

Санкт-Петербургский Государственный Университет

**Кафедра информационных систем**

Лебедев Илья Алексеевич

Магистерская диссертация

**Вычислительный эксперимент  
в задачах динамики  
стратифицированной жидкости**

Направление 01.04.02

Прикладная математика и информатика

Магистерская программа

Математическое моделирование в задачах естествознания

Научный руководитель

Доктор физ.-мат. наук

профессор

Перегудин С.И.

Санкт-Петербург

2019

# Содержание

Введение . . . . .	3
Постановка задачи . . . . .	8
Обзор литературы . . . . .	9
1 Глава 1. Волновые движения в непрерывно стратифицированной жидкости. . . . .	12
1.1 Основные уравнения и граничные условия . . . . .	12
1.2 Свободные волны в стратифицированной жидкости	17
1.3 Внутренние волны в стратифицированной жидкости	22
2 Глава 2. Вычислительный эксперимент с использованием реальных данных. . . . .	25
2.1 Свободные волны в стратифицированной жидкости	25
2.2 Внутренние волны в стратифицированной жидкости	44
Список литературы . . . . .	53

## Введение

Развитие человечества непрерывно связано с океаном. Водный покров земного шара составляет значительную часть поверхности нашей планеты и почти в три раза превосходит по площади часть, занимаемую сушей. Потребность в морепродуктах и полезных ископаемых, необходимость в морских путях обуславливает связь человека с морем. Освоение океана продолжается, в том числе, благодаря последовательному пополнению знания сущности происходящих в нем динамических процессов.

Волновые движения жидкости — характерное природное явление. Процессы распространения волн и их взаимодействия с преградами необходимо учитывать в связи с проектированием, строительством и эксплуатацией морских гидротехнических сооружений различного назначения: причалов, ограждающих сооружений, буровых платформ. Не менее важно учитывать волновые движения в мореплавании, при проектировании судов, а также при глубоководных погружениях. Поскольку как поверхностные, так и внутренние волны являются неотъемлемой частью океана, любая деятельность, связанная с океа-

ном, в той же мере связана с волновыми движениями.<sup>12</sup>

Данная работа посвящена одному из важных вопросов теории волн — внешним и внутренним волнам, распространяющимся в стратифицированной жидкости. Внутренние волны были описаны теоретически еще в середине прошлого столетия<sup>3</sup>, а обнаружены в океане только на рубеже прошлого и нынешнего столетий. Поначалу эти волны воспринимались как досадная помеха, нарушающая «правильное» поведение океанских вод. Потребовалось еще более полувека, чтобы осознать широкую распространенность и важную роль внутренних волн в жизни океана. Сегодня ясно, что волны внутри океана в существенной мере определяют изменчивость толщи вод в широком диапазоне пространственных и временных масштабов.<sup>4</sup>

В настоящее время в связи с проблемами геофизики, океанологии и физики атмосферы, а также с использованием криогенных жидкостей в технике и рядом других проблем наибольший интерес вызывают задачи о распространении внутренних волн в стратифицированных жидкостях. Под стратифицированной жидкостью принято понимать жидкость, физические характеристики которой (плотность, теплоемкость, ди-

---

<sup>1</sup>Юрнев А. П., Сахаров Б. Д., Сыгин А. В. Аварии под водой.

<sup>2</sup>Шулейкин В. В. Физика моря.

<sup>3</sup>Краусс В. Внутренние волны.

<sup>4</sup>Холодова С. Е., Перегудин С. И. Моделирование и анализ течений и волн в жидких и сыпучих средах.

намическая вязкость и другие) в стационарном состоянии изменяются непрерывно или скачком лишь в одном выделенном направлении. Иначе говоря, в стационарном состоянии жидкости ее физические характеристики являются лишь функцией одной пространственной переменной. Стратификация жидкости может быть вызвана различными физическими причинами. Наиболее часто встречающейся из них является сила тяжести. Эта сила создает в жидкости такое распределение ее частиц, растворенных в ней солей и взвешенных суспензий, при котором возникает неоднородность жидкости вдоль направления гравитационного поля. Стратификация плотности, как показывают экспериментальные наблюдения, оказывает наиболее существенное влияние (по сравнению с другими видами стратификации) на динамические свойства жидкости и процессы распространения в ней внутренних волн.<sup>5</sup> Поэтому в дальнейшем, говоря о стратифицированной жидкости, будем подразумевать жидкость со стратификацией плотности, вызванной силой тяжести.

Реальный океан представляет собой сложную динамическую систему, в частности он вращается вместе с Землей и стратифицирован по глубине. Наряду с акустическими, поверх-

---

<sup>5</sup>Перегудин С.И., Холодова С.Е. Волновые движения в жидкости с непрерывной стратификацией.

ностными и планетарными волнами, внутренние волны участвуют в создании сложных волновых полей в океане. Следовательно, правильное описание этих полей невозможно без учета внутренних волн. В связи с этим следует отметить, что экспериментальные исследования и наблюдения внутренних волн представляют собой достаточно сложную в техническом отношении задачу. Таким образом, значение теоретических исследований в данной области многократно возрастает.<sup>67</sup>

Природа внутренних волн и колебательных движений, их свойства, возникновение и взаимодействие в основных чертах исследованы, однако остается широкий круг задач, не получивших до сих пор ни теоретического, ни экспериментального решения. Для детального описания широкого круга физических явлений, связанных с динамикой волн, следует исходить из достаточно полных математических моделей, которые, как правило, оказываются весьма сложными, нелинейными, многопараметрическими, и для успешного их исследования наиболее эффективны, по-видимому, численные методы, основанные на параллельных вычислениях и использовании многопроцессорных ЭВМ. Однако в ряде случаев первоначальное качественное представление об изучаемом круге явлений можно получить

---

<sup>6</sup>Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости.

<sup>7</sup>Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей.

и на основе более простых, линейных, моделей, поддающихся аналитическому исследованию. В этом отношении весьма характерны задачи динамики внутренних волн. Даже в рамках линейных моделей их математические постановки весьма своеобразны и приводят к неклассическим начальнокраевым задачам. Указанное обстоятельство, наряду с нетривиальными физическими следствиями, определяет и самостоятельный математический интерес к этим проблемам.

Можно с уверенностью сказать, что задачи теории гравитационных волн в стратифицированной жидкости в настоящее время составляют один из важных вопросов теории волн, механики, прикладной математики и математической физики.<sup>8 9</sup>

---

<sup>8</sup>Перегудин С.И., Холодова С.Е. Волны во вращающейся стратифицированной жидкости.

<sup>9</sup>Kholodova S.E. Wave motion in a compressible stratified rotating fluid.

## **Постановка задачи**

Основной целью данной работы является построение математической модели волновых движений стратифицированной жидкости, а также проведение вычислительного эксперимента, основанного на реальных данных с анализом полученных результатов.



## Обзор литературы

В основе теории волн лежат методы математического моделирования и результаты качественного анализа моделей, методы изучения асимптотических форм движения, учета силовых и энергетических балансов. Для описания волн используются различные их параметры, выделяющие те или иные свойства, такие как: дисперсионные соотношения, переносимые волнами импульсы, энергия, относительные высоты и длины, и другие. Благодаря ряду критериев подобия существует возможность проводить экспериментальное изучение волновых движений стратифицированной жидкости в природной и искусственно создаваемой среде. Однако, ввиду различных затруднений, таких как: большая трудоемкость, высокая стоимость физического моделирования, условность переноса лабораторных результатов, а иногда и непреодолимые сложности в постановке опыта, можно выделить методы теоретической гидродинамики как наиболее перспективные.

Первоначальные положения теории волн на воде были сформулированы классиками теоретической гидродинамики — О. Коши, Ж. Лагранжем, Л. Эйлером, Д. Бернулли, С. Пуассоном и другими исследователями. Так, Лагранж писал в 1788г.: "Мы обязаны Эйлеру первыми общими формулами для дви-

жения жидкостей... записанными в простой и ясной символике частных производных... Благодаря этому открытию вся механика жидкостей свелась к вопросу анализа, и будь эти уравнения интегрируемыми, можно было бы в любом случае полностью определить движение жидкости под воздействием любых сил..."<sup>10</sup>

Теория волновых движений развивалась благодаря различным вопросам, возникавшим по мере развития судоходства, а также теории приливных волн в каналах и реках. Упрощение задачи о волнах, положенное в основу теории бесконечно малых волн, предложено О. Коши. Среди лиц, способствовавших развитию теории волн малой амплитуды, следует отметить П. Лапласа, М.В. Остроградского, Дж. Эри, Дж. Стокса, У. Кельвина, Дж. Рэлея, Г. Ламба, У. Рэнкина и других ученых. Большой вклад в теорию гидравлики внесли Б. Сен-Венан и Ж. Буссинеск<sup>11</sup>. Позднее А. Пуанкаре представил свои исследования, в особенности в теории фигур равновесия вращающихся и гравитирующих жидкостей. В этой же области еще ранее значительный вклад был внесен А.М. Ляпуновым.

Что касается задач динамики внутренних волн в стратифи-

---

<sup>10</sup>Биркгоф Г. Гидродинамика. Методы. Факты.

<sup>11</sup>Boussinesq J. Theorie de lintumescence liquide appelee onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire

цированной жидкости, то в настоящее время, несмотря на их органическую связь с задачами теории вращающихся жидкостей, они в математическом плане изучены значительно слабее, хотя и здесь имеется довольно обширная литература, среди которой можно выделить работы С.Я. Секерж-Зеньковича<sup>12</sup>, Н.Д. Копачевского и его учеников, С.А. Габова и А.Г. Свешникова<sup>13</sup>, а так же Черкесова Л.В.<sup>14</sup> и Алешкова Ю.З.<sup>15</sup>.

---

<sup>12</sup>Секерж-Зенькович Я.И. Трехмерные стоячие волны конечной амплитуды на поверхности тяжелой жидкости бесконечной глубины

<sup>13</sup>Габов С.А., Свешников А.Г. Задачи динамики стратифицированных жидкостей.

<sup>14</sup>Черкесов Л.В., Иванов В.А., Хартиев С.М. Введение в гидродинамику и теорию волн.

<sup>15</sup>Алешков Ю.З. Течение и волны в океане.

# 1 Глава 1. Волновые движения в непрерывно стратифицированной жидкости.

## 1.1 Основные уравнения и граничные условия

Рассмотрим движение несжимаемой идеальной жидкости, плотность которой в невозмущенном состоянии зависит только от вертикальной координаты:

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0(z) + \rho_1(x, y, z, t), \quad (1)$$

где  $\rho_0(z)$  — распределение плотности в отсутствие движения, а  $\rho_1(x, y, z, t)$  — динамическая добавка. Жидкость, плотность которой в невозмущенном состоянии зависит только от глубины ( $\rho = \rho_0(z)$ ), называется стратифицированной. Стратификация предполагается устойчивой, т.е.  $d\rho_0/dz < 0$ . Давление можно представить также в виде суммы

$$p = g \int_z^0 \rho_0(z) dz + p_1(x, y, z, t), \quad z < 0, \quad (2)$$

где первое слагаемое определяет гидростатическое давление в точке с координатой  $z$ , а  $p_1$  — динамическая добавка давления. Таким образом, ось  $z$  направлена вертикально вверх, а плоскость  $z = 0$  совпадает с невозмущенной свободной поверхностью области, занятой жидкостью.

Рассмотрим уравнения Эйлера

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{dv_y}{dt} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{dv_z}{dt} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z},\end{aligned}\tag{3}$$

уравнения несжимаемости

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0\tag{4}$$

и уравнения неразрывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.\tag{5}$$

Считаем далее  $p_1, \rho_1, v_x, v_y, v_z$  и их производные величинами первого порядка малости и упрощаем систему уравнений пренебрегая малыми второго порядка по сравнению с малыми первого порядка. Условие несжимаемости в линейном приближении с учетом предположения 1 принимает вид<sup>16</sup>

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + v_z \frac{d\rho_0}{dz} = 0$$

Уравнение неразрывности — линейное, и предположение о малости составляющих скорости его не упрощает. Линеаризация левых частей уравнений системы (3-5) означает равенство индивидуальной и местной производных. Далее, предположим,

---

<sup>16</sup>Перегудин С. И. Волновые движения в жидких и сыпучих средах.

что горизонтальная массовая сила есть только сила Кориолиса,  
то есть

$$F_x = 2\omega v_y,$$

$$F_y = 2\omega v_x,$$

а вертикальная массовая сила есть только сила тяжести

$$F_z = -g.$$

Из (1) и (2) получим равенство

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0 + \rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0} \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^{-1} \frac{\partial p_1}{\partial x}$$

и его линейное приближение

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial x}.$$

Аналогичным образом получим

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial y},$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g + g \frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial z}.$$

На твердом дне бассейна должно выполняться условие непротекания. Запишем это граничное условие для горизонтального дна:

$$v_z = 0 \quad \text{при} \quad z = -H.$$

На свободной поверхности  $z = \zeta$  должны выполняться два условия:

## 1. Динамическое

$$p \Big|_{z=\zeta} = p_0,$$

где  $p_0$  — атмосферное давление на свободной поверхности,

## 2. Кинематическое

$$\frac{d\zeta}{dt} = v_z, \quad z = \zeta,$$

означающее, что частицы жидкости, составляющие свободную поверхность при  $t = t_0$ , остаются на ней и при  $t > t_0$ .

Линеаризация и преобразование граничных условий на свободной поверхности приводит к соотношению

$$\left( \frac{1}{g\rho^0} \frac{\partial p_1}{\partial t} - v_z \right) \Big|_{z=0} = \frac{1}{g\rho^0} \frac{\partial p_0}{\partial t}.$$

Таким образом, задача о волнах малой амплитуды в безграничном слое идеальной несжимаемой жидкости постоянной глубины сводится к решению системы уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} - 2\omega v_y &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + 2\omega v_x &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} &= -g \frac{\rho_1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial z}, \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + v_z \frac{d\rho_0}{dz} &= 0, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

с граничными условиями

$$v_z = 0 \quad \text{при} \quad z = -H,$$
$$\left( \frac{1}{g\rho^0} \frac{\partial p_1}{\partial t} - v_z \right) \Big|_{z=0} = \frac{1}{g\rho^0} \frac{\partial p_0}{\partial t}. \quad (7)$$



## 1.2 Свободные волны в стратифицированной жидкости

Рассмотрим свободные ( $p_0 = 0$ ) волны в стратифицированной идеальной жидкости постоянной глубины. Будем рассматривать движение, периодическое по времени и горизонтальным координатам. Будем искать решение системы (6), (7) в следующем виде

$$\begin{aligned} v_x &= \tilde{v}_x(z)e^{i\theta}, & v_y &= \tilde{v}_y(z)e^{i\theta}, & v_z &= \tilde{v}_z(z)e^{i\theta}, \\ p_1 &= \tilde{p}_1(z)e^{i\theta}, & \rho_1 &= \tilde{\rho}_1(z)e^{i\theta}, & \theta &= mx + ny - \sigma t. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $m, n$  — волновые числа,  $\sigma$  — циклическая частота.

