phi^{(0)}(\xi)$ найдены эвристически и обеспечивают группировку и ускорение пучка:

$$\alpha^{(0)}(\xi) = 0.75 \cdot \text{arctg}(2.4 \cdot \xi - 2.4) + 1.4,$$

$$\beta_\phi^{(0)}(\xi) = 0.3 \cdot \text{arctg}(1.8 \cdot \xi - 2.0) + 0.6.$$

Им соответствует начальный вектор $\nu^{(0)}$ управляющих параметров.

В ходе многокритериальной оптимизации моделирование управляющих функций осуществляется следующим образом:

- 1) Выбор узлов ξ_i , $i = \overline{1, S_1}$ посредством моделирования случайных величин, равномерно распределенных в заданных промежутках;
- 2) Выбор значений $\alpha(0)$, $\beta_\phi(0)$ случайным образом в промежутках с центрами в точках $\alpha^{(0)}(\xi)$, $\beta_\phi^{(0)}(\xi)$ соответственно;
- 3) Выбор значений производных $\alpha'(\xi_i)$, $\beta'_\phi(\xi_i)$, $i = \overline{1, S_1}$ случайным образом в промежутках с центрами $(\alpha^{(0)})'(\xi_i)$, $(\beta_\phi^{(0)})'(\xi_i)$, $i = \overline{1, S_1}$ соответственно;

4) Моделирование производных $\alpha'(\xi)$, $\beta'_\phi(\xi)$ посредством линейной интерполяции на каждом участке $[\xi_{i-1}, \xi_i], i = \overline{1, S_1}$:

$$\alpha'(\xi) = a_i \xi + b_i, \quad \beta'_\phi(\xi) = c_i \xi + d_i, \quad \xi \in [\xi_{i-1}, \xi_i],$$

$$a_i = \frac{\alpha'(\xi_i) - \alpha'(\xi_{i-1})}{\xi_i - \xi_{i-1}}, \quad b_i = \frac{\xi_i \alpha'(\xi_{i-1}) - \xi_{i-1} \alpha'(\xi_i)}{\xi_i - \xi_{i-1}},$$

$$c_i = \frac{\beta'_\phi(\xi_i) - \beta'_\phi(\xi_{i-1})}{\xi_i - \xi_{i-1}}, \quad d_i = \frac{\xi_i \beta'_\phi(\xi_{i-1}) - \xi_{i-1} \beta'_\phi(\xi_i)}{\xi_i - \xi_{i-1}}$$

и функций $\alpha(\xi)$, $\beta_\phi(\xi)$ по формулам:

$$\alpha(\xi) = \alpha(\xi_{i-1}) + a_i \frac{\xi^2 - \xi_{i-1}^2}{2} + b_i (\xi - \xi_{i-1}), \quad \xi \in [\xi_{i-1}, \xi_i],$$

$$\beta_\phi(\xi) = \beta_\phi(\xi_{i-1}) + c_i \frac{\xi^2 - \xi_{i-1}^2}{2} + d_i (\xi - \xi_{i-1}), \quad \xi \in [\xi_{i-1}, \xi_i].$$

В результате сформирован вектор $\nu \in \Pi$ управляющих параметров и соответствующие кусочно-гладкие функции $\alpha(\xi, \nu)$ и $\beta_\phi(\xi, \nu)$.

Оптимизация выполняется по следующему алгоритму:

1. Выбирается случайным образом точка $\nu \in \Pi$; строятся соответствующие функции $\alpha(\xi, \nu)$ и $\beta_\phi(\xi, \nu)$;
2. Осуществляется численное моделирование продольной динамики пучка в соответствии с уравнениями (1.1.4) с начальными условиями (1.1.5);
3. Рассчитываются значения критериев (1.3.1) – (1.3.3);
4. Если значение критерия K_3 удовлетворяет (1.3.5), то получено допустимое управление, отмечается соответствующая точка на плоскости критериев (K_1, K_2) ; в противном случае вектор параметров отбрасывается.

Таким образом, получаем некоторое количество \hat{M} пробных точек в пространстве критериев (K_1, K_2) ; каждой точке соответствует допустимое управление (S -мерный вектор параметров).

В соответствии с методом, описанным в [6, 26], строится приближенная компромиссная кривая, она представляет собой юго-западную границу множества пробных точек в пространстве критериев (K_1, K_2) . Управления, соответствующие точкам приближенной компромиссной кривой – приближенно-эффективные управления.

Результаты численного моделирования и оптимизации продольной динамики пучка представлены в главе 3 разделе 3.2.

Глава 2. Поперечное движение частиц

2.1. Уравнения поперечного движения

Поперечное движение частиц в линейном волноводном ускорителе описывается уравнениями (7) и (8). Как известно, уравнение азимутального движения можно исключить, используя теорему Буша [18, 19]. Рассмотрим уравнение (7), описывающее радиальное движение частиц:

$$\frac{d(m\dot{r})}{dt} - mr(\dot{\theta})^2 = q(E_r + r\dot{\theta}B_z - \dot{z}B_\theta).$$

Заметим, что внешние поля – высокочастотное ускоряющее поле $(\vec{E}^{(RF)}, \vec{B}^{(RF)})$ и поле, созданное магнитными фокусирующими системами $(\vec{B}^{(M)})$ – обладают аксиальной симметрией (относительно оси Oz). Поэтому

$$\vec{E}^{(RF)} = (E_r^{(RF)}, 0, E_z^{(RF)}), \vec{B}^{(RF)} = (0, B_\theta^{(RF)}, 0), \vec{B}^{(M)} = (B_r^{(M)}, 0, B_z^{(M)}).$$

Следовательно,

$$E_r = E_r^{(RF)} + E_r^{(int)}, B_\theta = B_\theta^{(RF)} + B_\theta^{(int)}, B_z = B_z^{(M)}. \quad (2.1.1)$$

Равенство нулю продольной компоненты магнитного поля собственного заряда объясняется следующим образом. Средняя скорость частиц (продольная компонента) близка к фазовой скорости бегущей волны и существенно выше разброса скоростей. При вычислении поля объемного заряда вводится сопутствующая система отсчета, движущаяся вдоль оси структуры со средней скоростью частиц. Благодаря синхронизму в подвижной системе поток не является релятивистским и собственное магнитное поле равно нулю [23]. При переходе от сопутствующей системы отсчета к неподвижной (лабораторной) продольная компонента магнитного поля не меняется, откуда $B_z^{(int)} = 0$.

Из уравнений Максвелла для поля ускоряющей волны имеем [18, 19]:

$$E_r^{(RF)} = -\frac{1}{2} \frac{\partial E_z^{(RF)}}{\partial z} r, \quad B_\theta^{(RF)} = \frac{1}{2c^2} \frac{\partial E_z^{(RF)}}{\partial t} r. \quad (2.1.2)$$

Продольная компонента поля ускоряющей волны, возбуждаемой в системе (основная гармоника, которая подхватывает частицы в ускорение), на оси канала имеет вид (2):

$$E^{(RF)} = E(t, z) = E_0(z) \sin \varphi.$$

Подставив (2) в (2.1.2), найдем $E_r^{(RF)}$, $B_\theta^{(RF)}$. Радиальная компонента силы, порождаемой полем ускоряющей волны, представляется в виде [18, 19]:

$$F_r^{(RF)} = q(E_r^{(RF)} - \dot{z}B_\theta^{(RF)}) = -\frac{q}{2} \left(E_0'(z) \sin \varphi + \frac{2\pi E_0(z)}{\beta_\phi \lambda} (1 - \beta\beta_\phi) \cos \varphi \right) r. \quad (2.1.3)$$

Теорема Буша дает нам первый интеграл:

$$mr^2 \dot{\theta} + q \int_0^r B_z^{(M)}(\eta, z) \eta d\eta = M_1 = const. \quad (2.1.4)$$

Полагаем, что в рассматриваемом ускорителе

- 1) $B_z^{(M)} = B_z^{(M)}(z)$;
- 2) Начальное вращение частиц отсутствует: $r\dot{\theta}|_{t=0} = 0$ для всех частиц;
- 3) Частицы поступают в канал из области, где нет магнитного поля.

Тогда константа Буша $M_1 = 0$. Учитывая, что заряд частицы $q = -e$, из (2.1.4) имеем:

$$mr^2 \dot{\theta} = eB_z^{(M)}(z) \frac{r^2}{2},$$

откуда

$$r\dot{\theta} = \frac{eB_z^{(M)}}{2m} r. \quad (2.1.5)$$

Здесь $B_z^{(M)}$ – продольная компонента фокусирующего магнитного поля.

Вернемся еще раз к уравнению (7), учитывая (2.1.5). Имеем:

$$\frac{d(m\dot{r})}{dt} = -e \left(E_r^{(RF)} + E_r^{(int)} + \frac{e(B_z^{(M)})^2}{2m} r - \dot{z}B_\theta^{(RF)} - \dot{z}B_\theta^{(int)} \right) + \frac{e^2(B_z^{(M)})^2}{4m} r.$$

Приведем подобные члены и учтем (2.1.3). Получим:

$$\begin{aligned} \frac{d(m\dot{r})}{dt} = & \left(\frac{e}{2} E_0'(z) \sin \varphi + \frac{e\pi E_0(z)}{\beta_\phi \lambda} (1 - \beta\beta_\phi) \cos \varphi \right) r + \\ & + eE_r^{(int)} - e\dot{z}B_\theta^{(int)} - \frac{(eB_z^{(M)})^2}{4m} r. \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Заметим, что в уравнении (2.1.6) знаки перед компонентами поля объемного заряда заменены на противоположные, т.к. при расчете этих компонент будем считать заряд частицы, определяемый через ток пучка, положительным.

Перейдем в (2.1.6) к независимой переменной $\tau = \frac{ct}{\lambda}$ и безразмерной

переменной $\xi = \frac{z}{\lambda}$. Рассмотрим левую часть (2.1.6).

$$m\dot{r} = m_0\gamma \frac{dr}{dt} = m_0\gamma \frac{dr}{d\tau} \frac{c}{\lambda} = m_0\gamma \frac{c}{\lambda} r',$$

$$\frac{d(m\dot{r})}{dt} = \frac{d}{dt} \left(m_0\gamma \frac{c}{\lambda} r' \right) = \frac{d}{d\tau} \left(m_0\gamma \frac{c}{\lambda} r' \right) \frac{c}{\lambda} = \frac{m_0c^2}{\lambda^2} \frac{d(r'\gamma)}{d\tau} = \frac{m_0c^2}{\lambda^2} \left(\frac{d\gamma}{d\tau} r' + r''\gamma \right). \quad (2.1.7)$$

Далее понадобятся следующие соотношения: $\beta = \frac{\beta\gamma}{\sqrt{1+(\beta\gamma)^2}}$ – приведенная

скорость, $\gamma = \sqrt{1+(\beta\gamma)^2}$ – приведенная энергия; подставим их в первое слагаемое (2.1.7) и используем второе уравнение из системы (1.1.4); получим:

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \frac{\beta\gamma}{\sqrt{1+(\beta\gamma)^2}} \frac{d(\beta\gamma)}{d\tau} = \beta \left[-\alpha(\xi, \nu) \sin \varphi + \frac{e\lambda}{m_0 c^2} E_z^{(\text{int})}(\xi, \xi_c, \beta\gamma_c, R) \right].$$

Таким образом, левая часть (2.1.6) примет вид:

$$\frac{d(m\dot{r})}{dt} = \frac{m_0 c^2}{\lambda^2} \left[\beta \left(-\alpha(\xi, \nu) \sin \varphi + \frac{e\lambda}{m_0 c^2} E_z^{(\text{int})} \right) r' + r'' \gamma \right]. \quad (2.1.8)$$

