Санкт-Петербургский Государственный Университет
Фундаментальная математика и механика
Теория вероятностей и математическая статистика

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

студентки 513 группы
Леонтьевой Екатерины Васильевны

Одна задача оценивания сигнала в стационарном шуме

Научный руководитель,
кандидат физико-математических наук Солев В. Н.

Рецензент,
доктор физико-математических наук Розовский Л. В.

Санкт-Петербург
-2019 г.-

Saint-Petersburg State University
Fundamental Mathematics and Mechanics
Probability Theory and Mathematical Statistics

Ekaterina Leonteva

Graduation Thesis

A problem of signal estimation in stationary noise

Thesis Supervisor,
Candidate of Physics and Mathematics V. N. Solev

Thesis Reviewer,
Doctor of Physics and Mathematics L. V. Rozovsky

Saint-Petersburg
-2019-

Содержание

1 Введение

Рассмотрим задачу оценивания неизвестной 2π-периодической функции s в случае, когда мы наблюдаем процесс $Y(t)$,

$$dY(t) = s(t)\,dt + dX(t), \quad |t| \leqslant T. \tag{1}$$

Здесь s — 2π-периодическая функция, подлежащая оцениванию и лежащая в заданном выпуклом подмножестве $\mathscr{L}$ пространства L^2 на отрезке $[-\pi,\pi]$, построенного по нормированной мере Лебега. Этот класс $\mathscr{L}$ будет определен позже. Везде далее мы будем отождествлять функции из пространства L^2 на отрезке $[-\pi,\pi]$ с 2π-периодическими функциями, определенными на всей вещественной прямой. Для простоты мы будем предполагать, что неотрицательная величина $T = \pi n$, где n — положительное целое. Мы предполагаем, что $X(t)$ — гауссовский процесс со стационарными приращениями (см. подробнее в [2]), с нулевым средним: $\mathbf{E}\,X(t) = 0$, и спектральной плотностью f,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{1+u^2}\,du < \infty. \tag{2}$$

Следует заметить что в (1) фактически предполагается, что статистик имеет в своем распоряжении разности

$$Y(b) - Y(a), -T \leq b < a < T,$$

по которым и строит подходящую оценку неизвестной функции s. В случае, когда $X(t)$ – винеровский процесс: $X(t) = W(t)$, переходя к процессу

$$Y_*(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=-n}^{n} Y(t + \pi(k-1)), \tag{3}$$

мы получаем стандартную и хорошо изученную модель

$$dY_*(t) = s(t)dt + \sigma\,dW(t),\ |t| \leqslant \pi, \text{при } \sigma = 1/\sqrt{n}. \tag{4}$$

В общем случае, когда спектральная плотность f отлична от константы и приращения процесса $X(t)$ на непересекающихся интервалах зависимы, такой прием не приводит к успеху.

Мы будем использовать обозначение L^2_T для L^2-пространство на отрезке $[-T,T]$, построенном по нормированной мере Лебега, со скалярным произведением и нормой

$$(s_1,s_2)_T := \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} s_1(t)\overline{s_2(t)}\,dt, \quad \|s\|^2_T := \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} |s|^2\,dt.$$

Разумеется, для 2π-периодических функций s_1,s_2 при $T=n\pi$

$$(s_1,s_2)_T = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} s_1(t)\overline{s_2(t)}\,dt.$$

Нас будут интересовать случайные величины вида

$$x\,[\varphi] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t)}\,dX(t),$$

определенные, в частности, для линейного множества S функций φ, удовлетворяющих условию

$$\varphi\in L^2,\ |\widehat{\varphi}(u)|^2 \le \frac{C(\varphi)}{1+u^2},\ \text{где } \widehat{\varphi}(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-iut}\varphi(t)\,dt. \tag{5}$$

При этом

$$\mathbf{E}\,x\,[\psi]=0, \quad \mathbf{E}\,x\,[\psi]\,\overline{x\,[\varphi]} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(u)\,\overline{\widehat{\psi}(u)}\,f(u)\,du. \tag{6}$$

Мы будем использовать линейные статистики вида

$$Y_T\,[\varphi] := \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\overline{\varphi(t)}\,dY(t) = \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\overline{\varphi(t)}\,s(t)\,dt + \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\overline{\varphi(t)}\,dX(t), \tag{7}$$

определенные по крайней мере для $\varphi\in S$.

$$\varphi^T(t) = \varphi(t)\mathbf{1}_{[-T,T]}(t). \tag{8}$$

Используя обозначения

$$X_T[\varphi] := \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} \overline{\varphi(t)}\, dX(t), \quad s_T[\varphi] := \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} \overline{\varphi(t)}\, s(t)\, dt,$$

получаем

$$Y_T[\varphi] = s_T[\varphi] + X_T[\varphi], \tag{9}$$

где $X_T[\varphi]$ — гауссовкая случайная величина с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2(\varphi)$,

$$\sigma^2(\varphi) = \frac{1}{4T^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi^T}(u)|^2 f(u)\, du, \tag{10}$$

где

$$\varphi^T(t) = \varphi(t)\mathbf{1}_{[-T,T]}(t). \tag{11}$$

В дальнейшем мы будем писать $X_T[\varphi] \sim N(0, \sigma^2(\varphi))$.

Выберем в пространстве L^2 на отрезке $[-\pi, \pi]$, построенном по нормированной мере Лебега, ортонормированный базис $\{\varphi_k, k \in \mathbb{Z}\}$ и разложим функцию $s(t)$ в ряд:

$$s(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \theta_k\, \varphi_k(t).$$

Мы будем предполагать, что

$$\sum |\theta_k|^2 (1+k)^{2\beta} < C,$$

этим и определив класс $\mathscr{L}$. Множество коэффициентов θ, удовлетворяющих тому же неравенству, обозначим за $\Theta(\mathscr{L})$.

Из (9) и (10), принимая во внимание ортонормированность системы $\{\varphi_k, \in \mathbb{Z}\}$ мы приходим к выводу о том, что величины $\widehat{\theta}_k = Y_T[\varphi_k^T]$ являются несмещенными оценками неизвестных коэффициентов θ_k. Так что при $Y_T(k) = Y_T[\varphi_k^T]$ и $\sigma_k = \sigma(\varphi_k)$ мы имеем следующую дискретную модель для оценивания функции $s(t)$:

$$Y_T(k) = \theta_k + \sigma_k\, \xi_k, \quad k \in \mathbb{Z}, \text{ где } \xi_k \sim N(0,1). \tag{12}$$

Отметим, что в случае, когда $X(t) = W(t)$, случайные величины ξ_k, $k \in \mathbb{Z}$, — независимы.