Подставив (8) в систему (6) с граничными условиями (7) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно  $\tilde{v}_x, \tilde{v}_y, \tilde{v}_z, \tilde{p}_1, \tilde{\rho}_1$  (опустим знак тильда над искомыми функциями для простоты записи)

$$\begin{aligned} i\sigma v_x + 2\omega v_y &= im \frac{1}{\rho_0} p_1, & i\sigma v_y + 2\omega v_x &= in \frac{1}{\rho_0} p_1, \\ i\sigma v_z &= g \frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0} \frac{dp_1}{dz}, \\ i\sigma \rho_1 - v_z \frac{d\rho_0}{dz} &= 0, & imv_x + inv_y + \frac{dv_z}{dz} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} v_z &= 0 \quad \text{при} \quad z = -H, \\ \frac{i\sigma}{g\rho_0} p_1 + v_z &= 0 \quad \text{при} \quad z = 0. \end{aligned}$$

Методом исключения искомых функций получим относительно  $v_z$  линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 v_z}{dz^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \frac{dv_z}{dz} - \frac{m^2 + n^2}{\sigma^2 - 4\omega^2} (\sigma^2 - N^2) v_z = 0 \quad (10)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} v_z &= 0 \quad \text{при} \quad z = -H, \\ \frac{dv_z}{dz} - \frac{g(m^2 + n^2)}{\sigma^2 - 4\omega^2} v_z &= 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz}$  — квадрат частоты Вайсяля-Брента (частоты плавучести). Уравнение (10) запишем в виде

$$v_z'' + 2\alpha(z)v_z' + \beta(z)v_z = 0, \quad (12)$$

где  $\alpha(z) = \frac{1}{2\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz}$ ,  $\beta(z) = -\frac{m^2 + n^2}{\sigma^2 - 4\omega^2} (\sigma^2 - N^2)$ .

Подстановка

$$v_z = u(z)e^{-\int \alpha(z) dz} \quad (13)$$

в уравнение (12) и граничные условия (11) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} u(z)'' + q^2 u(z) &= 0, \quad q^2 = \beta - \alpha^2 + \alpha', \quad (14) \\ q^2 &= -\frac{(m^2 + n^2)}{\sigma^2 - 4\omega^2} \left( \sigma^2 + \frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \right) - \frac{3}{4\rho_0^2} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 + \frac{1}{2\rho_0} \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} u(z) &= 0 \quad \text{при} \quad z = -H, \\ u(z)' - \left( \alpha + \frac{g(m^2 + n^2)}{\sigma^2 - 4\omega^2} \right) u(z) &= 0 \quad \text{при} \quad z = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Если  $q^2 = const$ , то уравнение для  $R(\rho_0) = \frac{d\rho_0}{dz}$ ,  $\rho_0 = \rho_0(z)$ ,

запишется в виде

$$R \frac{dR}{d\rho_0} = \frac{3}{2\rho_0^2} R^2 + 2g \frac{m^2 + n^2}{\sigma^2 - 4\omega^2} R + 2 \left( q^2 + \frac{m^2 + n^2}{\sigma^2 - 4\omega^2} \sigma \right) \rho_0 \quad (16)$$

в общем виде:

$$RR' = f_2(\rho_0)R^2 + f_1R + f_0(\rho_0). \quad (17)$$

Уравнение (17) представляет собой уравнение Абеля второго рода. Подстановка

$$A(\rho_0) = R e^{-\int f_2 d\rho_0} = R e^{\frac{1}{2} \int \frac{d\rho_0}{\rho_0}} = R \rho_0^{-\frac{1}{2}}$$

приводит уравнение (16) к уравнению для функции  $A(\rho_0)$

$$AA' = 2g \frac{m^2 + n^2}{\sigma^2 - 4\omega^2} \rho_0^{-\frac{1}{2}} A + 2 \left( q^2 + \frac{m^2 + n^2}{\sigma^2 - 4\omega^2} \sigma^2 \right) \frac{1}{\rho_0},$$

которое при помощи подстановки

$$A = W(\rho_0) + \int \left( 2g \frac{m^2 + n^2}{\sigma^2 - 4\omega^2} \right) \rho_0^{-\frac{1}{2}} d\rho_0$$

преобразуем в уравнение

$$\left( W + 4g \frac{m^2 + n^2}{\sigma^2 - 4\omega^2} \rho_0^{\frac{1}{2}} \right) W' = 2 \left( q^2 + \frac{m^2 + n^2}{\sigma^2 - 4\omega^2} \right) \frac{1}{\rho_0},$$

в общем виде:

$$(W + \alpha(\rho_0)) W' = f_3(\rho_0).$$

Таким образом,

$$R(\rho_0) = \left( W(\rho_0) - 4g \frac{m^2 + n^2}{\sigma^2 - 4\omega^2} \rho_0^{\frac{1}{2}} \right) \rho_0^{\frac{1}{2}}.$$

Заметим, что уравнение (16) удовлетворяется и при  $\rho_0(z) = \rho^0 e^{-kz}$  ( $k > 0, \rho^0 = \rho_0(0)$ ). При  $q^2 = const$  общее решение уравнения (14) имеет вид

$$u(z) = D_1 \sin qz + D_2 \cos qz. \quad (18)$$

Подстановка (18) в (15) приводит к линейной однородной системе алгебраических уравнений относительно  $D_1$  и  $D_2$

$$\begin{cases} -D_1 \sin qH + D_2 \cos qH = 0, \\ qD_1 - \left( \alpha + \frac{g(m^2 + n^2)}{\sigma^2 - 4\omega^2} \right) D_2 = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Как известно, её нетривиальные решения существуют тогда и только тогда, когда определитель системы (19) обращается в нуль, т.е. если

$$\begin{vmatrix} -\sin qH & \cos qH \\ q & -\alpha - \frac{g(m^2 + n^2)}{\sigma^2 - 4\omega^2} \end{vmatrix} = 0,$$

где  $\alpha = \frac{1}{2\rho^0} \frac{d\rho_0}{dz}$  при  $z = 0$ . Раскрывая определитель получаем дисперсионное соотношение

$$\sin qH \left( \alpha + \frac{g(m^2 + n^2)}{\sigma^2 - 4\omega^2} \right) - q \cos qH = 0,$$

или

$$\operatorname{tg} qH = \frac{q(\sigma^2 - 4\omega^2)}{g(m^2 + n^2) + \alpha(\sigma^2 - 4\omega^2)}. \quad (20)$$

В случае экспоненциальной стратификации жидкости  $\rho_0(z) = \rho^0 e^{-kz}$  ( $k > 0$ ) дисперсионное уравнение (20) примет вид

$$\left( \frac{g(m^2 + n^2)}{\sigma^2 - 4\omega^2} - \frac{k}{2} \right) \operatorname{tg}(b_0 H) - b_0 = 0, \quad (21)$$

где

$$b_0 = \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{\sigma^2 - 4\omega^2} (gk - \sigma^2) - \frac{5}{4}k^2}.$$

Таким образом, вертикальная составляющая скорости исследуемого волнового движения в случае, если волновые числа  $m, n$  и частота  $\sigma$  связаны дисперсионным соотношением (20) или (21), полностью определена.

Решение системы (9) в случае экспоненциальной стратификации принимает следующий вид

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{p_1 \frac{1}{\rho_0} (2i\omega n + \sigma m)}{\sigma^2 - 4\omega^2} e^{i\theta} \\ v_y &= \frac{p_1 \frac{1}{\rho_0} (2i\omega m - \sigma n)}{4\omega^2 - \sigma^2} e^{i\theta} \\ v_z &= (D_1 \sin qz + D_2 \cos qz) e^{\int \alpha(z) dz} e^{i\theta} \\ p_1 &= \int (i\sigma v_z \rho_0 - g_1 \rho_1) dz e^{i\theta} \\ \rho_1 &= \frac{-v_z k \rho_0 e^{-kz}}{i\sigma} e^{i\theta} \\ \theta &= mx + ny - \sigma t \end{aligned} \quad (22)$$

### 1.3 Внутренние волны в стратифицированной жидкости

Рассмотрим свободные внутренние волны с учетом двух предположений. Первое предположение состоит в том, что в уравнении

$$\frac{d^2 v_z}{dz^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \frac{dv_z}{dz} - \frac{m^2 + n^2}{\sigma^2 - 4\omega^2} (\sigma^2 - N^2) v_z = 0$$

можно пренебречь вторым слагаемым, т.е. считать

$$\max \left| \frac{d^2 v_z}{dz^2} \right| \gg \max \left| \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \frac{dv_z}{dz} \right|$$

Данное предположение обосновано тем, что величина  $\frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz}$  в реальных условиях моря является величиной малой.<sup>17</sup>

Второе предположение - условие твердой крышки - заключается в том, что граничное условие на свободной поверхности заменяется более простым условием

$$v_z = 0 \quad \text{при} \quad z = 0.$$

Таким образом, свободная поверхность заменяется неподвижной твердой плоскостью и отфильтровываются поверхностные волны.

Задача о свободных внутренних волнах приводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 v_z}{dz^2} - \frac{m^2 + n^2}{\sigma^2 - 4\omega^2} \left( \frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} + \sigma^2 \right) v_z = 0 \quad (23)$$

---

<sup>17</sup>Перегудин С.И., Холодова С.Е. Волновые движения во вращающейся непрерывно стратифицированной жидкости.

с граничными условиями

$$\begin{aligned} v_z &= 0 & \text{при} & & z &= 0, \\ v_z &= 0 & \text{при} & & z &= -H. \end{aligned} \quad (24)$$

При экспоненциальном распределении плотности уравнение примет следующий вид

$$\frac{d^2 v_z}{dz^2} + \frac{gk - \sigma^2}{\sigma^2 - 4\omega^2} (m^2 + n^2) v_z = 0.$$

Общее решение имеет вид (при  $\sqrt{gk} > \sigma > 2\omega$ )

$$v_z = A \sin b(z + H) + B \cos b(z + H),$$

где

$$b = \sqrt{\frac{(m^2 + n^2)(gk - \sigma^2)}{\sigma^2 - 4\omega^2}}.$$

Учитывая граничные условия получим  $B = 0$ ,  $\sin(bH) = 0$  - дисперсионное соотношение для внутренних волн. Окончательно получим

$$H \sqrt{\frac{(m^2 + n^2)(gk - \sigma^2)}{\sigma^2 - 4\omega^2}} = \pi r, \quad r \in N. \quad (25)$$

Таким образом, в экспоненциально стратифицированной жидкости при условии  $\sqrt{gk} > \sigma > 2\omega$  любому фиксированному значению  $\sigma$  отвечает счетное множество волновых чисел

$$\sqrt{m_r^2 + n_r^2} = \pi r \sqrt{\frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{gk - \sigma^2}} \frac{1}{H}, \quad r \in N.$$

Волновым числам  $m_r, n_r$  соответствует волновое движение с вертикальной составляющей скорости

$$v_z^{(r)}(x, y, z, t) = A_r \tilde{v}_z^{(r)}(z) e^{i(m_r x + n_r y - \sigma t)},$$

где

$$\tilde{v}_z^{(r)}(z) = \sin \left[ \left( \frac{\pi r}{H} \right) (z + H) \right],$$

$A_n$  - произвольная постоянная.

В силу линейности задачи вертикальную составляющую скорости, соответствующую фиксированному значению частоты  $\sigma$ , можно представить в виде суммы первых  $N$  мод:

$$v_z^{(r)}(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^N A_n \sin \left[ \left( \frac{\pi r}{H} (z + H) \right) \right] e^{i(m_r x + n_r y - \sigma t)}.$$

Аналогично в виде суммы первых  $N$  мод можно записать  $v_x, v_y, p_1, \rho_1$ .



## 2 Глава 2. Вычислительный эксперимент с использованием реальных данных.

Для проведения вычислительных экспериментов использован программный пакет Maple, а для обработки данных и построения графиков язык программирования Python и библиотека Matplotlib. В качестве исходных данных использованы реальные (либо максимально приближенные к реальным) данные.

