

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
КАФЕДРА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА

Рочев Константин Дмитриевич

Выпускная квалификационная работа магистра

Расчет долговечности составных труб,  
подверженных коррозии

Направление 01.04.02

Прикладная математика и информатика

Магистерская программа ВМ.5518.2017

Надёжность и безопасность сложных систем

Научный руководитель  
доктор физ.-мат. наук,  
профессор  
Пронина Ю. Г.

Санкт-Петербург

2019

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1 Постановка задачи</b>	<b>5</b>
1.1 Предмет исследования . . . . .	5
1.2 Используемая модель коррозионного износа . . . . .	6
1.3 Цель исследования . . . . .	7
<b>2 Обзор литературы</b>	<b>8</b>
2.1 Составные цилиндры . . . . .	8
2.2 Механохимическая коррозия . . . . .	10
<b>3 Определение напряжений в составном цилиндре</b>	<b>13</b>
3.1 Вычисление контактного давления . . . . .	13
3.2 Условия равнопрочности . . . . .	14
3.3 Ограничения на параметры . . . . .	18
3.4 Сравнение с однослойным вариантом . . . . .	20
<b>4 Моделирование процесса коррозии</b>	<b>21</b>
<b>5 Численные эксперименты</b>	<b>24</b>
<b>Заключение</b>	<b>28</b>
<b>Список литературы</b>	<b>29</b>

## Введение

В данной работе рассматривается механохимическая коррозия составных цилиндров с натягом, подверженных внутреннему и внешнему давлению.

Металлы и их сплавы являются одним из основных конструкционных материалов используемых составных цилиндров. В процессе их эксплуатации они взаимодействуют с различными веществами, которые их разрушают. Этот процесс называют коррозией.

Более 90% металлофонда РФ находится под воздействием агрессивных сред. Потери от коррозии в РФ достигают 12% металлофонда, что приводит к утрате до 30% ежегодного производства металла [4].

Коррозия является одной из главных причин повреждений и износа различных трубопроводов, в частности, нефте- и газопроводов. Проблемы данного характера могут нести не только финансовый ущерб, но и экологический [12].

Поскольку механические напряжения могут ускорять коррозионные процессы, протекающие в некоторых системах металл–среда [3], проектирование изделий с минимально возможным уровнем напряжений актуально не только с точки зрения прочности, но и для минимизации потерь металлов. В работах [8, 9, 11] построены решения различных задач о механохимической коррозии однослойных толстостенных сосудов давления. Для снижения максимальных напряжений в стенках сосудов их изготавливают двухслойными с предварительным натяжением [13].

Цилиндры, состоящие из двух или более слоёв, называют *составными*. Практическое применение имеют составные цилиндры, полученные натягом. Вызванные давлениями напряжения компенсируются напряжениями натяга. Пользу и применение подобные составные цилиндры нашли и во многих сферах. Например, в таких, как химическая промышленность,

добыча полезных ископаемых, машиностроение [14, 17, 25], где цилиндрические детали находятся под воздействием высоких давлений как внутри, так и снаружи.

Требуется провести оценку возможности продления долговечности двухслойного составного цилиндра с предварительным натягом по сравнению с его однослойным вариантом при эксплуатации под давлением коррозионных сред. Для данной цели были проделаны следующие шаги:

- установлен характер влияния физических свойств материалов цилиндров на величину натяга;
- составлен численный метод решения системы, моделирующей процесс коррозии в составной трубе;
- исследовано изменение напряжений и размеров составных труб в процессе коррозии;
- оценена их долговечность по сравнению с однослойными трубами.

# 1 Постановка задачи

## 1.1 Предмет исследования

Рассматривается толстостенный составной цилиндр, состоящий из двух цилиндров с концентрическими отверстиями, полученный при помощи натяга. На первый (внутренний) цилиндр некоторым способом (например, нагреванием и последующим охлаждением) натянут второй (внешний) цилиндр. Внешний радиус первого цилиндра больше внутреннего радиуса (радиуса отверстия) второго цилиндра на величину  $\Delta$ , называемую *натягом*.

