САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ – ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ

КАФЕДРА МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ И КОМПЬЮТЕРНЫХ СИСТЕМ

Сачков Александр Валерьевич

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Применение методов актуарной математики в страховании

Направление 010400

Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,
доктор физ.-мат. наук,
профессор
Смирнов Н. В.

Санкт-Петербург

2019

Содержание

Введение

Актуарная наука является одной из наиболее динамически развивающихся математических областей в наше время, и на то существуют вполне естественные причины. Целью актуариев является управление рисками и снижение их негативных последствий. Бурное развитие экономики и глобализация производственных процессов приводят к увеличению общего числа рисков, а следовательно, к росту актуальности и объема работы акутариев.

Правильная оценка и нахождение путей подавления или сглаживания последствий рисков являются залогом практически полной непрерывности процессов производства и функционирования сферы услуг. По статистике в развитых странах страхуются практически все риски, о каких только можно помыслить (и ущерб от которых может быть выражен в валюте, об этом подробнее далее). В России с этим пока всё не так гладко – многие риски не страхуются даже не потому, что про них не знают, а потому, что рынок страхования не предоставляет соответствующих страховых продуктов (например, практически отсутствуют услуги страхования от перерывов в производстве или от убытков, связанных с отменой развлекательных мероприятий).

Процесс оценки рисков связан с процессом построения математических моделей соответствующих процессов. Как и всюду в математическом моделировании, одной из центральных задач здесь является сохранение баланса между сложностью модели (то есть возможностью проведения с ней практических расчётов) и близостью её к реальности (то есть соответствия реальному объекту и происходящим с ним процессами).

Одним из допущений, принимаемых в большинстве простых актуарных моделей, является неизменность процентной ставки. Кроме того, она предполагается известной на весь период моделирования. Как показывает практика, такое предположение совсем не соответствует действительности (см. таблицу [1]).

Таблица. Средняя процентная ставка по вкладам по всем российским банкам, отчёт ЦБ РФ, 2018

Месяц	Процентная ставка
Январь	6,65
Февраль	6,38
Март	6,30
Апрель	5,67
Май	6,28
Июнь	5,99
Июль	6,30
Август	7,18
Сентябрь	6,09
Октябрь	6,03
Ноябрь	6,92
Декабрь	6,69

Данная работа рассматривает (после напоминания необходимых сведений из смежных областей) возможности модификации одной актуарной модели с включением в них вариативности процентной ставки. В настоящее время существует три основных сценария такого включения (будут описаны позже); мы рассмотрим наиболее простой.

Помимо этого, изучается идея включения средств теории полезности (в данном случае денег) в актуарные модели с целью дальнейшего повышения их адекватности реальности. Также проводится сравнение всех вышеописанных подходов (начальный, с вариативностью, с полезностью, с вариативностью и полезностью) на простых численных данных.

В целом можно сказать, что работа – суть эксперимент по построению реальной математической модели со всеми необходимыми этапами:

1. Изучение объекта моделирования в реальной жизни, сбор сведений о нём, выделение значительных свойств и параметров.

2. Подбор и описание необходимых математических инструментов; обоснование такого выбора; при необходимости – выработка новых теоретических подходов на основе существующих.

3. Непосредственное построение модели и проверка её на адекватность и применимость.

Модель, рассматриваемая в работе, относится к страхованию жизни, однако общие идеи могут применяться и в других областях страхования.

Обзор литературы

Книг на русском языке, посвященных актуарным расчётам, не так уж и много, что обосновано относительной молодостью рынка страхования и, как следствие, низкому уровню страховой культуры как среди народа, так и среди специалистов, в нашей стране. Среди них можно выделить книги профессора МГУ Фалина [2], [3]. В них подробно рассматриваются основные модели, использующиеся в практических расчётах в реалиях отечественного рынка, равно как и сами расчёты, демонстрирующиеся на нетрудных численных примерах.

Также стоит отметить небольшую по объёму книгу [4], фокусирующуюся на пенсионном страховании. Помимо краткого описания основных понятий и схем, приводится также законодательная база страхования в РФ, что позволяют лучше понять специфику российского страхования и быстро погрузиться в изучение данной области.

На английском языке заслуживает внимания монография [5], детально описывающая инструменты, методы и перспективы развития современной актуарной математики. Книга издана обществом актуариев в соответствии с их требованиями к экзаменам, являющимся международным стандартом в сфере актуарной математики.

