

Санкт-Петербургский Государственный Университет  
Математико-механический факультет

Бубнова Анна Викторовна  
ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

# Вероятностные динамические модели больших графов

Уровень образования: Специалитет  
Направление 01.05.01 "Фундаментальные математика и механика"  
Образовательная программа СМ.5007. "Фундаментальные математика и механика"  
Профиль: Теория вероятности и математическая статистика

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н., профессор М. А. Лифшиц

Рецензент:  
к.ф.-м.н. В. В. Высоцкий

Санкт-Петербург  
2019

Saint Petersburg State University  
Mathematics and Mechanics Faculty

Bubnova Anna  
GRADUATION THESIS

# Probabilistic dynamic models of massive graphs

Education level: Specialitet  
Specialty 01.05.01 "Fundamental Mathematics and Mechanics"  
Educational program SM.5007. "Fundamental Mathematics and Mechanics"  
Department: Probability Theory and Mathematical Statistics

Advisor:  
Doctor of Physics and Mathematics,  
Professor M. A. Lifshits

Reviewer:  
Candidate of Physics and Mathematics  
V. V. Vysotsky

Saint Petersburg  
2019

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Описание модели</b>	<b>4</b>
2.1	Моделирование . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Результаты</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Доказательства</b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>Заключение</b>	<b>23</b>
<b>6</b>	<b>Приложения</b>	<b>24</b>
6.1	Приложение А . . . . .	24
	<b>Список литературы</b>	<b>26</b>

# 1 Введение

В чем сложность изучения массивных динамических графов и сетей? Есть множество параметров и свойств, которые делают каждую сеть уникальной. Ориентированность, связность, длины путей, распределение степеней вершин, количество ребер, количество вершин, диаметр, инвариантность масштаба, коэффициенты кластеризации, наличие "треугольников", двудольность и т.д., и т.д. [1]

К сожалению, работать с реальным объектом бывает сложно, энергозатратно, долго или дорого. В таком случае на помощь могут прийти модели, которые можно описать в строгих математических терминах и в них же сформулировать ожидаемое поведение графа. А уже хорошие математические модели могут подсказать, какими свойствами обладает реальный объект.

Есть множество хорошо изученных моделей графов. Вот несколько из них:

## Модель $G(n, p)$

Зафиксируем количество вершин в графе. За это отвечает параметр  $n$ . С вероятностью  $p \in (0, 1)$  независимо для каждой пары вершин возникает ребро [2].

## Модель $G(n, |E|)$ или модель Эрдёша-Реньи.

Зафиксируем количество вершин и ребер в графе. За это отвечает параметры  $n$  и  $|E|$ . С равной вероятностью выбираем граф с данным числом вершин и ребер [2].

## Модель $\tilde{G}^n$ .

Первоначально у нас есть  $n$  вершин и нет ребер. В каждый момент времени  $t$ , берем  $G(n, |E|)$ , где  $|E| = t$  и говорим, что это "моментальный снимок" эволюции графа. Другими словами, на момент времени  $t$  наш граф находится в таком состоянии [2].

При всех своих достоинствах, эти модели не подходят, например, для моделирования графов со степенным законом распределения, т.к. ребра появляются независимо, а нам требуется корреляция [3].

Что такое степенной закон распределения?

При степенном распределении доля вершин степени  $d$  пропорциональна  $1/d^\alpha$  для некоторого фиксированного  $\alpha \geq 0$ . Существует множество реальных примеров сетей со степенным законом распределения: Всемирная сеть WWW [4, 5, 6, 7, 8, 9], сеть телефонных звонков [10, 11], цитирование в статьях [12], совместное употребление слов [13, 14], биологические обменные сети [15]. И все они представляют практический интерес.

Если граф ориентирован, параметры законов для входящих и исходящих степеней могут и не совпадать. Например, для узлов подсети университета Нотр-Дама (nd.edu) эти параметры равны 2.1 и 2.4, соответственно. А если рассматривать поисковую систему Altavista как граф, где вершины – это статические страницы в сети, а ребра – ссылки между этими страницами, можно обнаружить, что эти параметры – 2.1 и 2.7.

Как моделировать такие графы?

Например, некоторые графы типа "**мир тесен**" обладают данным свойством. Их основная идея в том, чтобы типичное расстояние между двумя произвольными вершинами было пропорционально логарифму от числа вершин. В качестве реализации этой идеи можно взять модель Уотса и Строгатса [16], модель Бармпутиса и Мюррея [17] или Монассона [18], Ньюэна и Уотса [19].

## Модель Уотса и Строгатса.

Первоначально у нас есть  $n$  вершин. Связываем каждую вершину со всеми соседями на расстоянии не более некоторого фиксированного  $k$ . Для каждого ребра с

некоторой вероятностью  $p$  один из концов заменяется на случайную вершину.

*Замечание.* В данной модели необходимо следить за тем, чтобы не появлялись петли и двойные ребра.

Возникают вопросы: если не использовать "близость" между вершинами и не ограничивать расстояние, как ещё можно моделировать такие графы? Как контролировать параметры? Какими дополнительными свойствами они обладают? Настоящая дипломная работа, в том числе, посвящена решению этих задач.

## 2 Описание модели

Будем исследовать следующую конструкцию [11], которую в оригинале называют моделью А.

Пусть  $d_{i,t}^{in}$  и  $d_{j,t}^{out}$  обозначают количество вершин с входящей степенью  $i$  и исходящей степенью  $j$  соответственно, а  $d_{i,j,t}^{joint}$  число вершин с входящей степенью  $i$  и исходящей степенью  $j$  в момент времени  $t$ .

В начальный момент времени есть только одна вершина с петлей, т.е.  $d_{1,1,1}^{joint} = 1$ ,  $d_{i,j,1}^{joint} = 0$  при  $i > 1$  или  $j > 1$ .

Обозначим за  $\delta_{u,t}^{in}$  и  $\delta_{u,t}^{out}$  количество исходящих и входящих ребер вершины  $u$  в момент времени  $t$ , а через  $\omega_{u,t}^{in}$  и  $\omega_{u,t}^{out}$  некоторый входящий и исходящий вес этой вершины в этот же момент времени, который мы определим далее.

Модель задается параметром  $\alpha \in (0, 1)$ . На каждом временном шаге с вероятностью  $1 - \alpha$  добавляется новая вершина, иначе с вероятностью  $\alpha$  добавляется случайное ребро между существующими вершинами. Заметим, что тогда ожидаемое количество ребер в графе  $\alpha t$ , а ожидаемое число вершин равно  $(1 - \alpha)t$ .

Если добавляется вершина, то она начинает с  $\omega_{u,t}^{in} = \omega_{u,t}^{out} = 1$ . Всякий раз, когда вершина является началом (концом) нового ребра, исходящий вес (входящий вес) увеличивается на 1. То есть  $\omega_{u,t}^{in} = 1 + \delta_{u,t}^{in}$  и  $\omega_{u,t}^{out} = 1 + \delta_{u,t}^{out}$ . Значит, общий входящий вес (исходящий вес) графа в модели А увеличивается на 1 за шаг. В момент времени  $t$ , как общий входящий вес, так и общий исходящий вес равны  $t$ . Если к существующим вершинам проводится ребро, то вероятность для вершины оказаться началом (концом) нового ребра пропорциональна текущему входящему (исходящему) весу. То есть  $u$  и  $v$  выбираются в качестве начала и конца ребра в момент времени  $t$  с вероятностями

$$\frac{\omega_{u,t}^{out}}{\sum_p \omega_{p,t}^{out}} = \frac{\omega_{u,t}^{out}}{t}, \quad \frac{\omega_{v,t}^{in}}{\sum_p \omega_{p,t}^{in}} = \frac{\omega_{v,t}^{in}}{t}.$$

Таким образом, учитывая, что начало и конец выбираются независимо, вероятность того, что новое ребро будет проведено к двум фиксированным вершинам  $u$  и  $v$ , равна

$$\alpha \frac{\omega_{u,t}^{out} \omega_{v,t}^{in}}{t^2} = \alpha \frac{(1 + \delta_{u,t}^{out})(1 + \delta_{v,t}^{in})}{t^2}.$$

### 2.1 Моделирование

Модель А представима в виде простого алгоритма, который позволяет получить матрицу смежности или список ребер графа. Сложнее, в нашем случае, выбрать структуру данных, которая позволит быстро и удобно хранить информацию о графе и совершать следующие операции: изменение веса и подсчет суммы. Это нужно для того, чтобы определить вершины к которым проводится ребро.

В данном случае, используется неявное декартово дерево, над которым можно реализовать нужные операции за  $O(\log_2 N)$ , где  $N$  количество вершин.

В качестве иллюстрации приведем здесь полученную реализацию для  $\alpha = 2/3$  (Рис. 1-2).

Ещё один плюс такой структуры данных в том, что программа легко модернизируется для более общих моделей [11], например, с другими начальными весами или разными параметрами для входящих и исходящих степеней.



Рис. 1:  $t = 200$  при  $\alpha = 2/3$ .



Рис. 2:  $t = 250$  при  $\alpha = 2/3$ .

### 3 Результаты

Первые предложения посвящены асимптотическому поведению математического ожидания наших случайных величин.

**Предложение 1** Пусть  $b_i = (1 - \alpha) \frac{(i-1)! \alpha^{i-1}}{\prod_{l=1}^i (1+l\alpha)} = \frac{(1-\alpha)(i-1)!}{\alpha \prod_{l=0}^{i-1} ((\frac{1}{\alpha}+1)+l)}$ . Тогда

$$E(d_{i,t}^{in}) = b_i t + c_{i,t},$$

где  $c_{i,t} = o(t)$ .

*Замечание.* Аналогичный результат получается и для  $d_{j,t}^{out}$ .

Пусть  $c_j = (1 - \alpha) \frac{(j-1)! \alpha^{j-1}}{\prod_{l=1}^j (1+l\alpha)} = \frac{(1-\alpha)(j-1)!}{\alpha \prod_{l=0}^{j-1} ((\frac{1}{\alpha}+1)+l)}$ . Тогда

$$E(d_{j,t}^{out}) = c_j t + c_{j,t},$$

где  $c_{j,t} = o(t)$ .