Перейдем к рассмотрению правой части (2.1.6). Учтем, что

$$B_\theta^{(\text{int})} = \frac{\beta_c}{c} E_r^{(\text{int})} \quad (\text{см. раздел 2.2}); \quad \dot{z} = c \frac{d\xi}{d\tau} = c\beta, \quad E_0(z) = E_0(\lambda\xi) = \alpha(\xi) m_0 c^2 / e\lambda,$$

$$E_0'(z) = \frac{dE_0(z)}{dz} = \frac{\alpha'_\xi(\xi) m_0 c^2}{e\lambda^2}. \quad \text{Таким образом, правая часть примет вид:}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(m\dot{r})}{dt} = & \left(\frac{\alpha'_\xi(\xi) m_0 c^2}{2\lambda^2} \sin \varphi + \frac{\pi\alpha(\xi) m_0 c^2}{\beta_\phi \lambda^2} (1 - \beta\beta_\phi) \cos \varphi \right) r + \\ & + e(1 - \beta\beta_c) E_r^{(\text{int})} - \frac{(eB_z^{(M)})^2}{4m} r. \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Приравняем (2.1.8) и (2.1.9). Получим:

$$\begin{aligned} \frac{m_0 c^2}{\lambda^2} \left(\beta \left(-\alpha \sin \varphi + \frac{e\lambda}{m_0 c^2} E_z^{(\text{int})} \right) r' + r'' \gamma \right) = \\ = \left(\frac{\alpha'_\xi(\xi) m_0 c^2}{2\lambda^2} \sin \varphi + \frac{\pi\alpha(\xi) m_0 c^2}{\beta_\phi \lambda^2} (1 - \beta\beta_\phi) \cos \varphi - \frac{(eB_z^{(M)})^2}{4m} \right) r + e(1 - \beta\beta_c) E_r^{(\text{int})}. \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Выразим r'' из (2.1.10)

$$r'' = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\alpha'_{\xi}(\xi)}{2} \sin \varphi + \frac{\pi \alpha(\xi)}{\beta_{\phi}(\xi)} (1 - \beta \beta_{\phi}) \cos \varphi - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{e \lambda B_z^{(M)}}{2 m_0 c} \right)^2 \right) r +$$

$$+ \frac{1}{\gamma} \frac{e \lambda^2}{m_0 c^2} (1 - \beta \beta_c) E_r^{(\text{int})} + \frac{\beta}{\gamma} \left(\alpha \sin \varphi - \frac{e \lambda}{m_0 c^2} E_z^{(\text{int})} \right) r',$$

и перейдем к системе:

$$\frac{dr}{d\tau} = r'$$

$$\frac{dr'}{d\tau} = \frac{\beta}{\gamma} \left(\alpha \sin \varphi - \frac{e \lambda}{m_0 c^2} E_z^{(\text{int})} \right) r' + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\alpha'_{\xi}(\xi)}{2} \sin \varphi + \frac{\pi \alpha(\xi)}{\beta_{\phi}(\xi)} (1 - \beta \beta_{\phi}) \cos \varphi - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{e \lambda B_z^{(M)}}{2 m_0 c} \right)^2 \right) r + \frac{1}{\gamma} \frac{e \lambda^2}{m_0 c^2} (1 - \beta \beta_c) E_r^{(\text{int})}(r, \xi, \xi_c, \beta \gamma_c).$$

Введем безразмерные величины $\eta = \frac{r}{\lambda}$, $\kappa = \eta' = \frac{r'}{\lambda}$ и управляющую функцию

$$\gamma_M^2(\xi, u) = \left(\frac{e \lambda B_z^{(M)}}{2 m_0 c} \right)^2, \text{ где } u \text{ – вектор управляющих параметров. Будем иметь:}$$

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \kappa$$

$$\frac{d\kappa}{d\tau} = \frac{\beta}{\gamma} \left(\alpha \sin \varphi - \frac{e \lambda}{m_0 c^2} E_z^{(\text{int})} \right) \kappa + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\alpha'_{\xi}(\xi)}{2} \sin \varphi + \frac{\pi \alpha(\xi)}{\beta_{\phi}(\xi)} (1 - \beta \beta_{\phi}) \cos \varphi - \right.$$

$$\left. - \frac{\gamma_M^2}{\gamma} \right) \eta + \frac{1}{\gamma} \frac{e \lambda}{m_0 c^2} (1 - \beta \beta_c) E_r^{(\text{int})}(\eta, \xi, \xi_c, \beta \gamma_c). \quad (2.1.11)$$

Коэффициенты β , $\frac{1}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$ системы (2.1.11) связаны с фазовыми переменными

по формулам:

$$\beta = \frac{\beta\gamma}{\sqrt{1+(\beta\gamma)^2}}, \quad \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{1+(\beta\gamma)^2}}, \quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\beta\gamma}{1+(\beta\gamma)^2}.$$

В системе (2.1.11) необходимо определить, как вычисляется радиальная компонента поля объемного заряда, а также произвести линеаризацию этой компоненты, чтобы воспользоваться методом огибающих. Рассмотрим эти моменты в следующем разделе.

2.2. Метод расчета радиальной компоненты напряженности кулоновского поля

Получим выражения для $E_r^{(\text{int})}$ и $B_\theta^{(\text{int})}$. Для этого введем сопутствующую (штрихованную) систему отсчета, движущуюся вдоль оси Oz со средней скоростью частиц $v_c = \beta_c c$.

Объемная плотность заряда периодического пучка в лабораторной системе отсчета аппроксимируется функцией (1.2.3), аналогично методу учета взаимодействия частиц по продольной координате. Плотность заряда в сопутствующей системе отсчета имеет вид:

$$\nu'(\eta', \xi', \xi_c', \beta\gamma_c') = \frac{J\Gamma(\eta')}{2H\gamma_c \pi R^2 \lambda^3} \sum_{m=0}^M \left[A_m^c \cos\left(\frac{m\pi}{D}(\xi' - \xi_c')\right) + A_m^s \cos\left(\frac{m\pi}{D}(\xi' - \xi_c')\right) \right].$$

Потенциал, создаваемый периодической системой сгустков с приведенным радиусом R в сопутствующей системе отсчета, описывается выражением [20]:

$$U'(\eta', \xi') = \frac{J}{2H\pi R^2 \lambda^3 \gamma_c} \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k(\xi') J_0\left(\mu_k \frac{\eta'}{a}\right),$$

где

$$\zeta_k(\xi') = \sum_{m=0}^M \left[P_{km} \cos\left(\frac{m\pi}{D}(\xi' - \xi'_c)\right) + Q_{km} \sin\left(\frac{m\pi}{D}(\xi' - \xi'_c)\right) \right], \quad (2.2.1)$$

$$P_{km} = \frac{\lambda^2 t_k A_m^c a^2 D^2}{\varepsilon_0 (m^2 \pi^2 a^2 + \mu_k^2 D^2)}, \quad Q_{km} = \frac{\lambda^2 t_k A_m^s a^2 D^2}{\varepsilon_0 (m^2 \pi^2 a^2 + \mu_k^2 D^2)}, \quad (2.2.2)$$

t_k имеет вид (1.2.4), $m = \overline{0, M}, k = 1, 2, \dots$, $2D = 2H\gamma_c$ – длина квазипериода в сопутствующей системе отсчета, $\gamma_c = \sqrt{1 + (\beta\gamma)^2}$, коэффициенты $A_m^c, A_m^s, m = \overline{0, M}$ представлены формулами (1.2.2).

Учитывая, что $\frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x)$, $E'_r = -\frac{\partial U'}{\partial r'} = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial U'}{\partial \eta'}$, получим:

$$(E_r^{(\text{int})})'(\eta', \xi') = \frac{J}{2H\gamma_c \pi R^2 \lambda^4 a} \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k(\xi') \mu_k J_1\left(\mu_k \frac{\eta'}{a}\right). \quad (2.2.3)$$

Используем преобразования Лоренца [16, 23]:

$$\begin{aligned} \xi' - \xi'_c &= \gamma_c (\xi - \xi_c), \quad \eta' = \eta, \\ E_r &= \gamma_c (E'_r + v_c B'_\theta), \quad E_\theta = \gamma_c (E'_\theta - v_c B'_r), \quad E_z = E'_z, \\ B_r &= \gamma_c \left(B'_r - \frac{\beta_c}{c} E'_\theta \right), \quad B_\theta = \gamma_c \left(B'_\theta + \frac{\beta_c}{c} E'_r \right), \quad B_z = B'_z. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Здесь v_c – усредненная продольная компонента скорости частиц. Благодаря синхронизму в подвижной системе поток не является релятивистским и собственное магнитное поле равно нулю: $B'_r = 0, B'_\theta = 0, B'_z = 0$ [23].

Учитывая этот факт, а также аксиальную симметрию поля в сопутствующей системе отсчета ($E'_\theta = 0$), в лабораторной системе отсчета из (2.2.4) получим:

$$\begin{aligned} E_r^{(\text{int})} &= \gamma_c (E_r^{(\text{int})})', \quad E_\theta^{(\text{int})} = 0, \quad E_z^{(\text{int})} = (E_z^{(\text{int})})', \\ B_r^{(\text{int})} &= 0, \quad B_\theta^{(\text{int})} = \frac{\beta_c}{c} E_r^{(\text{int})}, \quad B_z^{(\text{int})} = 0. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Используя соотношения (1.2.4), (2.2.1) – (2.2.3) и (2.2.5) получаем поперечные компоненты электрического и магнитного полей собственного заряда в точке наблюдения (ξ, η) :

$$E_r^{(\text{int})} = \frac{JH(1 + (\beta\gamma)_c^2)}{\varepsilon_0 \pi R \lambda^2} \sum_{m=0}^M \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\mu_k \frac{R}{a}\right) J_1\left(\mu_k \frac{\eta}{a}\right)}{J_1^2(\mu_k) (m^2 a^2 \pi^2 + \mu_k^2 \gamma_c^2 H^2)} \right) \times \left[A_m^c \cos\left(\frac{m\pi}{H}(\xi - \xi_c)\right) + A_m^s \sin\left(\frac{m\pi}{H}(\xi - \xi_c)\right) \right], \quad (2.2.6)$$

$$B_\theta^{(\text{int})} = \frac{(\beta\gamma)_c}{c\sqrt{1 + (\beta\gamma)_c^2}} E_r^{(\text{int})}. \quad (2.2.7)$$

При расчете динамики модельных частиц нас будет интересовать усредненная по толщине частицы поперечная компонента кулоновского поля. Для i -й модельной частицы имеем:

$$E_r^{(\text{int})}(\xi_i, \eta) = \frac{1}{2d} \int_{\xi_i-d}^{\xi_i+d} E_r^{(\text{int})}(x, \eta) dx.$$

При $m \neq 0$:

$$\frac{1}{2d} \int_{\xi_i-d}^{\xi_i+d} \cos\left(\frac{m\pi}{H}(x - \xi_c)\right) dx = \frac{\sin\left(\frac{m\pi d}{H}\right)}{\frac{m\pi d}{H}} \cos\left(\frac{m\pi}{H}(\xi_i - \xi_c)\right), \quad (2.2.8)$$

$$\frac{1}{2d} \int_{\xi_i-d}^{\xi_i+d} \sin\left(\frac{m\pi}{H}(x - \xi_c)\right) dx = \frac{\sin\left(\frac{m\pi d}{H}\right)}{\frac{m\pi d}{H}} \sin\left(\frac{m\pi}{H}(\xi_i - \xi_c)\right), \quad (2.2.9)$$

при $m = 0$:

$$\frac{1}{2d} \int_{\xi_i-d}^{\xi_i+d} \cos\left(\frac{0 \cdot \pi}{H}(x - \xi_c)\right) dx = 1, \quad \frac{1}{2d} \int_{\xi_i-d}^{\xi_i+d} \sin\left(\frac{0 \cdot \pi}{H}(x - \xi_c)\right) dx = 0.$$

Последний результат получим, если в (2.2.8) и (2.2.9) положим

$$\left. \frac{\sin\left(\frac{m\pi d}{H}\right)}{\frac{m\pi d}{H}} \right|_{m=0} = 1.$$

Таким образом, поперечная компонента поля объемного заряда имеет вид:

$$E_r^{(\text{int})} = \frac{JH(1 + (\beta\gamma)_c^2)}{\varepsilon_0 \pi R \lambda^2} \sum_{m=0}^M \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\mu_k \frac{R}{a}\right) J_1\left(\mu_k \frac{\eta}{a}\right)}{J_1^2(\mu_k) (m^2 a^2 \pi^2 + \mu_k^2 \gamma_c^2 H^2)} \right) \times \\ \times \frac{\sin\left(\frac{m\pi d}{H}\right)}{\frac{m\pi d}{H}} \left[A_m^c \cos\left(\frac{m\pi}{H}(\xi - \xi_c)\right) + A_m^s \sin\left(\frac{m\pi}{H}(\xi - \xi_c)\right) \right]. \quad (2.2.10)$$