Предварительные сведения из теории вероятностей, математической статистики и теории полезности даются по книгам [6], [7]. Однако же они не являются узкоспециальными и могут быть почерпнуты и в любом другом издании по соответствующей теме.

Глава 1. Необходимые сведения

В данной главе приводятся необходимые для дальнейших рассмотрений (в частности, для постановки задачи в общем, а затем и в частном, виде) сведения из теории вероятностей, математической статистики, теории полезности и страхования.

§ 1.1. Теория вероятностей

Исследование рисков ведётся в основном с помощью математических инструментов теории вероятностей и математической статистики, причём первая применяется для построения моделей, тогда как вторая – для накопления и обработки численных данных с дальнейшей их «подстановкой» в модель. Такой выбор инструментарной базы обусловлен, прежде всего, случайной природой риска, которая является ключевым критерием, определяющим риск.

Далее кратко перечислим основные понятия теории вероятностей, которые потребуются нам в дальнейшем.

Неформальное определение вероятности может звучать следующим образом: вероятность – нормированная мера реализации случайных событий. Не вдаваясь в технические подробности, извлечём из данного краткого определения следующее:

1. Вероятность – это мера (в смысле определения из теории меры).
2. Вероятность нормирована в том смысле, что она всегда принимает значения от 0 до 1 включительно.
3. Аргументом для вероятности выступает случайное событие, то есть такое, что его исход не детерминирован (самый частый пример – бросок монетки).

Также нам понадобится понятие случайной величины. Случайная величина есть величина, принимающая в результате опыта одно значения из области возможных (заранее неизвестное). Так, случайной величиной можно считать количество очков, выпавшее при броске игрального кубика, то есть число от 1 до 6.

В актуарной математике обычно случайной величиной берётся последствия ущерба от риска, выраженные в денежном эквиваленте, или т.н. экономический риск. В страховании выразимость риска в деньгах является его характеристическим свойством, то есть риски, не удовлетворяющие ему, страхованию не подлежат. Другим таким свойством является наличие у сторон экономического интереса.

В страховании жизни также используются случайные величины возраста индивида в момент смерти и времени дожития (будут рассмотрены позднее).

Для работы со случайными величинами удобно использовать следующие понятия:

Функцией распределения (вероятностей) случайной величины X называют функцию $F_X(x)$, значение которой в точке x равно вероятности события $\{X \leq x\}$, т.е.

$$F_X(x) = \mathcal{P}(X \leq x)$$

Функция распределения позволяет проследить «наращение» вероятности по мере прохождения по области возможных значений случайной величины. Также полезным бывает построение графика данной функции с целью визуализации соответствующих данных.

Математическое ожидание случайной величины X – среднее значение случайной величины при стремлении количества испытаний ее к бесконечности.

Математическое ожидание дискретной случайной величины X вычисляется по формуле:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p_i,$$

где x_i – возможные значения X, p_i – соответствующие им вероятности.

Дисперсия случайной величины – математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания (другими словами, мера разброса значений случайной величины относительно ее математического ожидания):

$$D(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

Математическое ожидание и дисперсия позволяют получить представление о наиболее ожидаемом значении, которое случайная величина может принять и об отклонении от данного значения при большом количестве экспериментов, соответственно.

§ 1.2. Страхование

Перечислим основные термины из страхования, применяющиеся во всех областях страховой деятельности (пояснения приводятся из области автострахования как самой распространённой в России):

1. *Страховщик* – юридическое лицо, созданное в соответствии с законодательством РФ для осуществления страховой деятельности и имеющие государственные лицензии на эту деятельность.

2. *Страхователь* – тот, кого страхуют (может быть как физическим, так и юридическим лицом).

3. *Страховая премия* – плата за страхование, которую страхователь обязан уплатить страховщику в порядке и в сроки, установленные договором или законодательством (платёж может быть один или несколько).

4. *Страховое событие* – событие, на случай наступления которого проводят страхование (к примеру, в автостраховании страховым событием считается дорожно-транспортное происшествие (ДТП) с участием застрахованного транспортного средства (ТС)).

5. *Страховой случай* – свершившееся событие, с наступлением которого возникает обязанность страховщика провести страховую выплату по договору страхования в соответствии с *размером заявленных убытков (РЗУ)* (к примеру, в автостраховании страховым случаем считается наступление дорожно-транспортного происшествия (ДТП) с участием застрахованного транспортного средства (ТС)).