Возникает вопрос: можно ли получить более точную асимптотику для  $c_{i,t}$ ?

**Предложение 2** В обозначениях предыдущего предложения  $c_{i,t} = O(t^{-\alpha})$ .

**Лемма 3** С помощью рекуррентного соотношения зададим следующие величины

$$a_{1,1} = \frac{1-\alpha}{1+2\alpha}, a_{i,j} = \alpha \frac{(i-1)a_{i-1,j} + (j-1)a_{i,j-1}}{(1+\alpha(i+j))}.$$

Тогда  $E(d_{i,j,t}^{joint}) = a_{i,j}t + c_{i,j,t}$  и верны следующие утверждения  
(i)

$$a_{i,j} = \frac{(1-\alpha)(i+j-2)!}{\alpha \prod_{l=2}^{i+j} \left(\frac{1}{\alpha} + l\right)}.$$

(ii)

$$\begin{aligned} c_{1,1,t+1} &= \frac{\alpha(1-\alpha)}{(1+2\alpha)t} + \left(1 - \frac{2\alpha}{t} + \frac{\alpha}{t^2}\right) c_{1,1,t}, \\ c_{i,j,t} &= \alpha \frac{(i-1)}{t-1} c_{i-1,j,t-1} + \alpha \frac{(j-1)}{t-1} c_{i,j-1,t-1} + \alpha \frac{(i-1)(j-1)}{t-1} a_{i-1,j-1} + \\ &+ \alpha \frac{(i-1)(j-1)}{(t-1)^2} c_{i-1,j-1,t-1} + \alpha \frac{ij}{t-1} a_{i,j} + \left(1 - \alpha \frac{i}{t-1} - \alpha \frac{j}{t-1} + \alpha \frac{ij}{(t-1)^2}\right) c_{i,j,t-1}. \end{aligned}$$

(iii)  $|c_{i,j,t}| \leq 1$  при  $t \leq \max\{i, j\}$ .

*Замечание.* Используя представление по Гауссу гамма-функций [20, стр. 211-212] для  $\alpha \in (0, 1)$ , получим:

$$a_{i,j} \sim \frac{\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 2\right)}{(i+j-1)^{\frac{1}{\alpha}+2}}.$$

**Предложение 4** В обозначениях предыдущей леммы  $|c_{1,j,t}| \leq 1$  и, следовательно,  $c_{1,j,t} = o(t)$ .

*Замечание 1.* Аналогично, для  $c_{i,1,t}$  имеем:

в обозначениях предыдущей леммы  $|c_{i,1,t}| \leq 1$  и, следовательно,  $c_{i,1,t} = o(t)$ .

*Замечание 2.* Таким образом  $E(d_{1,j,t}^{joint}) = a_{1,j}t + c_{1,j,t}$  верно описывает асимптотическое поведение математического ожидания.

Рассмотрим появление петель в этой конструкции. Заметим, что не в каждом графе со степенным распределением они возможны. Например, что есть петля в социальном графе? А несколько таких? Очевидно, что для таких сетей потребуется другая модель или способ приходить к ней без потери степенного закона распределения. Уже с этой точки зрения интересно, как часто они возникают?

Мы предполагаем, что на данном шаге должно появиться ребро. Вероятность появления петли для вершины со степенями  $(i, j)$  в момент времени  $t$ :  $ij/t^2$ .

Всего таких вершин  $d_{i,j,t}^{joint}$  и можно просуммировать по парам  $(i, j)$ , чтобы получить вероятность появления петли:

$$\sum_{i,j} \frac{ij d_{i,j,t}^{joint}}{t^2}.$$



А если посмотреть на математическое ожидание, то получим следующее

$$\sum_{i,j} \frac{ijE(d_{i,j,t}^{joint})}{t^2} = \sum_{i,j} \frac{ij(a_{i,j}t + c_{i,j,t})}{t^2}.$$

Понятно, что вероятность ограничена и математическое ожидание существует. Не совсем ясно, как ведет себя сумма  $ijc_{i,j,t}$ , но "линейная" часть  $a_{i,j}$  определена и можно смотреть как ведет себя сумма  $ija_{i,j}$ .

**Предложение 5** Сумма ряда  $\sum_{i,j} ija_{i,j}$  сходится для  $\alpha < 1/2$  и расходится для  $\alpha \geq 1/2$ .

**Предложение 6** Обозначим для некоторого  $\alpha$   $X_t(\alpha) = X_t = \sum ijE(d_{i,j,t}^{joint})$  Тогда

(i)  $X_t \geq t$ .

(ii) Есть монотонное возрастание по  $\alpha$ , т.е.  $X_t(\alpha + \beta) \geq X_t(\alpha)$ .

(iii) При  $\alpha < 1/2$

$$X_t \leq At,$$

где  $A$  задается следующим образом:

$$t^* = \left\lfloor \frac{\alpha}{1-2\alpha} \right\rfloor + 1, A = \max \left( \frac{1-\alpha}{1-2\alpha - \frac{\alpha}{t^*}}, \max_{t=1, \dots, t^*-1} \frac{X_t}{t} \right).$$

А теперь продемонстрируем связь между появлением петель и отклонением  $E(d_{i,j,t}^{joint})$  от  $a_{i,j}t$ .

**Предложение 7** При  $\alpha < 1/2$  в обозначениях предыдущего предложения  $|c_{i,j,t}| \leq A/2$  и, следовательно,  $c_{i,j,t} = o(t)$ .

*Замечание.* Таким образом  $E(d_{i,j,t}^{joint}) = a_{i,j}t + c_{i,j,t}$  верно описывает асимптотическое поведение математического ожидания.

**Предложение 8** При  $\forall \alpha \in (0, 1)$  зададим рекуррентно следующие величины:

$$c_{1,j} = c_{i,1} = 1, c_{i,j} = \max \left\{ 1, \left( \frac{i-1}{i}c_{i-1,j} + \frac{j-1}{j}c_{i,j-1} + \frac{(i-1)(j-1)}{i}a_{i-1,j-1} + \frac{(i-1)(j-1)}{i^2}c_{i-1,j-1} + ja_{i,j} \right) \right\}.$$

Тогда  $|c_{i,j,t}| \leq c_{i,j}$  и, следовательно,  $c_{i,j,t} = o(t)$ .

*Замечание.* Таким образом  $E(d_{i,j,t}^{joint}) = a_{i,j}t + c_{i,j,t}$  верно описывает асимптотическое поведение математического ожидания.

Посчитаем для первых  $(i, j)$  при  $\alpha \geq 1/2$  значения  $c_{i,j}$  по этой рекуррентной формуле.

Код программы находится в разделе 6.1. Приведем здесь полученные иллюстрации и некоторые наблюдения.

(Рис. 3) Оценка вышла весьма грубой, т.ч.  $c_{10,10} > 10^4$ .

(Рис. 4) Можно сравнить оценки при разных  $\alpha$ . Программа позволяет вывести и больше линий, но, к сожалению, они наслаиваются.

Сформулируем основные теоремы, которые базируются на предыдущих результатах.

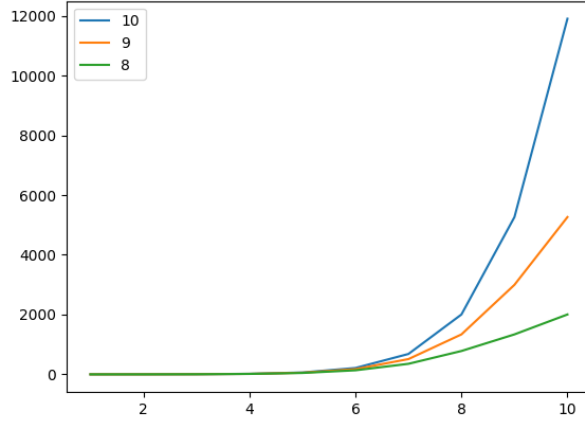


Рис. 3:  $\alpha = 0.5$  на графике изображены  $c_{10,j}$ ,  $c_{9,j}$  и  $c_{8,j}$ , соответственно.

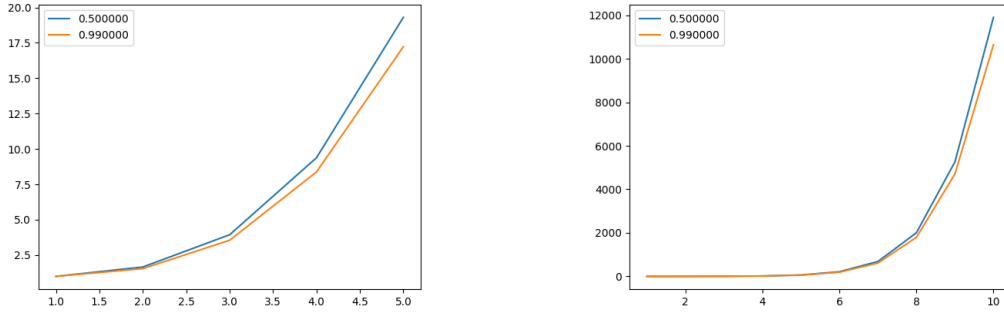


Рис. 4:  $c_{10,j}$  при  $\alpha = 0.5$  и  $0.99$ , соответственно. При увеличении  $\alpha$  оценка уменьшается, также виден быстрый рост.