Чтобы воспользоваться методом огибающих [10, 17 – 19], необходимо линеаризовать радиальную составляющую напряженности поля объемного заряда (2.2.10) по поперечной координате η . Аппроксимируем $E_r^{(\text{int})}$ внутри пучка линейной функцией (проведя аналогию с линейным полем равномерно заряженного пучка в полой металлической трубе). Поле (2.2.10) в крайних точках промежутка $[0, R]$ представляется:

$$\text{при } \eta = 0: E_r^{(\text{int})} |_{\eta=0} = 0,$$

$$\text{при } \eta = R: E_r^{(\text{int})} \Big|_{\eta=R} = \frac{JH(1 + (\beta\gamma)_c^2)}{\varepsilon_0 \pi R \lambda^2} \sum_{m=0}^M \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1^2\left(\mu_k \frac{R}{a}\right)}{J_1^2(\mu_k) \left((m\pi)^2 + (\mu_k H)^2 (1 + (\beta\gamma)_c^2) \right)} \right) \times$$

$$\times \frac{\sin\left(\frac{m\pi d}{H}\right)}{\frac{m\pi d}{H}} \left[A_m^c \cos\left(\frac{m\pi}{H}(\xi - \xi_c)\right) + A_m^s \sin\left(\frac{m\pi}{H}(\xi - \xi_c)\right) \right].$$

Расчеты показывают, что значение ряда по k максимально при $\eta = R$, причем ряд монотонно возрастает на промежутке $[0, R]$ от 0 до максимального значения (см. главу 3). Поэтому используем аппроксимацию:

$$E_r^{(\text{int})}(\xi_i, \eta) \approx \frac{\eta}{R} E_r^{(\text{int})}(\xi_i, R) \quad \text{или} \quad E_r^{(\text{int})} \approx V(\xi_i, \eta, \xi_c, \beta\gamma_c, R)\eta, \quad (2.2.11)$$

где

$$V(\xi_i, \eta, \xi_c, \beta\gamma_c, R) = \frac{JH(1 + (\beta\gamma)_c^2)}{\varepsilon_0 \pi R^2 \lambda^2} \sum_{m=0}^M \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1^2\left(\mu_k \frac{R}{a}\right)}{J_1^2(\mu_k) \left((m\pi)^2 + (\mu_k H)^2 (1 + (\beta\gamma)_c^2) \right)} \right) \times$$

$$\times \frac{\sin\left(\frac{m\pi d}{H}\right)}{\frac{m\pi d}{H}} \left[A_m^c \cos\left(\frac{m\pi}{H}(\xi_i - \xi_c)\right) + A_m^s \sin\left(\frac{m\pi}{H}(\xi_i - \xi_c)\right) \right]. \quad (2.2.12)$$

В выражениях (2.2.11), (2.2.12) показана зависимость поперечной компоненты напряженности от приведенных координаты и импульса центра сгустка (ξ_c и $(\beta\gamma)_c$) и параметра R . Действительно, $2H = \frac{(\beta\gamma)_c}{\sqrt{1 + (\beta\gamma)_c^2}}$.

Параметр R имеет смысл приведенного радиуса пучка; в дальнейшем в качестве R будет использоваться огибающая пучка.

2.3. Математическая модель продольного и поперечного движения частиц в ускорителе

В предыдущем разделе была произведена линеаризация кулоновского поля по поперечной компоненте, и теперь уравнения поперечного движения частиц линейны по поперечным координатам, что позволяет записать систему (2.1.11) в виде:

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \eta \\ \kappa \end{pmatrix} = A(\tau, \xi, \beta\gamma, \xi_c, \beta\gamma_c, \gamma_M^2, R) \begin{pmatrix} \eta \\ \kappa \end{pmatrix}, \quad (2.3.1)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\alpha'_\xi}{2} \sin \varphi + \frac{\pi\alpha}{\beta_\phi} (1 - \beta\beta_\phi) \cos \varphi - \right. \\ \left. -\frac{\gamma_M^2}{\gamma} + \frac{e\lambda}{m_0 c^2} (1 - \beta\beta_c) \mathcal{V}(\xi, \xi_c, \beta\gamma_c, R) \right) & \frac{\beta}{\gamma} \left(\alpha \sin \varphi - \frac{e\lambda}{m_0 c^2} E_z^{(int)} \right) \end{pmatrix}.$$

Матрицы A различны для каждой частицы, участвующей в продольном движении.

Фиксируем одну модельную частицу-диск. Пусть множество \tilde{M}_0 начальных данных системы (2.3.1) ограничено эллипсом [14, 17 – 19]:

$$(\eta_0 \quad \kappa_0) B_0 \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \kappa_0 \end{pmatrix} = 1, \quad (2.3.2)$$

где B_0 – симметричная положительно определенная матрица. Сдвиг эллипса (2.3.2) вдоль решений системы (2.3.1) есть эллипс

$$(\eta \quad \kappa) B(\tau) \begin{pmatrix} \eta \\ \kappa \end{pmatrix} = 1, \quad (2.3.2)$$

где $B(\tau) = B(\tau, \xi, \beta\gamma, \xi_c, \beta\gamma_c, \gamma_M^2)$ – матрица эллипса (2.3.2). При этом образом начального множества \tilde{M}_0 является множество

$\tilde{M}_{\tau,u} = \{(\eta, \kappa) = (\eta, \kappa)(\tau, \eta_0, \kappa_0); (\eta_0, \kappa_0) \in \tilde{M}_0\}$ – эллипс (2.3.2) вместе с внутренней областью.

Как известно [10, 17 – 19], обратная матрица эллипса $B^{-1}(\tau)$ удовлетворяет системе уравнений:

$$\frac{dB^{-1}}{d\tau} = AB^{-1} + B^{-1}A^T. \quad (2.3.3)$$

Здесь $B^{-1}(\tau) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$, $A(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ Q_1(\tau) & Q_2(\tau) \end{pmatrix}$, A^T – транспонированная матрица A , при этом $\sigma_{11} = \max_{\tilde{M}_{\tau,u}} \eta^2(\tau)$, $\sigma_{22} = \max_{\tilde{M}_{\tau,u}} \kappa^2(\tau)$.

Таким образом, $\sqrt{\sigma_{11}}$ и $\sqrt{\sigma_{22}}$ являются огибающими по переменным η , κ пучка траекторий системы (2.3.1) с начальным множеством \tilde{M}_0 .

Расписав по компонентам (2.3.3), получим систему (2.3.4):

$$\begin{cases} \frac{d\sigma_{11}}{d\tau} = 2\sigma_{12} \\ \frac{d\sigma_{12}}{d\tau} = Q_1(\tau)\sigma_{11} + Q_2(\tau)\sigma_{12} + \sigma_{22} \\ \frac{d\sigma_{22}}{d\tau} = 2Q_1(\tau)\sigma_{12} + 2Q_2(\tau)\sigma_{22} \end{cases} \quad (2.3.4)$$

с начальными условиями $\sigma_{11}(0) = \sigma_{11}^{(0)}$, $\sigma_{12}(0) = \sigma_{12}^{(0)}$, $\sigma_{22}(0) = \sigma_{22}^{(0)}$.

Мы будем исследовать поперечное движение частиц после оптимизации продольного движения, при фиксированном векторе управляющих параметров \hat{v} , характеризующем приближенно-эффективное управление продольным движением. Таким образом, функции $Q_1(\tau)$ и $Q_2(\tau)$ определяются выражениями:

$$Q_1(\tau) = Q_1(\tau, \xi, \beta\gamma, \xi_c, \beta\gamma_c, \gamma_M^2(\xi, u), R_1) = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\alpha'_\xi(\xi, \hat{v})}{2} \sin \varphi + \right. \\ \left. + \frac{\pi\alpha(\xi, \hat{v})}{\beta_\phi(\xi, \hat{v})} (1 - \beta\beta_\phi(\xi, \hat{v})) \cos \varphi - \frac{\gamma_M^2(\xi, u)}{\gamma} + \frac{e\lambda}{m_0 c^2} (1 - \beta\beta_c) \mathcal{V}(\xi, \xi_c, \beta\gamma_c, R_1) \right), \quad (2.3.5)$$

$$Q_2(\tau) = Q_2(\tau, \xi, \beta\gamma, \xi_c, \beta\gamma_c, R_{beam}) = \\ = \frac{\beta}{\gamma} \left(\alpha(\xi, \hat{v}) \sin \varphi - \frac{e\lambda}{m_0 c^2} E_z^{(int)}(\xi, \xi_c, \beta\gamma_c, R_{beam}) \right), \quad (2.3.6)$$

а функции $V(\xi, \xi_c, \beta\gamma_c, R_1)$ и $E_z^{(int)}(\xi, \xi_c, \beta\gamma_c, R_{beam})$ имеют вид (2.2.12) и (1.2.5)

соответственно; $R_1 = \sqrt{\sigma_{11}}$, $R_{beam} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_{11}^{(i)}}$. Поясним: при моделировании

поперечной компоненты кулоновского поля параметр R полагаем равным огибающей пучка по переменной η , а при моделировании продольной компоненты – корню из усредненного квадрата огибающих для всех модельных частиц.

Т.к. поперечная динамика частиц в ускорителе существенно зависит от продольной, то объединив системы для поперечного движения (2.3.4) и для продольного движения (1.1.4), получим математическую модель продольной и поперечной динамики пучка:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{\beta\gamma}{\sqrt{1+(\beta\gamma)^2}} \\
\frac{d(\beta\gamma)}{d\tau} = -\alpha(\xi, \hat{v}) \sin \varphi + \frac{e\lambda}{m_0 c^2} E_z^{(int)}(\xi, \xi_c, \beta\gamma_c, R_{beam}) \\
\frac{d\varphi}{d\tau} = 2\pi \left(\frac{1}{\beta_\phi(\xi, \hat{v})} \frac{\beta\gamma}{\sqrt{1+(\beta\gamma)^2}} - 1 \right) \\
\frac{d\sigma_{11}}{d\tau} = 2\sigma_{12} \\
\frac{d\sigma_{12}}{d\tau} = Q_1(\tau, \xi, \beta\gamma, \xi_c, \beta\gamma_c, \gamma_M^2(\xi, u), R_1) \sigma_{11} + Q_2(\tau, \xi, \beta\gamma, \xi_c, \beta\gamma_c, R_{beam}) \sigma_{12} + \sigma_{22} \\
\frac{d\sigma_{22}}{d\tau} = 2Q_1(\tau, \xi, \beta\gamma, \xi_c, \beta\gamma_c, \gamma_M^2(\xi, u), R_1) \sigma_{12} + 2Q_2(\tau, \xi, \beta\gamma, \xi_c, \beta\gamma_c, R_{beam}) \sigma_{22}
\end{array} \right. \quad (2.3.7)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned}
\xi(0) &= \xi_0, \beta\gamma(0) = (\beta\gamma)_0, \varphi(0) = \varphi_0(\xi_0, \beta\gamma_0), \\
\sigma_{11}(0) &= \sigma_{11}^{(0)}, \sigma_{12}(0) = \sigma_{12}^{(0)}, \sigma_{22}(0) = \sigma_{22}^{(0)}.
\end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Подведем некоторые итоги. Итак, мы моделируем пучок набором N модельных частиц-дисков конечной толщины, каждый диск представляет множество частиц с одинаковыми продольными координатами и импульсами, но различными поперечными координатами и скоростями; нам удобно моделировать множество фазовых состояний этих частиц эллипсом (вместе с внутренней областью). Каждой частице-дису при значении τ независимой переменной соответствует эллипс на плоскости $(\eta(\tau), \kappa(\tau))$. Начальный эллипс \tilde{M}_0 предполагается одним и тем же для всех модельных частиц. Для каждой модельной частицы-диска значение $\sigma_{11}(\tau)$ и $\sigma_{22}(\tau)$ обратной матрицы эллипса представляют собой квадраты огибающих пучка траекторий системы (2.3.4) по переменным η и κ соответственно. Таким образом, исследуется эволюция N модельных частиц-дисков и эволюция N соответствующих им эллипсов на плоскости $(\eta(\tau), \kappa(\tau))$. Исследование продольного и поперечного движения проводится при фиксированных

приближенно-эффективных управлениях продольным движением, полученных ранее при моделировании только продольной динамики при заданном и фиксированном среднем радиусе пучка.

Заметим, что в модели (2.3.7) при моделировании поперечной компоненты кулоновского поля радиус пучка считается равным огибающей $\sqrt{\sigma_{11}}$. При моделировании продольной компоненты поля объемного заряда квадрат среднего радиуса пучка вычисляется как среднее арифметическое квадратов огибающих, полученных для всех модельных частиц. Итак, при исследовании продольной и поперечной динамики пучок, как и в главе 1, предполагается цилиндром с периодической модуляцией плотности заряда по продольной координате; однако радиус пучка для разных частиц-дисков и в разные моменты времени различен.