6. *Страховая выплата* – сумма, получаемая страхователем при наступлении страхового случая.

Отметим также, что наиболее типичные и часто встречающиеся договоры страхования разрабатываются типовым способом; в таком случае они называются *полисами*.

§ 1.3. Статистика

Страховые компании обладают большими запасами накопленных данных по полисам и произошедшим страховым случаям. Для обработки этих данных применяются различные специфические статистические методы. В нашем изложении они, однако, не потребуются, и мы их рассматривать не будем.

В страховании жизни широко используются так называемые *таблицы продолжительности жизни*. В них обычно указываются данные по выживаемости для выборки из большого (чаще всего выборки насчитывают около ≈ 100000) количества индивидов: сколько было живо к началу каждого периода, из чего рассчитывается количество и доля умерших. В частности, нас будет интересовать величина l_x – число индивидов, живых на начало периода x (за период обычно берут год).

§ 1.4. Теория полезности

Пусть дано множество альтернатив A. Каждый индивид на основе собственных предпочтений формирует отношение предпочтения на данном множестве, что значит следующее: для любых двух альтернатив x и y из A выполняется только одно из трёх – $x \preceq y$, то есть индивид либо предпочитает y, либо не делает между ними разницы; $x \sim y$, то есть индивид не делает между ними разницы; $x \prec y$, то есть индивид предпочитает y.

Чтобы такое отношение было в некотором роде разумным (то есть не приводило, например, к цикличности предпочтений), оно должно удовлетворять свойствам рефлексивности, полноты и транзитивности.

Часто полезность бывает удобно оценивать количественно. Для этой цели вводят так называемую функцию полезности $u : A \to \mathbb{R}$, которая каждой альтернативе сопоставляет вещественное число. Естественным требованием на такую функцию является её согласованность с отношением предпочтения, введённым выше, то есть:

1. $u(x) \leq u(y) \Leftrightarrow x \preceq y$
2. $u(x) = u(y) \Leftrightarrow x \sim y$
3. $u(x) < u(y) \Leftrightarrow x \prec y$

После того, как функция полезности введена, работают уже с ней, а не с системой предпочтения. Нам в дальнейшем понадобится, в частности, функция полезности денег (так как риски у нас будут выражены в денежном эквиваленте). Множество альтернатив в таком случае совпадает с $\mathbb{R}_+$(в случае необходимости возможно его расширение и до всего $\mathbb{R}$ для представления задолженностей). Не вдаваясь в подробности, такую функцию можно мыслить себе похожей на натуральный логарифм (чем денег больше, тем каждое новое увеличение их количества менее полезно – хотя бы из-за того, что меньше становится достаточно дорогих товаров/услуг).

§ 1.5. Актуарная математика

Как уже упоминалось выше, в актуарной математике чаще всего рассматривается случайная величина X, обозначающая последствия риска в денежном выражении. В страховании жизни, дополнительно вводят и изучают случайную величину, соответствующую возрасту индивида в момент смерти. Мы не будем различать индивида и его возраст в момент смерти (так как другие его характеристики нам не требуются для дальнейших построений). Также обозначим её за X. Пусть она дискретна, и её функция распределения есть $F_X(x)$.

Работают на практике обычно не с X и $F_X(x)$, а с их дополнениями:

Определение. Функция распределения вида

$$s(x) = 1 - F_X(x) = \mathcal{P}(X \leq x)$$

называется *функцией выживания.*

Определение. Случайная величина вида

$$T(x) = X - x$$

называется *остаточным временем жизни* индивида.

Эти два понятия являются центральными в страховании жизни. Вводятся также следующие обозначения: ${}_tq_x = \mathcal{P}(T(x) \leq t)$ – вероятность того, что X умрёт раньше, чем $x+t$ лет, и её дополнение, ${}_tp_x = 1 - {}_tq_x$ – вероятность того, что X выживет по меньшей мере в течение t лет с текущего года.

§ 1.6. Основные задачи актуарной математики

Теперь, когда у нас есть все необходимые инструменты и сведения, мы можем сформулировать основные задачи актуарной математики. Их, по существу, две (иногда выделяют три): расчёт страховых премий и расчёт оптимального объема запасов компании.