**Теорема 9** При  $\alpha < 1/2$  для модели  $A$  распределение входящих и исходящих степеней следует соответствующему распределению степенного закона со степенью  $1 + 1/\alpha$ . Совместное распределение входящих и исходящих степеней следует распределению степенного закона со степенью  $2 + 1/\alpha$ . Точнее для  $\forall \lambda > 0$

$$Pr \left( |d_{i,j,t}^{joint} - a_{i,j}t| > \lambda\sqrt{t} + \frac{A}{2} \right) < 2e^{-\lambda^2/8},$$

$$Pr(|d_{i,t}^{in} - b_i t| > \lambda\sqrt{t} + 1) < 2e^{-\lambda^2/2},$$

$$Pr(|d_{j,t}^{out} - c_j t| > \lambda\sqrt{t} + 1) < 2e^{-\lambda^2/2}.$$

Здесь  $a_{i,j}, b_i, c_j, A$  соответственно

$$a_{i,j} = (1 - \alpha) \frac{(i + j - 2)! \alpha^{i+j-2}}{\prod_{l=2}^{i+j} (1 + l\alpha)} = \frac{(\frac{1}{\alpha} - 1) \Gamma(\frac{1}{\alpha} + 2)}{(i + j)^{\frac{1}{\alpha} + 2}} + o_{i+j}(1),$$

$$b_i = (1 - \alpha) \frac{(i - 1)! \alpha^{i-1}}{\prod_{l=1}^i (1 + l\alpha)} = \frac{(\frac{1}{\alpha} - 1) \Gamma(\frac{1}{\alpha} + 1)}{i^{\frac{1}{\alpha} + 1}} + o_i(1),$$

$$c_j = (1 - \alpha) \frac{(j - 1)! \alpha^{j-1}}{\prod_{l=1}^j (1 + l\alpha)} = \frac{(\frac{1}{\alpha} - 1) \Gamma(\frac{1}{\alpha} + 1)}{j^{\frac{1}{\alpha} + 1}} + o_j(1),$$

$$A = \max \left( \frac{1 - \alpha}{1 - 2\alpha - \frac{\alpha}{t^*}}, \max_{t=1, \dots, t^*-1} \frac{X_t}{t} \right), \text{ где } t^* = \left\lfloor \frac{\alpha}{1 - 2\alpha} \right\rfloor + 1.$$

Для всех  $i, j, t$  ожидаемые значения  $E(d_{i,j,t}^{joint})$ ,  $E(d_{i,t}^{in})$  и  $E(d_{j,t}^{out})$  удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} |E(d_{i,j,t}^{joint}) - a_{i,j}t| &< \frac{A}{2}, \\ |E(d_{i,t}^{in}) - b_it| &< 1, \\ |E(d_{j,t}^{out}) - c_jt| &< 1. \end{aligned}$$

**Теорема 10** При  $\alpha \geq 1/2$  для модели  $A$  распределение входящих и исходящих степеней следует соответствующему распределению степенного закона со степенью  $1 + 1/\alpha$ . Совместное распределение входящих и исходящих степеней следует распределению степенного закона со степенью  $2 + 1/\alpha$ . Точнее для  $\forall \lambda > 0$

$$\begin{aligned} Pr \left( |d_{i,j,t}^{joint} - a_{i,j}t| > \lambda\sqrt{t} + c_{i,j} \right) &< 2e^{-\lambda^2/8}, \\ Pr(|d_{i,t}^{in} - b_it| > \lambda\sqrt{t} + 1) &< 2e^{-\lambda^2/2}, \\ Pr(|d_{j,t}^{out} - c_jt| > \lambda\sqrt{t} + 1) &< 2e^{-\lambda^2/2}. \end{aligned}$$

Здесь  $a_{i,j}, b_i, c_j, c_{i,j}$  соответственно

$$a_{i,j} = (1 - \alpha) \frac{(i + j - 2)! \alpha^{i+j-2}}{\prod_{l=2}^{i+j} (1 + l\alpha)} = \frac{(\frac{1}{\alpha} - 1) \Gamma(\frac{1}{\alpha} + 2)}{(i + j)^{\frac{1}{\alpha} + 2}} + o_{i+j}(1),$$

$$b_i = (1 - \alpha) \frac{(i - 1)! \alpha^{i-1}}{\prod_{l=1}^i (1 + l\alpha)} = \frac{(\frac{1}{\alpha} - 1) \Gamma(\frac{1}{\alpha} + 1)}{i^{\frac{1}{\alpha} + 1}} + o_i(1),$$

$$c_j = (1 - \alpha) \frac{(j - 1)! \alpha^{j-1}}{\prod_{l=1}^j (1 + l\alpha)} = \frac{(\frac{1}{\alpha} - 1) \Gamma(\frac{1}{\alpha} + 1)}{j^{\frac{1}{\alpha} + 1}} + o_j(1),$$

$$c_{i,j} = \max \left\{ 1, \left( \frac{i-1}{i} c_{i-1,j} + \frac{j-1}{i} c_{i,j-1} + \frac{(i-1)(j-1)}{i} a_{i-1,j-1} + \frac{(i-1)(j-1)}{i^2} c_{i-1,j-1} + j a_{i,j} \right) \right\}.$$

Для всех  $i, j, t$  ожидаемые значения  $E(d_{i,j,t}^{joint})$ ,  $E(d_{i,t}^{in})$  и  $E(d_{j,t}^{out})$  удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} |E(d_{i,j,t}^{joint}) - a_{i,j}t| &< c_{i,j}, \\ |E(d_{i,t}^{in}) - b_it| &< 1, \\ |E(d_{j,t}^{out}) - c_jt| &< 1. \end{aligned}$$

Можно использовать эту модель для неориентированных графов, игнорируя направление ребер, но для этого нужно описать поведение для  $\sum_{i+j=k} d_{i,j,t}^{joint}$ .

**Теорема 11** При  $\alpha < 1/2$  для модели  $A$  распределение степеней следует соответствующему распределению степенного закона со степенью  $1 + 1/\alpha$ . Точнее для  $\forall \lambda > 0$

$$Pr \left( \left| \sum_{i+j=k} d_{i,j,t}^{joint} - a_k t \right| > \lambda\sqrt{t} + \frac{(k-1)A}{2} \right) < 2e^{-\lambda^2/8}.$$

Здесь  $a_k, A$  соответственно

$$a_k = (1 - \alpha) \frac{(k-1)! \alpha^{k-2}}{\prod_{l=2}^k (1 + l\alpha)} = \frac{(\frac{1}{\alpha} - 1) (\frac{1}{\alpha} + 1) \Gamma(\frac{1}{\alpha} + 1)}{k^{1 + \frac{1}{\alpha}}} + o_k(1),$$

$$A = \max \left( \frac{1 - \alpha}{1 - 2\alpha - \frac{\alpha}{t^*}}, \max_{t=1, \dots, t^*-1} \frac{X_t}{t} \right), \text{ где } t^* = \left\lfloor \frac{\alpha}{1 - 2\alpha} \right\rfloor + 1.$$

Для всех  $k, t$ :

$$\left| \sum_{i+j=k} E(d_{i,j,t}^{joint}) - a_k t \right| < \frac{(k-1)A}{2}.$$

**Теорема 12** При  $\alpha \geq 1/2$  для модели  $A$  распределение степеней следует соответствующему распределению степенного закона со степенью  $1 + 1/\alpha$ . Точнее для  $\forall \lambda > 0$

$$Pr \left( \left| \sum_{i+j=k} d_{i,j,t}^{joint} - a_k t \right| > \lambda \sqrt{t} + \sum_{i+j=k} c_{i,j} \right) < 2e^{-\lambda^2/8}.$$

Здесь  $a_k, c_{i,j}$  соответственно

$$a_k = (1 - \alpha) \frac{(k-1)! \alpha^{k-2}}{\prod_{l=2}^k (1 + l\alpha)} = \frac{(\frac{1}{\alpha} - 1) (\frac{1}{\alpha} + 1) \Gamma(\frac{1}{\alpha} + 1)}{k^{1 + \frac{1}{\alpha}}} + o_k(1),$$

$$c_{i,j} = \max \left\{ 1, \left( \frac{i-1}{i} c_{i-1,j} + \frac{j-1}{i} c_{i,j-1} + \frac{(i-1)(j-1)}{i} a_{i-1,j-1} + \frac{(i-1)(j-1)}{i^2} c_{i-1,j-1} + j a_{i,j} \right) \right\}.$$

Для всех  $k, t$ :

$$\left| \sum_{i+j=k} E(d_{i,j,t}^{joint}) - a_k t \right| < \sum_{i+j=k} c_{i,j}.$$

## 4 Доказательства

Для наших случайных величин естественнее всего взять в качестве элемента фильтрации  $N_t = \sigma(d_{i,j,t}^{joint})$  сигма-алгебру порожденную распределениями степеней в момент времени  $t$ .

**Доказательство предложения 1.**

Изначально

$$d_{1,t}^{in} = 1, \quad d_{i,t}^{in} = 0 \text{ при } i > 1.$$

При  $t \geq 1$ , получим

$$d_{1,t+1}^{in} = \begin{cases} d_{1,t}^{in} + 1 & \text{с вероятностью } 1 - \alpha \\ d_{1,t}^{in} - 1 & \text{с вероятностью } \frac{\alpha d_{1,t}^{in}}{t} \\ d_{1,t}^{in} & \text{иначе} \end{cases}$$

Таким образом

$$E(d_{1,t+1}^{in} | N_t) = (1 - \alpha) + \left(1 - \frac{\alpha}{t}\right) d_{1,t}^{in}.$$

Тогда

$$E(d_{1,t+1}^{in}) = (1 - \alpha) + \left(1 - \frac{\alpha}{t}\right) E(d_{1,t}^{in}).$$

Для  $i > 1$

$$d_{i,t+1}^{in} = \begin{cases} d_{i,t}^{in} + 1 & \text{с вероятностью } \frac{\alpha(i-1)d_{i-1,t}^{in}}{t} \\ d_{i,t}^{in} - 1 & \text{с вероятностью } \frac{\alpha i d_{i,t}^{in}}{t} \\ d_{i,t}^{in} & \text{иначе} \end{cases}$$

$$E(d_{i,t+1}^{in} | N_t) = \alpha \frac{(i-1)}{t} d_{i-1,t}^{in} + \left(1 - \alpha \frac{i}{t}\right) d_{i,t}^{in}.$$

Значит

$$E(d_{i,t+1}^{in}) = \alpha \frac{(i-1)}{t} E(d_{i-1,t}^{in}) + \left(1 - \alpha \frac{i}{t}\right) E(d_{i,t}^{in}).$$

Сначала для  $i = 1$

$$b_1(t+1) + c_{1,t+1} = (1 - \alpha) + \left(1 - \frac{\alpha}{t}\right) (b_1 t + c_{1,t}) = (1 - \alpha) + b_1 t - \alpha b_1 + \left(1 - \frac{\alpha}{t}\right) c_{1,t} \Rightarrow$$

$$c_{1,t+1} = (1 - \alpha) - (1 + \alpha)b_1 + \left(1 - \frac{\alpha}{t}\right) c_{1,t}.$$

Перепишем рекуррентную формулу для  $c_{1,t+1}$

$$c_{1,t+1} = \left(1 - \frac{\alpha}{t}\right) c_{1,t} \Rightarrow c_{1,t} = \frac{2\alpha}{1 + \alpha} \prod_{l=1}^{t-1} \left(1 - \frac{\alpha}{l}\right) = \frac{2\alpha}{(1 + \alpha)(t-1)!} \prod_{l=1}^{t-1} (l - \alpha).$$

Ясно, что  $|c_{1,t}| \leq 1$ .