### 2.1 Свободные волны в стратифицированной жидкости

Рассмотрим полученное ранее дисперсионное уравнение для случая экспоненциальной стратификации жидкости:

$$\left( \frac{g(m^2 + n^2)}{\sigma^2 - 4\omega^2} - \frac{k}{2} \right) \operatorname{tg}(b_0 H) - b_0 = 0$$

где

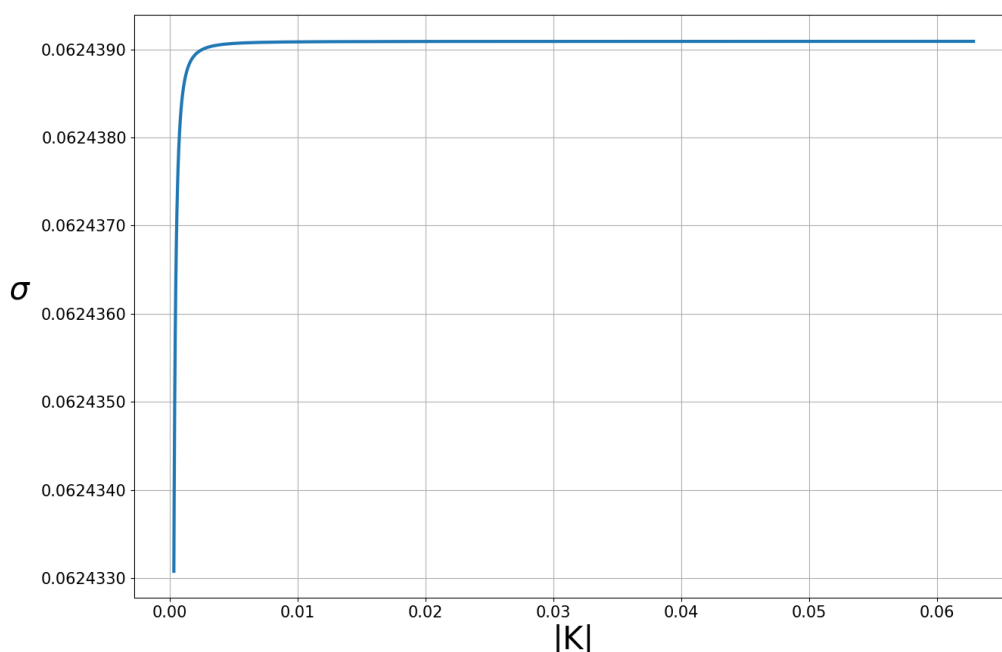
$$b_0 = \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{\sigma^2 - 4\omega^2} (gk - \sigma^2) - \frac{5}{4}k^2}.$$

Здесь  $g$  — ускорение свободного падения,  $m, n$  — волновые числа,  $\sigma$  — циклическая частота,  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли,  $H$  — глубина,  $k$  — коэффициент стратификации. Оценим зависимости между циклической частотой  $\sigma$  и волновыми числами  $m, n$ . В эксперименте будем использовать следующие данные:  $g = 10^3$  см/с<sup>2</sup>,  $\omega = 7,3 * 10^{-5}$  с<sup>-1</sup>,  $H =$

371100 см средняя глубина океана. Плотность  $\rho_0$  принимаем за  $1,024 \text{ г/см}^3$ , а коэффициент  $k$  принимаем за  $3.89864 * 10^{-6}$ , основываясь на типичном распределении плотности с глубиной в океане.<sup>18</sup> Поскольку волновые числа входят в уравнение в виде  $m^2 + n^2$ , для эксперимента будем использовать волновое число  $K = \sqrt{m^2 + n^2}$ , удовлетворяющее условию  $\lambda = \frac{2\pi}{|K|}$ , где  $\lambda$  — длина волны.

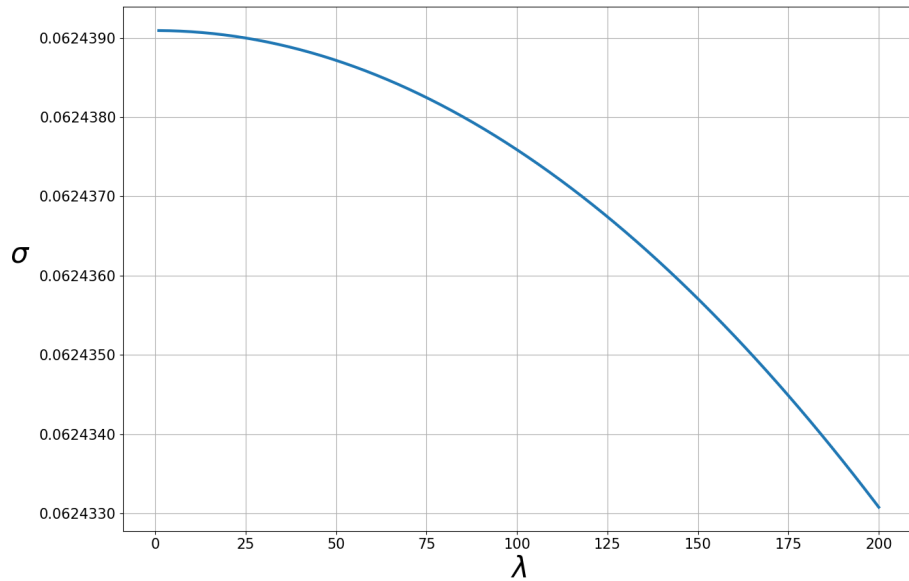
1) Рассмотрим волны длины от 1 до 200 метров. Получим следующие результаты:

1.1.1) Зависимость волновой частоты  $\sigma$  от волнового числа  $|K|$

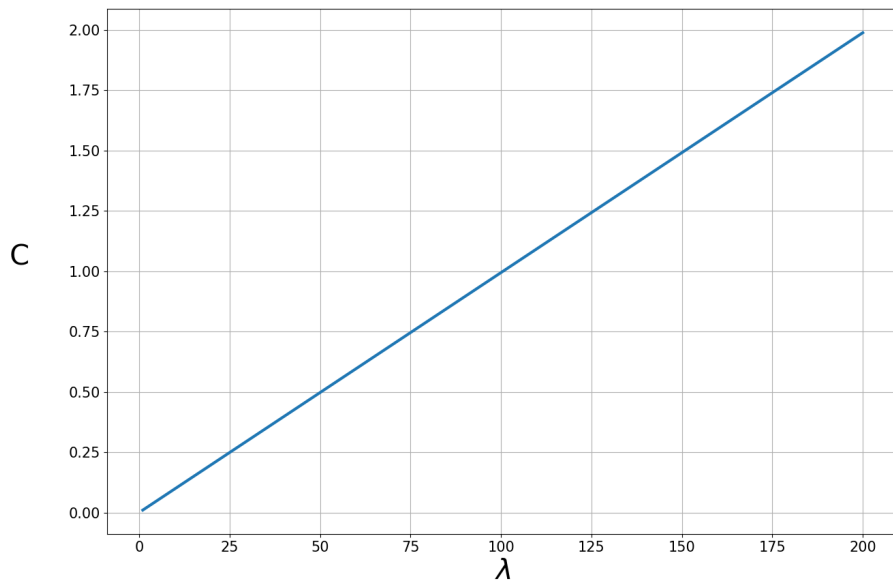


1.1.2) Зависимость волновой частоты  $\sigma$  от длины волны  $\lambda$

<sup>18</sup> Дж. Педлоски "Геофизическая гидродинамика. Том 1.



### 1.1.3) Зависимость фазовой скорости $C$ (м/с) от длины волны $\lambda$

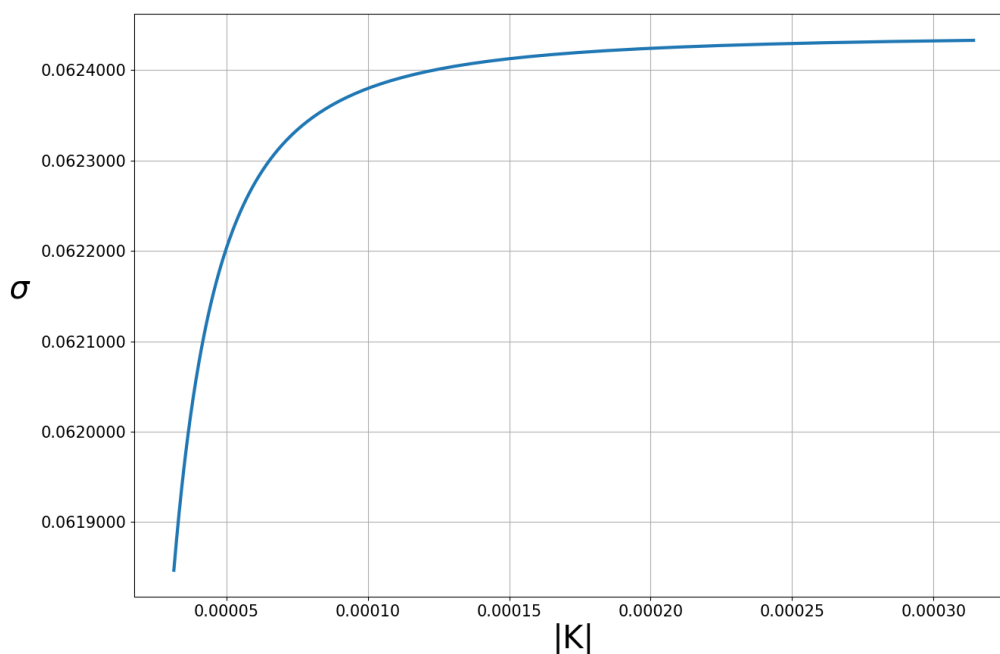


Из полученных результатов можно отметить, что при  $K < 0.0025$  частота растет резко, а затухание практически не меняется. Общая картина говорит о том, что с увеличением длины волны, либо, эквивалентно, с уменьшением волнового числа, значение

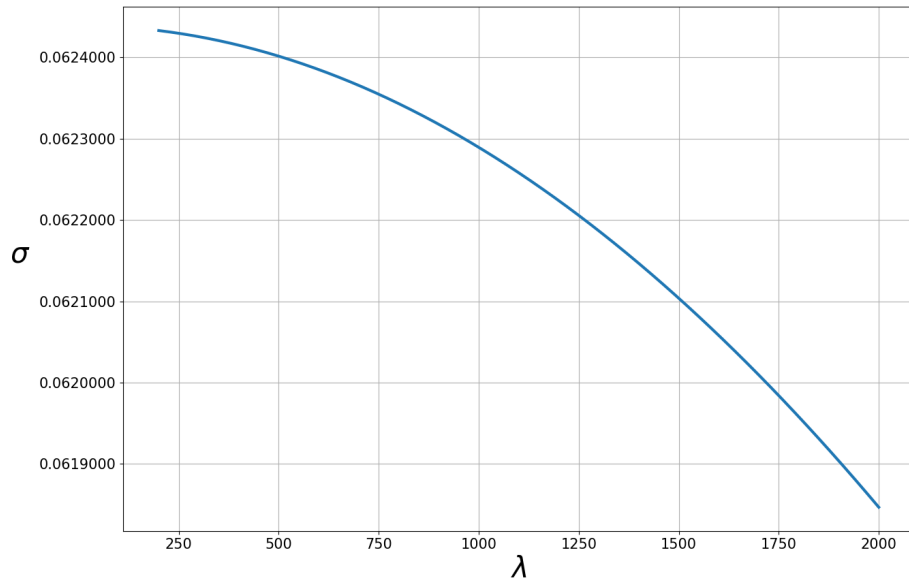
циклической частоты уменьшается. При этом заметно практически линейное увеличение фазовой скорости.

Аналогичные результаты для длин волн от 200 до 2000 метров:

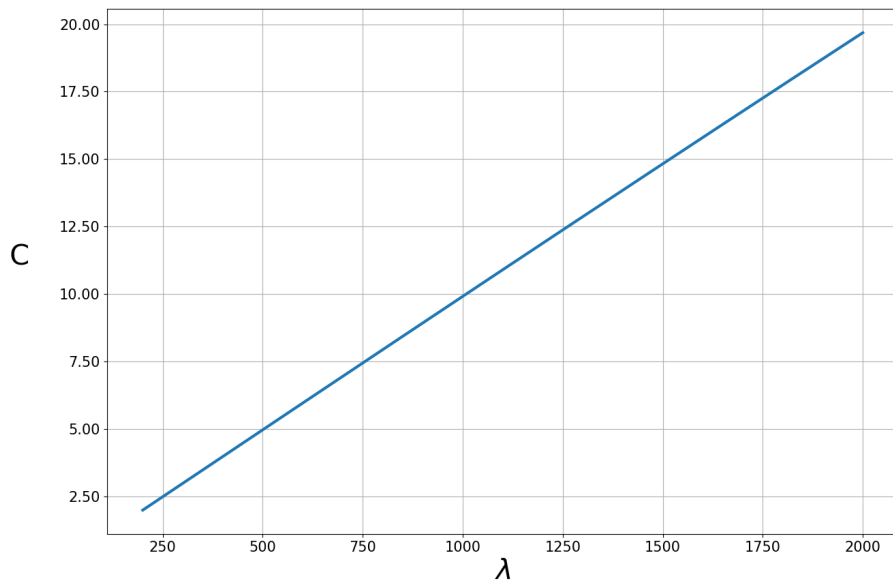
1.2.1) Зависимость циклической частоты  $\sigma$  от волнового числа  $|K|$



1.2.2) Зависимость циклической частоты  $\sigma$  от длины волны  $\lambda$



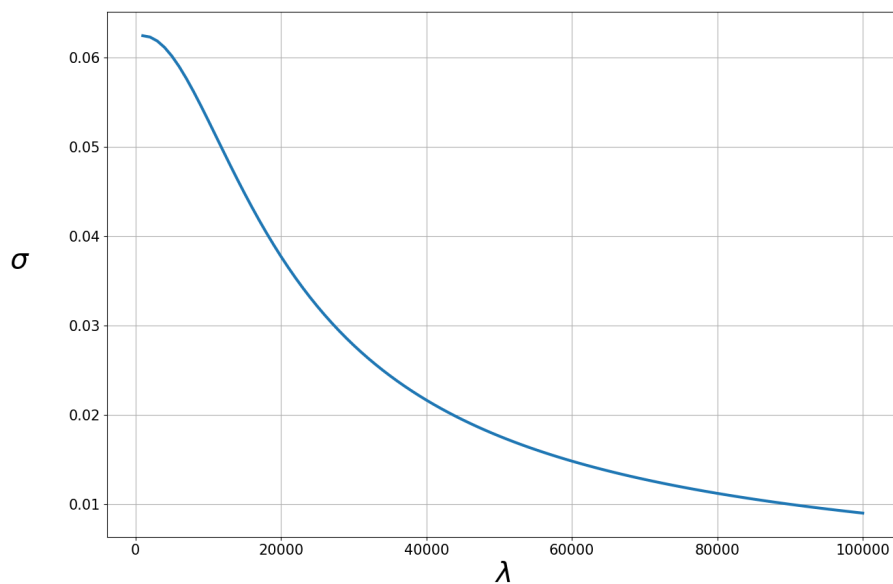
### 1.2.3) Зависимость фазовой скорости $C$ (м/с) от длины волны $\lambda$



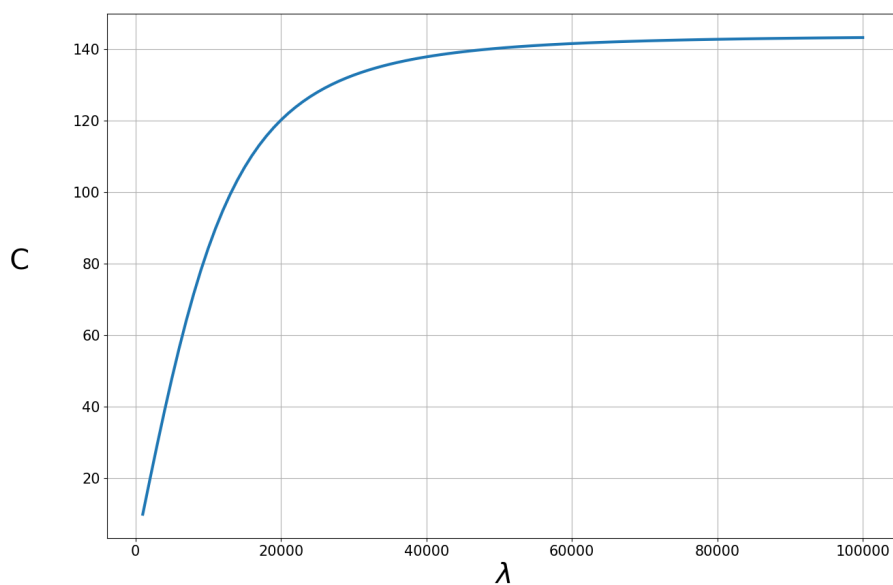
Результаты качественно схожи с результатами для более коротких волн.