Расчёт страховых премий

Наиболее общая постановка задачи расчёта страховых премий звучит так: пусть у индивида имеется капитал ω и известна его функция полезности денег $u(x)$. Положим, что Y (во избежание коллизии обозначений) представляет собой размер случайного убытка индивида в денежном выражении. Индивид может приобрести полис у страховщика за сумму p. Тогда естественно задаться следующим вопросом: по какой величине p индивид готов купить полис, если считать, что при наступлении страхового случая весь случайный убыток Y будет возмещён?

Записывая вышесказанное формально, получаем:

$$u(\omega - G) = \mathbb{E}(u(\omega - Y)).$$

В базовых моделях полагают $G = \mathbb{E}(Y)$ (т.н. *нетто-премия*), в дальнейшем же используют выражения типа $G = (1 + a)\,\mathbb{E}(Y) + C$ (т.н. *брутто-премия*), где учтены как колебания убытка Y, так и постоянные издержки C.

Расчёт запасов компании

Страховщики имеют дело с большим количеством страхователей, риски которых разнообразны и разнородны (т.н. *портфели рисков*; случайность этих рисков вынуждают страховщика держать часть собранных премий в резерве; остальные деньги вкладываются в надежные финансовые институты). Естественно, балансировка объёмов резервов очень важна: как слишком большие, так и слишком маленькие объёмы приводят к негативным для страховщика последствиям (недополучению прибыли от вкладов и нехватке денег для произведения страховых выплат с потенциальным банкротством, соответственно).

Мы остановимся на первой задаче, рассмотрев для неё одну простую актуарную модель, которую будем модифицировать в соответствии с принципами математического моделирования.

Глава 2. Эволюционный процесс построения одной актуарной модели

§ 2.1. Описание модели

Полагаем время дискретным, с единичным периодом в один год. Есть m страхователей $X_1, \dots, X_m$, возраст каждого из которых в данный момент равен x. Каждый из них хочет заключить со страховщиком договор страхования следующего содержания: если страхователь проживёт ещё n лет, то страховщик выплачивает ему 1 условную единицу (к примеру, 1 условная единица может равняться 100.000 рублям) страховой выплаты. Для заключения договора страхователь должен выплатить страховщику премию (единожды). Наша задача заключается в расчёте размера данной премии при условии, что она будет приемлема для обеих сторон.

§ 2.2. Начальные вычисления

Перейдём к расчёту. Обозначим через $A_{x:\overline{n}}$ ожидаемое значение страхового обеспечения (в теории пенсионного обеспечения используют обозначение ${}_nE_x$). Тогда,

$$A_{x:\overline{n}} = \nu^n \frac{l_{x+n}}{l_x} = \nu^n {}_np_x, \tag{1}$$

где ν^n есть РЗУ для каждого страхователя.

Так как мы приняли страховую выплату равной 1 условной единице, то $\nu^n = (1+\delta)^{-n}$, где δ есть средняя процентная ставка на рынке займов (значение приводится к текущему моменту). Полученное нами выражение для $A_{x:\overline{n}}$ позволяет рассчитать в первом приближении размер нетто-премии для каждого страхователя. Для брутто-премии будем использовать выражение

$$\overline{A_{x:\overline{n}}} = (1+\theta)A_{x:\overline{n}} + C. \tag{2}$$

Посмотрим на численный пример, где параметры модели принимают следующие значения: $x = 40$, $m = 100000$, $n = 10$, $\delta = 0{,}03$. Используя данные таблицы продолжительности жизни из [5], получаем такие значения: $l_{40} = 94926,\ l_{50} = 91526$. Тогда

$$A_{40:\overline{10}} = (1+\delta)^{-n}\frac{l_{50}}{l_{40}} = (1+0{,}03)^{-10}\frac{91526}{94926} \approx 0{,}717443. \tag{3}$$

Возможна следующая интерпретация данного результата: если каждый страхователь, доживший до 50 лет хочет получить 1 условную единицу, то они должны заплатить не меньше 0,717443 условных единиц в качестве премии (количество знаков после запятой определяется денежным эквивалентом условной единицы).

Мы рассчитали нетто-премию; теперь для расчёта брутто-премии нужно лишь задать параметры θ и C: пусть $\theta = 0{,}2$; $C = 0{,}005$; отсюда

$$\overline{A_{40:\overline{10}}} \approx 0{,}865932. \tag{4}$$

Интерпретация остаётся неизменной.