2.4. Оптимизация поперечной динамики пучка

Как и для случая продольного движения, проведем многокритериальную оптимизацию поперечного движения частиц в ускорителе. Напомним, что сначала проводится оптимизация продольной динамики, и лишь после этого, при фиксированных полученных приближенно-эффективных управлениях $\alpha(\xi, \hat{v})$ и $\beta_\phi(\xi, \hat{v})$, осуществляется оптимизация поперечного движения на основе модели (2.3.7).

Введем следующие критерии качества поперечной динамики пучка:

$$K_4(u) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_{11}^{(i)}(\xi_{ex}); \quad (2.4.1)$$

$$K_5(u) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\psi_i(\xi_{ex}) - \bar{\psi}(\xi_{ex}))^2, \quad (2.4.2)$$

где $\bar{\psi} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \psi_i$;

$$K_6(u) = \begin{cases} 0, \sigma_{11}^{(i)}(\xi) < a^2, \forall \xi \in [0, \xi_{ex}], \forall i = \overline{1, N} \\ 1, \exists i \in \{1, \dots, N\} \exists \xi^* \in [0, \xi_{ex}]: \sigma_{11}^{(i)}(\xi^*) \geq a^2 \end{cases}, \quad (2.4.3)$$

Здесь N – число модельных частиц (дисков), участвующих в продольном движении; ξ_{ex} – приведенная координата выходного сечения ускорителя; $\sigma_{11}^{(i)}(\xi_{ex})$ – элемент матрицы $B_i^{-1}(\tau_i)$ для i -й модельной частицы; τ_i – значение независимой переменной, соответствующее пересечению i -й частицы выходного сечения ускорителя: $\xi_i(\tau_i) = \xi_{ex}$; $\psi_i(\xi_{ex})$ – угол между главной осью эллипса $(\eta \ \kappa)B_i(\tau_i)\begin{pmatrix} \eta \\ \kappa \end{pmatrix} \leq 1$ и осью $O\eta$; $\bar{\psi}(\xi_{ex})$ – усредненное по модельным частицам значение угла $\psi(\xi_{ex})$, a – приведенный радиус канала.

Поставим задачу минимизации вектора критериев

$$K(u) = (K_4(u), K_4(u)) \xrightarrow{u} \min \quad (2.4.4)$$

при критериальном ограничении

$$K_6(u) \leq 2, \quad (2.4.5)$$

по параметрам $u \in \Gamma$, где Γ – P -мерный параллелепипед

$$\Gamma = \left\{ (u^1, \dots, u^P): u_{\min}^i \leq u^i \leq u_{\max}^i; i = \overline{1, P} \right\}.$$

Минимизация критерия (2.4.1) обеспечивает фокусировку пучка.

Минимизация критерия (2.4.2) обеспечивает максимальное перекрытие

семейства эллипсов $(\eta \ \kappa)B_i(\tau_i)\begin{pmatrix} \eta \\ \kappa \end{pmatrix} \leq 1, \quad i = \overline{1, N}$, что фактически

соответствует цели минимизации эффективного эмиттанса пучка на выходе ускорителя [16]. Критерий (2.4.3) позволяет отследить ситуацию оседания – касания частиц стенок ускоряющего канала.

Рассмотрим кратко алгоритм оптимизации. Начальная управляющая функция $(\gamma_M^2)^{(0)}(\xi, u)$, заданная в узлах равномерной сетки, представлена в Приложении.

Управляющие параметры (u_1, \dots, u_p) включают в себя: 1) начальное значение $\gamma_M^2(0)$ функции $\gamma_M^2(\xi)$; 2) значения производной $(\gamma_M^2)'(\xi)$ в узлах равномерной сетки. Указанные параметры выбираются случайным образом в некоторых заданных промежутках, центры которых представляют собой значения соответствующих параметров для начальной управляющей функции $(\gamma_M^2)^{(0)}(\xi, u)$. Промежутки представлены в Приложении. Произведение указанных промежутков и есть параллелепипед Γ в пространстве параметров.

В ходе многокритериальной оптимизации проводятся Q испытаний. При каждом испытании

- 1) Выбирается случайным образом точка $u \in \Gamma$;
- 2) Производная управляющей функции моделируется посредством линейной интерполяции между значениями в узлах сетки. При этом

$$(\gamma_M^2)'(\xi) = g_i \xi + h_i, \quad \xi \in [\xi_{i-1}, \xi_i],$$

$$g_i = \frac{(\gamma_M^2)'(\xi_i) - (\gamma_M^2)'(\xi_{i-1})}{\xi_i - \xi_{i-1}}, \quad h_i = \frac{\xi_i (\gamma_M^2)'(\xi_{i-1}) - \xi_{i-1} (\gamma_M^2)'(\xi_i)}{\xi_i - \xi_{i-1}}.$$

Строится кусочно-гладкая функция $\gamma_M^2(\xi, u)$ по формуле

$$\gamma_M^2(\xi) = \gamma_M^2(\xi_{i-1}) + g_i \frac{\xi^2 - \xi_{i-1}^2}{2} + h_i (\xi - \xi_{i-1}), \quad \xi \in [\xi_{i-1}, \xi_i].$$

- 3) Осуществляется численное моделирование продольной и поперечной динамики пучка при полученном управлении в соответствии с уравнениями (2.3.7) с начальными условиями (2.3.8);

- 4) Рассчитываются значения критериев (2.4.1) – (2.4.3).
- 5) Если не выполняется ограничение (2.4.5), то вектор параметров отбрасываем.

Таким образом, в результате Q испытаний получаем \hat{Q} пробных точек в пространстве критериев (K_4, K_5) ; каждой точке соответствует P -мерный вектор параметров.

Далее строится приближенная компромиссная кривая [6, 25], которая представляет собой юго-западную границу множества пробных точек в пространстве критериев (K_4, K_5) . Точкам приближенной компромиссной кривой соответствуют приближенно-эффективные управления.

Анализ динамики пучка и результаты оптимизации динамики приведены в следующей главе.

Глава 3. Численное моделирование и оптимизация динамики пучка

3.1. Параметры прибора и расчета

Численное моделирование динамики пучка осуществлялось в ускоряющей установке с основными параметрами структуры и расчета, представленными в таблице 1:

Табл.1 Параметры структуры и расчета

Название параметра	Обозначение и размерность	Значение
Параметры структуры		
Приведенная координата выходного сечения ускорителя	ξ_{ex}	7.8
Энергия инжекции	W_{ent} [кэВ]	60.0
Приведенный радиус канала	a	0.04
Длина ускоряющей волны	λ [м]	0.1
Параметры расчета		
Количество частиц	N	64
Число разбиений квазипериода	J	32

Начальные данные:

- начальная приведенная энергия – $\gamma_{ent} = 1 + \frac{W_{ent}}{m_0 c^2}$;
- начальная приведенная скорость – $\beta_0 = \frac{\sqrt{\gamma_{ent}^2 - 1}}{\gamma_{ent}}$.

А начальные значения для систем (1.1.6) и (2.3.4) (общей (2.3.7)) имеют следующий вид:

- начальные положения частиц – $\xi_{i0} = \frac{\beta_0}{2N}(2i - 2N - 1), i = \overline{1, N}$;
- начальные приведенные импульсы – $\beta\gamma_{i0} = \sqrt{\gamma_{ent}^2 - 1}, i = \overline{1, N}$;
- начальные фазы – $\varphi_{i0} = \frac{2\pi}{\beta_0}\xi_{i0} + \pi, i = \overline{1, N}$;

Предполагаем, что на входе в ускоряющий канал имеем согласованный пучок, т.е. параметры пучка согласуются с параметрами структуры. А следовательно, на входе получим пучок, имеющий форму круга. Значит $(\sigma_{11}^{(i)})_0 = (\sigma_{22}^{(i)})_0 = 0.0004, (\sigma_{12}^{(i)})_0 = 0, i = \overline{1, N}$.

Для моделирования движения электронов в линейном волноводном ускорителе была разработана программа на языке C++. Системы дифференциальных уравнений (1.1.6), (2.3.7) решаются численным методом – методом Рунге-Кутты 4-го порядка с постоянным шагом $step = \frac{\lambda}{200}$.

Параметризация управляющих функций $\alpha(\xi, \nu), \beta_\phi(\xi, \nu)$, способ выбора значений параметров при оптимизации и начальные управления представлены в разделе 1.3.

Управление поперечным движением $\gamma_M^2(\xi, u)$. Начальное управление задано значениями в узлах $\xi_s, s = \overline{1, S}$ равномерной сетки, значения приведены в Приложении; между узлами сетки осуществляется линейная интерполяция. Способ введения параметризации и выбора управляющих параметров дан в разделе 2.4.

Все рассчитываемые величины выводятся в соответствующие файлы, что позволяет в дальнейшем удобно с ними работать.

3.2. Результаты численного моделирования и оптимизации

Результаты численного моделирования будем представлять в два этапа (так же, как проводились вычисления).

Этап 1. Результаты численного моделирования и оптимизации продольной динамики пучка

Для оптимизации продольной динамики пучка было произведено M испытаний. На коэффициент захвата (1.3.5) было наложено ограничение: $K_c \geq 0.9$. При установленном ограничении на коэффициент захвата было получено \hat{M} (150) пробных точек в пространстве критериев (K_1, K_2) , из них 8 образуют приближенную компромиссную кривую K_p (рис. 2).

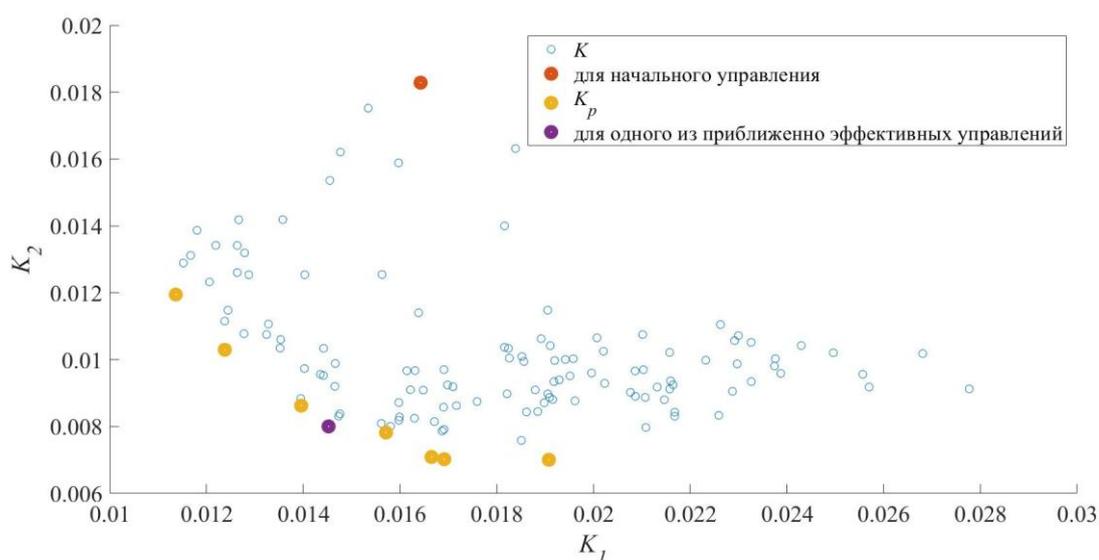


Рис. 2 Множество пробных точек K в пространстве критериев (синий); множество точек, образующих приближенную компромиссную кривую K_p (желтый, фиолетовый); точка, соответствующая начальному управлению (красный)

Значения критериев для точек приближенной компромиссной кривой и для точки, соответствующей начальному управлению (первая строка), представлены в таблице 2.

Табл. 2 Значения критериев K_1 , K_2 , K_c для начального управления и для приближенно-эффективных управлений

№ п/п	K_1	K_2	K_c
1 (для начального управления)	1.64×10^{-2}	1.83×10^{-2}	0.75
2	1.14×10^{-2}	1.19×10^{-2}	0.94
3	1.24×10^{-2}	1.03×10^{-2}	0.95
4	1.45×10^{-2}	0.80×10^{-2}	0.97
5	1.91×10^{-2}	0.70×10^{-2}	0.92
6	1.40×10^{-2}	0.86×10^{-2}	0.94
7	1.57×10^{-2}	0.78×10^{-2}	0.92
8	1.67×10^{-2}	0.71×10^{-2}	0.94
9	1.69×10^{-2}	0.70×10^{-2}	0.94

Одно из приближенно-эффективных управлений выделено для дальнейших расчетов (ему соответствует строка 4 в табл. 2). Обозначим его \hat{v} . Этому управлению соответствует фиолетовая точка на рис. 2. Начальному управлению v_0 соответствует красная точка. Сравнение критериев для выделенного управления и начального (см. табл. 2) показывает, что удалось добиться уменьшения критериев K_1 , K_2 , а также увеличить число частиц, захваченных в режим ускорения.