Пусть $\widehat{s}_T$ — оценка неизвестной функции $s \in \mathscr{L}$, построенная по наблюдениям (1). Определим величину риска при использовании оценки $\widehat{s}$ соотношением

$$\mathscr{R}_T(\widehat{s}_T; \mathscr{L}) = \sup_{s \in \mathscr{L}} \mathbf{E} \, \|\widehat{s}_T - s\|^2_{L^2} \, .$$

Здесь $\|\cdot\|_{L^2}$ — норма в пространстве L^2 на отрезке $[-\pi, \pi]$. Величина минимаксного риска определяется соотношением

$$\mathscr{R}^*_T(\mathscr{L}) = \inf_{\widehat{s}_T} \mathscr{R}_T(\widehat{s}_T; \mathscr{L}).$$

2 Одномерный случай

В этом пункте мы рассмотрим задачу оценивания неизвестной величины θ по наблюдениям

$$dY(t) = \theta \, \varphi(t) \, dt + \sigma \, dW(t), \quad |t| \leqslant T. \tag{13}$$

Здесь $\varphi(t)$ — известная 2π-периодическая функция единичной нормы в пространстве L^2_T, $|\theta| \le \tau$, τ, σ — известные положительные величины, $W(t)$ — стандартный винеровский процесс. Первый шаг состоит в доказательстве того, что мы можем без потери точности оценивания перейти к случаю когда мы наблюдаем лишь случайную величину $Y_T[\varphi]$.

Заметим, что выполнено соотношение

$$Y_T\,[\varphi] = \theta + \sigma X = \xi, \; X \sim N(0; \sigma^2), \quad \xi \sim N(\theta; \sigma^2).$$

Рассмотрим функцию ψ единичной нормы в пространстве L^2_T, ортогональную φ. Тогда

$$Y_T\,[\psi] = \eta \sim N(0, \sigma).$$

Случайный вектор (ξ, η) — гауссовский. Из ортогональности φ и ψ следует некоррелированность ξ и η, а, следовательно, и независимость ξ и η.

Таким образом, мы получили вектор, состоящий из двух независимых гауссовских случайных величин (ξ, η). Если считать данный вектор выборкой из одного элемента, то, в силу независимости, функция правдоподобия будет выглядеть так:

$$L_\theta(\xi, \eta) = p_\theta(\xi) \cdot p_0(\eta).$$

В таком случае, из теоремы о факторизации легко следует, что ξ является для данной выборки достаточной статистикой. Пусть $S(\xi, \eta)$ — некоторая оценка параметра θ. В силу достаточности ξ, случайная величина $\tilde{S}(\xi) = \mathbf{E}_{\,\theta}\,(S(\xi, \eta) \mid \xi)$ не зависит от θ и может считаться оценкой этого параметра. Применяя простейшие преобразования, получим:

$$\mathbf{E}_{\,\theta}\,(S(\xi,\eta)-\theta)^2 = \mathbf{E}_{\,\theta}\left(S(\xi,\eta)-\tilde{S}(\xi)\right)^2 -$$

$$-2\mathbf{E}_{\,\theta}\left((S(\xi,\eta)-\tilde{S}(\xi))(\tilde{S}(\xi)-\theta)\right) + \mathbf{E}_{\,\theta}\,(S(\xi,\eta)-\theta)^2 \geqslant$$

$$\geqslant \mathbf{E}_{\,\theta}\,(S(\xi,\eta)-\theta)^2 - 2\mathbf{E}_{\,\theta}\left((S(\xi,\eta)-\tilde{S}(\xi))(\tilde{S}(\xi)-\theta)\right).$$

Осталось доказать, что последнее слагаемое равняется нулю. Воспользуемся свойствами условного математического ожидания и определением $\tilde{S}$:

$$\mathbf{E}_{\,\theta}\left((S(\xi,\eta)-\tilde{S}(\xi))(S(\xi,\eta)-\theta)\right) =$$

$$\mathbf{E}_{\,\theta}\,\left\{\mathbf{E}_{\,\theta}\left((S(\xi,\eta)-\tilde{S}(\xi))(\tilde{S}(\xi)-\theta)\right)\,\Big|\,\xi\right\} =$$

$$\left(\tilde{S}(\xi)-\theta\right)\mathbf{E}_{\,\theta}\,\left\{\mathbf{E}_{\,\theta}\left((S(\xi,\eta)-\tilde{S}(\xi))\right)\,\Big|\,\xi\right\} = 0.$$

Таким образом, для задачи оценивания параметра θ имеет смысл рассматривать только величину $Y_T\,[\varphi]$ и функции от нее.

Рассмотрим теперь задачу оценивания неизвестного среднего θ по наблюдению:

$$y = \theta + \sigma\varepsilon,$$

где $\theta \in [-\tau, \tau], \tau > 0, \varepsilon \sim N(0,1)$. Будем измерять точность оценивания при использовании оценки $\hat{\theta} = \varphi(y)$ её риском:

$$\rho(\hat{\theta}; \tau, \theta) = \sup_{|\theta| \le \tau} \mathbf{E}\,(\hat{\theta}-\theta)^2,$$

где φ — измеримая функция. Для множества функций будем использовать минимаксный риск:

$$\rho_N(\tau,\sigma) = \inf_{\varphi \text{ измер.}} \rho(\hat{\theta};\tau,\theta).$$

Здесь инфимум берется по всем измеримым функциям φ.

Аналогично определяется линейный минимаксный риск:

$$\rho_L(\tau,\sigma) = \inf_{\varphi \text{ лин.}} \rho(\hat{\theta};\tau,\theta).$$

Здесь инфимум берется по всем линейным функциям φ.

2.1 Вычисление $\rho_L(\tau)$

Рассмотрим линейную функцию $\varphi(y) = ay + b$. Тогда

$$\rho_L(\tau) = \inf_{a,b} \rho(a,b;\tau,\theta) = \inf_{a,b} \sup_{|\theta|\leq\tau} \mathbf{E}\ (ay+b-\theta)^2.$$

Вычислим математическое ожидание, выражая y через θ и ε.

$$\mathbf{E}\ (ay+b-\theta)^2 = \mathbf{E}\ ((a-1)\theta + a\varepsilon + b)^2 = (a-1)^2\theta^2 + 2(a-1)b\theta + a^2\sigma^2 + b^2.$$

Максимизируем получившееся выражение по θ. Первое слагаемое нечувствительно к знаку θ. Тогда положим $\theta = sign\{(a-1)\}\cdot\tau$. Таким образом,

$$\rho(a,b;\tau,\theta) = (a-1)^2\tau^2 + 2|(a-1)b|\tau + a^2\sigma^2 + b^2.$$

Теперь минимизируем это по a и b. Легко заметить, что наиболее выгодно взять $b = 0$. Затем найдем точку минимума по a, используя производную, и получим $a = \tau^2/(\tau^2+\sigma^2)$

Таким образом, получим минимаксную линейную оценку параметра θ:

$$\rho_L(\tau) = \frac{\tau^2\sigma^2}{(\tau^2+\sigma^2)}.$$

Очевидно, что выполняются следующие неравенства:

$$\frac{\tau^2\wedge\sigma^2}{2} \leqslant \rho_L(\tau) \leqslant \tau^2\wedge\sigma^2, \tag{14}$$

где $\tau^2 \wedge \sigma^2 = \min(\tau^2, \sigma^2)$. Наилучшая оценка будет иметь вид:

$$\hat{\theta} = \frac{\tau^2}{(\tau^2 + \sigma^2)}\, y.$$

2.2 Оценка снизу величины $\rho_N(\tau, \sigma)$

Напомним, что

$$\rho_N(\tau, \sigma) = \inf_{\varphi} \sup_{|\theta| \le \tau} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x) - \theta)^2\, e^{-(x-\theta)^2/2\sigma^2}\, dx,$$

и заметим, что можно ограничиться функциями $|\varphi| \le \tau$.