Используя представление по Гауссу гамма-функций:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! n^z}{z(z+1)(z+2) \dots (z+n-1)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}.$$

При  $\alpha \neq 0, 1$ , получим:

$$c_{1,t} \sim c_{1,1} \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)(-\alpha)}.$$

Таким образом  $c_{1,t} = o(t)$  и  $b_1$  выбрано верно.

Теперь для  $i > 1$

$$\begin{aligned} b_i(t+1) + c_{i,t+1} &= \alpha \frac{(i-1)}{t} (b_{i-1}t + c_{i-1,t}) + \left(1 - \alpha \frac{i}{t}\right) (b_it + c_{i,t}) \\ &= \alpha(i-1)b_{i-1} + \alpha \frac{(i-1)}{t} c_{i-1,t} + b_it - \alpha i b_i + \left(1 - \alpha \frac{i}{t}\right) c_{i,t} \Rightarrow \\ c_{i,t+1} &= (\alpha(i-1)b_{i-1} - (1 + \alpha i)b_i) + \alpha \frac{(i-1)}{t} c_{i-1,t} + \left(1 - \alpha \frac{i}{t}\right) c_{i,t}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$b_i = \frac{\alpha(i-1)}{1 + \alpha i} b_{i-1} \Rightarrow c_{i,t+1} = \alpha \frac{(i-1)}{t} c_{i-1,t} + \left(1 - \alpha \frac{i}{t}\right) c_{i,t}.$$

Ясно, что  $b_i \leq 1$ , т.к.  $b_1 \leq 1$ .

Используя представление по Гауссу гамма-функций:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)}, z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}.$$

При  $\alpha \neq 0$ , получим:

$$b_i \sim \frac{(1-\alpha)\Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)}{\alpha i^{\frac{1}{\alpha} + 1}} = \frac{\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)}{i^{\frac{1}{\alpha} + 1}} = \frac{\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)}{i^{2 + \frac{1}{\Delta}}}, \text{ где } \Delta = \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

Применим в дальнейшем следующее "индукционное" рассуждение: пусть для  $b_{i-1}$   $c_{i-1,t} = o(t)$  и есть оценка  $|c_{i-1,t}| \leq 1$  для  $\forall t$ . Тогда для  $b_i$  полученного по формуле выше  $c_{i,t} = o(t)$  и также верна эта оценка.

Для того чтобы показать это воспользуемся индукцией и докажем, что  $|c_{i,t+1}| \leq 1$ .

Для  $t \leq i-1$ :

за такое количество шагов вершина с входящей степенью  $i$  появится не может, т.ч.

$$c_{i,t} = 0 - b_it \Rightarrow |c_{i,t}| \leq (i-1)b_i,$$

$$b_1 = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \leq 1,$$

$$ib_i = \frac{\alpha i}{(1+\alpha i)} \cdot (i-1)b_{i-1} \Rightarrow$$

$$ib_i \leq (i-1)b_{i-1} \leq \dots \leq b_1 \leq 1 \Rightarrow |c_{i,t}| \leq 1.$$

При  $t = i$ :

$$E(d_{i,i}^{in}) = \alpha \frac{i-1}{i-1} E(d_{i-1,i-1}^{in}) + \left(1 - \alpha \frac{i}{i-1}\right) E(d_{i,i-1}^{in}) = \alpha E(d_{i-1,i-1}^{in}) \Rightarrow$$

$$E(d_{i,i}^{in}) = \alpha^{i-1} \Rightarrow c_{i,i} = \alpha^{i-1} - ib_i \Rightarrow |c_{i,i}| \leq 1.$$

Индукционный переход: пусть для  $t \geq i$  верно. Тогда

$$\begin{aligned} 0 \leq \left(1 - \alpha \frac{i}{t}\right) &\Rightarrow |c_{i,t+1}| \leq \alpha \frac{(i-1)}{t} |c_{i-1,t}| + \left(1 - \alpha \frac{i}{t}\right) |c_{i,t}| \\ &\leq \alpha \frac{(i-1)}{t} + \left(1 - \alpha \frac{i}{t}\right) = 1 - \frac{\alpha}{t} \leq 1. \end{aligned}$$

Индукционный переход завершен.

Таким образом  $c_{i,t} = o(t)$ ,  $b_i$  выбрано верно и выполняется оценка.

Аналогичный результат получается и для  $d_{i,t}^{out}$ .

**Доказательство предложения 2.**

$$c_{i,t+1} = \alpha \frac{(i-1)}{t} c_{i-1,t} + \left(1 - \alpha \frac{i}{t}\right) c_{i,t}$$

Докажем, что  $c_{i,t} = O(t^{-\alpha})$ .

Ранее было доказано, что

$$c_{1,t} \sim c_{1,1} \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)(-\alpha)}, b_i \sim \frac{(1-\alpha)\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)}{\alpha i^{\frac{1}{\alpha}+1}} \Rightarrow b_i i \sim \frac{(1-\alpha)\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)}{\alpha i^{\frac{1}{\alpha}-\alpha}} i^{-\alpha}.$$

Значит существуют  $B, C > 0$ :

$$|c_{1,t}| \leq Bt^{-\alpha}, b_i i \leq Ci^{-\alpha} \forall i, t \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим  $i > 1$ . Для  $t \leq i-1$ :

$$c_{i,t} = -b_i t \Rightarrow |c_{i,t}| t^\alpha = b_i t^{1+\alpha} \leq b_i i^{1+\alpha} \leq C \Rightarrow |c_{i,t}| \leq Ct^{-\alpha}.$$

Рассмотрим  $t = i$ , в каком случае  $(1 - \alpha \frac{i}{i-1}) < 0$ ?

$$\left(1 - \alpha \frac{i}{i-1}\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{i-1}{i} < \alpha \Leftrightarrow 1 - \alpha < \frac{1}{i} \Leftrightarrow i < \frac{1}{1-\alpha},$$

$$c_{i,i} = \alpha^{i-1} - b_i i, \text{ но поскольку знак } b_i \text{ нам известен } \Rightarrow -b_i i \leq c_{i,i} \leq \alpha^{i-1}.$$

При  $i < \frac{1}{1-\alpha}$

$$\alpha^{i-1} i^\alpha < \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}-1} \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^\alpha = D \Rightarrow$$

$$|c_{i,i}| \leq \max\{C, D\} i^{-\alpha}.$$

Рассмотрим следующую вспомогательную функцию:

$$f(x) = \left(1 - \frac{\alpha}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{x}\right)^\alpha,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\alpha}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{x}\right)^\alpha &= 1, f'(x) = \frac{\alpha}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^\alpha - \frac{\alpha}{x^2} \left(1 - \frac{\alpha}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} \\ &= \frac{\alpha(1+\alpha)}{x^3} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} > 0 \text{ при } x > 0 \Rightarrow \left(1 - \frac{\alpha}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{x}\right)^\alpha \leq 1. \end{aligned}$$

Обозначим  $A = \max\{B, C, D\}$ .

Если  $(1 - \alpha \frac{i}{i-1}) \geq 0$ , то т.к.

$$\begin{aligned} c_{i,i} &= \alpha \frac{(i-1)}{i-1} c_{i-1,i-1} + \left(1 - \alpha \frac{i}{i-1}\right) c_{i,i-1} \Rightarrow |c_{i,i}| \leq \left(\alpha + 1 - \alpha \frac{i}{i-1}\right) A(i-1)^{-\alpha} \\ &= A \left(1 - \frac{\alpha}{i-1}\right) (i-1)^{-\alpha} = A \left(1 - \frac{\alpha}{i-1}\right) \left(1 + \frac{1}{i-1}\right)^\alpha i^{-\alpha} = Af(i-1)i^{-\alpha} \leq Ai^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Используем следующее "индукционное" рассуждение: пусть  $t \geq i$  и  $|c_{i-1,t}| \leq At^{-\alpha}$ ,  $|c_{i,t}| \leq At^{-\alpha}$ . Тогда

$$c_{i,t+1} = \alpha \frac{(i-1)}{t} c_{i-1,t} + \left(1 - \alpha \frac{i}{t}\right) c_{i,t},$$

$$0 \leq \left(1 - \alpha \frac{i}{t}\right) \Rightarrow |c_{i,t+1}| \leq \alpha \frac{(i-1)}{t} |c_{i-1,t}| + \left(1 - \alpha \frac{i}{t}\right) |c_{i,t}|$$

$$\leq A \left(1 - \frac{\alpha}{t}\right) t^{-\alpha} = A \left(1 - \frac{\alpha}{t}\right) \left(1 + \frac{1}{t}\right)^\alpha (t+1)^{-\alpha} = Af(t)(t+1)^{-\alpha} \leq A(t+1)^{-\alpha}.$$

Переход доказан. Таким образом  $|c_{i,t}| \leq At^{-\alpha}$ , т.е.  $c_{i,t} = O(t^{-\alpha})$ .