Представим графики, характеризующие продольную динамику пучка для начального и выделенного управлений.

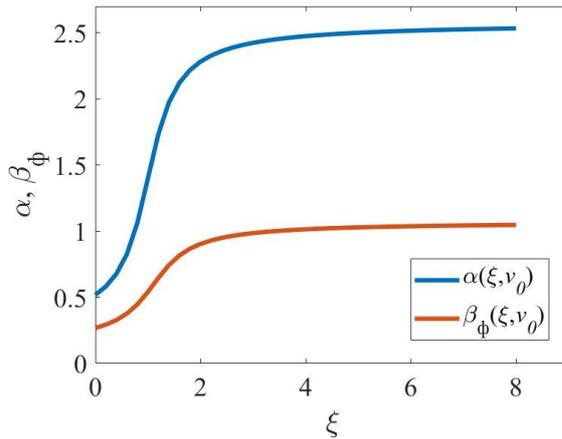


Рис. 3 Функции $\alpha(\xi, \nu_0)$, $\beta_\phi(\xi, \nu_0)$ для начального управления ν_0 ; $\alpha(\xi, \nu_0)$ - синий, $\beta_\phi(\xi, \nu_0)$ - красный

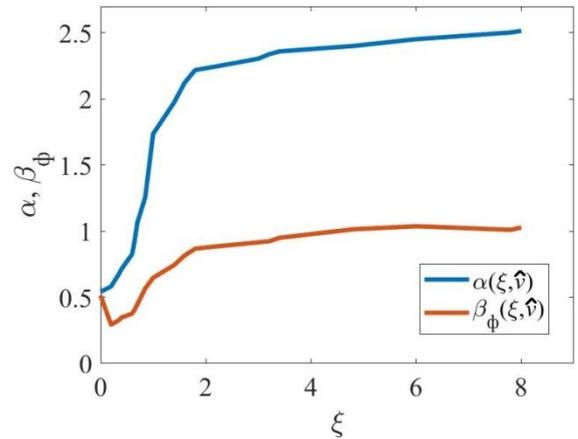


Рис. 4 Функции $\alpha(\xi, \hat{\nu})$, $\beta_\phi(\xi, \hat{\nu})$ для приближенно-эффективного управления $\hat{\nu}$; $\alpha(\xi, \hat{\nu})$ - синий, $\beta_\phi(\xi, \hat{\nu})$ - красный

На рис. 3 и 4 показан вид функций $\alpha(\xi, \nu)$ и $\beta_\phi(\xi, \nu)$ для начального управления $\nu = \nu_0$ и для одного из приближенно-эффективных $\nu = \hat{\nu}$ соответственно.

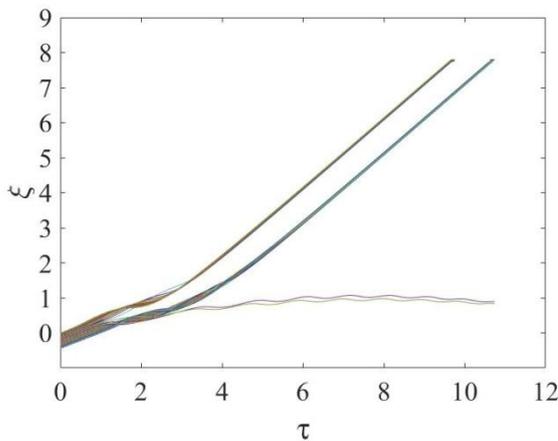


Рис. 5 График зависимости приведенной координаты частицы ξ от независимой переменной τ до оптимизации

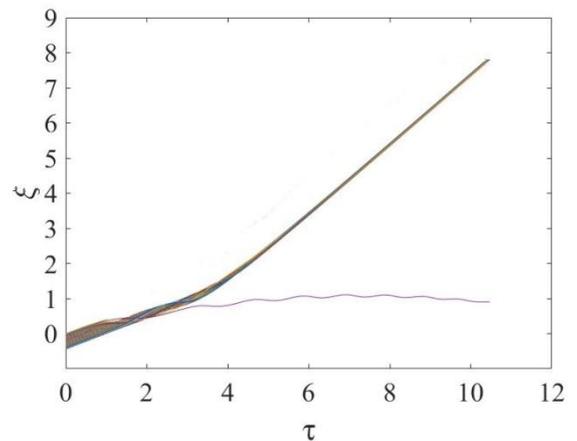


Рис. 6 График зависимости приведенной координаты частицы ξ от независимой переменной τ после оптимизации

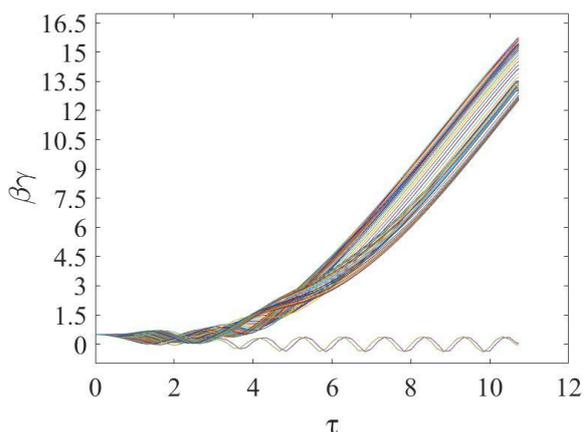


Рис. 7 График зависимости приведенного импульса частицы $\beta\gamma$ от независимой переменной τ до оптимизации

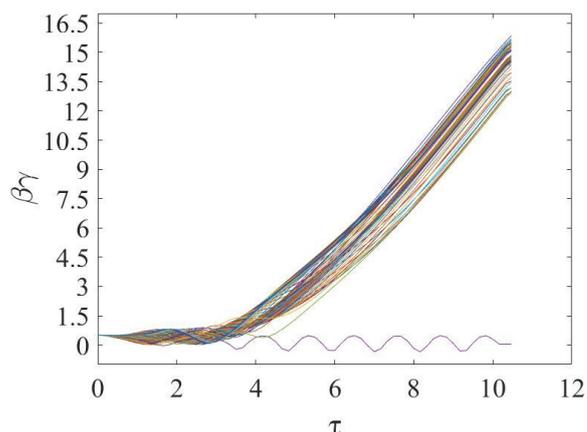


Рис. 8 График зависимости приведенного импульса частицы $\beta\gamma$ от независимой переменной τ после оптимизации

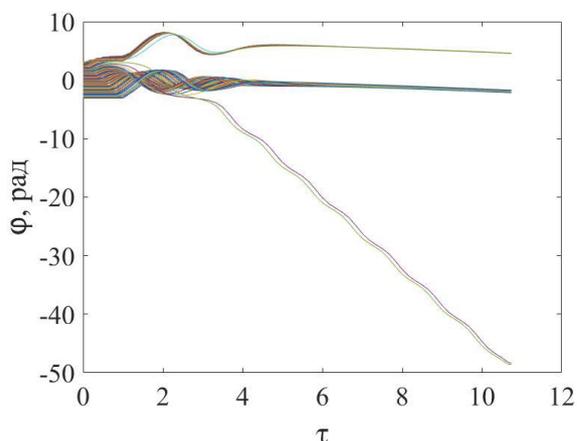


Рис. 9 График зависимости фазы частицы φ от независимой переменной τ до оптимизации

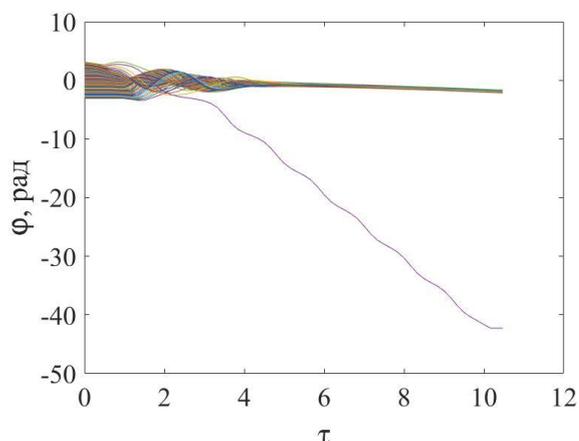


Рис. 10 График зависимости фазы частицы φ от независимой переменной τ после оптимизации

Анализ рис. 5 – 10 показывает, что в результате оптимизации увеличилось число частиц, захваченных в режим ускорения. Можно видеть, что разбросы частиц по приведенным импульсам и фазам после оптимизации несколько снизились.

Далее представлены графики, иллюстрирующие моделирование продольной компоненты поля объемного заряда. Расчеты проводились при токе пучка $I = 5 \text{ A}$. (рис. 11 - 14 даны для начального управления $v = v_0$) Рис. 11 и 12 показывают аппроксимацию плотности заряда кусочно-постоянной

функцией и затем тригонометрическим полиномом. Рис. 11 относится к группирующей части прибора, а рис. 12 – к ускоряющей.

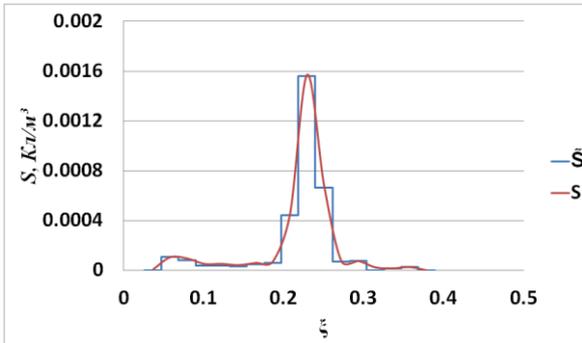


Рис. 11 Аппроксимация кусочно-постоянной функции \tilde{S} тригонометрическим полиномом S в группирующей части ускорителя

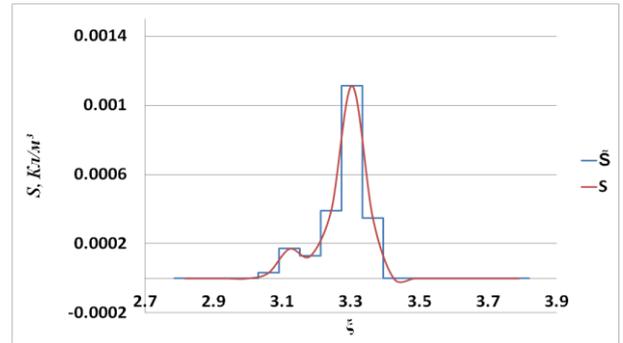


Рис. 12 Аппроксимация кусочно-постоянной функции \tilde{S} тригонометрическим полиномом S в ускоряющей части прибора

Как уже говорилось ранее, плотность заряда описывается кусочно-постоянной функцией (на графиках отображена синим цветом), и мы аппроксимируем ее тригонометрическим полиномом (красный цвет). Из рис. 11 – 12 видно, что полином достаточно хорошо аппроксимирует распределение заряда по длине сгустка.

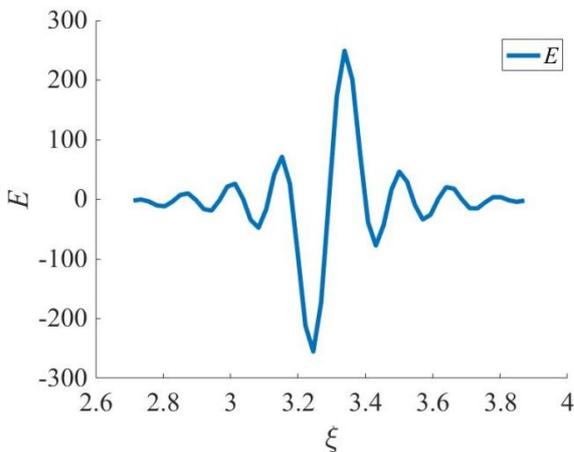


Рис. 13 Распределение напряженности кулоновского поля по длине сгустка в середине структуры

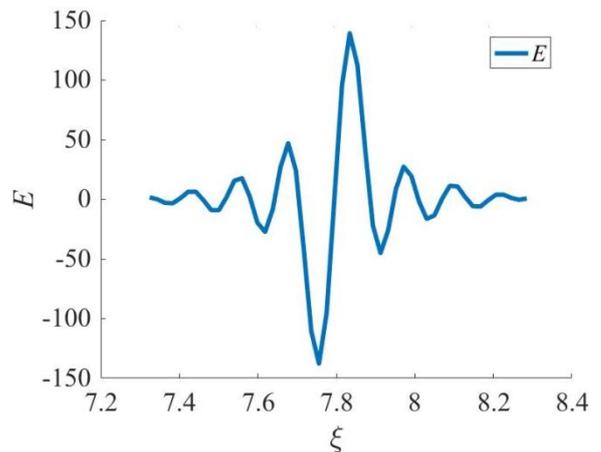


Рис. 14 Распределение напряженности кулоновского поля по длине сгустка в конце структуры

Рис. 13 и 14 представляют распределение напряженности кулоновского поля пучка по длине пространственного квазипериода в середине и в конце структуры. Можно заметить, что чем больше становится энергия частиц, тем меньше амплитуда колебаний напряженности поля объемного заряда (что соответствует действительности).