После усадки цилиндров внешний радиус внутреннего цилиндра и внутренний радиус внешнего цилиндра будут одинаковыми, обозначим эту величину буквой  $c$  и назовём *межтрубным радиусом*.

Внутренний радиус составного цилиндра обозначим  $r$ , а внешний —  $R$ .

Предполагается, что составной цилиндр находится под действием давлений на внутреннюю и внешнюю поверхности, обозначим эти давления  $p_r$  и  $p_R$  соответственно (рис. 1).

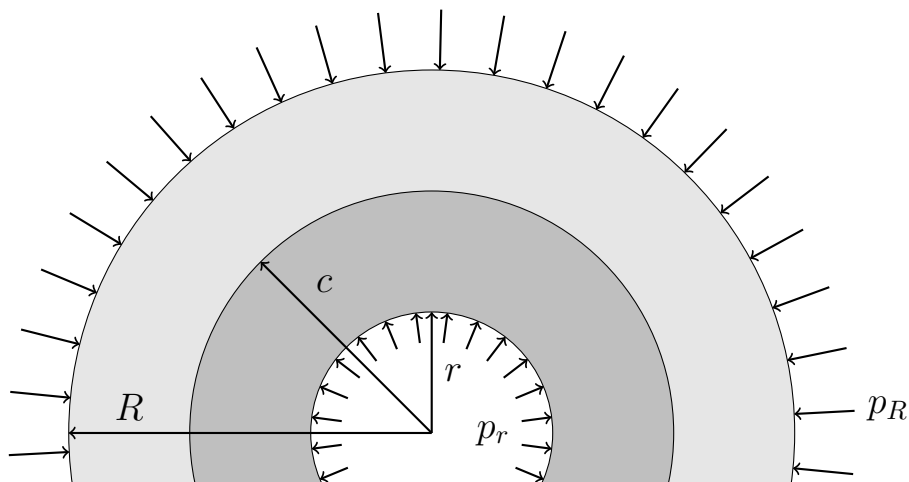


Рис. 1: составная труба из двух цилиндров

Длина цилиндра полагается достаточно большой. Поэтому можно

считать, что продольное напряжение  $\sigma_{zz}$  распределено вдоль цилиндра равномерно и влияние днщ цилиндра (при их наличии) на радиальные перемещения ничтожно мало.

Контактное давление, действующее на внешнюю поверхность внутреннего цилиндра и на внутреннюю поверхность внешнего цилиндра, обозначим  $p_c$  (рис. 2).

Материалы цилиндров предполагаются однородными и изотропными.  $E_1, \mu_1$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала внутреннего цилиндра,  $E_2, \mu_2$  — те же характеристики материала внешнего цилиндра.

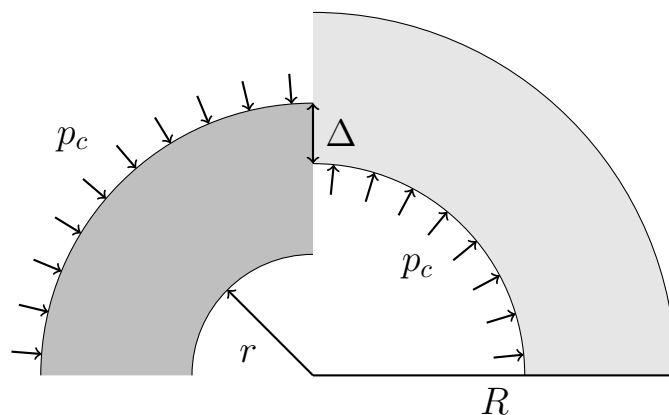


Рис. 2: усадка цилиндров

## 1.2 Используемая модель коррозионного износа

Полагается, что составной цилиндр подвержен равномерной внешней и внутренней механохимической коррозии. Таким образом, в течение времени  $t$  внутренний и внешний радиусы цилиндра изменяются со следующими скоростями (согласно [3, 6, 10]):

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{dr}{dt} = [a_r + |m_r \sigma_1(r)|] \exp(-b_r t) \text{ при } |\sigma_1(r)| \geq |\sigma_r^{th}|, \\ v_R &= -\frac{dR}{dt} = [a_R + |m_R \sigma_1(R)|] \exp(-b_R t) \text{ при } |\sigma_1(R)| \geq |\sigma_R^{th}|, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $a_r, a_R, m_r, m_R$  — некоторые постоянные, определяемые опытным путём,  $\sigma_r^{th}, \sigma_R^{th}$  — пороговые напряжения,  $b_r, b_R$  — показатели затухания коррозии,  $\sigma_1$  — максимальное нормальное напряжение.