Очевидно,

$$\rho_N(\tau, \sigma) = \sigma^2 \rho_N\Big(\frac{\tau}{\sigma}, 1\Big).$$

Аналогичное равенство справедливо и для $\rho_L(\tau, \sigma)$. Пользуясь этим равенством, можно проводить расчеты и доказательства только для случая $\sigma = 1$.

Учитывая тот факт, что мы оцениваем параметр $\theta \in [-\tau, \tau]$, имеет смысл рассматривать только оценки $|\varphi(x)| \le \tau$.

Оценим $\rho_N(\tau, 1)$ снизу с помощью несложных преобразований:

$$\rho_N(\tau, 1) = \sup_{|\theta| \le \tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x) - \theta)^2\, e^{-(x-\theta)^2/2}\, dx \ge$$

$$\ge \sup_{\theta \in \{-\tau, \tau\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x) - \theta)^2\, e^{-(x-\theta)^2/2}\, dx \ge$$

$$\ge \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x) + \tau)^2\, e^{-(x+\tau)^2/2} + (\varphi(x) - \tau)^2\, e^{-(x-\tau)^2/2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[(\varphi(x) + \tau)^2 + (\varphi(x) - \tau)^2\right] e^{-(x-\tau)^2/2}\, dx +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\varphi(x)+\tau)^2\left[e^{-(x+\tau)^2/2}-e^{-(x-\tau)^2/2}\right]\,dx.$$

Несложно заметить, что $[(\varphi(x)+\tau)^2+(\varphi(x)-\tau)^2]\geq 2\tau^2$, а также $(\varphi(x)+\tau)^2\leq 4\tau^2$. Отсюда получаем, что

$$\rho_N(\tau,1)\geq\tau^2-4\tau^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|e^{-(x+\tau)^2/2}-e^{-(x-\tau)^2/2}\right|\,dx.$$

Заметим, что при $\tau\to 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|e^{-(x+\tau)^2/2}-e^{-(x-\tau)^2/2}\right|\,dx\to 0.$$

Поэтому при любом $0<\delta<1$ найдется такое $\tau(\delta)$, что при $\tau<\tau(\delta)$ справедливо:

$$\rho_N(\tau,1)\geq\tau^2(1-\delta).$$

С другой стороны, так как класс измеримых функций шире класса линейных,

$$\rho_N(\tau,1)\leq\rho_L(\tau,1).$$

Отсюда, при $\tau<\tau(\delta)$, получаем:

$$\tau^2(1-\delta)\leq\rho_N(\tau,1)\leq\rho_L(\tau,1)=\frac{\tau^2}{1+\tau^2},$$

$$(1-\delta)(1+\tau^2)\leq\frac{\rho_N(\tau,1)}{\rho_L(\tau,1)}\leq 1.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\rho_N(\tau,1)}{\rho_L(\tau,1)}=1.$$

2.3 Неравенства, связывающие $\rho_N(\tau,\sigma)$ и $\rho_L(\tau,\sigma)$

Лемма 1. *При некотором $\kappa>0$ имеют место неравенства*

$$\kappa\rho_L(\tau,\sigma)\leq\rho_N(\tau,\sigma)\leq\rho_L(\tau,\sigma). \tag{15}$$

Доказательство. Мы будем следовать в основном пути, предложенном в [4]. Мы уже знаем, что $\rho_N(\tau, 1) \leq \rho_L(\tau, 1)$. Докажем левое неравенство.

Напомним, что при $\tau \to 0$

$$\frac{\rho_N(\tau, 1)}{\rho_L(\tau, 1)} \to 1.$$

Пусть $0 < \delta < 1$. Фиксируем величину $\tau_0 > 0$, выбрав ее так, чтобы при $\tau \leq \tau_0$

$$\frac{\rho_N(\tau, 1)}{\rho_L(\tau, 1)} \geq 1 - \delta$$

Так как величина $\rho_N(\tau, 1)$ возрастает при росте τ, то при $\tau > \tau_0 > 0$

$$\frac{\rho_N(\tau, 1)}{\rho_L(\tau, 1)} \geq \frac{\rho_N(\tau_0, 1)}{\rho_L(\tau, 1)} = \frac{\rho_N(\tau_0, 1)}{\rho_L(\tau_0, 1)} \frac{\rho_L(\tau_0, 1)}{\rho_L(\tau, 1)}.$$

Заметим, что при $\tau > \tau_0 > 0$

$$\frac{\rho_L(\tau_0, 1)}{\rho_L(\tau, 1)} = \frac{\tau_0^2(1 + \tau^2)}{\tau^2(1 + \tau_0^2)} > \frac{\tau_0^2}{(1 + \tau_0^2)},$$

и, следовательно, при $\tau > \tau_0 > 0$

$$\frac{\rho_N(\tau, 1)}{\rho_L(\tau, 1)} \geq \frac{\rho_N(\tau_0, 1)}{\rho_L(\tau_0, 1)} \frac{\tau_0^2}{(1 + \tau_0^2)}.$$

Отсюда, при всех $\tau > 0$

$$\frac{\rho_N(\tau, 1)}{\rho_L(\tau, 1)} \geq (1 - \delta) \frac{\tau_0^2}{(1 + \tau_0^2)}.$$

■

Отметим, что в [3] было установлено, что в (15) можно взять $\kappa = 0.8$.