### Доказательство леммы 3.

Изначально

$$d_{1,1,1}^{joint} = 1, \quad d_{i,j,1}^{joint} = 0 \text{ при } i > 1 \text{ или } j > 1.$$

При  $t \geq 1$ , получим

$$d_{1,1,t+1}^{joint} = \begin{cases} d_{1,1,t}^{joint} + 1 & \text{с вероятностью } 1 - \alpha \\ d_{1,1,t}^{joint} - 1 & \text{с вероятностью } \alpha \left(2 \frac{d_{1,1,t}^{joint}}{t} \left(1 - \frac{d_{1,1,t}^{joint}}{t}\right) + \frac{d_{1,1,t}^{joint}}{t^2}\right) \\ d_{1,1,t}^{joint} - 2 & \text{с вероятностью } \alpha \left(\left(\frac{d_{1,1,t}^{joint}}{t}\right)^2 - \frac{d_{1,1,t}^{joint}}{t^2}\right) \\ d_{1,1,t}^{joint} & \text{иначе} \end{cases}$$

Таким образом

$$E(d_{1,1,t+1}^{joint} | N_t) = \left(1 - \frac{2\alpha}{t} + \frac{\alpha}{t^2}\right) d_{1,1,t}^{joint} + (1 - \alpha).$$

Тогда

$$E(d_{1,1,t+1}^{joint}) = \left(1 - \frac{2\alpha}{t} + \frac{\alpha}{t^2}\right) E(d_{1,1,t}^{joint}) + (1 - \alpha).$$



Для  $(i, j) \neq (1, 1)$

$$d_{i,j,t+1}^{joint} = \begin{cases} d_{i,j,t}^{joint} + 2 & \text{с вероятностью } \alpha \frac{(i-1)d_{i-1,j,t}^{joint}}{t} \frac{(j-1)d_{i,j-1,t}^{joint}}{t} \\ d_{i,j,t}^{joint} + 1 & \text{с вероятностью } \alpha \frac{(i-1)d_{i-1,j,t}^{joint}}{t} \left(1 - \frac{(j-1)d_{i,j-1,t}^{joint}}{t}\right) + \\ & + \alpha \left(1 - \frac{(i-1)d_{i-1,j,t}^{joint}}{t}\right) \frac{(j-1)d_{i,j-1,t}^{joint}}{t} + \alpha \frac{(i-1)(j-1)d_{i-1,j-1,t}^{joint}}{t^2} \\ d_{i,j,t}^{joint} - 1 & \text{с вероятностью } \alpha \frac{id_{i,j,t}^{joint}}{t} \left(1 - \frac{jd_{i,j,t}^{joint}}{t}\right) + \\ & + \alpha \left(1 - \frac{id_{i,j,t}^{joint}}{t}\right) \frac{jd_{i,j,t}^{joint}}{t} + \alpha \frac{ij d_{i,j,t}^{joint}}{t^2} \\ d_{i,j,t}^{joint} - 2 & \text{с вероятностью } \alpha \frac{ij(d_{i,j,t}^{joint})^2}{t^2} - \alpha \frac{ij d_{i,j,t}^{joint}}{t^2} \\ d_{i,j,t}^{joint} & \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда

$$E(d_{i,j,t+1}^{joint} | N_t) = \alpha \frac{(i-1)}{t} d_{i-1,j,t}^{joint} + \alpha \frac{(j-1)}{t} d_{i,j-1,t}^{joint} + \alpha \frac{(i-1)(j-1)}{t^2} d_{i-1,j-1,t}^{joint} + \\ + \left(1 - \alpha \frac{i}{t} - \alpha \frac{j}{t} + \alpha \frac{ij}{t^2}\right) d_{i,j,t}^{joint}.$$

Значит

$$E(d_{i,j,t+1}^{joint}) = \alpha \frac{(i-1)}{t} E(d_{i-1,j,t}^{joint}) + \alpha \frac{(j-1)}{t} E(d_{i,j-1,t}^{joint}) + \alpha \frac{(i-1)(j-1)}{t^2} E(d_{i-1,j-1,t}^{joint}) + \\ + \left(1 - \alpha \frac{i}{t} - \alpha \frac{j}{t} + \alpha \frac{ij}{t^2}\right) E(d_{i,j,t}^{joint}).$$

(i) Возьмем

$$a_{i,j} = \alpha \frac{(i-1)a_{i-1,j} + (j-1)a_{i,j-1}}{(1 + \alpha(i+j))} \Rightarrow a_{i,j} = (1 - \alpha) \frac{(i+j-2)! \alpha^{i+j-2}}{\prod_{l=2}^{i+j} (1 + l\alpha)} \\ = \frac{(1 - \alpha)(i+j-2)!}{\alpha \prod_{l=2}^{i+j} \left(\frac{1}{\alpha} + l\right)}.$$

Используя представление по Гауссу гамма-функций:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! n^z}{z(z+1)(z+2) \dots (z+n-1)}, z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}.$$

Для  $\alpha \in (0, 1)$ , получим:

$$a_{i,j} \sim \frac{\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 2\right)}{(i+j-1)^{\frac{1}{\alpha}+2}}.$$

(ii)

$$a_{1,1} = \frac{1 - \alpha}{1 + 2\alpha} \Rightarrow c_{1,1} = \frac{3\alpha}{1 + 2\alpha} \leq 1.$$

$$\begin{aligned}
a_{1,1}(t+1)+c_{1,1,t+1} &= (1-\alpha)+\left(1-\frac{2\alpha}{t}+\frac{\alpha}{t^2}\right)(a_{1,1}t+c_{1,1,t}) = (1-\alpha)+a_{1,1}t-2\alpha a_{1,1}+a_{1,1}\frac{\alpha}{t}+ \\
&\quad +\left(1-\frac{2\alpha}{t}+\frac{\alpha}{t^2}\right)c_{1,1,t} \Rightarrow \\
c_{1,1,t+1} &= (1-\alpha)-(1+2\alpha)a_{1,1}+a_{1,1}\frac{\alpha}{t}+\left(1-\frac{2\alpha}{t}+\frac{\alpha}{t^2}\right)c_{1,1,t}.
\end{aligned}$$

Перепишем рекуррентную формулу для  $c_{1,1,t+1}$

$$c_{1,1,t+1} = \frac{\alpha(1-\alpha)}{(1+2\alpha)t} + \left(1 - \frac{2\alpha}{t} + \frac{\alpha}{t^2}\right) c_{1,1,t}.$$

Теперь для  $(i, j) \neq (1, 1)$

$$\begin{aligned}
a_{i,j}(t+1)+c_{i,j,t+1} &= \alpha\frac{(i-1)}{t}(a_{i-1,j}t+c_{i-1,j,t})+\alpha\frac{(j-1)}{t}(a_{i,j-1}t+c_{i,j-1,t})+ \\
&+ \alpha\frac{(i-1)(j-1)}{t^2}(a_{i-1,j-1}t+c_{i-1,j-1,t})+\left(1-\alpha\frac{i}{t}-\alpha\frac{j}{t}+\alpha\frac{ij}{t^2}\right)(a_{i,j}t+c_{i,j,t}) \Rightarrow \\
c_{i,j,t+1} &= [\alpha(i-1)a_{i-1,j}+\alpha(j-1)a_{i,j-1}-(1+\alpha i+\alpha j)a_{i,j}]+\alpha\frac{(i-1)}{t}c_{i-1,j,t}+ \\
&+ \alpha\frac{(j-1)}{t}c_{i,j-1,t}+\alpha\frac{(i-1)(j-1)}{t^2}(a_{i-1,j-1}t+c_{i-1,j-1,t})+\alpha\frac{ij}{t}a_{i,j}+ \\
&\quad +\left(1-\alpha\frac{i}{t}-\alpha\frac{j}{t}+\alpha\frac{ij}{t^2}\right)c_{i,j,t}.
\end{aligned}$$

Перепишем рекуррентную формулу для  $c_{i,j,t+1}$ :

$$\begin{aligned}
c_{i,j,t+1} &= \alpha\frac{(i-1)}{t}c_{i-1,j,t}+\alpha\frac{(j-1)}{t}c_{i,j-1,t}+\alpha\frac{(i-1)(j-1)}{t^2}(a_{i-1,j-1}t+c_{i-1,j-1,t})+ \\
&\quad +\alpha\frac{ij}{t}a_{i,j}+\left(1-\alpha\frac{i}{t}-\alpha\frac{j}{t}+\alpha\frac{ij}{t^2}\right)c_{i,j,t}.
\end{aligned}$$

(iii) Покажем, что на начальных этапах  $|c_{i,j,t}| \leq 1$ .

Заметим, что

$$1 - \frac{2\alpha}{t} + \frac{\alpha}{t^2} > \left(1 - \frac{\alpha}{t}\right)^2 \geq 0 \text{ при } \alpha \in (0, 1).$$

Докажем по индукции, что  $|c_{1,1,t+1}| \leq 1$ . База:  $c_{1,1} = \frac{3\alpha}{1+2\alpha} \leq 1$ .

Пусть  $|c_{1,1,t}| \leq 1 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
|c_{1,1,t+1}| &\leq \frac{\alpha(1-\alpha)}{(1+2\alpha)t} + \left(1 - \frac{2\alpha}{t} + \frac{\alpha}{t^2}\right) |c_{1,1,t}| \leq \frac{\alpha(1-\alpha)}{(1+2\alpha)t} + \left(1 - \frac{2\alpha}{t} + \frac{\alpha}{t^2}\right) \\
&= 1 - \frac{(5\alpha^2t + \alpha t - 2\alpha^2 - \alpha)}{(1+2\alpha)t^2} < 1.
\end{aligned}$$

Заметим следующее:

$$a_{1,1} = \frac{1-\alpha}{1+2\alpha} \leq 1, \quad ija_{i,j} = \alpha \frac{i(i-1)ja_{i-1,j} + ji(j-1)a_{i,j-1}}{(1+\alpha(i+j))}.$$

Из индукции по  $(i + j)$  и предположения, что  $kla_{k,l} \leq 1$  получим:

$$ija_{i,j} = \alpha \frac{i(i-1)ja_{i-1,j} + ji(j-1)a_{i,j-1}}{(1 + \alpha(i+j))} \leq \frac{\alpha(i+j)}{(1 + \alpha(i+j))} \leq 1.$$

Вернемся к рассмотрению  $c_{i,j,t+1}$ . При  $t \leq i - 1$  или  $t \leq j - 1$ :

за такое количество шагов вершина с такими входящими и исходящими степенями появится не может, т.ч.

$$c_{i,j,t} = 0 - a_{i,j}t \Rightarrow |c_{i,j,t}| = a_{i,j}t \leq ija_{i,j} \leq 1.$$

Заметим, что

$$E(d_{i,j,i}^{joint}) = \begin{cases} \alpha^{i-1}, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$$

$$E(d_{i,j,j}^{joint}) = \begin{cases} \alpha^{j-1}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

НУО  $i \geq j$  и  $t = i$ :

$$E(d_{i,j,i}^{joint}) \leq \alpha^{i-1} \Rightarrow -1 \leq -ia_{i,j} \leq c_{i,j,i} \leq \alpha^{i-1} - ia_{i,j} \leq 1.$$

#### Доказательство предложения 4.

Случай  $(1, 1)$  уже разобран в лемме 3.