Для оценки поведения  $\sigma$  так же был проведен расчет при длине волны до 100км:

### 1.3.1) Зависимость циклической частоты $\sigma$ от длины волны $\lambda$



### 1.3.2) Зависимость фазовой скорости $C$ (м/с) от длины волны $\lambda$



Здесь мы можем отметить, что циклическая частота ведет себя неравномерно на всем промежутке, показывая более высокий градиент скорости для длин волн до 5км. При длине

волн до 30км фазовая скорость резко возрастает, а затем происходит стабилизация. Длина рассмотренных волн может достигать 100км, а скорость более 140м/с, что характерно для волн цунами.<sup>19</sup>

2) Рассмотрим вертикальную составляющую скорости  $v_z$ :

$$v_z = (D_1 \sin qz + D_2 \cos qz)e^{\int \alpha(z)dz} e^{i\theta},$$

где

$$D_2 = D_1 \operatorname{tg} qH,$$

$$\alpha(z) = \frac{1}{2\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz},$$

$$\theta = mx + ny - \sigma t.$$

В случае экспоненциальной стратификации  $v_z$  принимает вид:

$$v_z = D_1 \operatorname{Re} \left[ (\sin b_0 z + \operatorname{tg} b_0 H \cos b_0 z) e^{-\frac{kz}{2} + i\theta} \right],$$

где

$$b_0 = \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{\sigma^2 - 4\omega^2} (gk - \sigma^2) - \frac{5}{4}k^2}.$$

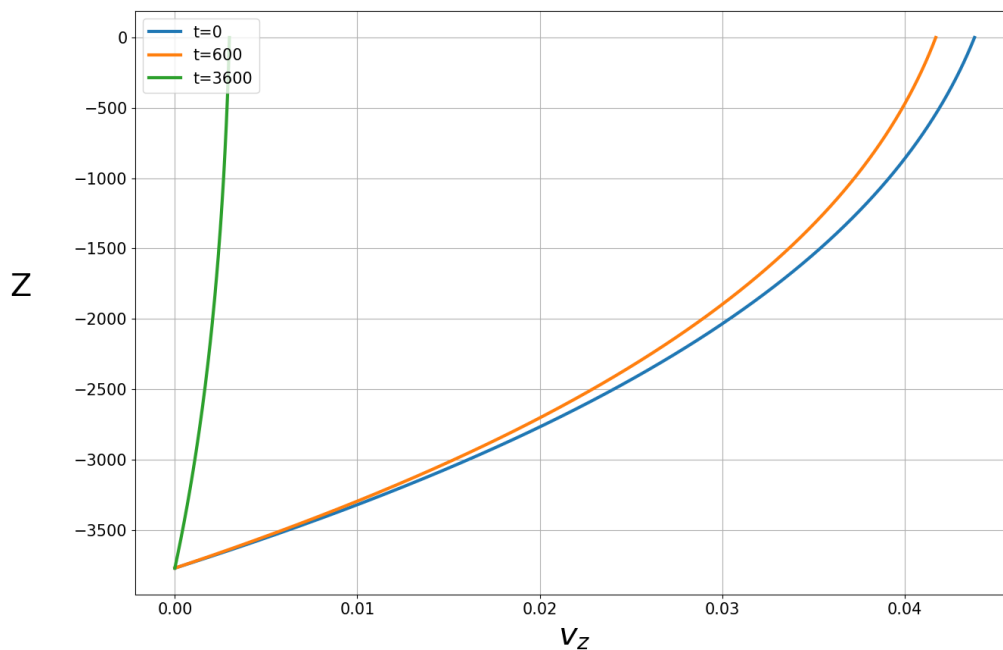
Проведем вычислительный эксперимент, используя данные из предыдущего эксперимента. Значение  $D_1$ , характеризующее амплитуду, изменяем от 5 сантиметров до 5 метров. Рассмотрим изменения координаты  $z$  от 0 до  $-H$  при  $x = y = 1$ . Длину волны положим 1, 200 и 2000 метров.

---

<sup>19</sup>Пелиновский Е.Н. Гидродинамика волн цунами.

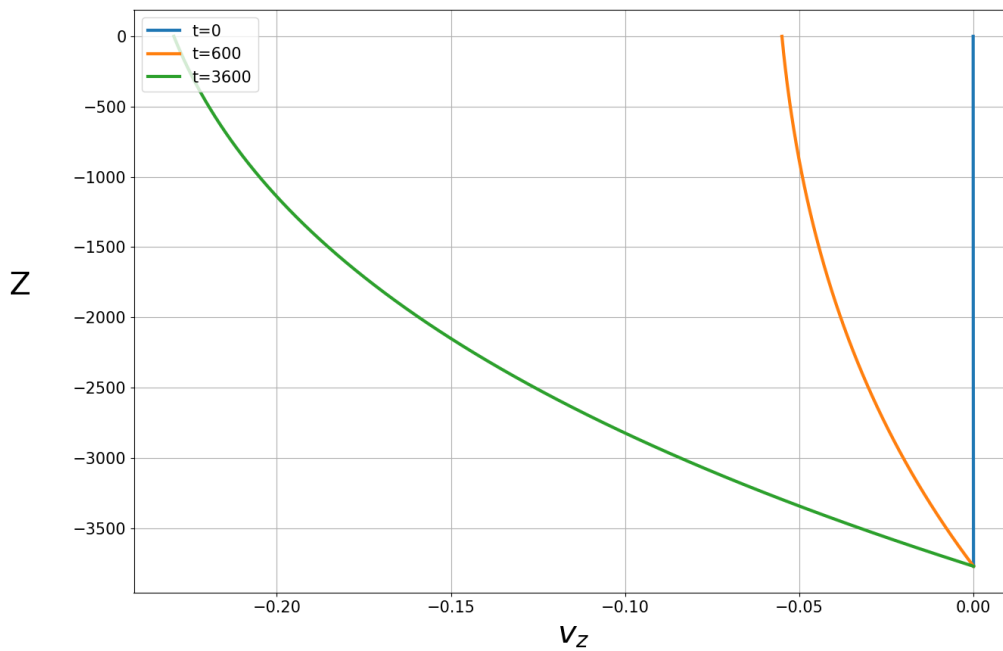
Получим следующие результаты:

2.1.1) Зависимость вертикальной составляющей скорости  $v_z$  от глубины  $Z$  при  $t = 0, 600, 3600$ с. Длина волны  $\lambda = 1$ м.

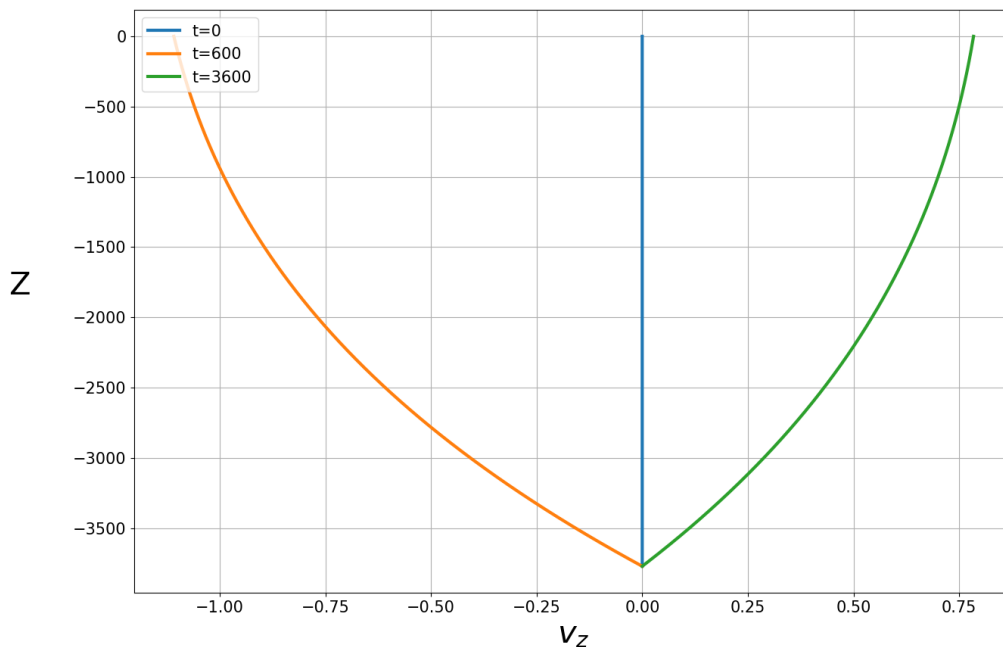


2.1.2) Зависимость вертикальной составляющей скорости  $v_z$  от глубины  $Z$  при  $t = 0, 600, 3600$ с. Длина волны  $\lambda = 200$ м.





2.1.3) Зависимость вертикальной составляющей скорости  $v_z$  от глубины  $Z$  при  $t = 0, 600, 3600$ с. Длина волны  $\lambda = 2000$ м.

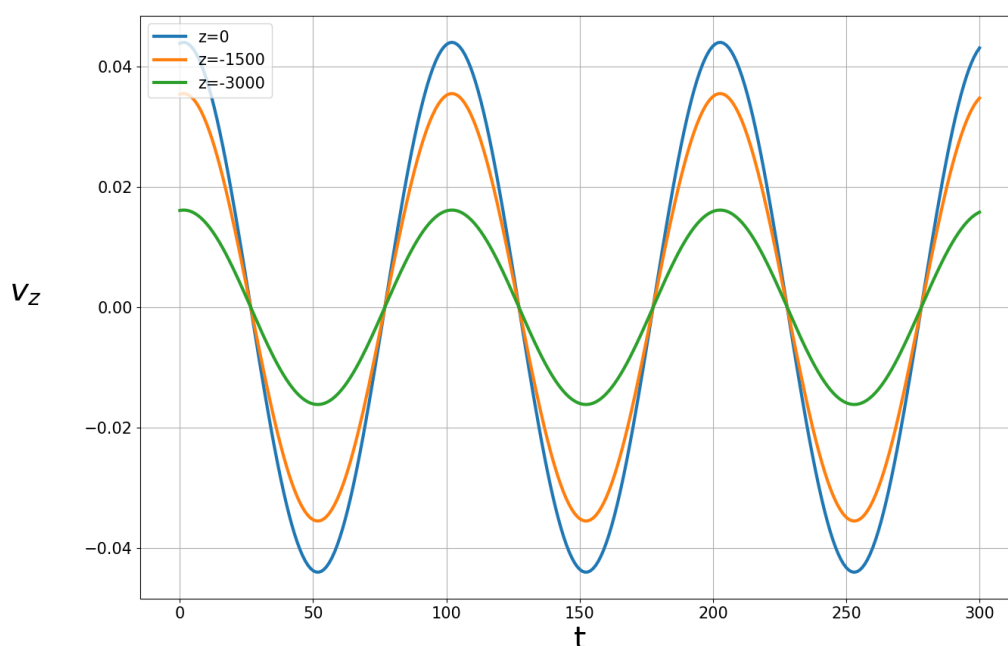


Отметим, что вертикальная составляющая скорости может принимать как положительные, так и отрицательные значения

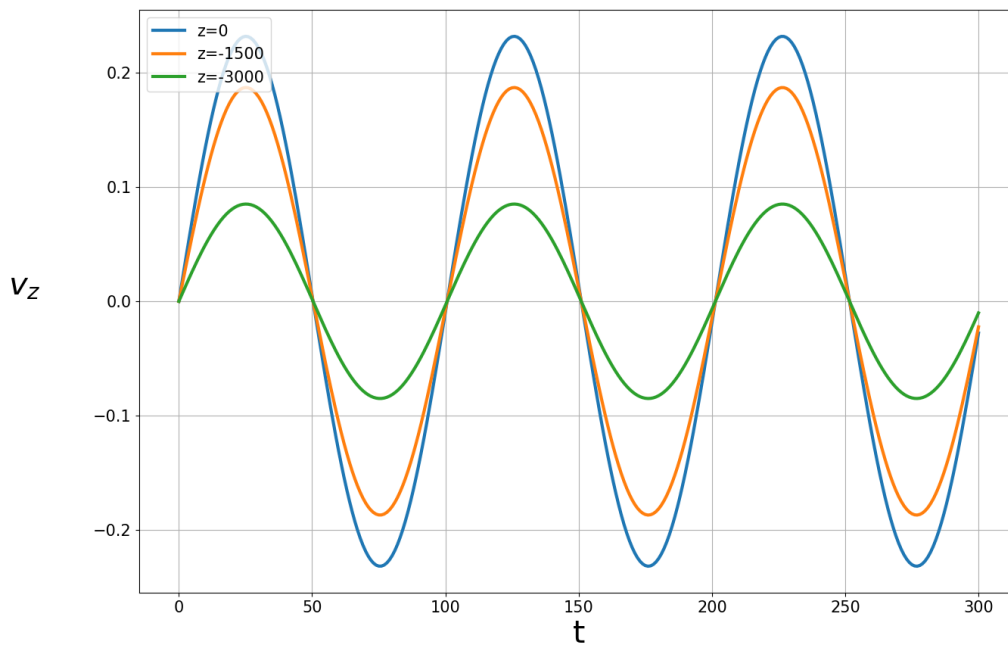
и стремится к нулю с увеличением глубины. На дне для неё выполняется граничное условие  $v_z = 0$ .