При этом  $a_r = v_r^0 - |m_r \sigma_r^{th}|$ ,  $a_R = v_R^0 - |m_R \sigma_R^{th}|$ , где  $v_r^0, v_R^0$  — начальные скорости коррозии при  $|\sigma_1(r)| < |\sigma_r^{th}|$ ,  $|\sigma_1(R)| < |\sigma_R^{th}|$ .

Через  $r_0, R_0$  обозначены начальные внутренний и внешний радиусы цилиндра.

### 1.3 Цель исследования

Установить характер влияния физических свойств материалов цилиндров на величину натяга; исследовать изменение напряжений и размеров составных труб в процессе коррозии; оценить их долговечность по сравнению с однослойными трубами.

## 2 Обзор литературы

В данной главе представлен обзор литературы, уделяющей внимание составным цилиндрам с натягом и коррозии в однослойных цилиндрах.

### 2.1 Составные цилиндры

В работе [2] представлен пример вычисления натягов в составном цилиндре с внутренним давлением, приводящих к одинаковым значениям окружного напряжения на внутренних поверхностях всех слоёв. Однако данный способ не приводит к наименьшему значению ни окружного, ни эквивалентного напряжения. Это происходит из-за фиксированного значения межтрубных радиусов. Данный пример отлично показывает, что варьирование натягов в составном цилиндре позволяет сделать внутренние поверхности каждого слоя одинаково прочными.

В работе [13] автор приводит способ определения напряжений в двухслойных трубах из одного материала с внутренним давлением и без наличия какой-либо осевой силы (полагается  $\sigma_{zz} = 0$ ). Для этого случая выведены условия равнопрочности внутренних поверхностей обоих слоёв составной трубы, которые также эту прочность максимизируют.

Эти условия выражаются в виде зависимостей натяга и межтрубного радиуса от внутреннего и внешнего радиусов, внутреннего давления и модуля Юнга материала составного цилиндра.

При этих условиях посадка труб снижает эквивалентное напряжение  $\sigma_{\text{эКВ}} = \sigma_1 - \sigma_3$  в  $\frac{2R}{R+r}$  раз. Таким образом, при очень малом внутреннем радиусе  $r$  прочность увеличивается почти в два раза. А для тонкостенных труб, когда  $r \approx R$ , посадка труб не даст существенного положительного эффекта.



Данные условия равнопрочности называются *условиями Гадолина*. Гадолин А. В. (1828–1892) — русский учёный в области артиллерийского вооружения, который первым вывел эти условия. В его работах исследовалась рациональность применения составных цилиндров в стволах артиллерийских орудий.

Эта работа показывает, что варьирование двух характеристик составного цилиндра — натяга и межтрубного радиуса, отличающих его от обычного однослойного варианта, позволяет не только сделать оба слоя равнопрочными, но и максимально прочными.

В статье [17] рассматривается двухслойный цилиндр из различных материалов, для которого определяется оптимизационная задача вычисления радиусов  $r$ ,  $s$ ,  $R$  и натяга  $\Delta$ , обеспечивающих наименьший вес составного цилиндра, который будет достаточно прочен для заданного внутреннего давления. Примером применения решения данной задачи является производство деталей на заводе по производству полиэтилена высокого давления. Снижение веса позволяет существенно снизить стоимость таких деталей и требования к различным характеристикам других частей системы (вес этих деталей исчисляется в десятках килограмм).

Приведен пример решения такой задачи для детали в виде составного цилиндра из стали и алюминия. В этом примере вес этой детали удаётся сократить на 60% по сравнению с весом эквивалентного стального цилиндра при самых высоких значениях внутреннего давления. При этом отмечено, что выигрыш в весе тем выше, чем больше рабочее внутреннее давление.