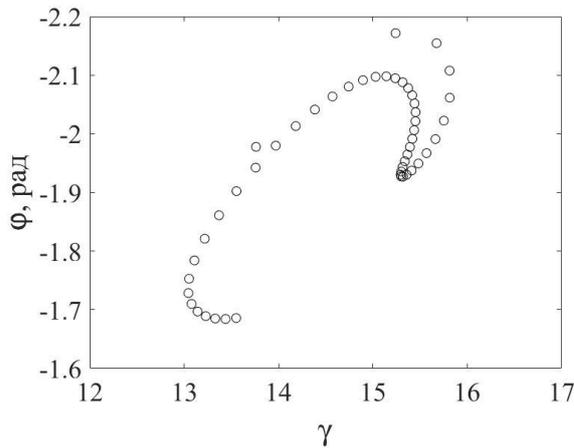


Рис. 15 Фазоэнергетическое распределение частиц на выходе ускорителя без учета кулоновского поля при управлении $\nu = \nu_0$

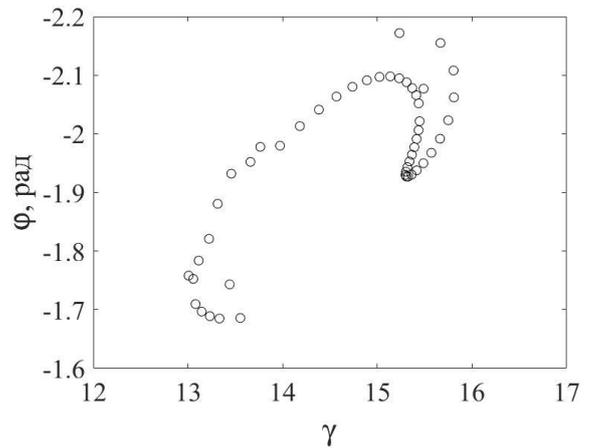


Рис. 16 Фазоэнергетическое распределение частиц на выходе ускорителя с учетом кулоновского поля при управлении $\nu = \nu_0$

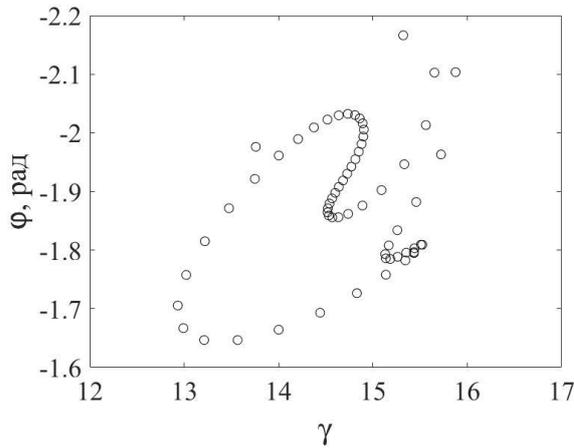


Рис. 17 Фазоэнергетическое распределение частиц на выходе ускорителя без учета кулоновского поля при управлении $\nu = \hat{\nu}$

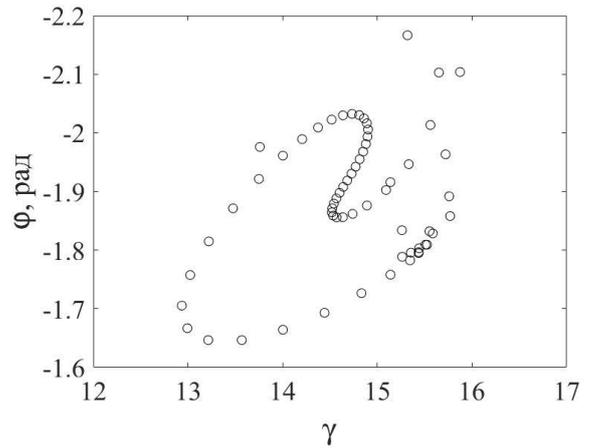


Рис. 18 Фазоэнергетическое распределение частиц на выходе ускорителя с учетом кулоновского поля при управлении $\nu = \hat{\nu}$

На рис. 15, 17 и 16, 18 представлено распределение частиц на плоскости фаза-энергия на выходе структуры при моделировании динамики соответственно с учетом и без учета кулоновского поля. Изменение распределения свидетельствует о необходимости учета взаимодействия частиц. Также сравнивая рис.17 и 18 заметно как изменилось распределение частиц после оптимизации.

Этап 2. Результаты численного моделирования и оптимизации поперечной динамики пучка при фиксированном управлении \hat{v}

При линейзации кулоновского поля по поперечной координате η предполагалось, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\mu_k \frac{R}{a}\right) J_1\left(\mu_k \frac{\eta}{a}\right)}{J_1^2(\mu_k) \left((m a \pi)^2 + (\mu_k H)^2 (1 + (\beta \gamma)_c^2) \right)}$$

достигает максимального значения приблизительно при $\eta \approx R$. Рис. 19 подтверждает это. Следовательно, мы можем пользоваться линейризованными выражениями (2.2.5) и (2.2.6) для поперечной компоненты поля объемного заряда.

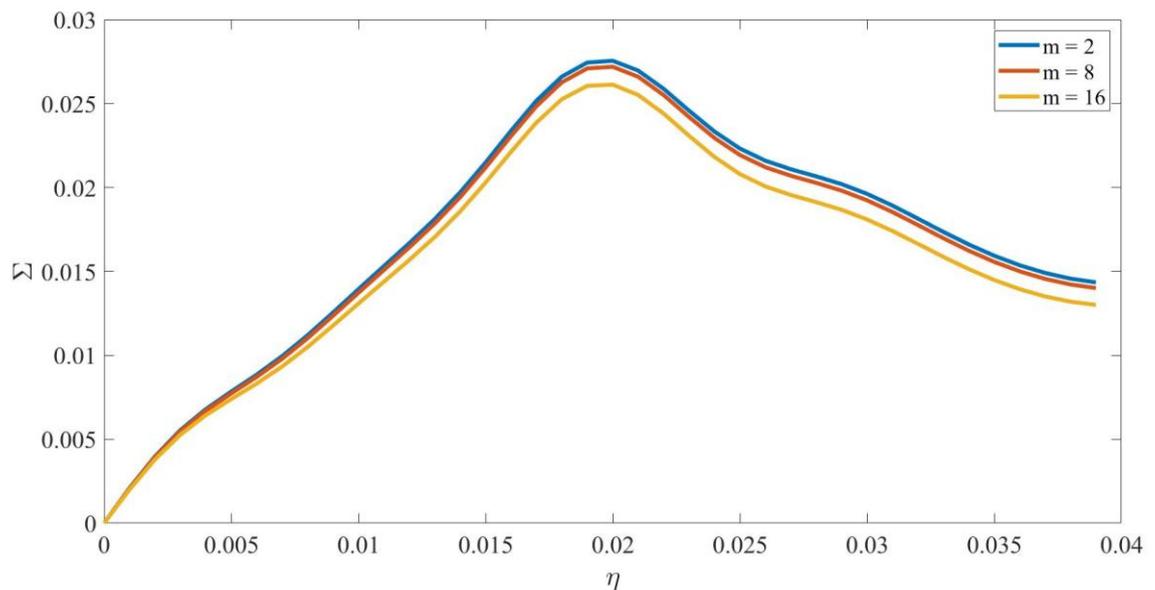


Рис. 19 Зависимость ряда Σ от приведенной поперечной координаты η при разных значениях m

Представим результаты расчета динамики пучка (до оптимизации).

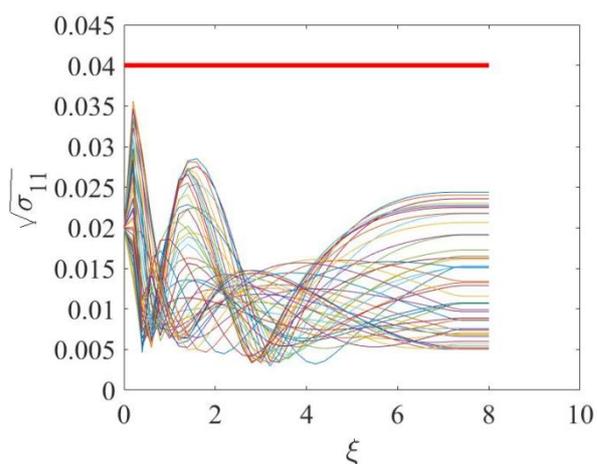


Рис. 20 График зависимости $\sqrt{\sigma_{11}}$ от приведенной продольной координаты ξ без учета взаимодействия частиц

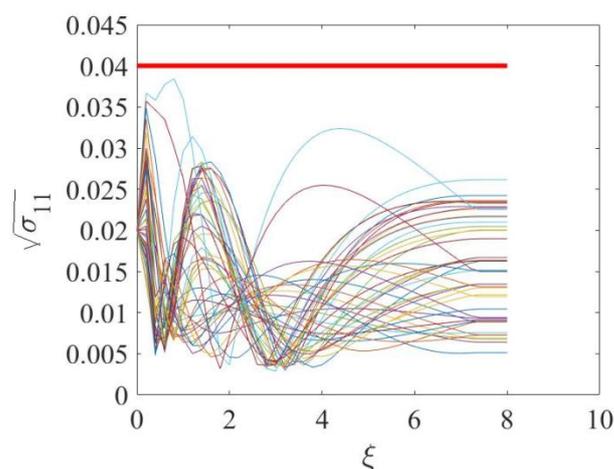


Рис. 21 График зависимости $\sqrt{\sigma_{11}}$ от приведенной продольной координаты ξ с учетом взаимодействия частиц

На рисунках 20 и 21 представлены графики изменения огибающей пучка по переменной η вдоль ускорителя без учета и с учетом полей объемного заряда. Анализ графиков указывает на необходимость учета полей пространственного заряда, т.к. их наличие приводит к увеличению радиуса пучка.

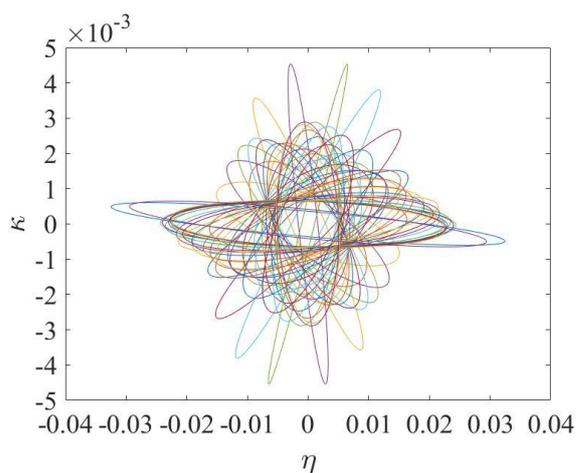


Рис. 22 Фазовый портрет пучка на выходе ускорителя для начального управления u_0 без учета взаимодействия частиц

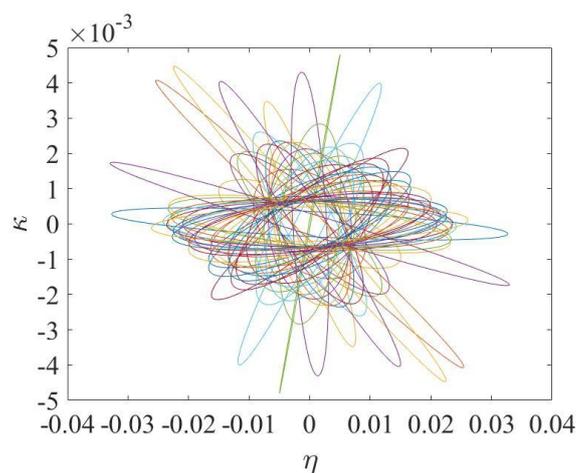


Рис. 23 Фазовый портрет пучка на выходе ускорителя для начального управления u_0 с учетом взаимодействия частиц

Этот вывод подтверждают рис. 22 и рис. 23, на которых представлен фазовый портрет пучка на выходе ускорителя без учета и с учетом взаимодействия частиц. Кулоновское расталкивание несколько увеличивает радиус и эффективный эмиттанс пучка.