§ 2.3. Небольшая вариативность

Вопрос о включении вариативности процентной ставки в актуарные модели остаётся открытым. На данный момент разработаны три группы сценариев такого включения. Краткое их описание сводится к следующему:

1. Актуарий не обладает большим количеством данных и определяет процентные ставки на будущее, исходя из собственных знаний и предположений;

2. Актуарий обладает большим запасом данных прошлых лет и предсказывает на их основе с помощью статистических методов процентные ставки;

3. Актуарий, обладая значительным запасом данных прошлых лет, использует помимо него для предсказания процентных ставок сведения об общих закономерностях фондовых рынков.

Естественно, выбор подходящей группы сценариев или какой-либо их комбинации определяется задачей и объёмом имеющихся данных.

Пусть теперь процентная ставка не постоянна, но меняется, и в соответствии с первой группой сценариев получены для следующих n лет значения $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ – процентная ставка для каждого года. Выражение для $A_{x:\overline{n}}$ тогда преобразуется следующим образом:

$$A_{x:\overline{n}} = \prod_{i=1}^{n} (1+\delta_i)^{-1} {}_n p_x. \tag{5}$$

Для брутто-премии получаем:

$$\overline{A_{x:\overline{n}}} = (1+\theta)[\prod_{i=1}^{n} (1+\delta_i)^{-1} {}_n p_x] + C. \tag{6}$$

Пусть $\Delta = (0{,}03; \ldots; 0{,}02; \ldots; 0{,}03)$ (это означает, что для какого-то года $i_0 \in \overline{1:10}$ процентная ставка равна 2%, а для остальных – 3%). Тогда, используя формулы (5), (6), получаем (остальные данные из примера – прежние):

$$A_{40:\overline{10}} \approx 0{,}724476, \tag{7}$$

$$\overline{A_{40:\overline{10}}} \approx 0{,}874371. \tag{8}$$

Как можем заметить, даже относительно небольшое изменение вектора Δ привело к значительному (в масштабах работы страховщика, имеющего дело с сотнями тысяч однотипных контрактов) изменению результирующей премии.

§ 2.4. Интеграция полезности

Попробуем теперь включить в модель функцию полезности денег $u(x)$ (пока абстрактную). Для этого положим, что каждый страхователь имеет капитал ω. Что в данном случае будет случайной величиной-убытком Y? Нетрудно видеть, что её распределение имеет вид:

$$\begin{cases} \mathcal{P}(Y = 0) = {}_n q_x, \\ \mathcal{P}(Y = \nu^n) = {}_n p_x, \end{cases} \tag{9}$$

то есть в случае недожития не теряется ничего, а в случае дожития при условии, что договор не был заключён, теряется условная единица страховой выплаты, приведённая к текущему моменту.

Применим ранее упомянутое соотношение (здесь G может обозначать как нетто-, так и брутто-премию)

$$u(\omega - G) = \mathbb{E}(u(\omega - Y)).$$

Так как Y дискретна, то и $\omega - Y$ дискретна с распределением

$$\begin{cases} \mathcal{P}(\omega - Y = \omega) = {}_nq_x, \\ \mathcal{P}(\omega - Y = \omega - \nu^n) = {}_np_x. \end{cases} \tag{10}$$

Согласно известным формулам для функции от дискретной случайной величины (см. [6]), $u(\omega - Y)$ также является дискретной случайной величиной с распределением

$$\begin{cases} \mathcal{P}(u(\omega - Y) = u(\omega)) = {}_nq_x, \\ \mathcal{P}(u(\omega - Y) = u(\omega - \nu^n)) = {}_np_x. \end{cases} \tag{11}$$

Далее, вычисляя математическое ожидание, получаем:

$$\mathbb{E}(u(\omega - Y)) = u(\omega) \times {}_nq_x + u(\omega - \nu^n) \times {}_np_x. \tag{12}$$

Окончательное выражение имеет вид:

$$u(\omega - G) = u(\omega) \times {}_nq_x + u(\omega - \nu^n) \times {}_np_x. \tag{13}$$

Уравнение (13) позволяет для каждой конкретной функции полезности $u(x)$ найти премию G, за которую страхователь гарантированно согласится на заключение договора.