Статья [25] рассматривает определение напряжений в многослойном замкнутом (имеющем днища с обеих сторон) цилиндрическом сосуде. Авторы статьи приводят в качестве самого широкого применения таких сосудов реакторы высокого давления. Для решения задачи разработана аналити-

ческая модель. Для подтверждения правильности полученных результатов был использован конечно-элементный анализ.

Модель, разработанная в [25], была использована в работе [14]. Получившаяся аналитическая модель позволила изучить влияние внутреннего давления и температур внутренней и внешней сред на напряжения в двухслойном цилиндре. Эта модель представляет интерес ввиду широкого использования цилиндрических деталей в производстве в условиях высоких давлений и температур.

В результате исследования выявлено, что на окружное напряжение разница температур внутренней и внешней сред влияет намного больше внутреннего давления. Однако если слои составного цилиндра сделаны из различных материалов, то влияние внутреннего давления возрастает, поэтому при большой разнице температур оба фактора должны учитываться для достижения максимальной эффективности и прочности.

## **2.2 Механохимическая коррозия**

Равномерная коррозия, т. е. когда скорость коррозии практически одинакова по всей поверхности, является самым распространённым видом коррозии.

Механохимической коррозией называют такую коррозию, когда на её скорость влияет значение механических напряжений. Данный термин был введён Э. М. Гутманом [1]

Были разработаны различные модели зависимости скорости коррозии от напряжений. Например, линейные [3], экспоненциальные [1, 16], квадратичные [3, 7] и другие [21, 24]. В данных моделях зависимость задана от различных видов эквивалентного напряжения. Линейная модель подтвер-

ждается опытными данными [6]. Кроме этого, линейная модель коррозии активно используется в теоретических работах [18–20, 22, 23].

При этом в работе [5] исследованы несколько моделей механохимической коррозии толстостенной цилиндрической оболочки, в которых зависимость от напряжений выражена линейно, экспоненциально или квадратично. Результаты в этих моделях отличаются менее, чем на 10%.

Согласно опытным данным в работе [6], может существовать некоторое пороговое значение эквивалентного напряжения. При значениях напряжения, меньших данного порога, напряжение не влияет на скорость коррозии. Кроме того, эти же данные показывают, что скорость коррозии может экспоненциально зависеть от времени. Это связано с тем, что продукты коррозии образуют на поверхности металлов плотную плёнку, которая препятствует коррозионному процессу.

Кроме того, опытные данные работы [6], а также теоретическая работа [10] показывают, что в линейных моделях коррозии в качестве используемого в расчётах напряжения наилучшим выбором является максимальное нормальное напряжение, т. е.  $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1$ .

В статье [8] приведено решение задачи о равномерной поверхностной механохимической коррозии однослойной толстостенной трубы, где скорость коррозии определяется формулами (1). Выведено и решено дифференциальное уравнение относительно  $\sigma_1(r)$ .

В работе [9] исследована та же самая задача, но с учётом температур внутренней и внешней сред. К зависимости коррозии от максимального главного напряжения и времени добавлена экспоненциальная зависимость от температуры. Также рассмотрены случаи, когда максимальным главным напряжением являются либо продольные, либо окружные напряжения. В обоих случаях задача сводится к решению одного из обыкновенных

дифференциальных уравнений первого порядка относительно внутреннего или внешнего радиуса трубы. Для обоих уравнений построены аналитические решения. Предложен алгоритм для прогнозирования долговечности трубы по различным критериям.

### 3 Определение напряжений в составном цилиндре

#### 3.1 Вычисление контактного давления

Согласно [13], радиальное перемещение в однослойном однородном цилиндре при отсутствии осевой силы определяется следующим образом:

$$u(\rho) = \frac{1 - \mu p_r r^2 - p_R R^2}{E} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - r^2} \rho + \frac{1 + \mu p_r - p_R r^2 R^2}{E} \frac{r^2 R^2}{R^2 - r^2} \frac{1}{\rho}, \quad (2)$$

а при наличии днищ:

$$u(\rho) = \frac{1 - 2\mu p_r r^2 - p_R R^2}{E} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - r^2} \rho + \frac{1 + \mu p_r - p_R r^2 R^2}{E} \frac{r^2 R^2}{R^2 - r^2} \frac{1}{\rho},$$