3 Дискретная модель

Мы исследуем задачу оценивания неизвестной 2π-периодической функции s в случае, когда мы наблюдаем процесс $Y(t)$,

$$dY(t) = s(t)\,dt + dX(t), \quad |t| \leqslant T. \tag{16}$$

Здесь s — 2π-периодическая функция, подлежащая оцениванию и лежащая в заданном выпуклом подмножестве $\mathscr{L}$ пространства L^2 на отрезке $[-\pi, \pi]$, построенного по нормированной мере Лебега. Этот класс $\mathscr{L}$ будет определен позже. Везде далее мы будем отождествлять функции из пространства L^2 на отрезке $[-\pi, \pi]$ с 2π-периодическими функциями, определенными на всей вещественной прямой. Для простоты мы будем предполагать, что неотрицательная величина $T = \pi n$, где n — положительное целое. Выберем в пространстве L^2 на отрезке $[-\pi, \pi]$, построенном по нормированной мере Лебега, ортонормированный базис $\left\{\varphi_k := e^{ikt}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ и разложим функцию $s(t)$ в ряд:

$$s(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \theta_k \, \varphi_k(t). \tag{17}$$

Функция $s(t)$, лежит в $\mathscr{L}$, если при некотором $\beta > 1$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\theta_k|^2 (1+k)^{2\beta} \le L. \tag{18}$$

Обозначим $\Theta(\mathscr{L})$ множество векторов $\theta = (\theta_k, \ k \in \mathbb{Z})$, удовлетворяющих (18). Очевидно, $\Theta(\mathscr{L})$ — выпуклое, центрально-симметричное подмножество пространства l_2. Задача оценивания $\theta \in \Theta(\mathscr{L})$ по наблюдениям (16) и задача оценивания $s \in \mathscr{L}$ по наблюдениям (16) в понятном смысле одна и та же задача.

Пусть $\widehat{\theta}_T = (\widehat{\theta}_k^T, \ k \in \mathbb{Z})$ — оценка неизвестного $\theta \in \Theta(\mathscr{L})$, построенного по наблюдениям (16). Обозначим

$$R_T(\widehat{\theta}_T; \Theta(\mathscr{L})) = \sup_{\theta\in\Theta(\mathscr{L})} \mathbf{E} \left\|\widehat{\theta}_T - \theta\right\|_{l_2}^2.$$

Ясно, что

$$R_T(\widehat{\theta}_T; \Theta(\mathscr{L})) = \mathscr{R}_T(\widehat{s}_T; \mathscr{L}) = \sup_{s\in\mathscr{L}} \mathbf{E} \left\|\widehat{s}_T - s\right\|_{L^2}^2 . \tag{19}$$

Здесь

$$\widehat{s}_T(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\theta}_k^T \, \varphi_k(t).$$

Очевидно,

$$\mathscr{R}_T^*(\mathscr{L}) = \inf_{\widehat{s}_T} \mathscr{R}_T(\widehat{s}_T; \mathscr{L}) = R_T^*(\Theta(\mathscr{L})) = \inf_{\widehat{\theta}_T} R_T(\widehat{\theta}_T; \Theta(\mathscr{L})). \tag{20}$$

3.1 Прямоугольники

Пусть $\tau = (\tau_k,\ k \in \mathbb{Z})$ — вектор из $\Theta(\mathscr{L})$ с неотрицательными координатами. Обозначим $\Theta(\tau)$ прямоугольник

$$\Theta(\tau) = \{\theta :\ |\theta_k| \le \tau_k,\ k \in \mathbb{Z})\}\,. \tag{21}$$

Поскольку любой вектор $\theta \in \Theta(\mathscr{L})$ содержится в прямоугольнике $\Theta(\tau)$ при $\tau = (|\theta_k|,\ k \in \mathbb{Z})$, то для любой оценки $\widehat{\theta}_T$

$$R_T(\widehat{\theta}_T; \Theta(\tau)) \le R_T(\widehat{\theta}_T; \Theta(\mathscr{L})) \le \sup_{\tau \in \Theta(\mathscr{L})} R_T(\widehat{\theta}_T; \Theta(\tau)).$$

Наш план исследования асимптотического поведения при $T \to \infty$ величины минимаксного риска $\mathscr{R}_T^*(\mathscr{L})$ описывается в следующей очевидной лемме.

Лемма 2. *Пусть при подходящих условиях на спектральную плотность f при некоторой константе $C = C(f; \mathscr{L}) < \infty$ и $\gamma = \gamma(f; \mathscr{L}) > 0$ для некоторой оценки $\widehat{\theta}_T$*

$$\mathscr{R}_T(\widehat{\theta}_T; \Theta(\mathscr{L})) \le C\, T^{-\gamma}. \tag{22}$$

Предположим также, что при некотором векторе $\tau_* = \tau_*(T; f; \mathscr{L}) \in \Theta(\mathscr{L})$ с неотрицательными координатами для любой оценки $\widehat{\theta}_T$ при при некоторой константе $c = c(f; \mathscr{L}) > 0$

$$R_T(\widehat{\theta}_T; \Theta(\tau_*)) \ge c\, T^{-\gamma}. \tag{23}$$

Тогда

$$c\, T^{-\gamma} \le \mathscr{R}_T^*(\mathscr{L}) \le C\, T^{-\gamma}. \tag{24}$$

Покажем, что переход к дискретной модели не может сильно ухудшить качество оценивания.

3.2 Вычисление величины σ_k

Вычислим σ_k используя (10) и (11). Если $\varphi_k(t) = e^{ikt}$, то $\varphi_k^T(t) = e^{ikt}\mathbf{1}_{[-T,T]}(t)$. Поэтому

$$\widehat{\varphi_k^T}(u) = \frac{2\sin(u-k)T}{(u-k)}.$$

В таком случае получаем, что

$$\sigma_k^2 = \frac{1}{4T^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{4\sin^2(u-k)T}{(u-k)^2}\, f(u)\, du = \frac{1}{T} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(u-k)T}{\pi\, T(u-k)^2}\, f(u)\, du, \qquad (25)$$

где $f(u)$ — спектральная плотность. Для $\varepsilon > 0$ примем обозначение

$$f_\varepsilon(v) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{\pi\, x^2}\, f(v + \varepsilon x)\, dx,$$

интерпретируя величину $f_\varepsilon(v)$ как "среднее значение" функции f в малой окрестности точки v:

$$f_\varepsilon(v) = \mathbf{E}\, f(v + \varepsilon X),$$

где X — случайная величина с плотностью

$$\frac{\sin^2 x}{\pi\, x^2}.$$

Заметим, что при $\varepsilon = 1/T$

$$f_\varepsilon(v) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(u-v)T}{\pi\, T(u-v)^2}\, f(u)\, du,$$

что получается при замене переменной $(u - v)T = x$ в последнем интеграле. Потому

$$\sigma_k^2 = \frac{1}{T}\, f_\varepsilon(k) = \frac{1}{T} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{\pi\, x^2}\, f(k + \varepsilon x)\, dx, \quad \text{при } \varepsilon = 1/T. \qquad (26)$$

Отметим также, что, так как

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{\pi\, x^2}\, dx = 1,$$

то

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{\pi\, x^2} \sqrt{\frac{f(v+\varepsilon x)}{f(v+\varepsilon x)}}\, dx \le f_\varepsilon(v)\, \left[\frac{1}{f}\right]_\varepsilon (v). \qquad (27)$$

3.3 Оценка сверху величины $\mathscr{R}_T^*(\mathscr{L})$

В силу (20)

$$\mathscr{R}_T^*(\mathscr{L}) \le R_T(\widehat{\theta}_T; \Theta(\mathscr{L}))$$