Положим $u(x) = \ln(x + 1)$. Выполняя элементарные преобразования, получаем:

$$\begin{aligned} \ln(\omega - G + 1) = \ln(\omega + 1) \times {}_nq_x + \ln(\omega - \nu^n + 1) \times {}_np_x \Rightarrow \\ \omega - G + 1 = (\omega + 1)^{{}_nq_x} \times (\omega - \nu^n + 1)^{{}_np_x} \Rightarrow \\ G = \omega + 1 - (\omega + 1)^{{}_nq_x} \times (\omega - \nu^n + 1)^{{}_np_x}. \end{aligned} \tag{14}$$

Если теперь капитал $\omega = 1$, то

$$G \approx 0{,}048. \tag{15}$$

Такой подход, однако, даёт размер премии лишь в первом приближении. Гораздо лучше таким образом можно отвечать на вопрос: «Готов ли будет страхователь на заключение договора при данном размере премии?». Почему это так?

Посмотрим ещё раз на соотношение

$$u(\omega - G) = \mathbb{E}(u(\omega - Y)).$$

Что здесь написано? Ровно то, что полезность от потери премии для страхователя совпадает с математическим ожиданием полезности от потери случайного убытка, то есть между этими двумя альтернативами страховщик не делает разницы. Естественно, что ответ здесь зависит от того, какая функция полезности применяется.

Заменив знак равенства на знак неравенства

$$u(\omega - G) > \mathbb{E}(u(\omega - Y)),$$

мы можем уже отвечать на вопрос, который несомненно интересен страховщикам: «Предпочтёт ли страхователь случайному и большему по размеру риску меньший по размеру, но гарантированный, убыток?».

Применим этот способ к численным результатам, полученным нами выше: $G = A_{40:\overline{10}} \approx 0{,}717443$, остальные данные – те же (процентная ставка постоянна); тогда

$$u(\omega - G) \approx 0{,}248856; \tag{16}$$

$$\mathbb{E}(u(\omega - Y)) \approx 0{,}675704; \tag{17}$$

откуда делаем вывод, что для страхователя с такой функцией полезности и капиталом предпочтительнее будет риск случайного убытка.

§ 2.5. Общая схема действий

На основании вышеизложенного можно предложить следующую схему действий при работе с задачами по вычислению страховой премии:

1. Рассчитать премию в первом приближении;
2. Вычислить выражения (16), (17);
3. Сделать вывод о применимости модели и, при необходимости, провести соответствующие изменения.

Заключение

К основным результатам работы можно отнести:

1. Мотивированный выбор и исследование инструментов различных математических областей, необходимых для решения прикладных задач актуарной математики;

2. Рассмотрение и модификация одной актуарной модели с проведением численных расчётов;

3. Прослеживание общей техники математического моделирования с прохождением всех её этапов;

4. По результатам работы к печати подготовлена статья [8].

К недостаткам (= планам на будущее) работы следует отнести:

1. Рассмотрена только модель с дискретным временем, но не с непрерывным;

2. Не рассмотрена возможность использования нескольких выплат премии вместо одной;

3. Капитал страхователя считается постоянным, хотя он тоже меняется с течением времени;

4. Все страхователи предполагаются идентичными, однако же в реальности для каждого из них используются собственные характеристики (капитал, размер убытка, и, как следствие, размер премии);

5. Обойдена стороной статистическая сторона накопления и обработки данных;

6. Идея разделения страхователей на децили по доходам и использование для каждой своей функции полезности не использована;

7. Примеры в работе носят модельный характер.

Список литературы

1. Официальный сайт Центрального Банка РФ [Электронный ресурс]: URL:http://www.cbr.ru/statistics/?PrtId=int_rat (дата обращения: 16.03.2019).

2. Фалин Г. И. Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Анкил, 2002. 261 с.

3. Викторова В. С., Степанянц А. С. Модели и методы расчета надежности технических систем. М.: ЛЕНАНД, 2014. 256 с.

4. Дорофеев Б. В., Замураев К. А, Смирнов Н. В. Актуарные расчеты в пенсионном страховании (Конспект лекций), СПб.: Издательский Дом Федоровой Г.В., 2018. 50 с.

5. Bowers N. L., Gerber H. U., Hickman J. C., Jones D. A, Nesbitt C. J. Actuarial Mathematics, 2nd ed. The Society of Actuaries, 1997.

6. Буре В. М., Парилина Е. М. Теория вероятностей и математическая статистика, СПб.: Лань, 2013. 416 с.

7. Малыхин В. И. Социально-экономическая структура общества: Учеб. пособие для вузов, М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. 175 с.

8. Sachkov A. V. Actuarial calculations and random interest rates // Процессы управления и устойчивость. 2019. Т. 6. № 1.