а также при отсутствии продольных перемещений:

$$u(\rho) = \frac{1 - (1 + \mu)\mu p_r r^2 - p_R R^2}{E} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - r^2} \rho + \frac{1 + \mu p_r - p_R r^2 R^2}{E} \frac{r^2 R^2}{R^2 - r^2} \frac{1}{\rho},$$

где  $\rho$  — расстояние между осью цилиндра и его произвольной точкой,

$R$  — внешний радиус цилиндра,  $r$  — внутренний радиус,

$p_r$  и  $p_R$  — внутреннее и внешнее давление,

$E$  и  $\mu$  — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала цилиндра.

Далее будем считать, что осевая сила отсутствует и будем использовать формулу (2). В двух других случаях алгоритм расчётов производится аналогичным образом.

Перейдём к перемещениям в составном цилиндре. После усадки цилиндров внешний радиус внутреннего цилиндра сократится и точки внешней поверхности получат отрицательное перемещение  $u_1$ . Внутренний радиус внешнего цилиндра увеличится на  $u_2$ . Сумма этих абсолютных перемещений должна равняться натягу:

$$u_2 - u_1 = \Delta. \quad (3)$$

Перемещение  $u_1$  можно определить по формуле (2) при  $\rho = c$ , приняв  $p_r = 0$ ,  $p_R = p_c$ ,  $R = c$ :

$$u_1 = -\frac{1 - \mu_1}{E_1} \frac{c^3}{c^2 - r^2} p_c - \frac{1 + \mu_1}{E_1} \frac{r^2 c}{c^2 - r^2} p_c. \quad (4)$$

Перемещение  $u_2$  можно определить по формуле (2) при  $\rho = c$ , приняв  $p_r = p_c$ ,  $p_R = 0$ ,  $r = c$ :

$$u_2 = \frac{1 - \mu_2}{E_2} \frac{c^3}{R^2 - c^2} p_c + \frac{1 + \mu_2}{E_2} \frac{cR^2}{R^2 - c^2} p_c. \quad (5)$$

Подставляя формулы (4) и (5) в формулу (3), получим следующее выражение для  $p_c$ :

$$p_c = \Delta : \left( \frac{1 - \mu_2}{E_2} \frac{c^3}{R^2 - c^2} + \frac{1 + \mu_2}{E_2} \frac{cR^2}{R^2 - c^2} + \frac{1 - \mu_1}{E_1} \frac{c^3}{c^2 - r^2} + \frac{1 + \mu_1}{E_1} \frac{cr^2}{c^2 - r^2} \right). \quad (6)$$

Если цилиндры состоят из одного материала, т. е.  $E_1 = E_2 = E$  и  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ , то формула (6) примет следующий упрощенный вид, который совпадает с видом формулы, полученной в [13]:

$$p_c = \frac{E\Delta}{2c^3} \frac{(R^2 - c^2)(c^2 - r^2)}{R^2 - r^2}. \quad (7)$$

### 3.2 Условия равнопрочности

Для дальнейших нужд отметим, что решение Ламе плоской задачи о толстостенном однослойном однородном цилиндре в цилиндрических координатах имеет следующий вид [2, 13]:

$$\sigma_{\theta\theta}(\rho) = \frac{p_r r^2 - p_R R^2}{R^2 - r^2} + \frac{p_r - p_R}{R^2 - r^2} \frac{r^2 R^2}{\rho^2}, \quad (8)$$

$$\sigma_{\rho\rho}(\rho) = \frac{p_r r^2 - p_R R^2}{R^2 - r^2} - \frac{p_r - p_R}{R^2 - r^2} \frac{r^2 R^2}{\rho^2}, \quad (9)$$

$$\sigma_{zz}(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{при отсутствии осевой силы,} \\ \frac{p_r r^2 - p_R R^2}{R^2 - r^2} & \text{при наличии днщ ,} \\ 2\mu \frac{p_r r^2 - p_R R^2}{R^2 - r^2} & \text{при отсутствии продольных перемещений ,} \end{cases} \quad (10)$$

где  $r \leq \rho \leq R$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

Ввиду того, что задача рассматривается в рамках линейной теории упругости можно применять принцип суперпозиции. Вычислив по данным формулам радиальные и окружные напряжения для составного цилиндра, работающего как одно целое, необходимо их просуммировать с напряжениями, вызванными натягом. Для вычисления напряжений натяга нужно рассматривать внутренний цилиндр без внутреннего давления и с внешним давлением  $p_c$ , а внешний цилиндр — с внутренним давлением  $p_c$  и без внешнего давления. Пример распределения напряжений по толщине в составном цилиндре приведён на рис. 3.