для любой оценки $\widehat{\theta}_T = (\widehat{\theta}_k^T,\ k \in \mathbb{Z})$ неизвестного вектора $\theta = (\theta_k,\ k \in \mathbb{Z}) \in \Theta(\mathscr{L})$. Определим оценку $\widehat{\theta}_T$ соотношением

$$\widehat{\theta}_k^T = \begin{cases} Y_T[\varphi_k^T], & \text{если } |k| \le N \\ 0, & \text{если } |k| > N \end{cases}, \tag{28}$$

выбрав положительное N позже. Напомним, что

$$Y_T[\varphi_k^T] = \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} e^{-ikt}\, dY(t) = \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} e^{-ikt}\, s(t)\, dt + \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} e^{-ikt}\, dX(t) =$$

$$= \theta_k + X_T[\varphi_k^T],$$

где $X_T[\varphi_k^T]$ — гауссовкая случайная величина с нулевым средним и дисперсией $\sigma_k^2 = \sigma^2(\varphi_k^T)$. Как установлено в (26)

$$\sigma_k^2 = \frac{1}{T}\, f_\varepsilon(k) = \frac{1}{T} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{\pi\, x^2}\, f(k + \varepsilon x)\, dx, \quad \text{при } \varepsilon = 1/T.$$

Наложим на функцию f следующее условие: при некотором $\alpha > -1$ найдется такая константа $C < \infty$, что

$$\frac{1}{2N} \sum_{|k| \le N} f_\varepsilon(k) \le C\, \varepsilon^\alpha. \tag{29}$$

Оценим величину

$$R_T(\widehat{\theta}_T; \Theta(\mathscr{L})) = \sup_{\theta \in \Theta(\mathscr{L})} \mathbf{E} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\widehat{\theta}_k^T - \theta_k)^2$$

сверху. Поскольку

$$\mathbf{E} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\widehat{\theta}_k^T - \theta_k)^2 = \mathbf{E} \sum_{|k| \le N} (\widehat{\theta}_k^T - \theta_k)^2 + \mathbf{E} \sum_{|k| > N} (\widehat{\theta}_k^T - \theta_k)^2,$$

$$\mathbf{E}\sum_{|k|\le N}(\widehat{\theta}_k^T-\theta_k)^2=\sum_{|k|\le N}\sigma_k^2,\quad \sum_{|k|>N}(\widehat{\theta}_k^T-\theta_k)^2=\sum_{|k|>N}\theta_k^2,$$

мы получаем

$$\mathbf{E}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\widehat{\theta}_k^T-\theta_k)^2=\sum_{|k|\le N}\sigma_k^2+\sum_{|k|>N}\theta_k^2. \tag{30}$$

Из (26) и (29) следует, что при $\varepsilon=1/T$

$$\sum_{|k|\le N}\sigma_k^2\le C\,\frac{2N}{T}\,\varepsilon^\alpha=C\,2N\,\varepsilon^{1+\alpha}. \tag{31}$$

Далее, при $\beta>0$ из неравенства

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\theta_k|^2(1+k)^{2\beta}\le L.$$

следует,что

$$\sum_{|k|>N}\theta_k^2\le(1+N)^{-2\beta}\sum_{|k|>N}\theta_k^2\,(1+k)^{2\beta}\le L\,(2N)^{-2\beta}. \tag{32}$$

Теперь выберем N так, чтобы величины $(2N)^{-2\beta}$ и $2N\,\varepsilon^{1+\alpha}$ были одного порядка малости:

$$N=\varepsilon^{-\frac{1+\alpha}{1+2\beta}}.$$

При таком выборе N, как это следует из (30), (31) и (32) при $\varepsilon=1/T$

$$\mathbf{E}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\widehat{\theta}_k^T-\theta_k)^2\le M\,T^{-\frac{2\beta(1+\alpha)}{1+2\beta}},$$

с константой $M=L\,C\,(2+2^{-2\beta})$. Отсюда в силу (20) получаем оценку

$$\mathscr{R}_T^*(\mathscr{L})\le M\,T^{-\frac{2\beta(1+\alpha)}{1+2\beta}}. \tag{33}$$

Таким образом, мы пришли к следующему утверждению.

Лемма 3. *Пусть функция f удовлетворяет условию: при некотором $\alpha>-1$ найдется такая константа $C<\infty$, что*

$$\frac{1}{2N}\sum_{|k|\le N}f_\varepsilon(k)\le C\,\varepsilon^\alpha. \tag{34}$$

Тогда при некотором $M<\infty$

$$\mathscr{R}_T^*(\mathscr{L})\le M\,T^{-\frac{2\beta(1+\alpha)}{1+2\beta}}. \tag{35}$$

3.4 Оценка снизу величины $\mathscr{R}^*_T(\mathscr{L})$

Пусть $\tau = (\tau_k,\ k \in \mathbb{Z})$ — вектор из $\Theta(\mathscr{L})$ с неотрицательными координатами,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \tau_k^2 (1+k)^{2\beta} \le L. \tag{36}$$

а $\Theta(\tau)$ прямоугольник

$$\Theta(\tau) = \{\theta : \ |\theta_k| \le \tau_k,\ k \in \mathbb{Z})\}\,. \tag{37}$$

Вектор $\tau = (\tau_k,\ k \in \mathbb{Z})$ выберем следующим образом:

$$\tau_k^2 = \frac{L\,\sigma_k^2}{\sum\limits_{|k|\le N} \sigma_k^2 (1+|k|)^{2\beta}} \ \text{ если } |k| \le N; \quad \tau_k = 0, \text{ если } |k| > N. \tag{38}$$

Наложим на функцию f следующее условие: при некотором $\alpha > -1$ найдутся такие константы $0 < c \le C < \infty$, что при $\varepsilon = 1/T$

$$c\,\varepsilon^\alpha \le \frac{1}{2N} \sum_{|k|\le N} f_\varepsilon(k) \le C\,\varepsilon^\alpha. \tag{39}$$

Выберем

$$N = \varepsilon^{-\frac{1+\alpha}{1+2\beta}}.$$

Лемма 4. *Пусть выполнено условие (39). Тогда при некоторой константе $D < \infty$*

$$\sum_{|k|\le N} \sigma_k^2 (1+|k|)^{2\beta} \le D. \tag{40}$$

Доказательство. Напомним, что при $\varepsilon = 1/T$

$$\sigma_k^2 = \varepsilon\, f_\varepsilon(k).$$

Поэтому исходя из (39) получаем

$$\sum_{|k|\le N} \sigma_k^2 (1+|k|)^{2\beta} \le (1+N)^{1+2\beta} \frac{\varepsilon}{N} \sum_{|k|\le N} f_\varepsilon(k) \le 2^{1+2\beta} C\, N^{1+2\beta}\, \varepsilon^{1+\alpha} = 2^{1+2\beta} C.$$

В последней выкладке мы воспользовались равенством

$$N = \varepsilon^{-\frac{1+\alpha}{1+2\beta}}.$$

■

Лемма 5. *Пусть* $\varepsilon = 1/T$, $N = \varepsilon^{-\frac{1+\alpha}{1+2\beta}}$. *Тогда при условии (39)*

$$\tau_k^2 \geq K\,\varepsilon\, f_\varepsilon(k),$$

при некотором $K > 0$.