НУО  $i = 1$ , т.к. это аналогично  $j = 1$ . Перепишем равенство:

$$c_{1,j,t} = \alpha \frac{(j-1)}{t-1} c_{1,j-1,t-1} + \alpha \frac{j}{t-1} a_{1,j} + \left(1 - \frac{\alpha}{t-1} - \alpha \frac{j}{t-1} + \alpha \frac{j}{(t-1)^2}\right) c_{1,j,t-1}.$$

При  $t > j$ : воспользуемся индукцией. Пусть  $|c_{1,k,t}| \leq 1 \forall t$  для  $k < j$  и  $|c_{1,j,t-1}| \leq 1$ . Базу уже проверили. Покажем индукционный переход:

$$\begin{aligned} |c_{1,j,t}| &\leq \alpha \frac{(j-1)}{t-1} |c_{1,j-1,t-1}| + \alpha \frac{j}{t-1} a_{1,j} + \left(1 - \frac{\alpha}{t-1} - \alpha \frac{j}{t-1} + \alpha \frac{j}{(t-1)^2}\right) |c_{1,j,t-1}| \\ &\leq \alpha \frac{(j-1)}{t-1} + \frac{\alpha}{t-1} + \left(1 - \frac{\alpha}{t-1} - \alpha \frac{j}{t-1} + \alpha \frac{j}{(t-1)^2}\right) = \left(1 - \frac{\alpha}{t-1} + \alpha \frac{j}{(t-1)^2}\right) \leq 1. \end{aligned}$$

Индукционный переход завершен.

Таким образом  $c_{1,j,t} = o(t)$ ,  $a_{1,j}$  выбрано верно и выполняется оценка  $|c_{1,j,t}| \leq 1$ .

#### Доказательство предложения 5.

$$\sum_{i+j=k} ija_{i,j} = (1 - \alpha) \frac{(k+1)! \alpha^{k-2}}{6 \prod_{l=2}^k (1 + l\alpha)}$$

Используя представление по Гауссу гамма-функций:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! n^z}{z(z+1)(z+2) \dots (z+n-1)}, z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}.$$

Для  $\alpha \in (0, 1)$ , получим:

$$\sum_{i+j=k} ij a_{i,j} \sim \frac{\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \left(\frac{1}{\alpha}\right) \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) (k+1) k^{-\frac{1}{\alpha}}}{6}.$$

По признаку сравнения ряд сходится если  $1 - \frac{1}{\alpha} < -1$  и расходится при  $1 - \frac{1}{\alpha} \geq -1$ , что равносильно предположению.

### Доказательство предложения 6.

Посчитаем  $X_{t+1} - X_t$ :

$$\begin{aligned} 1 - \alpha + \alpha \sum_{i,j} d_{i,j,t} \left[ \frac{i}{t} \left(1 - \frac{j}{t}\right) (ij + j - ij) + \frac{j}{t} \left(1 - \frac{i}{t}\right) (ij + i - ij) + \right. \\ \left. + \frac{ij}{t^2} (ij + i + j + 1 - ij) \right] \Rightarrow \\ X_{t+1} = \left(1 + \frac{2\alpha}{t} + \frac{\alpha}{t^2}\right) X_t + (1 - \alpha). \end{aligned}$$

Особенно это красиво на фоне того, что

$$E(d_{1,1,t+1}^{joint}) = \left(1 - \frac{2\alpha}{t} + \frac{\alpha}{t^2}\right) E(d_{1,1,t}^{joint}) + (1 - \alpha).$$

(i) База:  $X_1 = 1$ .

Индукционный переход: пусть  $X_t \geq t \Rightarrow$

$$X_{t+1} = \left(1 + \frac{2\alpha}{t} + \frac{\alpha}{t^2}\right) X_t + (1 - \alpha) \geq t + 2\alpha + \frac{\alpha}{t} + 1 - \alpha \geq t + 1.$$

(ii) База:  $X_1 = 1$ .

Индукционный переход: пусть  $X_t(\alpha + \beta) \geq X_t(\alpha)$ ,  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} X_{t+1}(\alpha) &= \left(1 + \frac{2\alpha}{t} + \frac{\alpha}{t^2}\right) X_t(\alpha) + (1 - \alpha), \\ X_{t+1}(\alpha + \beta) &= \left(1 + \frac{2(\alpha + \beta)}{t} + \frac{\alpha + \beta}{t^2}\right) X_t(\alpha + \beta) + (1 - \alpha - \beta) \\ &\geq \left(1 + \frac{2\alpha}{t} + \frac{\alpha + \beta}{t^2}\right) X_t(\alpha + \beta) + (1 - \alpha + \beta) \geq \left(1 + \frac{2\alpha}{t} + \frac{\alpha}{t^2}\right) X_t(\alpha) + (1 - \alpha). \end{aligned}$$

(iii) Для  $t < t^*$  неравенство следует из определения  $A$ .

Для  $t \geq t^*$  используем индукцию:

$$\begin{aligned} t(1 - 2\alpha) \geq t^*(1 - 2\alpha) > \alpha \Rightarrow 1 - 2\alpha - \frac{\alpha}{t} \geq 1 - 2\alpha - \frac{\alpha}{t^*} > 0 \Rightarrow \\ A \left(1 - 2\alpha - \frac{\alpha}{t}\right) &\geq A \left(1 - 2\alpha - \frac{\alpha}{t^*}\right) \geq (1 - \alpha) \Rightarrow \\ A \geq A \left(2\alpha + \frac{\alpha}{t}\right) + (1 - \alpha) &\Rightarrow A(t+1) \geq \left(1 + \frac{2\alpha}{t} + \frac{\alpha}{t^2}\right) At + (1 - \alpha) \end{aligned}$$

$$\geq \left(1 + \frac{2\alpha}{t} + \frac{\alpha}{t^2}\right) X_t + (1 - \alpha) = X_{t+1}.$$

### Доказательство предложения 7.

При  $t > i, t > j, (i, j) \neq (1, 1)$  :

$$\left(1 - \alpha \frac{i}{t-1} - \alpha \frac{j}{t-1} + \alpha \frac{ij}{(t-1)^2}\right) = \left(1 - \alpha + \alpha \left(1 - \frac{i}{t-1}\right) \left(1 - \frac{j}{t-1}\right)\right) \geq 0 \Rightarrow$$

$$c_{i,j,t} = \alpha \frac{(i-1)}{t-1} c_{i-1,j,t-1} + \alpha \frac{(j-1)}{t-1} c_{i,j-1,t-1} + \alpha \frac{(i-1)(j-1)}{t-1} a_{i-1,j-1} +$$

$$+ \alpha \frac{(i-1)(j-1)}{(t-1)^2} c_{i-1,j-1,t-1} + \alpha \frac{ij}{t-1} a_{i,j} + \left(1 - \alpha \frac{i}{t-1} - \alpha \frac{j}{t-1} + \alpha \frac{ij}{(t-1)^2}\right) c_{i,j,t-1}.$$

Перепишем

$$c_{i,j,t} = \alpha \frac{(i-1)}{t-1} c_{i-1,j,t-1} + \alpha \frac{(j-1)}{t-1} c_{i,j-1,t-1} + \alpha \frac{(i-1)(j-1)}{(t-1)^2} E(d_{i-1,j-1,t-1}) +$$

$$+ \alpha \frac{ij}{(t-1)^2} E(d_{i,j,t-1}) + \left(1 - \alpha \frac{i}{t-1} - \alpha \frac{j}{t-1}\right) c_{i,j,t-1}.$$

Используем индукционное предположение:  $|c_{k,l,t}| \leq \frac{A}{2}$  при  $k + l \leq i + j - 1$  и  $|c_{i,j,t-1}| \leq \frac{A}{2}$ ,

$$c_{i,j,t} = \alpha \frac{(i-1)}{t-1} c_{i-1,j,t-1} + \alpha \frac{(j-1)}{t-1} c_{i,j-1,t-1} + \frac{\alpha}{(t-1)^2} [(i-1)(j-1)E(d_{i-1,j-1,t-1}^{joint}) +$$

$$+ ijE(d_{i,j,t-1}^{joint})] + \left(1 - \alpha \frac{i}{t-1} - \alpha \frac{j}{t-1}\right) c_{i,j,t-1} \Rightarrow$$

$$|c_{i,j,t}| \leq \frac{A}{2} \left[ \alpha \frac{(i-1)}{t-1} + \alpha \frac{(j-1)}{t-1} + \alpha \frac{2}{t-1} + \left(1 - \alpha \frac{i}{t-1} - \alpha \frac{j}{t-1}\right) \right] = \frac{A}{2}.$$

Индукционный переход завершен.

Таким образом  $c_{i,j,t} = o(t)$ ,  $a_{i,j}$  выбрано верно, для  $\alpha < \frac{1}{2}$ .

### Доказательство предложения 8.

Попробуем получить оценку для  $\forall \alpha \in (0, 1)$ . Возможно, она будет зависеть от  $(i, j)$ .