Оптимизация поперечной динамики пучка, как и продольной, проводилась при использовании многокритериального подхода. Было получено множество K пробных точек в пространстве критериев (K_4, K_5) , содержащее \hat{Q} (200) точек, которые на рис. 24 обозначены синим цветом. Юго-западная граница множества K состоит из 10 точек, образующих приближенную компромиссную кривую – на рис. 24 она обозначена желтым, численные значения представлены в таблице 3.

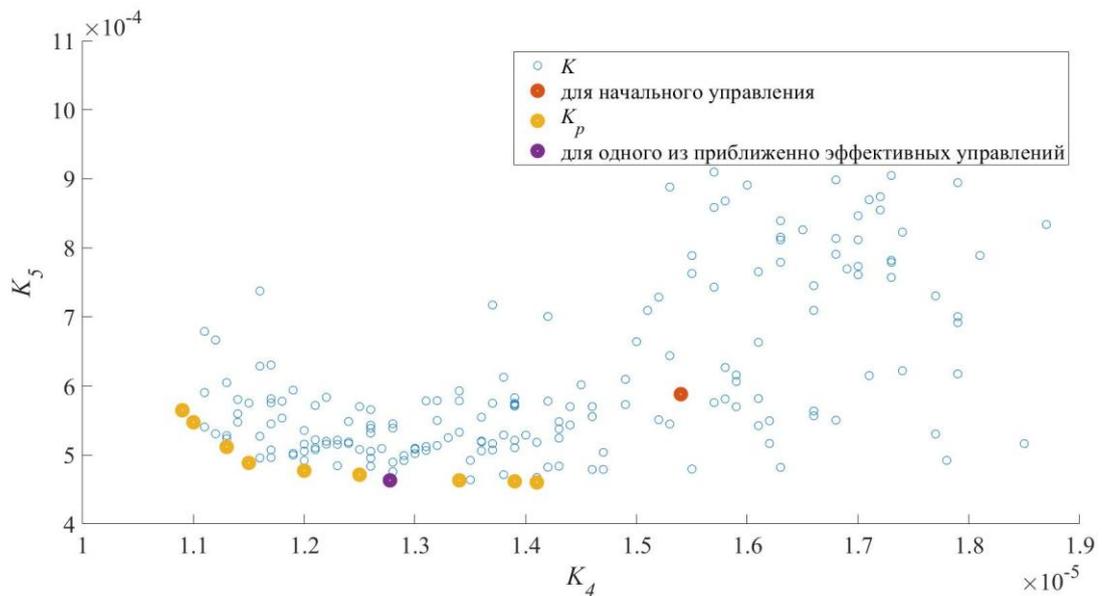


Рис. 24 Множество пробных точек K в пространстве критериев (синий); множество точек, образующих приближенную компромиссную кривую K_p (желтый, фиолетовый); точка, соответствующая начальному управлению (красный)

Табл. 3 Значения критериев K_4 , K_5 для начального управления и для приближенно-эффективных управлений

№ п/п	K_4	K_5
1 (для начального управления)	1.54×10^{-5}	5.88×10^{-4}
2	1.09×10^{-5}	5.65×10^{-4}
3	1.10×10^{-5}	5.47×10^{-4}
4	1.13×10^{-5}	5.12×10^{-4}
5	1.15×10^{-5}	4.88×10^{-4}
6	1.20×10^{-5}	4.77×10^{-4}
7	1.25×10^{-5}	4.71×10^{-4}
8	1.28×10^{-5}	4.63×10^{-4}
9	1.41×10^{-5}	4.60×10^{-4}
10	1.34×10^{-5}	4.63×10^{-4}
11	1.39×10^{-5}	4.62×10^{-4}

Графики управляющей функции $\gamma_M^2(\xi, u)$ для начального управления (критерии в строке 1 табл. 3) и приближенно-эффективного (критерии в строке 1 табл. 3) представлены на рис. 25 и 26 соответственно.

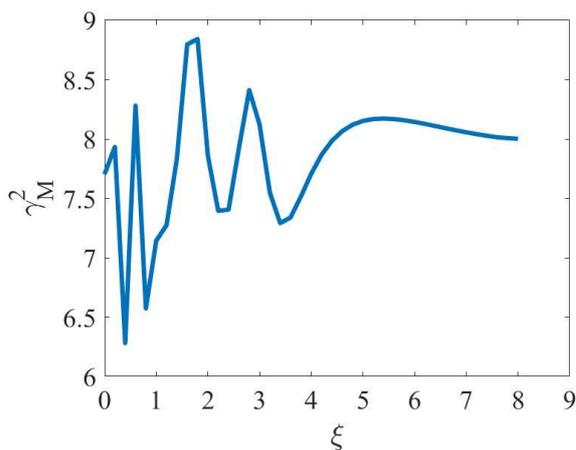


Рис. 25 Функция $\gamma_M^2(\xi, u_0)$ для начального управления u_0

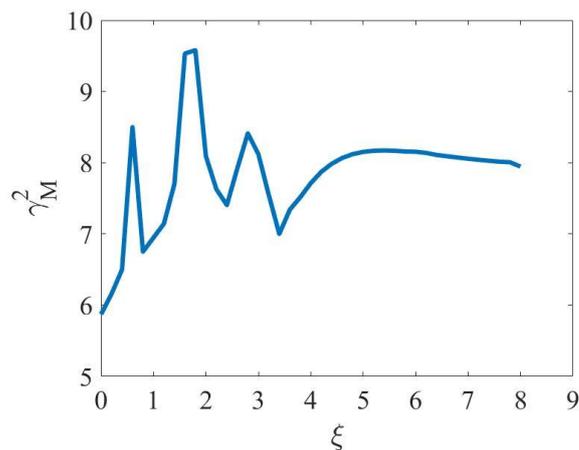


Рис. 26 Функция $\gamma_M^2(\xi, \hat{u})$ для приближенно-эффективного управления \hat{u}

Из табл. 3 видно, что удалось уменьшить значения критериев K_4 и K_5 . Приведем результаты моделирования поперечной динамики пучка (с учетом кулоновского расталкивания) для начального и приближенно-эффективного управлений.

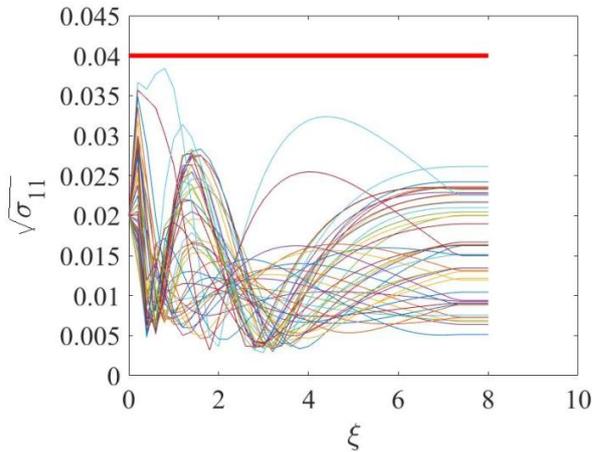


Рис. 27 График зависимости $\sqrt{\sigma_{11}}$ от приведенной продольной координаты ξ до оптимизации (u_0)

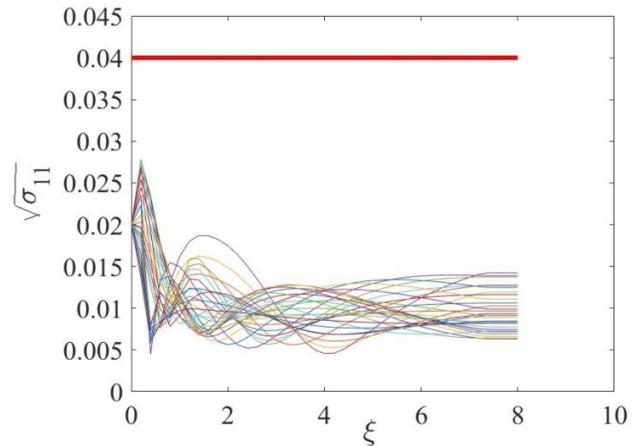


Рис. 28 График зависимости $\sqrt{\sigma_{11}}$ от приведенной продольной координаты ξ после оптимизации (\hat{u})

Из рис. 27, 28 видно, что радиус пучка до оптимизации менялся сильнее, чем после оптимизации, а также на выходе ускорителя можно наблюдать более сфокусированный пучок после оптимизации.

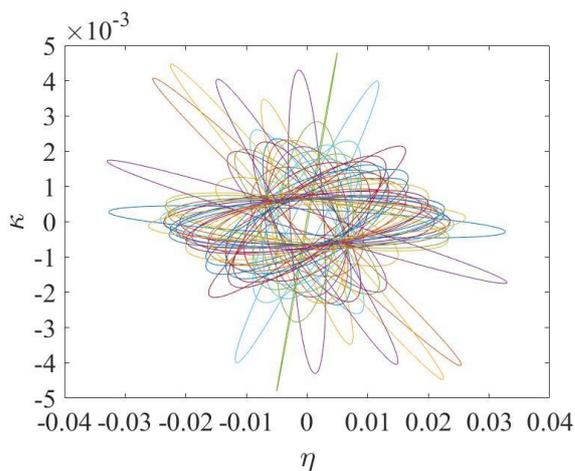


Рис. 29 Фазовый портрет пучка на выходе ускорителя для начального управления u_0

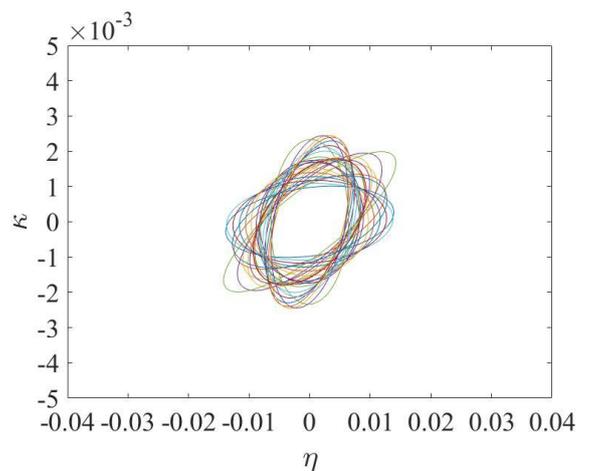


Рис. 30 Фазовый портрет пучка на выходе ускорителя для приближенно-эффективного управления \hat{u}

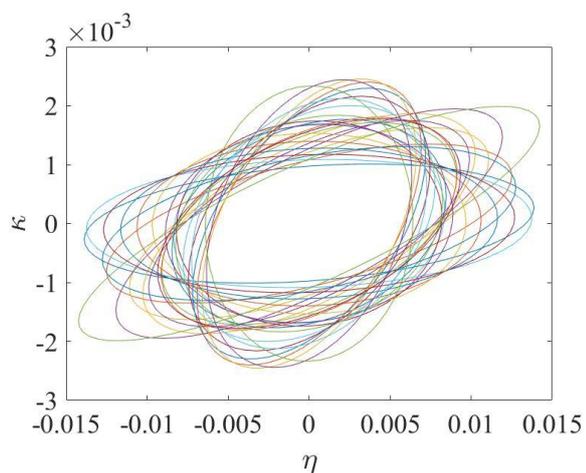


Рис. 31 Фазовый портрет пучка на выходе ускорителя для приближенно-эффективного управления \hat{u} (увеличенный масштаб)

Уменьшение критерия K_5 позволяет решить задачу минимизации эффективного эмиттанса пучка. Как видно из рис. 29 – 31 разброс углов наклона большой оси эллипсов уменьшился после оптимизации. А также заметно, что уменьшился радиус пучка.

Заключение

Данная работа посвящена исследованию продольной и поперечной динамики интенсивного квазипериодического пучка электронов в линейном волноводном ускорителе. Исследование проводится в два этапа: на первом осуществляется моделирование продольного движения частиц (без учета поперечного), проводится его оптимизация. На втором этапе выполняется моделирование продольной и поперечной динамики пучка при оптимизированном управлении продольным движением, полученном на первом этапе работы.