Зафиксировав вертикальную координату  $Z$  и варьируя время от 0 до 300с с шагом 1с, получим следующие результаты:

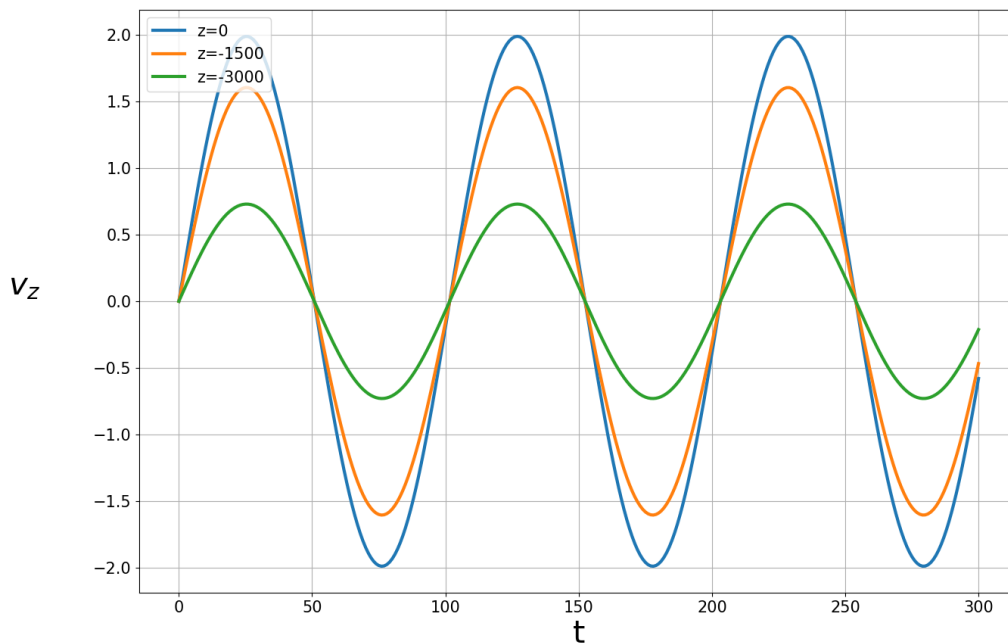
2.2.1) Зависимость вертикальной составляющей скорости  $v_z$  от времени  $t$  при  $Z = 0, -1500, -3000$ м. Длина волны  $\lambda = 1$ м.



2.2.2) Зависимость вертикальной составляющей скорости  $v_z$  от времени  $t$  при  $Z = 0, -1500, -3000$ м. Длина волны  $\lambda = 200$ м.



2.2.3) Зависимость вертикальной составляющей скорости  $v_z$  от времени  $t$  при  $Z = 0, -1500, -3000$ м. Длина волны  $\lambda = 2000$ м.



Отметим, что изменение  $v_z$  имеет периодический характер. Наибольшие амплитуды достигаются на свободной по-

верхности ( $z = 0$ ).

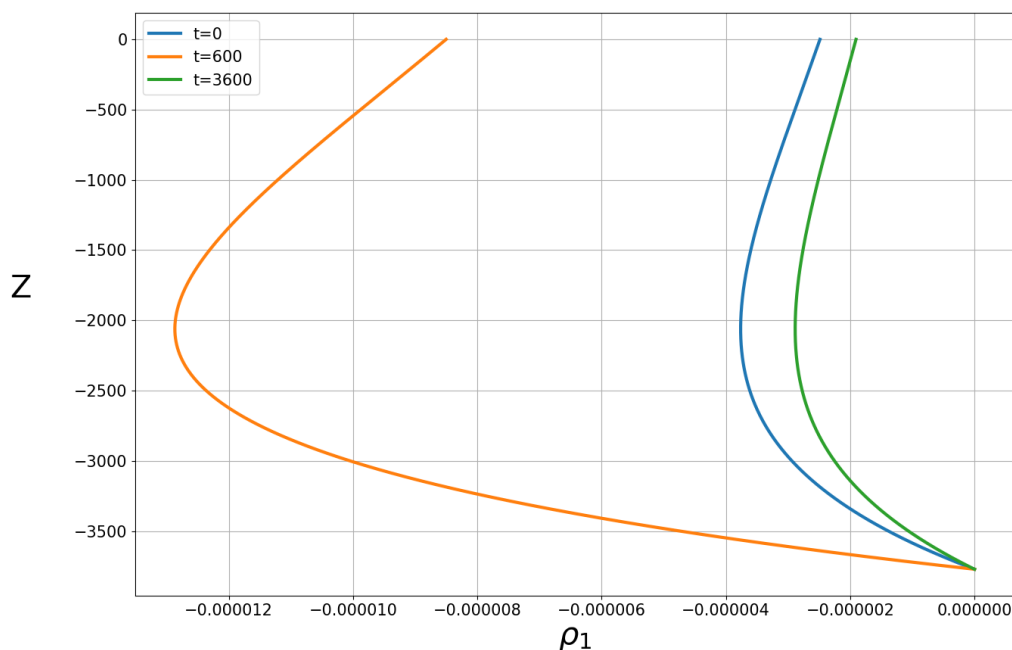
3) Рассмотрим динамическую добавку плотности  $\rho_1$ , описываемую соотношением

$$\rho_1 = \frac{-v_z k \rho_0 e^{-kz}}{i\sigma} e^{i\theta}.$$

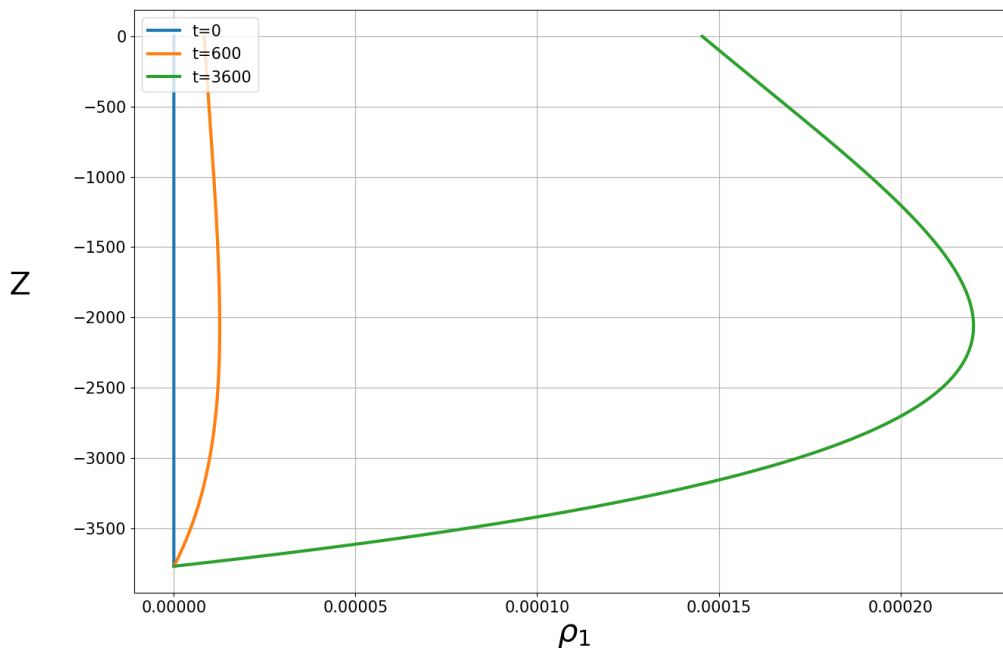
Рассмотрим изменения координаты  $Z$  от 0 до  $-H$  при  $x = y = 1$ . Длину волны положим 1, 200 и 2000 метров.

Получим следующие результаты:

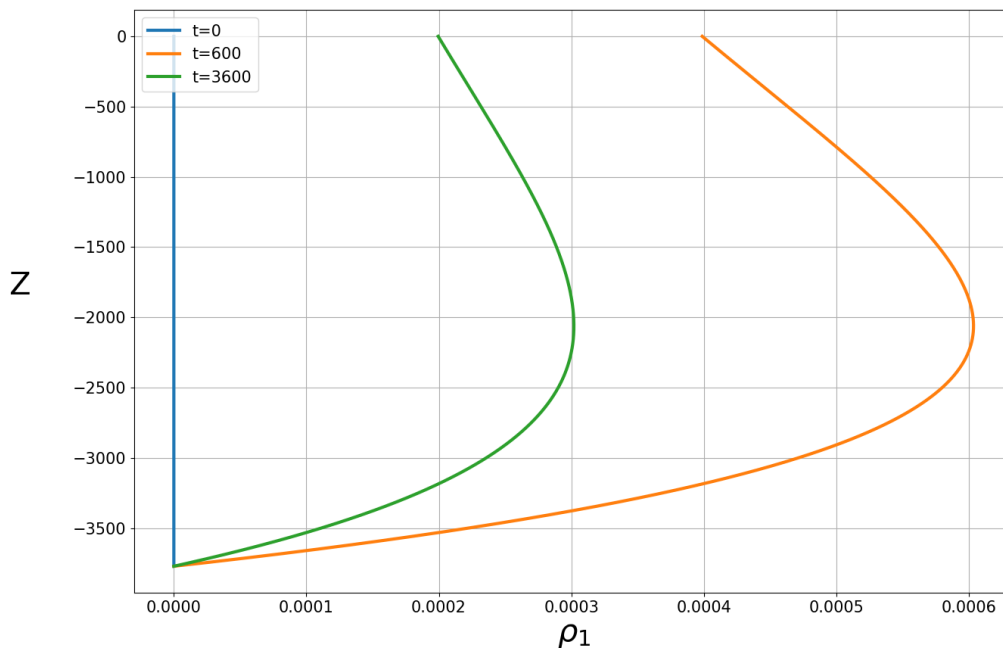
3.1.1) Зависимость динамической добавки плотности  $\rho_1$  от глубины  $Z$  при  $t = 0, 600, 3600$ с. Длина волны  $\lambda = 1$ м.



3.1.2) Зависимость динамической добавки плотности  $\rho_1$  от глубины  $Z$  при  $t = 0, 600, 3600$ с. Длина волны  $\lambda = 200$ м.

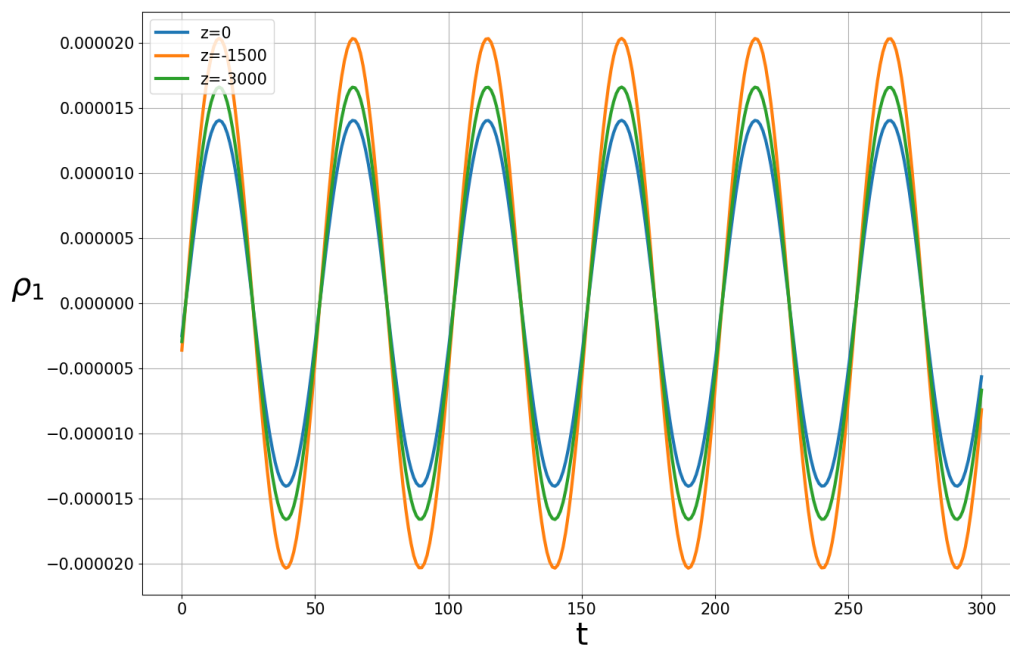


3.1.3) Зависимость динамической добавки плотности  $\rho_1$  от глубины  $Z$  при  $t = 0, 600, 3600$ с. Длина волны  $\lambda = 2000$ м.