Доказательство. Из (38) и (40) мы выводим, что

$$\tau_k^2 \geq \frac{L}{D}\,\sigma_k^2 = \frac{L}{D}\,\varepsilon\, f_\varepsilon(k) \tag{41}$$

■

3.4.1 Уменьшение дисперсии $\sigma_k^2(\varphi_k^T)$

Мы фиксируем $T > 0$ и нам (на время) будет удобно считать, что функции из L_T^2 обращаются в ноль вне отрезка $[-T, T]$. Пусть $H_0 = H_0(T)$ — подпространство пространства L_T^2, такое что $H_0 \perp \mathscr{L}$. Тогда

$$(h, \varphi_k^T)_T = \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} \varphi_k^T(t)\overline{h(t)}\,dt = 0,$$

$$(\widehat{h}, \widehat{\varphi_k^T}(u))_{L^2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi_k^T}(u)\,\overline{\widehat{h}(u)}\,f(u)\,du = 0.$$

Рассмотрим случайную величину $\widetilde{X_k} = X_k - \eta_k$, где

$$X_k = X_T[\varphi_k^T], \quad \eta_k = X_T[h].$$

Наша задача состоит в том, чтобы выяснить, возможно ли с помощью новой случайной величины η_k значительно уменьшить дисперсию оценки Y_k, равную σ_k^2, получив оценку $\widetilde{Y_k}$ с меньшей дисперсией.

Ответ на этот вопрос дает следующая лемма. Напомним, что

$$f_\varepsilon(k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{\pi\, x^2}\; f(k + \varepsilon x)\,dx, \quad \left[\frac{1}{f}\right]_\varepsilon(k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{\pi\, x^2}\;\frac{1}{f(k+\varepsilon x)}\,dx$$

при $\varepsilon = 1/T$. Мы будем писать $h \perp g$, если $(h, \varphi_k^T)_T = 0$.

Лемма 6. *Пусть $h \perp \varphi_k^T$, а также выполнено следующее условие на спектральную плотность $f(t)$:*

$$\sup_{k\in\mathbb{Z},\varepsilon>0} f_\varepsilon(k)\left[\frac{1}{f}\right]_\varepsilon(k) \le B < \infty, \tag{42}$$

Тогда

$$\|\widehat{\varphi_k^T} - \widehat{h}\|_f^2 \ge (1-\rho^2)\|\widehat{\varphi_k^T}\|_f^2, \tag{43}$$

где $\rho^2 < 1$ и не зависит от k и h.

Доказательство. Обозначим $\eta = a\widehat{\varphi_k^T}$, $a \ne 0$. Заметим, что неравенство $\inf\limits_{k,h} \|\widehat{\varphi_k^T} - \widehat{h}\|_f^2 \ge (1-\rho^2)\|\widehat{\varphi_k^T}\|_f^2$ (здесь и далее инфимум берется по $k \in \mathbb{Z}$ и $h \perp \varphi_k^T$) эквивалентно неравенству

$$\inf_{k,h} \|\eta - \widehat{h}\|_f^2 \ge (1-\rho^2)\|\eta\|_f^2, \tag{44}$$

которое мы и будем доказывать. Возьмем $\xi \in L_f^2$, так чтобы $\xi \underset{f}{\perp} \widehat{h}$. Последнее означает, что функции ξ и $\widehat{h}$ ортогональны в L_f^2. Тогда

$$\|\eta - \widehat{h}\|_f^2 \ge \frac{|(\eta - \widehat{h}, \xi)_f|^2}{\|\xi\|_f^2} = \frac{|(\eta, \xi)_f|^2}{\|\xi\|_f^2}. \tag{45}$$

Возьмем при $\varepsilon = 1/T$

$$\eta(t) = \frac{\sin(t-k)T}{\sqrt{\pi T}\,(t-k)}, \quad \xi(t) = \frac{\sin(t-k)T}{\sqrt{\pi T}\,(t-k)\,f(t)}.$$

Тогда

$$\|\eta\|_f^2 = f_\varepsilon(k),\ \|\xi\|_f^2 = \left[\frac{1}{f}\right]_\varepsilon(k),\ (\eta,\xi)_f = 1,\ (\widehat{h},\xi)_f = 0.$$

Поэтому из (45) мы выводим, что

$$\|\eta - \widehat{h}\|_f^2 \ge \frac{1}{\|\eta\|_f^2\,\|\xi\|_f^2}\,\|\eta\|_f^2.$$

Так как в силу (42)

$$\|\eta\|_f^2 \, \|\xi\|_f^2 = f_\varepsilon(k) \, \left[\frac{1}{f}\right]_\varepsilon (k) \le B < \infty,$$

то при $\rho^2 = 1 - \frac{1}{B} < 1$ получаем

$$\|\eta - \widehat{h}\|_f^2 \ge (1 - \rho^2) \, \|\eta\|_f^2,$$

где ρ^2 не зависит от k и h. ■

Пусть $\mathscr{H}_0^k = \mathscr{H}_0^k(T)$ — подпространство пространства $L^2(dP)$, порожденное случайными величинами $X_{T}(h)$, когда

$$\frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} \varphi_k^{T}(t) \, \overline{h(t))} \, dt = 0, \quad \operatorname{supp} h \subset [-T, T].$$

Здесь и далее $L^1(dP)$ — гильбертово пространство случайных величин x с конечным вторым моментом

со скалярным проиизведением $(x,y)_{dP} = \mathbf{E}\, x\overline{y}$ и нормой $\|x\|_{dP} = \sqrt{(x,x)}$.

Поскольку отображение $X_T[\varphi] \to \widehat{\varphi}$ есть изометрия из пространства $L^2(dP)$ в пространство L_f^2, мы приходим к следующему утверждению.

Замечание 1. Лемма 6 утверждает, что при условии (42) при $x \in \mathscr{H}_0^k$

$$\mathbf{E}\, |X_T[\varphi_k^{T}] - x|^2 \ge (1 - \rho^2) \mathbf{E}\, |X_T[\varphi_k^{T}]|^2.$$

где $\rho^2 < 1$ и не зависит от k и x.