Таким образом, получим следующие формулы для определения напряжений, действующих во внутреннем цилиндре ( $r \leq \rho \leq c$ ):

$$\sigma_{\theta\theta}(\rho) = \frac{p_r r^2 - p_R R^2}{R^2 - r^2} + \frac{p_r - p_R}{R^2 - r^2} \frac{r^2 R^2}{\rho^2} - \frac{p_c c^2}{c^2 - r^2} \left(1 + \frac{r^2}{\rho^2}\right), \quad (11)$$

$$\sigma_{\rho\rho}(\rho) = \frac{p_r r^2 - p_R R^2}{R^2 - r^2} - \frac{p_r - p_R}{R^2 - r^2} \frac{r^2 R^2}{\rho^2} - \frac{p_c c^2}{c^2 - r^2} \left(1 - \frac{r^2}{\rho^2}\right). \quad (12)$$

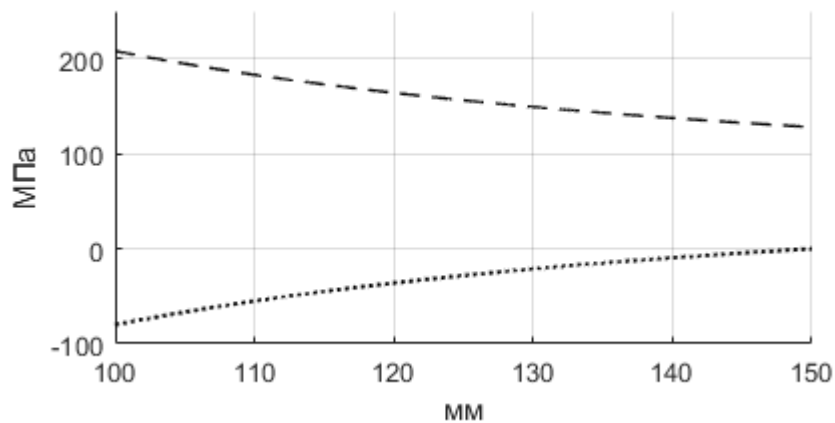
Формулы для определения напряжений, действующих во внешнем цилиндре ( $c \leq \rho \leq R$ ):

$$\sigma_{\theta\theta}(\rho) = \frac{p_r r^2 - p_R R^2}{R^2 - r^2} + \frac{p_r - p_R}{R^2 - r^2} \frac{r^2 R^2}{\rho^2} + \frac{p_c c^2}{R^2 - c^2} \left(1 + \frac{R^2}{\rho^2}\right), \quad (13)$$

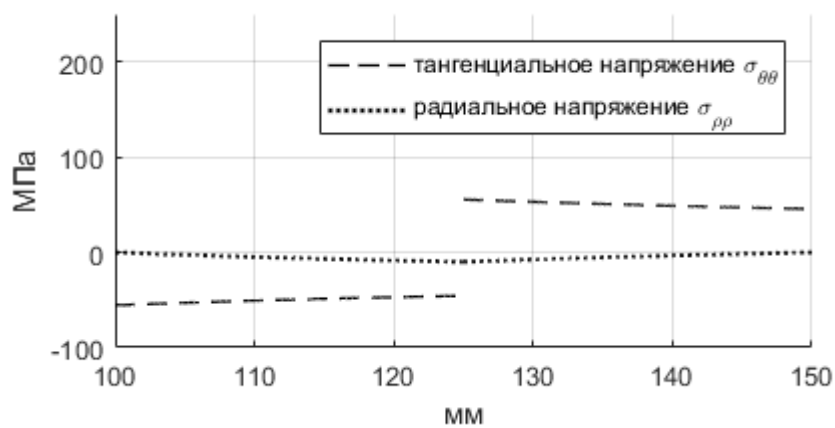
$$\sigma_{\rho\rho}(\rho) = \frac{p_r r^2 - p_R R^2}{R^2 - r^2} - \frac{p_r - p_R}{R^2 - r^2} \frac{r^2 R^2}{\rho^2} + \frac{p_c c^2}{R^2 - c^2} \left(1 - \frac{R^2}{\rho^2}\right). \quad (14)$$