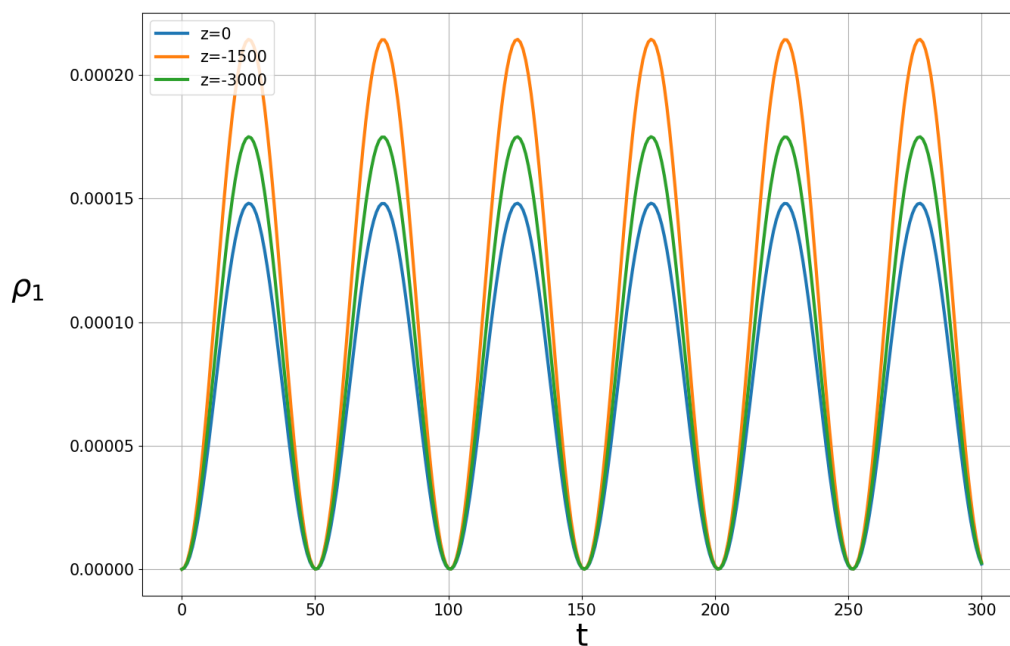


Зафиксировав вертикальную координату  $Z$  и варьируя время от 0 до 300с с шагом 1с получим следующие результаты:

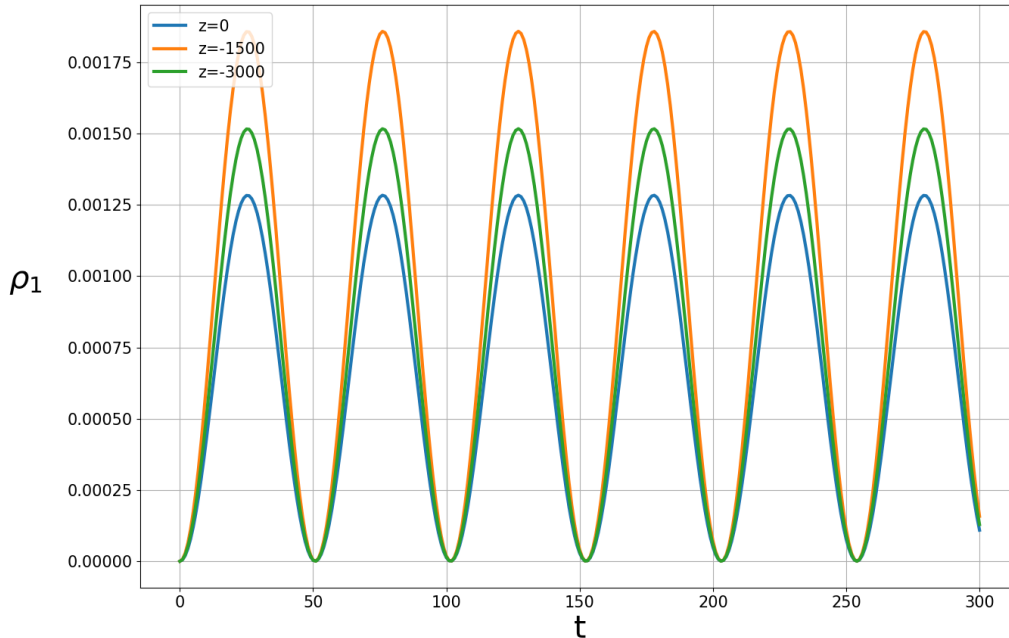
3.2.1) Зависимость динамической добавки плотности  $\rho_1$  от времени  $t$  при  $Z = 0, -1500, -3000$ м. Длина волны  $\lambda = 1$ м.



3.2.2) Зависимость динамической добавки плотности  $\rho_1$  от времени  $t$  при  $Z = 0, -1500, -3000$ м. Длина волны  $\lambda = 200$ м.



3.2.3) Зависимость динамической добавки плотности  $\rho_1$  от времени  $t$  при  $Z = 0, -1500, -3000$ м. Длина волны  $\lambda = 2000$ м.

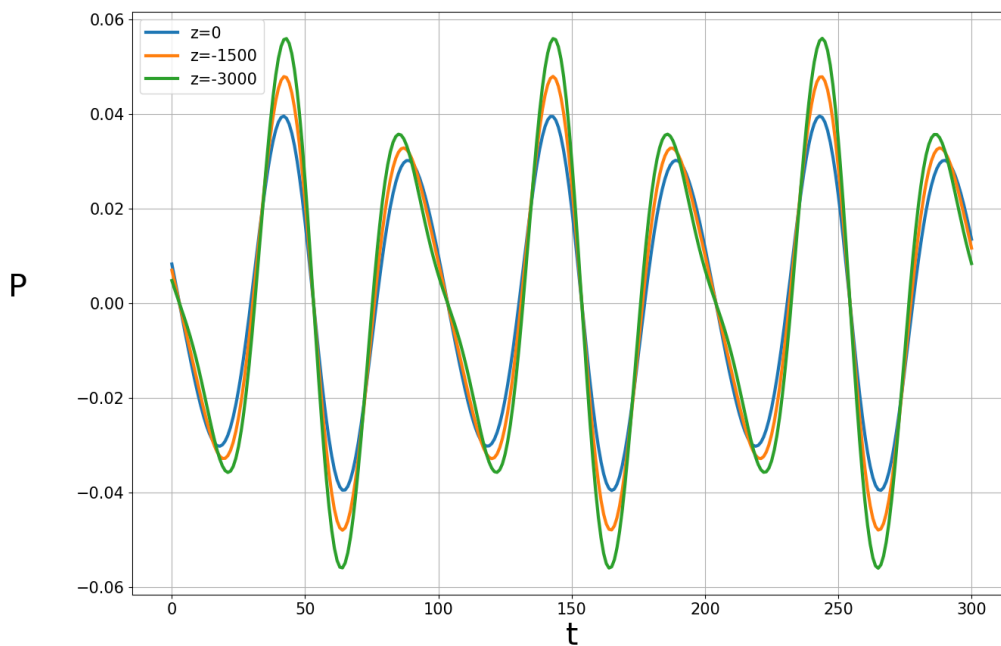


Отметим, что динамическая добавка плотности может принимать как положительные, так и отрицательные значения для коротких длин волн и только положительные для длинных.

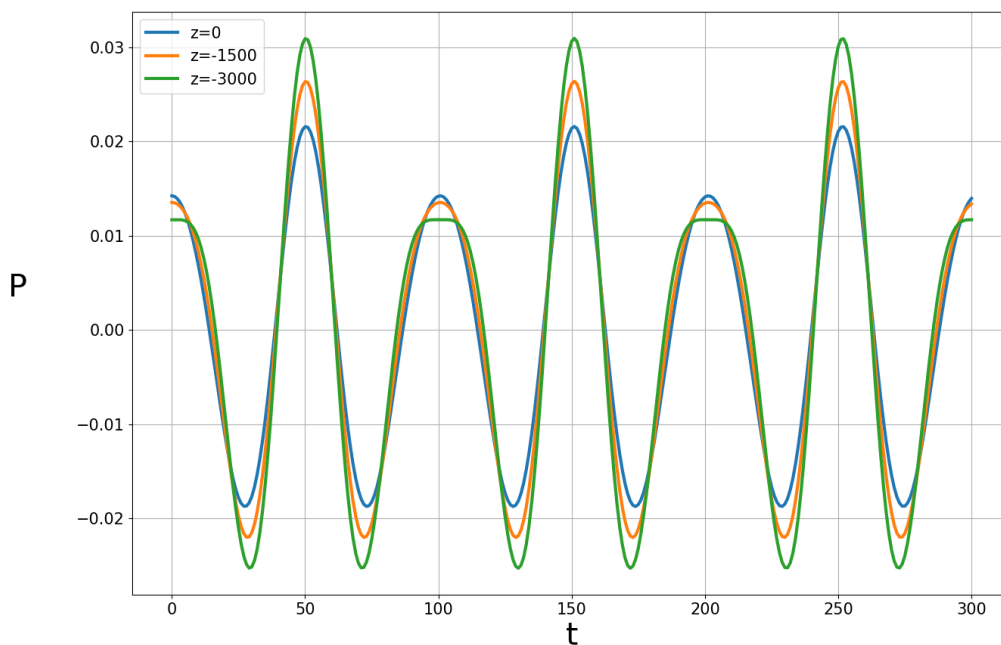
4) Рассмотрим динамическую добавку давления  $p_1$ , описываемую уравнением

$$p_1 = \int (i\sigma v_z \rho_0 - g_1 \rho_1) dz e^{i\theta}.$$

4.2.1) Зависимость динамической добавки давления  $p_1$  от времени  $t$  при  $Z = 0, -1500, -3000$ м. Длина волны  $\lambda = 1$ м.

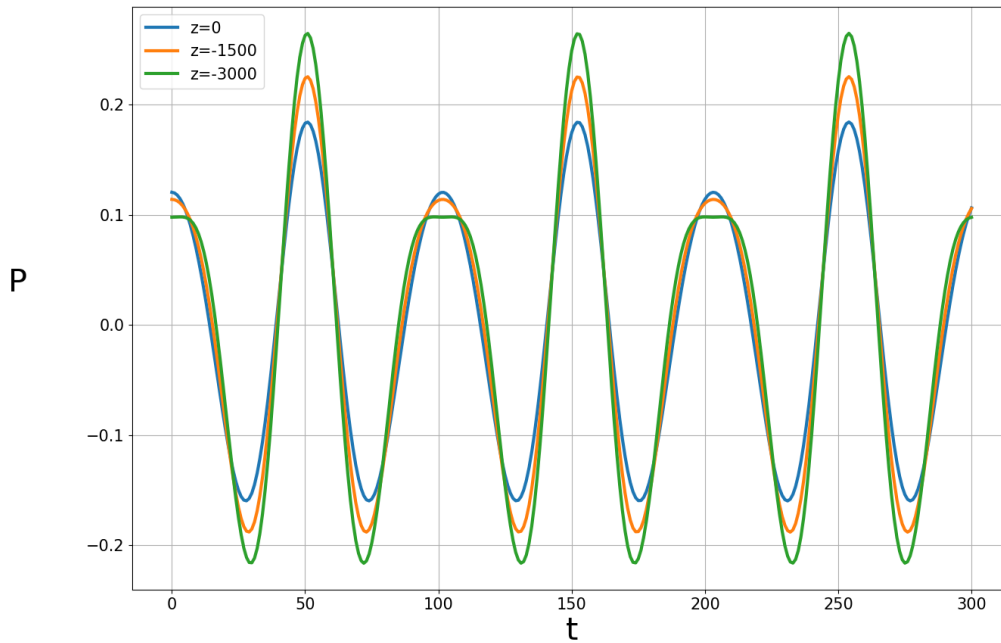


4.2.2) Зависимость динамической добавки давления  $p_1$  от времени  $t$  при  $Z = 0, -1500, -3000$ м. Длина волны  $\lambda = 200$ м.



4.2.3) Зависимость динамической добавки давления  $p_1$  от времени  $t$  при  $Z = 0, -1500, -3000$ м. Длина волны  $\lambda = 2000$ м.





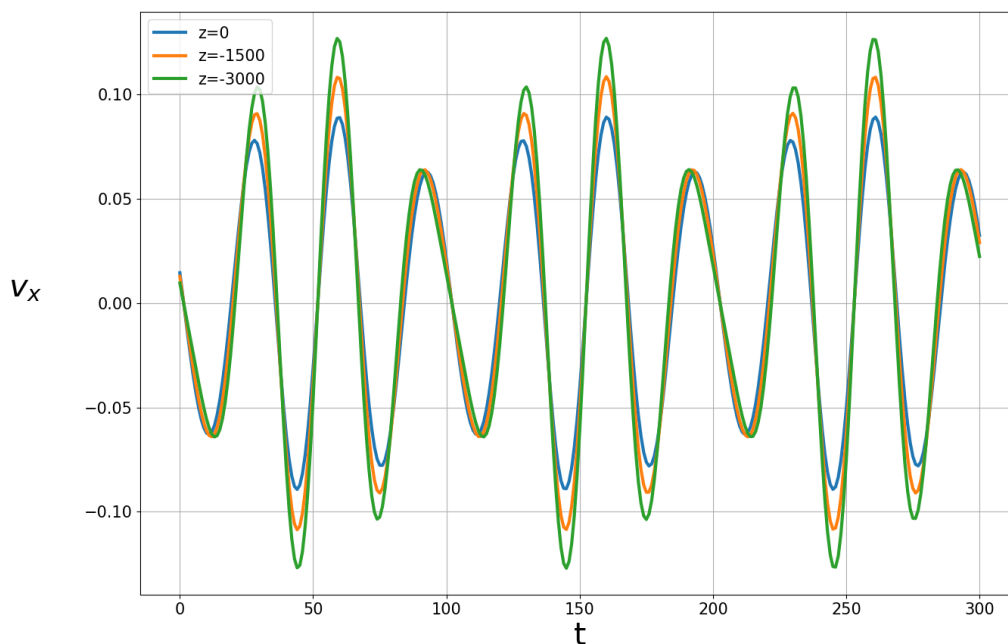
Заметим, что динамическая добавка давления имеет различную динамику при коротких и при длинных волнах. При этом, наибольшие значения добавка принимает с увеличением глубины.

5) Рассмотрим составляющие скорости  $v_x, v_y$ :

$$v_x = \frac{p_1 \frac{1}{\rho_0} (2i\omega n + \sigma t)}{\sigma^2 - 4\omega^2} e^{i\theta} \quad (26)$$

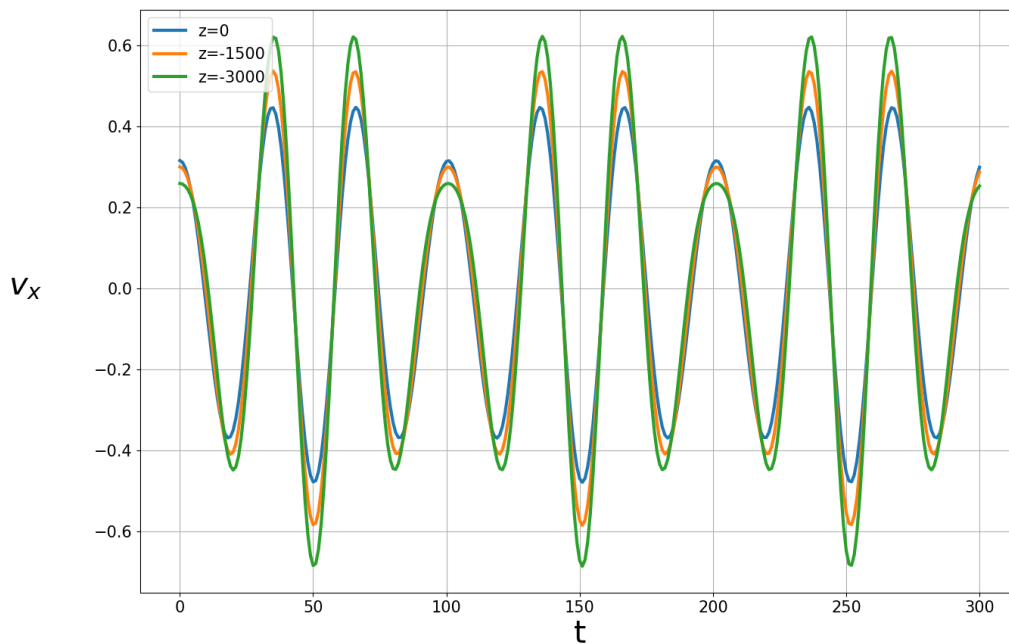
$$v_y = \frac{p_1 \frac{1}{\rho_0} (2i\omega t - \sigma n)}{4\omega^2 - \sigma^2} e^{i\theta}$$

5.1.1.) Зависимость составляющей скорости  $v_x$  от времени  $t$  при  $Z = 0, -1500, -3000$ м. Длина волны  $\lambda = 1$ м.