Нам потребуется одно следствие из Замечания 1. Пусть $X_j = X_T[\varphi_j^{T}], \ j \in \mathbb{Z}$, x_j — ортогональная проекция X_j на $\mathscr{H}_0^j$, $\tilde{X}_j = X_j - x_j$. Так что

$$\mathbf{E}\, |\tilde{X}_j|^2 = \mathbf{E}\, |X_j|^2 - \mathbf{E}\, |x_j|^2 \le \mathbf{E}\, |X_k|^2, \ j \in \mathbb{Z}.$$

Замечание 1 утверждает, что при $x \in \mathscr{H}_0^k$

$$\mathbf{E}\, |X_k - x|^2 \ge (1 - \rho^2) \, \mathbf{E}\, |X_k|^2.$$

Возьмем $x = x_k + \sum\limits_{j \neq k} a_j \tilde{X}_j$, предполагая, что только конечное число из a_j отлично от нуля. Тогда

$$\mathbf{E}\,|\tilde{X}_k - \sum_{j \neq k} a_j \tilde{X}_j|^2 \geq (1-\rho^2)\,\mathbf{E}\,|X_k|^2 \geq (1-\rho^2)\,\mathbf{E}\,|\tilde{X}_k|^2.$$

Таким образом мы пришли к следующему утверждению.

Замечание 2. При условии (42)

$$\mathbf{E}\,|\tilde{X}_k - \sum_{j \neq k} a_j \tilde{X}_j|^2 \geq (1-\rho^2)\,\mathbf{E}\,|\tilde{X}_k|^2,$$

где $\rho^2 < 1$ и не зависит от k.

Вернемся к наблюдениям

$$Y_k := Y_T[\varphi_k^T] = \theta_k + X_T[\varphi_k^T] = \theta_k + X_k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Здесь $X_k = X_T[\varphi_k^T]$. Выберем $h_k \in H_0$ так, чтобы координаты вектора наблюдений

$$\Bigl(\tilde{Y}_k = \theta_k + \tilde{X}_k, \quad k \in \mathbb{Z}\Bigr) \text{ при } \tilde{X} = X_k - X_T[h_k]$$

удовлетворяли условию $\mathbf{E}\,\tilde{Y}_k\,X_T[h] = 0$, если $h \in H_0$. В этом случае вектор $(\tilde{Y}_k,\ k \in \mathbb{Z})$ — достаточная статистика, так при $h \in H_0$ вектор $(\tilde{Y}_k,\ k \in \mathbb{Z})$ и случайные величины $X_T[h]$ независимы. Здесь мы учли, что распределение величин $X_T[h]$ при $h \in H_0$ не зависит от θ. Поэтому мы будем исследовать задачу оценивания неизвестного $\theta \in \Theta(\mathscr{L})$ по наблюдениям

$$\tilde{Y}_k = \theta_k + \tilde{X}_k,\ k \in \mathbb{Z}$$

и учитывать, что $\mathbf{E}\,\tilde{X}_k$ и $\mathbf{D}\,\tilde{X}_k \geq (1-\rho^2)\sigma_k^2$ в силу леммы 6.

3.4.2 Переход к дискретной схеме

Итак, мы будем исследовать задачу оценивания неизвестного $\theta \in \Theta(\tau)$ по наблюдениям

$$\tilde{Y}_k = \theta_k + \tilde{X}_k,\ k \in \mathbb{Z} \tag{46}$$

и учитывать, что $(\tilde{X}_k,\ k\in\mathbb{Z})$ гауссовский вектор со средним $\mathbf{E}\,\tilde{X}_k=0$ и

$$\mathbf{D}\,\tilde{X}_k=\tilde{\sigma}_k^2\geq(1-\rho^2)\sigma_k^2 \tag{47}$$

в силу леммы 6. Здесь $\Theta(\tau)$ прямоугольник

$$\Theta(\tau)=\{\theta:\,|\theta_k|\leq\tau_k,\ k\in\mathbb{Z})\}\,. \tag{48}$$

Вектор $\tau=(\tau_k,\ k\in\mathbb{Z})$ выберем следующим образом:

$$\tau_k^2=\frac{L\,\sigma_k^2}{\sum\limits_{|k|\leq N}\sigma_k^2(1+|k|)^{2\beta}}\ \text{ если } |k|\leq N;\quad \tau_k=0,\ \text{если } |k|>N. \tag{49}$$

Как было установлено, при $\varepsilon=1/T$, $N=\varepsilon^{-\frac{1+\alpha}{1+2\beta}}$ и при условии (39)

$$\tau_k^2\geq K\,\varepsilon\,f_\varepsilon(k), \tag{50}$$

для некотором $K>0$.

Отметим, что минимаксные риски $\mathscr{R}_T^*(\mathscr{L})$ и $R_T^*(\Theta(\tau))$ связаны неравенством

$$R_T^*(\Theta(\tau))\leq\mathscr{R}_T^*(\mathscr{L}). \tag{51}$$

Напомним, что

$$R_T^*(\Theta(\tau))=\inf_{\widehat{\theta}_T}\,R_T(\widehat{\theta}_T;\Theta(\tau)))=\inf_{\widehat{\theta}_T}\left(\sup_{\theta\in\Theta(\tau)}\mathbf{E}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\widehat{\theta}_k^T-\theta_k)^2\right)=$$

$$=\inf_{\widehat{\theta}_T}\left(\sup_{\theta\in\Theta(\tau)}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathbf{E}\,(\widehat{\theta}_k^T-\theta_k)^2\right).$$

Здесь $\widehat{\theta}_k^T$ — оценка, построенная по наблюдениям (46). Следующая лемма принадлежит С.В. Решетову [5].

Лемма 7. *Пусть* $\left(\tilde{X}_k,\ k\in\mathbb{Z}\right)$ *– гауссовский вектор с нулевым средним. Предположим также, что существует такая константа* $c>0$, *что для любого конечного набора* $\{a(v),\,v\in\mathbb{Z}\}$

$$\mathbf{E}\,|\tilde{X}_u-\sum_{v\neq u}a(v)\tilde{X}_v|^2\geq c\,\mathbf{E}|\tilde{X}_u|^2. \tag{52}$$

Тогда найдется такая константа $\kappa = \kappa(c) > 0$, зависящая только от c, что для любого вектора $\tau_u = (\tau_u,\ u \in \mathbb{Z}) \in \Theta(\tau)$ с неотрицательными координатами

$$\kappa \sum_{u \in \mathbb{Z}} \tau_u^2 \wedge \tilde{\sigma}_u^2 \leq R_T^*(\mathscr{L}) \tag{53}$$

Здесь $\tilde{\sigma}_u^2$ — величины, определенные в (47)

Заметим, что в силу замечания 2 к лемме 6 условие леммы выполнено для величин $\tilde{X}_k$, определенных в (46).