На первом этапе исследования представлены уравнения продольного движения частиц. Описан метод моделирования продольной компоненты напряженности поля объемного заряда, использующий аппроксимацию плотности заряда тригонометрическим полиномом. Введены критерии качества пучка. Предложена параметризация управляющих функций (которые предполагаются кусочно-гладкими), а также способ выбора значений параметров. Поставлена задача многокритериальной оптимизации продольной динамики пучка. Проведена численная оптимизация, получена приближенная компромиссная кривая и соответствующее множество приближенно-эффективных управлений. Выбрано одно из управлений, обеспечивающее существенное повышение качества группировки пучка и коэффициента захвата в режим ускорения по сравнению с начальным управлением. Выбранное управление фиксировано для проведения второго этапа исследования.

На втором этапе представлена математическая модель продольной и поперечной динамики пучка. Получено выражение для поперечной компоненты кулоновского поля пучка в виде тригонометрического полинома, затем выполнена его линеаризация по поперечной координате. Это позволило описать поперечное движение частиц в рамках метода

огибающих. Введена параметризация управляющей функции по аналогии с параметризацией управлений продольным движением. Проведена многокритериальная оптимизация поперечной динамики пучка с целью обеспечить его движение без потерь частиц на стенках, минимизировать его радиус и эффективный эмиттанс на выходе ускорителя. Получены приближенная компромиссная кривая и соответствующее множество приближенно-эффективных управлений. Оптимизация позволила значительно уменьшить радиус пучка на всем ускоряющем тракте и эффективный эмиттанс пучка на выходе структуры.

Разработано программное обеспечение для исследования и оптимизации динамики электронов в ускорителе. Комплекс программ на языке C++ обеспечил возможность получения численных результатов и их графического представления. Расчеты выполнены для линейного волноводного ускорителя с начальной энергией 60 кэВ и длиной ускоряющей волны 10 см. Проведен анализ полученных результатов.

Список литературы

1. Березин Ю.А., Вшивков В.А. Метод частиц в динамике разреженной плазмы. — Новосибирск, 1980. — 96 с.
2. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. — Киев, 1985.- 304 с.
3. Вальднер О.А., Власов А.Д., Шальнов А. В. Линейные ускорители. — М., 1969. — 248 с.
4. Владимирова Л.В. Многокритериальная оптимизация в прикладных задачах. Учебное пособие. СПб: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2002. – 23 с.
5. Владимирова Л.В. Многокритериальная оптимизация динамики пучков. Известия Иркутского государственного университета, 2014. Серия: Математика, 2014, №7, с.3-18.
6. Владимирова Л.В., Овсянников Д.А., Рубцова И.Д. Методы Монте-Карло в прикладных задачах. – СПб.: Изд-во ВВМ, 2015. – 167 с.
7. Владимирова Л. В., Овсянников Д.А., Свистунов Ю.А. Оптимизация захвата частиц в ускорение при больших токах в ЛУЭ //Вопросы атомной науки и техники. Сер. Электрофизическая аппаратура. 1993.Вып. 26. С.54-60.
8. Власов А.Д. Теория линейных ускорителей. — М., 1965. — 308 с.
9. Гольдин Л.Л. Физика ускорителей. М.: Наука, 1983. 144с.
10. Дымников А. Метод огибающих в задачах управления пучками частиц //Программирование и математические методы решения физических задач. Дубна. — 1978. — С. 300–304.
11. Ермаков С.М. Метод Монте-Карло в вычислительной математике. Вводный курс. Изд-во Бином, Москва, Невский диалект, Санкт-Петербург, 2009, – 192 с.
12. Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М.: Наука, 1975. – 472 с.

13. Ильин В.П. Численные методы решения задач электрофизики. – М.: Наука, 1985. – 334 с.
14. Капчинский И.М. Теория линейных резонансных ускорителей. Динамика частиц. – М.: Энергоиздат, 1982. 240с.
15. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. — М., 1967. — 460с.
16. Матвеев А.Н. Электродинамика и теория относительности. М., «Высшая школа», 1964. — 424 с.
17. Овсянников А.Д. Математические модели оптимизации динамики пучков. — СПб.: Изд-во ВВМ, 2014. — 181 с.
18. Овсянников Д.А. Моделирование и оптимизация динамики пучков заряженных частиц. — Л., 1990. —312 с.
19. Овсянников Д.А., Егоров Н.В. Математическое моделирование систем формирования электронных и ионных пучков. СПб: Изд-во СПбГУ, 1998. – 276 с.
20. Овсянников Д.А., Рубцова И.Д., Козынченко В.А. Некоторые проблемы моделирования интенсивных пучков заряженных частиц в линейных ускорителях. – СПб.: Изд-во ВВМ, 2013.- 144 с.
21. Овсянников Д.А., Рубцова И.Д., Ломоносова Н.В. Исследование динамики интенсивного квазипериодического пучка в ускоряющей системе. IV Международная конференция «Лазерные, плазменные исследования и технологии» Лаплаз-2018: Сборник научных трудов. М.: НИЯУ МИФИ, 2018. С. 371-372.
22. Полак Д. Численные методы оптимизации. — М., 1974.
23. Рошаль А.С. Моделирование заряженных пучков. — М., 1979. — 224 с.
24. Рубцова И.Д. О моделировании динамики квазипериодического пучка взаимодействующих частиц. // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10: прикладная математика, информатика, процессы управления. 2014. Вып. 1. С. 104-119.

25. Рубцова И.Д., Ломоносова Н.В., Чупрынина Т.А.. Исследование продольной динамики интенсивного квазипериодического пучка в линейном волноводном ускорителе // Вестник Санкт-Петербургского государственного университета технологии и дизайна. Серия 1: Естественные и технические науки. №3, 2017. С. 15-23.
26. Соболев И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. М.: Наука, 1981. 112 с.
27. Altsybeyev V. V., Ovsyannikov D. A. Optimization of beam parameters in APF channel // 27rd International Linear Accelerator Conference, LINAC 2014 - Proceedings. — 2014. — P. 722–725.
28. Vladimirova L V 2016 Multicriterial Approach to Beam Dynamics Optimization Problem II Conference on Plasma&Laser Research and Technologies (2016), Journal of Physics: Conference Series 747 No 1 012070 <http://iopscience.iop.org/1742-6596/747/1/012070>
29. Ovsyannikov A.D. Transverse motion parameters optimization in accelerators // Problems of Atomic Science and Technology. — 2012. — no. 4. — P. 74–77
30. Ovsyannikov D.A., Ovsyannikov A.D., Antropov I.V., Kozynchenko V.A. Software complex BDO-RFQ //Proceedings of III International Conference “Stability and Control Processes” in Memory of V.I.Zubov (SCP), IEEE, 2015. Pp. 335-337. DOI: 10.1109/SCP.2015.7342132
31. Rubtsova I.D. Analytical Approach to Quasiperiodic Beam Coulomb Field Modeling // II Conference on Plasma&Laser Research and Technologies (2016), Journal of Physics: Conference Series, Vol. 747, No 1, 012074 (2016); <http://iopscience.iop.org/1742-6596/747/1/012074>.
32. Rubtsova I.D., Ovsyannikov D.A. Intense quasiperiodic beam dynamics in accelerating system: mathematical model and optimization method // III International Conference on Laser and Plasma Researches and Technologies (2017), Journal of Physics: Conference Series, Vol. 941, No 1, 012092 (2018); <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/941/1/012092>

Приложение

Приложение А.

Значения управляющей функции γ_M^2 в узлах сетки ξ_i

ξ	γ_M^2	ξ	γ_M^2	ξ	γ_M^2
0.0	7.7022	3.2	7.2822	6.2	8.1273
0.2	6.1640	3.4	7.1531	6.4	8.1085
0.4	8.1640	3.6	7.2994	6.6	8.0897
0.6	6.3974	3.8	7.5254	6.8	8.0717
0.8	8.3974	4.0	7.7314	7.0	8.0549
1.0	6.7464	4.2	7.8889	7.2	8.0395
1.2	5.8884	4.4	8.0017	7.4	8.0255
1.4	7.8016	4.6	8.0799	7.6	8.0131
1.6	9.7779	4.8	8.1302	7.8	8.0019
1.8	9.7900	5.0	8.1593		
2.0	7.9048	5.2	8.1729		
2.2	5.9265	5.4	8.1752		
2.4	6.8834	5.6	8.1697		
2.6	8.8834	5.8	8.1589		
2.8	8.9596	6.0	8.1445		
3.0	7.9391				

Приложение Б.

Промежутки изменения параметров оптимизации

$$\xi_0 = 0$$

$$\xi_1 \in [0.1; 0.4]$$

$$\xi_2 \in [0.4; 0.8]$$

$$\xi_3 \in [0.8; 1.2]$$

$$\xi_4 \in [1.2; 1.6]$$

$$\xi_5 \in [1.6; 2.0]$$

$$\xi_6 \in [2.0; 4.0]$$

$$\xi_7 \in [4.0; 6.0]$$

$$\xi_8 \in [6.0; 8.0]$$

$$\xi_9 = 8.0$$

$$\begin{aligned}\alpha(\xi_0) &\in [0.3;0.7] \\ \alpha'(\xi_0) &\in [-1.9;-1.4] \\ \alpha'(\xi_1) &\in [-0.4;0.0] \\ \alpha'(\xi_2) &\in [-0.9;1.4] \\ \alpha'(\xi_3) &\in [1.5;2.0] \\ \alpha'(\xi_4) &\in [0.9;1.3]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha'(\xi_5) &\in [-0.25;0.2] \\ \alpha'(\xi_6) &\in [-0.2;0.3] \\ \alpha'(\xi_7) &\in [-0.2;0.2] \\ \alpha'(\xi_8) &\in [-0.2;0.2] \\ \alpha'(\xi_9) &\in [-0.2;0.2]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_\phi(\xi_0) &\in [0.2;0.7] \\ \beta'_\phi(\xi_0) &\in [-0.2;0.2] \\ \beta'_\phi(\xi_1) &\in [0.0;0.5] \\ \beta'_\phi(\xi_2) &\in [0.0;0.6] \\ \beta'_\phi(\xi_3) &\in [-0.2;0.2] \\ \beta'_\phi(\xi_4) &\in [0.2;0.6]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta'_\phi(\xi_5) &\in [-0.2;0.2] \\ \beta'_\phi(\xi_6) &\in [-0.2;0.2] \\ \beta'_\phi(\xi_7) &\in [-0.2;0.2] \\ \beta'_\phi(\xi_8) &\in [-0.2;0.2] \\ \beta'_\phi(\xi_9) &\in [-0.2;0.2]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_M^2(0) &\in [5.0;9.0] \\ (\gamma_M^2(0))' &\in [-10.0;-5.0] \\ (\gamma_M^2(0.4))' &\in [-10.0;-6.0] \\ (\gamma_M^2(0.8))' &\in [-10.0;-6.0] \\ (\gamma_M^2(1.2))' &\in [7.0;12.0] \\ (\gamma_M^2(1.6))' &\in [7.0;12.0] \\ (\gamma_M^2(2.0))' &\in [-11.0;-7.0]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\gamma_M^2(3.0))' &\in [-9.0;-3.0] \\ (\gamma_M^2(4.0))' &\in [-1.0;1.0] \\ (\gamma_M^2(5.0))' &\in [-1.0;1.0] \\ (\gamma_M^2(6.0))' &\in [-1.0;1.0] \\ (\gamma_M^2(7.0))' &\in [-1.0;1.0] \\ (\gamma_M^2(8.0))' &\in [-1.0;1.0]\end{aligned}$$

Приложение В.

Связь компонент обратной матрицы эллипса B^{-1} и углом между осью эллипса и осью $O\eta$:

$\sigma_{12} = 0, \sigma_{11} = \sigma_{22}$	$\psi = 0$
$\sigma_{22} < \sigma_{11}$	$\psi = \psi_a = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}$
$\sigma_{22} > \sigma_{11}$	$\psi = \psi_a + \frac{\pi}{2}$, если $\psi_a \leq 0$ $\psi = \psi_a - \frac{\pi}{2}$, если $\psi_a > 0$
$\sigma_{11} = \sigma_{22}, \sigma_{12} < 0$	$\psi = -\frac{\pi}{4}$
$\sigma_{11} = \sigma_{22}, \sigma_{12} > 0$	$\psi = \frac{\pi}{4}$