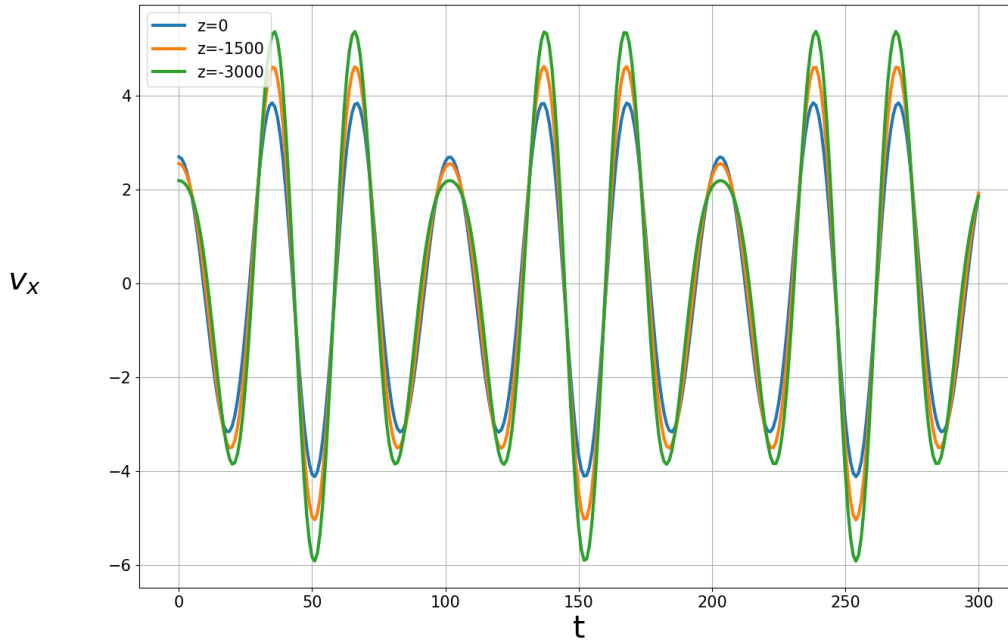
Динамика горизонтальной составляющей скорости представляется следующим образом: уменьшаясь до нуля и изменяя знак,  $v_x$  доходит до некоторой амплитуды, большей изначальной, затем возрастает до нуля и достигает нового максимума, после чего снова убывает и, изменяя знак, достигает минимума. Затем совершает обратное движение. Заметим, что максимума по модулю  $v_x$  достигает 2 раза, при этом, в период от 0 до 25 секунд и в последующие аналогичные периоды на любой глубине скорость одинакова.

5.1.2.) Зависимость составляющей скорости  $v_x$  от времени  $t$  при  $Z = 0, -1500, -3000$ м. Длина волны  $\lambda = 200$ м.



В данном случае поведение отличается от поведения при длине волны 1м: локальный максимум достигается два раза, при этом один раз достигается минимум, наибольший по модулю.

5.1.3.) Зависимость составляющей скорости  $v_x$  от времени  $t$  при  $Z = 0, -1500, -3000$ м. Длина волны  $\lambda = 2000$ м.



Качественная динамика аналогична предыдущему случаю, отличаются только численные характеристики.

## 2.2 Внутренние волны в стратифицированной жидкости

Рассмотрим полученное ранее дисперсионное уравнение для случая экспоненциальной стратификации жидкости:

Рассмотрим вертикальную составляющую скорости  $v_z$ :

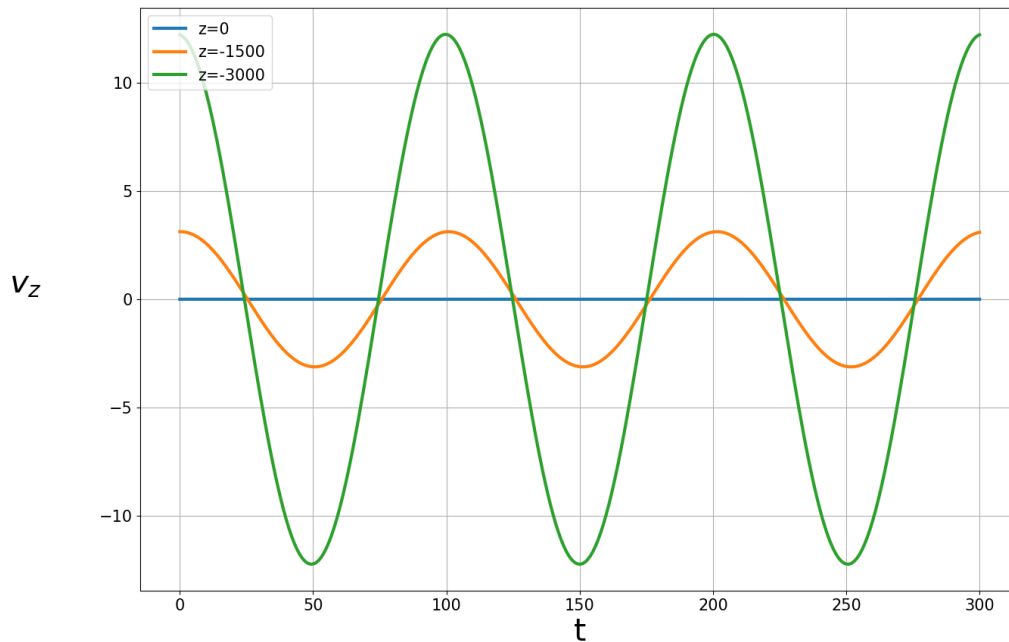
$$v_z^{(r)}(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^N A_n \sin \left[ \left( \frac{\pi r}{H} (z + H) \right) \right] e^{i(m_r x + n_r y - \sigma t)}.$$

Находим волновые числа и угловую частоту из дисперсионного уравнения:

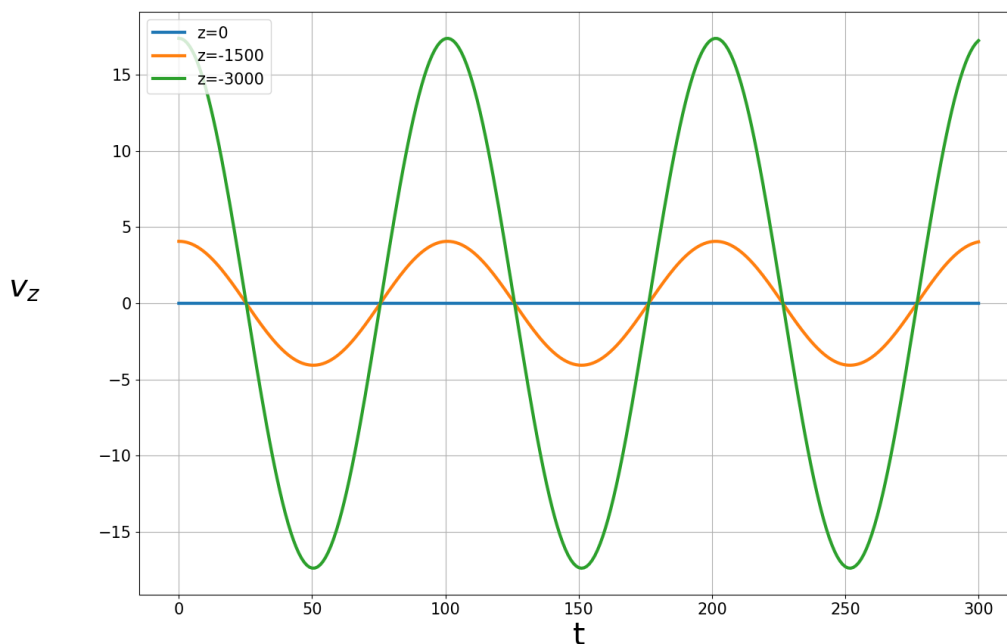
$$K = \sqrt{m_r^2 + n_r^2} = \pi r \sqrt{\frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{gk - \sigma^2}} \frac{1}{H}, \quad r \in N.$$

Принимая значение  $N$  за 100, получаем следующие результаты для  $v_z$ :

6.1.1.) Зависимость составляющей скорости  $v_z$  от времени  $t$  при  $Z = 0, -1500, -3000$ м. Длина волны  $\lambda = 1$ м.



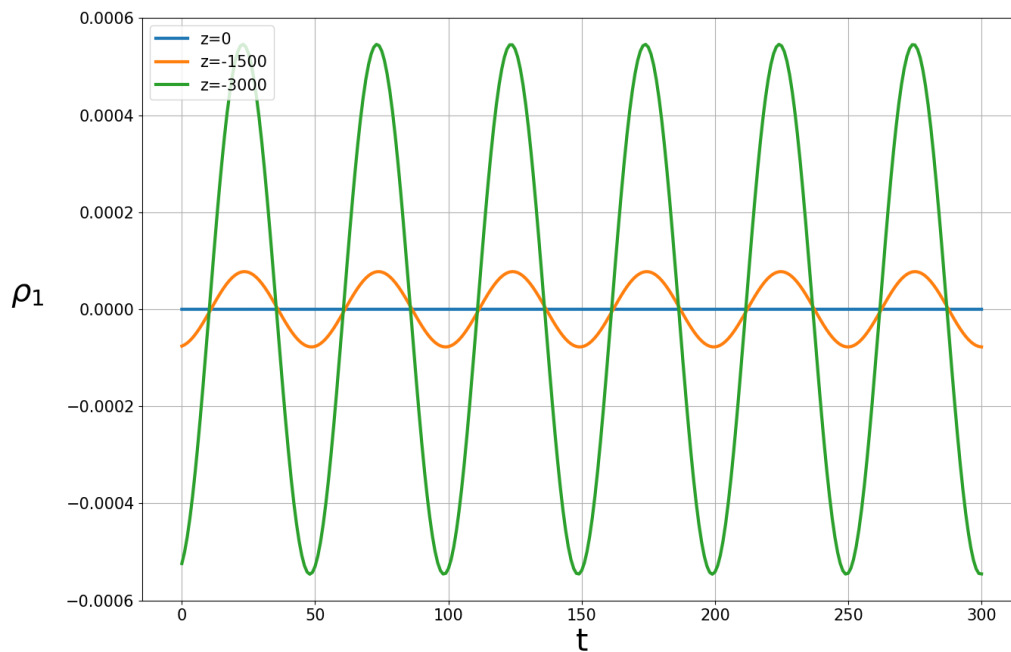
6.1.2.) Зависимость составляющей скорости  $v_z$  от времени  $t$  при  $Z = 0, -1500, -3000$ м. Длина волны  $\lambda = 200$ м.



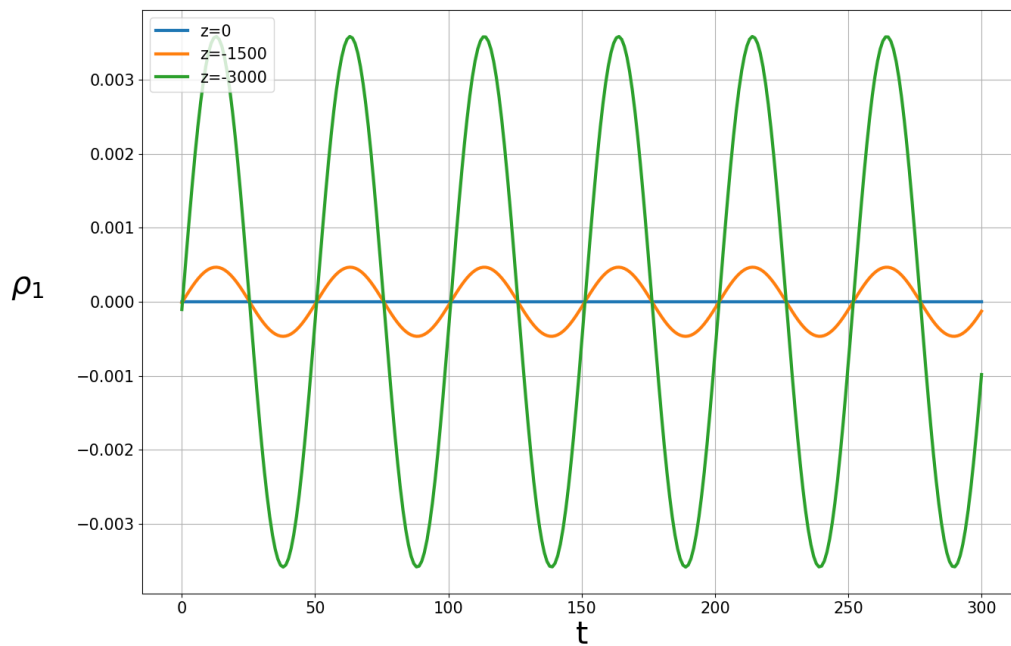
Для длины волны, большей 200м, мы получаем качественно аналогичные результаты, поэтому графики опущены. Из полученных графиков можно отметить следующее: на свободной поверхности ( $z = 0$ ) выполняется граничное условие, благодаря чему составляющая  $v_z = 0$ . С увеличением глубины скорость увеличивается, а затем затухает.

Результаты для  $\rho_1$ :

6.1.1.) Зависимость динамической добавки плотности  $\rho_1$  от времени  $t$  при  $Z = 0, -1500, -3000$ м. Длина волны  $\lambda = 1$ м.