Лемма 8. *Пусть спектральная плотность f удовлетворяет условиям*

$$\sup_{k \in \mathbb{Z},\, \varepsilon > 0} f_\varepsilon(k) \left[\frac{1}{f}\right]_\varepsilon (k) \leq B < \infty, \tag{54}$$

при некотором $\alpha > -1$ найдется такая константа $0 < c \leq C < \infty$, что

$$c\,\varepsilon^\alpha \leq \frac{1}{2N} \sum_{|k| \leq N} f_\varepsilon(k) \leq C\,\varepsilon^\alpha. \tag{55}$$

Тогда при некоторой константе $m > 0$

$$\mathscr{R}_T^*(\mathscr{L}) \geq m\,T^{-\frac{2\beta(1+\alpha)}{1+2\beta}}. \tag{56}$$

Доказательство. Возьмем прямоугольник $\Theta(\tau)$

$$\Theta(\tau) = \{\theta :\ |\theta_k| \leq \tau_k,\ k \in \mathbb{Z})\}, \tag{57}$$

выбрав вектор $\tau = (\tau_k,\ k \in \mathbb{Z})$ выберем следующим образом:

$$\tau_k^2 = \frac{L\,\sigma_k^2}{\sum\limits_{|k| \leq N} \sigma_k^2 (1 + |k|)^{2\beta}} \ \text{ если } |k| \leq N; \quad \tau_k = 0, \text{ если } |k| > N. \tag{58}$$

Положим $\varepsilon = 1/T$, а величину $N > 0$ определим равенством $\varepsilon^{1+\alpha}\, N^{1+2\beta} = 1$. Из (53) и (47) следует, что

$$\mathscr{R}_T^*(\mathscr{L}) \geq \kappa\,(1 - \rho^2) \sum_{|k| \leq N} \tau_k^2 \wedge \sigma_k^2.$$

Как было установлено в (41)

$$\tau_k^2 \geq \frac{L}{D}\,\sigma_k^2 = \frac{L}{D}\,\varepsilon\, f_\varepsilon(k).$$

Поэтому при некотором $\kappa_2 > 0$

$$\mathscr{R}_T^*(\mathscr{L}) \geq \kappa_2 \varepsilon \sum_{|k|\leq N} f_\varepsilon(k)$$

Из (55) получаем

$$\mathscr{R}_T^*(\mathscr{L}) \geq c\kappa_2 \varepsilon^{1+\alpha} N.$$

Остается учесть, что $\varepsilon = 1/T$ и $\varepsilon^{1+\alpha}N^{1+2\beta} = 1$. ∎

4 Заключение

В работе исследовалась задача оценивания неизвестной 2π-периодической функции $s(t)$,

$$s(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \theta_k\, e^{ikt},$$

в случае, когда мы наблюдаем на растущем отрезке процесс $Y(t)$,

$$dY(t) = s(t)\,dt + dX(t), \quad |t| \leqslant T. \tag{59}$$

Здесь $X(t)$ — гауссовский процесс с нулевым средним и со стационарными приращениями со спектральной плотностью f. Предполагалось, что неизвестная функция s лежит в классе $\mathscr{L} = \mathscr{L}(\beta; L)$, определенным условием

$$\sum |\theta_k|^2 (1+k)^{2\beta} < L.$$

Пусть $\widehat{s}_T$ — оценка неизвестной функции $s \in \mathscr{L}$, построенная по наблюдениям (59). Определим величину риска при использовании оценки $\widehat{s}$ соотношением

$$\mathscr{R}_T(\widehat{s}_T; \mathscr{L}) = \sup_{s\in\mathscr{L}} \mathbf{E}\, \|\widehat{s}_T - s\|_{L^2}^2 .$$

Здесь $\|\cdot\|_{L^2}$ — норма в пространстве L^2 на отрезке $[-\pi,\pi]$, построенном по нормированной мере Лебега. Величина минимаксного риска определяется соотношением

$$\mathscr{R}_T^*(\mathscr{L}) = \inf_{\widehat{s}_T} \mathscr{R}_T(\widehat{s}_T; \mathscr{L}).$$

Основная проблема состояла в исследовании асимптотического поведения при $T \to \infty$ величины минимаксного риска $\mathscr{R}^*_T(\mathscr{L})$.

Случай, когда спектральная плотность f отделена от нуля и бесконечности, хорошо известен, и асимптотика при $T \to \infty$ величины минимаксного риска имеет вид:

$$\mathscr{R}^*_T(\mathscr{L}) \asymp T^{-\frac{2\beta}{1+2\beta}}.$$

Общий случай рассматривался в работах [5],[6]. Полученные в нашей работе результаты касаются модели, когда спектр сигнала сосредоточен в целых точках. Благодаря такому упрощению, удалось найти простые условия на спектральную плотность шума. Кроме того в предложенных нами условиях на спектральную плотность взят другой метод усреднения.

Мы предполагали, что спектральная плотность f удовлетворяет при некоторой константе B условию

$$\sup_{k \in \mathbb{Z},\, \varepsilon > 0} f_\varepsilon(k) \left[\frac{1}{f}\right]_\varepsilon (k) \le B < \infty. \tag{60}$$

Здесь для функции f и $\varepsilon > 0$ принято обозначение

$$f_\varepsilon(v) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{\pi\, x^2}\; f(v + \varepsilon x)\, dx.$$

Мы также предполагаем, что при некотором $\alpha > -1$ найдутся такие константы $0 < c \le C < \infty$, что

$$c\,\varepsilon^\alpha \le \frac{1}{2N} \sum_{|k| \le N} f_\varepsilon(k) \le C\,\varepsilon^\alpha. \tag{61}$$

Основной результат работы сформулирован в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть спектральная плотность f удовлетворяет условиям (60), (61), величины $\alpha > -1$, $\beta > 1$. Тогда найдутся такие константы $0 < m = m(B, c, C, \beta) \le M = M(B, c, C, \beta) < \infty$. что*

$$m\,T^{-\frac{2\beta(1+\alpha)}{1+2\beta}} \le \mathscr{R}^*_T(\mathscr{L}) \le M\,T^{-\frac{2\beta(1+\alpha)}{1+2\beta}}. \tag{62}$$

Список литературы

[1] Ю.А. Розанов, *Стационарные процессы.* Мир, М., 1963.

[2] А. М. Яглом, *Корреляционная теория процессов со случайными стационарными n-ми приращениями*, — Матем. сб., **37** (1955), 141—196

[3] Donoho, David L., Liu Richard C., MacGibbon Brenda, *Minimax Risk Over Hyperrectangles, and Implications.* — The Ann. Stat. **18**, 1416–1437.

[4] И.А. Ибрагимов, Р.З. Хасьминский, *О непараметрическом оценивании значения линейного функционала в гауссовском белом шуме.* — Теория вероятн. и её применен. **29** (1984), 19–32.

[5] С.В. Решетов, *Минимаксная оценка псевдо-периодической функции, наблюдаемой на фоне стационарного шума.* — Вестник СПбГУ, Серия 1, **2** (2010), 106–115.

[6] В.Н. Солев, *Оценка функции в гауссовском стационарном шуме: новые спектральные условия*— Зап. научн. семин. ПОМИ, **474** (2018), 222–232