Тангенциальное напряжение натяга  $\sigma_{\theta\theta}$  на внутреннем цилиндре отрицательно и уменьшает суммарное напряжение, которое имеет максимум на внутренней поверхности (рис. 3б). Таким образом, составной цилиндр способен выдержать большее давление на внутренней поверхности по сравнению с обычным (рис. 3в).

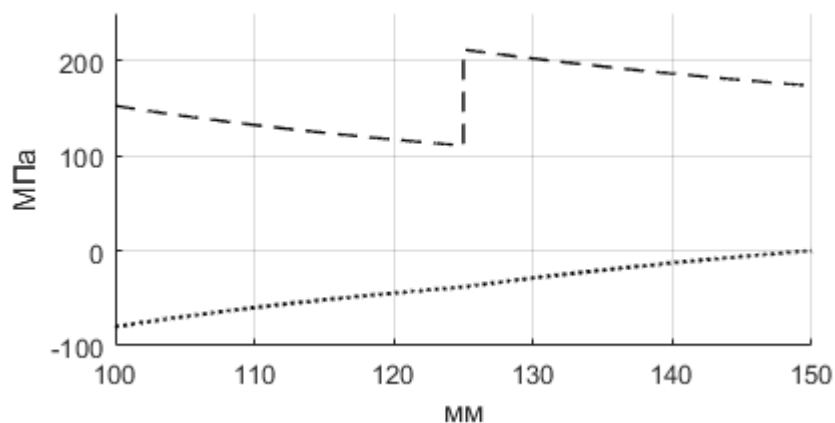
Однако на внешнем цилиндре окружное напряжение положительно и увеличивает суммарное напряжение (рис. 3б), поэтому на внутренней поверхности внешнего цилиндра также достигается максимальное значение (рис. 3в).



(а) составляющие напряжений от давлений среды



(б) составляющие напряжений от натяга



(в) итоговые напряжения в составном цилиндре

Рис. 3: напряжения в составном цилиндре при  $r = 100$  мм,  $R = 150$  мм,  $p_r = 80$  МПа,  $p_R = 0$  МПа с натягом, при котором  $c = 125$  мм,  $p_c = 10$  МПа

Таким образом, согласно идее Гадолина [13], натяг  $\Delta$  следует выбирать так, чтобы внутренние поверхности обоих цилиндров были одинаковы



прочны. Условие равнопрочности выражается следующим образом:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^r = \sigma_{\text{ЭКВ}}^c,$$

где верхний индекс означает полярный радиус  $\rho$  точки, в которой вычисляется эквивалентное напряжение.

Предположим, что главные напряжения  $\sigma_1 = \sigma_{\theta\theta}$  и  $\sigma_3 = \sigma_{\rho\rho}$  (ограничения, при которых данные условия будут выполняться, даны далее).

Примем в качестве эквивалентного напряжения

$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\rho\rho}$ . Таким образом, имеем:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^r = 2R^2 \frac{p_r - p_R}{R^2 - r^2} - \frac{2p_c c^2}{c^2 - r^2}, \quad (15)$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^c = 2 \frac{p_r - p_R}{R^2 - r^2} \frac{r^2 R^2}{c^2} + \frac{2p_c R^2}{R^2 - c^2}. \quad (16)$$

Приравняв эти выражения, получим

$$(p_r - p_R) \frac{R^2}{c^2} \frac{c^2 - r^2}{R^2 - r^2} = p_c \left( \frac{c^2}{c^2 - r^2} + \frac{R^2}{R^2 - c^2} \right).$$