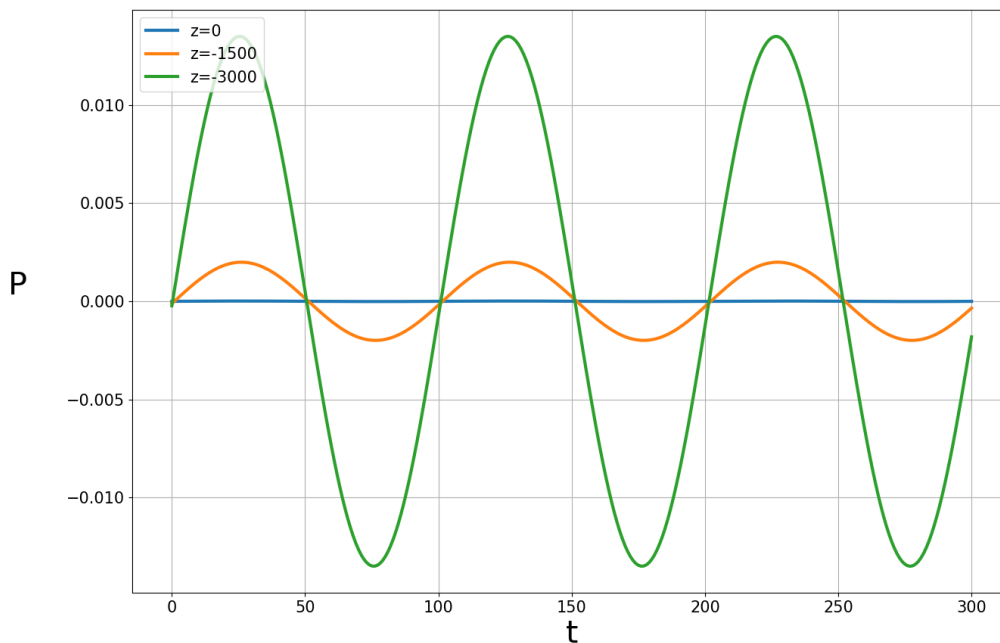


6.1.2.) Зависимость динамической добавки плотности  $\rho_1$  от времени  $t$  при  $Z = 0, -1500, -3000$ м. Длина волны  $\lambda = 200$ м.

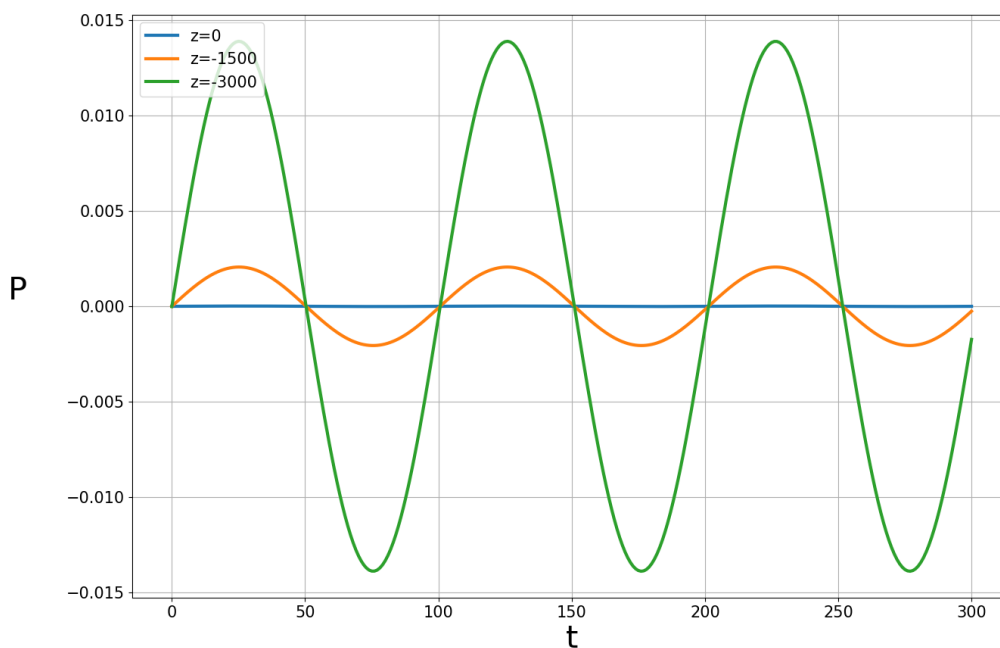


Результаты для  $\rho_1$ :

6.1.1.) Зависимость динамической добавки давления  $p_1$  от времени  $t$  при  $Z = 0, -1500, -3000$ м. Длина волны  $\lambda = 1$ м.



6.1.2.) Зависимость динамической добавки давления  $p_1$  от времени  $t$  при  $Z = 0, -1500, -3000$ м. Длина волны  $\lambda = 200$ м.

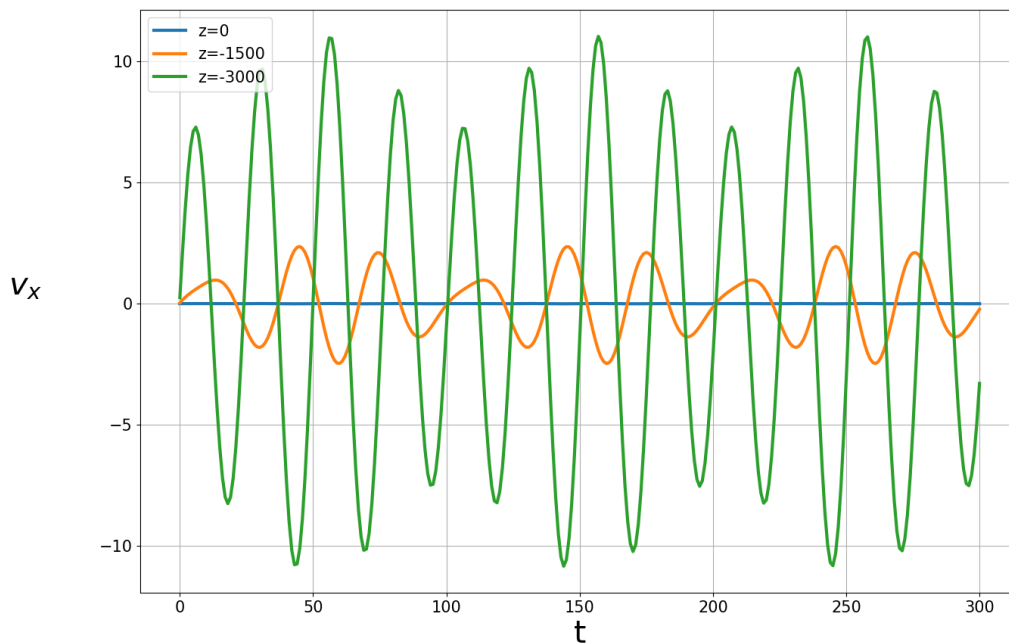




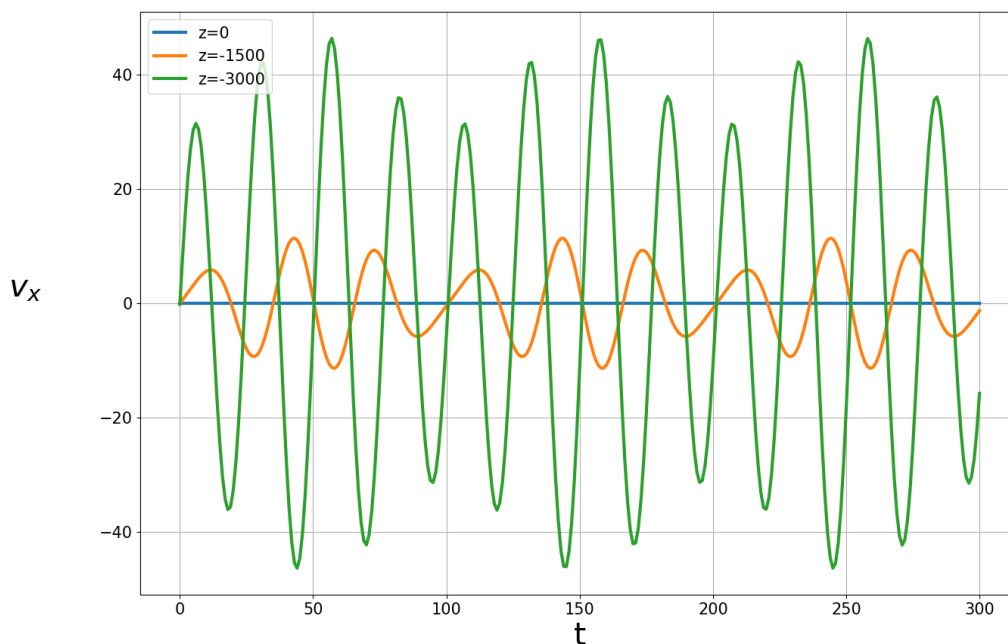
Как для  $\rho_1$  так и для  $p_1$  поведение аналогично вертикальной составляющей скорости  $v_z$ . С увеличением длины волны наблюдаются более существенные изменения динамических добавок.

Результаты для  $v_x$ :

6.1.1.) Зависимость составляющей скорости  $v_x$  от времени  $t$  при  $Z = 0, -1500, -3000$ м. Длина волны  $\lambda = 1$ м.



6.1.2.) Зависимость составляющей скорости  $v_x$  от времени  $t$  при  $Z = 0, -1500, -3000$ м. Длина волны  $\lambda = 200$ м.



На основе полученных результатов можно отметить два существенных отличия свободных волн от поверхностных:

1) Одному значению частоты  $\sigma$  у поверхностных волн соответствует только одна пара значений волновых чисел. В то же время у внутренних волн — счетное множество значений пар волновых чисел. Аналогично одной паре значений волновых чисел у поверхностных волн отвечает только одно значение частоты  $\sigma$ , а у внутренних волн — счетное множество частот.

2) Волновые возмущения поверхностных волн максимальны вблизи свободной поверхности ( $z = 0$ ) и монотонно затухают с удалением от неё, в то время как волновые возмущения внутренних волн максимальны в глубине жидкости.

3) Для поверхностных волн колебания горизонтальной со-

ставляющей скорости происходят в одной фазе на разных глубинах, в отличие от колебаний горизонтальных компонент скорости внутренних волн.

## **Заключение**

В данной работе построена математическая модель волновых движений стратифицированной вращающейся жидкости. Рассмотрены поверхностные и внутренние волны и проведены вычислительные эксперименты с использованием реальных данных, которые позволили визуально оценить влияние каждого из гидродинамических параметров на изменение динамики исследуемого процесса, а также получить весомые результаты. Полученные результаты могут быть использованы при реализации погружения и движения глубоководных аппаратов, при моделировании процессов распространения волн, при строительстве морских гидротехнических сооружений и проектировании морских буровых платформ для добычи углеводородов и других ресурсов глубоководных океанских недр.

## Список литературы

1. Юрнев А. П., Сахаров Б. Д., Сытин А. В. Аварии под водой // Изд. 2-е, перераб. и доп. - Л.: Судостроение. 1986г
2. Шулейкин В. В. Физика моря // Издание четвертое, Издательство «Наука», Москва, 1968г.
3. Краусс В. Внутренние волны. Л.: Гидрометеиздат, 1968. 270 с.
4. Холодова С. Е., Перегудин С. И. Моделирование и анализ течений и волн в жидких и сыпучих средах. - СПб.: Издательство Санкт-Петербургского университета, 2009г.
5. Перегудин С.И., Холодова С.Е. Волновые движения в жидкости с непрерывной стратификацией // Изв. Тульск. гос. ун-та. Сер.: Математика, механика, информатика. 2006. Е. 12. Вып. 2.
6. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука. 1977. 816 с
7. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. / пер. с англ. Л.: Гидрометеиздат, 1992. 272 с.
8. Перегудин С.И., Холодова С.Е. Волны во вращающейся стратифицированной жидкости. // Межвузовский сборник научных трудов. — Саранск: СВМО. 2000. С. 93-95
9. Kholodova S.E. Wave motion in a compressible stratified

rotating fluid // *Comput. Math. Math. Phys.* 2007. Vol. 47, N 12, P. 2014-2022.

10. Биркгоф Г. Гидродинамика. Методы. Факты. Подобие М.: Иностранная литература, 1963г.

11. Boussinesq J. Theorie de lintumescence liquide appelee onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire. // *Compt. rend. Acad. sci.* 1871. V. 72. P. 755 – 759.

12. Секерж-Зенькович Я.И. Трехмерные стоячие волны конечной амплитуды на поверхности тяжелой жидкости бесконечной глубины // *Тр. Морск. гидрофиз. ин-та АН СССР.* 1959. № 18. С. 3-39.

13. Габов С.А., Свешников А.Г. Задачи динамики стратифицированных жидкостей. М.: Наука, 1986. 288 с.

14. Черкесов Л.В., Иванов В.А., Хартиев С.М. Введение в гидродинамику и теорию волн.— С-Петербург: Гидрометеоиздат. 1992. 264 с.

15. Алешков Ю.З. Течение и волны в океане. СПб., 1996г.

16. Перегудин С. И. Волновые движения в жидких и сыпучих средах // Издательство Санкт-Петербургского государственного университета, 2004г.

17. Перегудин С.И., Холодова С.Е. Волновые движения во вращающейся непрерывно стратифицированной жидкости. //

Сборник тезисов межрегионального симпозиума 13.11-15.11.2000  
"Методы обнаружения краткосрочных предвестников землетря-  
сений и спорадических естественных и антропогенных выбро-  
сов в атмосферу (АЭС) С-Петербург, 2000. С. 39 – 40

18. Дж. Педлоски "Геофизическая гидродинамика. Том 1.  
Москва "Мир"1984г.

19. Пелиновский Е.Н. Гидродинамика волн цунами. Н. Нов-  
город, 1996. 252с.

20. Перегудин С.И., Холодова С.Е. Пространственные вол-  
новые движения в неоднородной жидкости. // Труды IV науч-  
ной конференции молодых ученых Мордовского гос. универси-  
тета, Саранск, апрель 1999 г. С. 23 – 35

21. Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике. Л.: Изд-  
во ЛГУ, 1978. 296 с.

22. П. А. Шабанов Научная графика в Python //  
Электронный учебник [https://github.com/whitehorn/  
Scientific\\_graphics\\_in\\_python](https://github.com/whitehorn/Scientific_graphics_in_python)