При  $t > i, t > j, (i, j) \neq (1, 1)$  :

Пусть  $|c_{i-1,j,t}| \leq c_{i-1,j}, |c_{i,j-1,t}| \leq c_{i,j-1}, |c_{i-1,j-1,t}| \leq c_{i-1,j-1} \forall t$ . Рассмотрим следующую вспомогательную функцию  $f(t)$  при  $t \geq i, t \geq j$  :

$$f(t) = \frac{\left(\frac{i-1}{t} c_{i-1,j} + \frac{j-1}{t} c_{i,j-1} + \frac{(i-1)(j-1)}{t} a_{i-1,j-1} + \frac{(i-1)(j-1)}{t^2} c_{i-1,j-1} + \frac{ij}{t} a_{i,j}\right)}{\left(-\frac{ij}{t^2} + \frac{i}{t} + \frac{j}{t}\right)}.$$

Заметим, что  $-ij + t(i + j) > 0$  при  $t \geq i, t \geq j$ , т.е. это выражение осмысленно.

Возьмем производную для функции вида  $\frac{At+B}{Ct+D}$ :

$$\frac{A(Ct + D) - C(At + B)}{(Ct + D)^2} = \frac{AD - CB}{(Ct + D)^2}.$$

В нашем случае  $A, B, C > 0, D < 0 \Rightarrow f'(t) < 0$ . И максимум при ограничении  $t \geq i, t \geq j$  достигается при  $t = \max\{i, j\}$ .

Зачем это было нужно?

$$\begin{aligned} c_{i,j,t} &= \alpha \frac{(i-1)}{t-1} c_{i-1,j,t-1} + \alpha \frac{(j-1)}{t-1} c_{i,j-1,t-1} + \alpha \frac{(i-1)(j-1)}{t-1} a_{i-1,j-1} + \\ &+ \alpha \frac{(i-1)(j-1)}{(t-1)^2} c_{i-1,j-1,t-1} + \alpha \frac{ij}{t-1} a_{i,j} + \left( 1 - \alpha \frac{i}{t-1} - \alpha \frac{j}{t-1} + \alpha \frac{ij}{(t-1)^2} \right) c_{i,j,t-1} \Rightarrow \\ |c_{i,j,t}| &\leq \alpha \frac{(i-1)}{t-1} |c_{i-1,j,t-1}| + \alpha \frac{(j-1)}{t-1} |c_{i,j-1,t-1}| + \alpha \frac{(i-1)(j-1)}{t-1} a_{i-1,j-1} + \\ &+ \alpha \frac{(i-1)(j-1)}{(t-1)^2} |c_{i-1,j-1,t-1}| + \alpha \frac{ij}{t-1} a_{i,j} + \left( 1 - \alpha \frac{i}{t-1} - \alpha \frac{j}{t-1} + \alpha \frac{ij}{(t-1)^2} \right) |c_{i,j,t-1}| \end{aligned}$$

При наших предположениях:

$$\begin{aligned} |c_{i,j,t}| &\leq \alpha f(t-1) \left( \frac{i}{t-1} + \frac{j}{t-1} - \frac{ij}{(t-1)^2} \right) + \left( 1 - \alpha \frac{i}{t-1} - \alpha \frac{j}{t-1} + \alpha \frac{ij}{(t-1)^2} \right) |c_{i,j,t-1}| \\ &= |c_{i,j,t-1}| + \alpha \left( \frac{i}{t-1} + \frac{j}{t-1} - \frac{ij}{(t-1)^2} \right) (f(t-1) - |c_{i,j,t-1}|). \end{aligned}$$

Можно предположить, что  $|c_{i,j,t-1}| \leq c_{i,j}$  и т.к.  $\left( 1 - \alpha \frac{i}{t-1} - \alpha \frac{j}{t-1} + \alpha \frac{ij}{(t-1)^2} \right) > 0$ :

$$\begin{aligned} |c_{i,j,t-1}| + \alpha \left( \frac{i}{t-1} + \frac{j}{t-1} - \frac{ij}{(t-1)^2} \right) (f(t-1) - |c_{i,j,t-1}|) \\ \leq c_{i,j} + \alpha \left( \frac{i}{t-1} + \frac{j}{t-1} - \frac{ij}{(t-1)^2} \right) (f(t-1) - c_{i,j}). \end{aligned}$$

НУО  $i \geq j \Rightarrow f(t-1) \leq f(i)$ . Тогда можно взять  $c_{i,j} = \max\{1, f(i)\}$ , потому что  $|c_{i,j,i}| \leq 1$ , а при таком  $c_{i,j} \Rightarrow f(t-1) - c_{i,j} \leq 0$ .

Получаем рекуррентную формулу:

$$c_{i,j} = \max \left\{ 1, \left( \frac{i-1}{i} c_{i-1,j} + \frac{j-1}{i} c_{i,j-1} + \frac{(i-1)(j-1)}{i} a_{i-1,j-1} + \frac{(i-1)(j-1)}{i^2} c_{i-1,j-1} + j a_{i,j} \right) \right\}.$$

К сожалению, эта оценка зависит от  $(i, j)$ , считается рекуррентно, а ожидать, что она меньше абсолютной величины - не приходится. Однако,  $c_{i,j,t} = o(t)$ .

В дальнейшем нам потребуется следующая лемма.

**Лемма** Если  $X$  удовлетворяет условию  $s$ -липшицевости, тогда  $\forall \lambda > 0$ :

$$Pr(|X_t - E(X_t)| > \lambda \sqrt{t}) < 2e^{-\lambda^2/2c^2}.$$

В частности,  $X_t$  почти наверняка очень близко к ожидаемому значению  $E(X_t)$  с погрешностью  $o(t^{1/2+\varepsilon})$  для любого  $\varepsilon > 0$ , когда  $t$  стремится к бесконечности.

**Доказательство теоремы 9.**

Оценки для погрешности были получены ранее, используем их.

$$\begin{aligned} \left\{ |d_{i,j,t}^{joint} - E(d_{i,j,t}^{joint})| > \lambda\sqrt{t} \right\} &\supset \left\{ d_{i,j,t}^{joint} - a_{i,j}t > \lambda\sqrt{t} + \frac{A}{2} \right\} \cup \left\{ d_{i,j,t}^{joint} - a_{i,j}t < -\lambda\sqrt{t} - \frac{A}{2} \right\} \\ \left\{ |d_{i,t}^{in} - E(d_{i,t}^{in})| > \lambda\sqrt{t} \right\} &\supset \left\{ d_{i,t}^{in} - b_it > \lambda\sqrt{t} + 1 \right\} \cup \left\{ d_{i,t}^{in} - b_it < -\lambda\sqrt{t} - 1 \right\} \\ \left\{ |d_{j,t}^{out} - E(d_{j,t}^{out})| > \lambda\sqrt{t} \right\} &\supset \left\{ d_{j,t}^{out} - c_jt > \lambda\sqrt{t} + 1 \right\} \cup \left\{ d_{j,t}^{out} - c_jt < -\lambda\sqrt{t} - 1 \right\} \end{aligned}$$

Проверим  $s$ -липшицевости для  $d_{i,t}^{in}$ ,  $d_{i,j,t}^{joint}$ . Ясно, что  $d_{i,t}^{in}$  1-липшицевы, а  $d_{i,j,t}^{joint}$  2-липшицевы, поскольку

$$d_{1,t+1}^{in} = \begin{cases} d_{1,t}^{in} + 1 & \text{с вероятностью } 1 - \alpha \\ d_{1,t}^{in} - 1 & \text{с вероятностью } \frac{\alpha d_{1,t}^{in}}{t} \\ d_{1,t}^{in} & \text{иначе} \end{cases}$$

Для  $i > 1$

$$d_{i,t+1}^{in} = \begin{cases} d_{i,t}^{in} + 1 & \text{с вероятностью } \frac{\alpha(i-1)d_{i-1,t}^{in}}{t} \\ d_{i,t}^{in} - 1 & \text{с вероятностью } \frac{\alpha i d_{i,t}^{in}}{t} \\ d_{i,t}^{in} & \text{иначе} \end{cases}$$

При  $t \geq 1$

$$d_{1,1,t+1}^{joint} = \begin{cases} d_{1,1,t}^{joint} + 1 & \text{с вероятностью } 1 - \alpha \\ d_{1,1,t}^{joint} - 1 & \text{с вероятностью } \alpha \left( 2 \frac{d_{1,1,t}^{joint}}{t} \left( 1 - \frac{d_{1,1,t}^{joint}}{t} \right) + \frac{d_{1,1,t}^{joint}}{t^2} \right) \\ d_{1,1,t}^{joint} - 2 & \text{с вероятностью } \alpha \left( \left( \frac{d_{1,1,t}^{joint}}{t} \right)^2 - \frac{d_{1,1,t}^{joint}}{t^2} \right) \\ d_{1,1,t}^{joint} & \text{иначе} \end{cases}$$

Для  $(i, j) \neq (1, 1)$

$$d_{i,j,t+1}^{joint} = \begin{cases} d_{i,j,t}^{joint} + 2 & \text{с вероятностью } \alpha \frac{(i-1)d_{i-1,j,t}^{joint}}{t} \frac{(j-1)d_{i,j-1,t}^{joint}}{t} \\ d_{i,j,t}^{joint} + 1 & \text{с вероятностью } \alpha \frac{(i-1)d_{i-1,j,t}^{joint}}{t} \left( 1 - \frac{(j-1)d_{i,j-1,t}^{joint}}{t} \right) + \\ & + \alpha \left( 1 - \frac{(i-1)d_{i-1,j,t}^{joint}}{t} \right) \frac{(j-1)d_{i,j-1,t}^{joint}}{t} + \alpha \frac{(i-1)(j-1)d_{i-1,j-1,t}^{joint}}{t^2} \\ d_{i,j,t}^{joint} - 1 & \text{с вероятностью } \alpha \frac{id_{i,j,t}^{joint}}{t} \left( 1 - \frac{jd_{i,j,t}^{joint}}{t} \right) + \\ & + \alpha \left( 1 - \frac{id_{i,j,t}^{joint}}{t} \right) \frac{jd_{i,j,t}^{joint}}{t} + \alpha \frac{ij d_{i,j,t}^{joint}}{t^2} \\ d_{i,j,t}^{joint} - 2 & \text{с вероятностью } \alpha \frac{ij(d_{i,j,t}^{joint})^2}{t^2} - \alpha \frac{ij d_{i,j,t}^{joint}}{t^2} \\ d_{i,j,t}^{joint} & \text{иначе} \end{cases}$$

После этого применим лемму и получим неравенства для вероятностей.

### Доказательство теоремы 10.

Оценки для погрешности были получены ранее, используем их.

$$\begin{aligned} \left\{ |d_{i,j,t}^{joint} - E(d_{i,j,t}^{joint})| > \lambda\sqrt{t} \right\} &\supset \left\{ d_{i,j,t}^{joint} - a_{i,j}t > \lambda\sqrt{t} + c_{i,j} \right\} \cup \left\{ d_{i,j,t}^{joint} - a_{i,j}t < -\lambda\sqrt{t} - c_{i,j} \right\} \\ \left\{ |d_{i,t}^{in} - E(d_{i,t}^{in})| > \lambda\sqrt{t} \right\} &\supset \left\{ d_{i,t}^{in} - b_it > \lambda\sqrt{t} + 1 \right\} \cup \left\{ d_{i,t}^{in} - b_it < -\lambda\sqrt{t} - 1 \right\} \\ \left\{ |d_{j,t}^{out} - E(d_{j,t}^{out})| > \lambda\sqrt{t} \right\} &\supset \left\{ d_{j,t}^{out} - c_jt > \lambda\sqrt{t} + 1 \right\} \cup \left\{ d_{j,t}^{out} - c_jt < -\lambda\sqrt{t} - 1 \right\} \end{aligned}$$

$c$ -липшицевость проверили ранее при доказательстве теоремы 9. Применим лемму и получим неравенства для вероятностей.

### Доказательство теорем 11 и 12.

При  $i + j = k$

$$a_{i,j} = (1 - \alpha) \frac{(k-2)! \alpha^{k-2}}{\prod_{l=2}^k (1 + l\alpha)} \Rightarrow a_k = \sum_{i+j=k} a_{i,j} = (1 - \alpha) \frac{(k-1)! \alpha^{k-2}}{\prod_{l=2}^k (1 + l\alpha)}.$$

Используя представление по Гауссу гамма-функций:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)}, z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}.$$

Для  $\alpha \in (0, 1)$ , получим:

$$a_k \sim \frac{\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)}{k^{1 + \frac{1}{\alpha}}}.$$

Доказательство устроено аналогично: оценки для  $c_{i,j,t}$  уже есть, нужно проверить  $c$ -липшицевости для  $\sum_{i+j=k} d_{i,j,t}^{joint}$ . Ясно, что она 2-липшицева, потому что в любой группе при такой модели не может появиться больше 2 вершин.

После этого применим лемму и получим неравенства для вероятностей.



## 5 Заключение

В работе была рассмотрена модель, которую можно использовать для динамического моделирования массивных графов со степенным распределением при условии, что параметры для входящих и исходящих степеней совпадают или граф неориентирован, а параметр больше 2. Если  $\beta$  такой параметр, то для моделирования выбирается  $\alpha = 1/(\beta - 1)$ . Также выявлена связь вероятности появления петель и оценок отклонения от среднего количества вершин с фиксированными степенями. С помощью этого исправлены ошибки, допущенные при доказательстве в оригинальной статье [11].

Обозначим перспективы и существующие вопросы:

1. Распространяется ли результат на модели В, С, D из той же статьи?
2. Можно ли исключить петли и двойные ребра для построения социальных графов?
3. Можно ли улучшить оценку для  $c_{i,j,t}$  при  $\alpha \geq \frac{1}{2}$  в предложении 8?

## 6 Приложения

### 6.1 Приложение А

В данном приложении приведён код программы на языке Python версии 3.6.1, которая выполняет подсчёт  $c_{i,j}$  из предложения 8.

```
import numpy as np
import random
import math
import matplotlib as mpl
#Следующая строка необходима для генерации изображений
mpl.use('Agg')
import matplotlib.pyplot as plt
#Импортируем пакет со вспомогательными функциями
from matplotlib import mlab

#Вектор со значениями альфа
#Если указать только одно значение,
#выведет график для одного
alphas = [1/2,99/100]

#Для каждого альфа считаем следующее
for alpha in alphas:
    #j не превосходит m
    m=10
    #i не превосходит n
    n=10

    #Заводим нулевые массивы для a_{i,j} и c_{i,j}
    arr1=[[0 for j in range(m)] for i in range(n)]
    arr2=[[0 for j in range(m)] for i in range(n)]

    #Задаем a_{1,1} по формуле
    arr1[0][0]=(1-alpha)/(1+2*alpha)

    curr = arr1[0][0]

    #Таблицу можно заполнять по диагонали,
    #т.к. a_{i,j} зависит только от i+j
    for su in range(3,m+n+1):
        curr=curr*(su-2)/(1/alpha+su)
        for i in range(max(1,su-m), min(n+1,su)):
            j=su-i
            arr1[i-1][j-1]=curr

    #Используем оценку единицей для c_{i,1}
    for i in range(n):
        arr2[i][0]=1
```

```

#Используем оценку единицей для  $c_{1,j}$ 
for j in range(m):
    arr2[0][j]=1

#Заполняем построчно, так что для (i,j)
#уже посчитаны необходимые оценки
for i in range(2,n+1):
    for j in range(2,m+1):
        if (i>=j):
            arr2[i-1][j-1]=(i-1)*arr2[i-2][j-1]/i+(j-1)*arr2[i-1][j-2]/i+(i-1)
            *(j-1)*arr2[i-2][j-2]/(i*i)+(i-1)*(j-1)*arr1[i-2][j-2]/i+j*arr1[i-1][j-1]
        else:
            arr2[i-1][j-1]=(i-1)*arr2[i-2][j-1]/j+(j-1)*arr2[i-1][j-2]/j+(i-1)
            *(j-1)*arr2[i-2][j-2]/(j*j)+(i-1)*(j-1)*arr1[i-2][j-2]/j+i*arr1[i-1][j-1]

#Графическая часть
#Хочется посмотреть на поведение  $c_{i,j}$  при
#больших значениях i или j

#Получение равномерной сетки
xlist = range(1,m+1)
#Очистим график от предыдущих результатов
plt.clf()
#Сам график
plt.plot (xlist, arr2[n-1], label="%f"%(alpha))

#Сам график
plt.plot (xlist, arr2[n-1], label="%i"%(n))

#Сам график
plt.plot (xlist, arr2[n-2], label="%i"%(n-1))

#Сам график
plt.plot (xlist, arr2[n-3], label="%i"%(n-2))

#Генерируем название в котором шифруются параметры
str='plot'
for alpha in alphas:
    str=str+'%f'%(alpha)
str=str+',n=%i,m=%i.png'%(n,m)

#Выводим легенду на график
plt.legend()
#Сохраняем график
plt.savefig(str)

```

## Список литературы

- [1] M. E. J. Newman. The structure and function of complex networks, 2003.  
<http://dx.doi.org/10.1137/S003614450342480>
- [2] B. Bollobás. Random graphs. In: Probabilistic Combinatorics and its Applications, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics 44, 1–20. American Mathematical Society, Providence, RI, 1991.
- [3] B. Bollobás, Modern Graph Theory, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [4] A. Barabási, and R. Albert, Emergence of scaling in random networks, *Science* (286), 509-512, 1999.
- [5] A. Barabási, R. Albert, and H. Jeong, Scale-free characteristics of random networks: the topology of the world wide web, *Physica A* 272, 173-187, 1999.
- [6] S. R. Kumar et al., Trawling the web for emerging cyber communities, Proceedings of the 8th World Wide Web Conference, Toronto, 1999.
- [7] A. Broder et al., Graph structure in the web, *Computer Networks* 33, (1-6), 309-321, 2000.
- [8] Q. Chen et al., The origin of power laws in Internet topologies revisited, in Proceedings of the 21st Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies, IEEE Computer Society, 2002.
- [9] M. Faloutsos, P. Faloutsos, and C. Faloutsos, On power-law relationships of the internet topology, *Computer Communications Review* 29, 251–262, 1999.
- [10] W. Aiello, F. Chung, and L. Lu, A random graph model for massive graphs. In: Proceedings of the 32nd Annual ACM Symposium on Theory of Computing, pp. 171–180, Association of Computing Machinery, New York, 2000.
- [11] W. Aiello, F. Chung, L. Lu, Random evolution in massive graphs, *Handbook on Massive Data Sets*, (Eds. J. Abello et al.), 2002.  
<http://dx.doi.org/10.1137/S003614450342480>
- [12] S. Redner, How popular is your paper? An empirical study of the citation distribution, *Eur. Phys. J. B* 4, 131–134, 1998.
- [13] S. N. Dorogovtsev, and J. F. F. Mendes, Language as an evolving word web, *Proc. R. Soc. London B* 268, 2603–2606, 2001.
- [14] R. Ferrer i Cancho, and R. V. Solé, The small world of human language, *Proc. R. Soc. London B* 268, 2261–2265, 2001.
- [15] H. Jeong et al., The large-scale organization of metabolic networks, *Nature* 407, 651–654, 2000.
- [16] D. J. Watts, S. H. Strogatz, Collective dynamics of 'small-world' networks, *Nature* 393, 440–442, 1998.

- [17] D. Barmpoutis, and R. M. Murray, Networks with the smallest average distance and the largest average clustering, arXiv:1007.4031, 2010.
- [18] R. Monasson, Diffusion, localization, and dispersion relations on ‘smallworld’ lattices, European Physical Journal B, vol. 12, 555–567, 1999.
- [19] M. Newman, and D. Watts, Renormalization group analysis of the smallworld network model, Physics Letters A, vol. 263, no. 4–6, 341–346, 1999.
- [20] П. И. Романовский, Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа, ФИЗМАТГИЗ, стр. 211-212, 1961.