Подставив сюда  $p_c$  из формулы (6), получим натяг, обеспечивающий равнопрочность:

$$\Delta = \left( \frac{1 - \mu_2}{E_2} \frac{c^3}{R^2 - c^2} + \frac{1 + \mu_2}{E_2} \frac{cR^2}{R^2 - c^2} + \frac{1 - \mu_1}{E_1} \frac{c^3}{c^2 - r^2} + \frac{1 + \mu_1}{E_1} \frac{cr^2}{c^2 - r^2} \right) (p_r - p_R) \frac{R^2}{c^2} \frac{c^2 - r^2}{R^2 - r^2} \frac{(R^2 - c^2)(c^2 - r^2)}{R^2(c^2 - r^2) + c^2(R^2 - c^2)}. \quad (17)$$

При таком натяге контактное давление  $p_c$  примет следующий вид:

$$p_c = (p_r - p_R) \frac{R^2}{c^2} \frac{c^2 - r^2}{R^2 - r^2} \frac{(R^2 - c^2)(c^2 - r^2)}{R^2(c^2 - r^2) + c^2(R^2 - c^2)}. \quad (18)$$

Теперь, если подставить это выражение в формулу (15), получим величину эквивалентного напряжения на внутренних поверхностях обоих цилиндров:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^r = 2R^2 \frac{p_r - p_R}{R^2 - r^2} \left( 1 - \frac{1}{\frac{R^2}{R^2 - c^2} + \frac{c^2}{c^2 - r^2}} \right).$$

Чтобы найти минимум данного выражения по переменной  $c$  на интервале  $(r, R)$ , достаточно лишь найти на этом же интервале минимум функции  $y(c) = \frac{R^2}{R^2 - c^2} + \frac{c^2}{c^2 - r^2}$ .

Производная этой функции следующая:

$$\frac{dy(c)}{dc} = \frac{2cR^2}{(R^2 - c^2)^2} - \frac{2cr^2}{(c^2 - r^2)^2} = \frac{2c(c^4 - R^2r^2)(R^2 - r^2)}{(R^2 - c^2)^2(c^2 - r^2)^2}.$$

Приравняв эту производную нулю, найдём её корни:  $c = 0; \pm\sqrt{Rr}$ .

Только корень

$$c = \sqrt{Rr} \quad (19)$$

лежит в интервале  $(r, R)$ . Покажем, что он является искомым минимумом.

Функция  $y_c$  непрерывно дифференцируема на интервале  $(r, R)$ , при этом  $\lim_{c \rightarrow r} y(c) = +\infty$  и  $\lim_{c \rightarrow R} y(c) = +\infty$ . Единственным экстремумом на данном интервале является точка  $c = \sqrt{Rr}$ , максимумом она быть не может, следовательно она является минимумом функции  $y(c)$  на интервале  $(r, R)$ .

Полученная формула (17) при  $p_R = 0$ ,  $E_1 = E_2 = E$  и  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$  имеет следующий вид:

$$\Delta = \frac{2p}{E} \frac{cR^2(c^2 - r^2)}{R^2(c^2 - r^2) + c^2(R^2 - c^2)}. \quad (20)$$

Полученные условия равнопрочности (20) и (19) называются *условиями Гадолина* [13].

В формулах (17) и (19) условия Гадолина обобщены для цилиндров из разных материалов и при наличии внешнего давления  $p_R$ , но с условием, что

$$\sigma_1 = \sigma_{\theta\theta} \text{ и } \sigma_3 = \sigma_{\rho\rho}. \quad (21)$$

### 3.3 Ограничения на параметры

Выясним, какие требуется ограничения на параметры задачи, чтобы выполнялось условие (21).

Вычислим  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  по формуле (11), подставив выражения для  $p_c$  и  $c$  из формул (18) и (19):

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{p_r r^2 - p_R R^2}{R^2 - r^2} + \frac{p_r - p_R}{R^2 - r^2} R^2 - \frac{2p_c c^2}{c^2 - r^2} = \frac{p_r r^2 - p_R R^2}{R^2 - r^2} + \frac{p_r - p_R}{R^2 - r^2} Rr.$$

Вычислим  $\sigma_{\rho\rho}(r)$  по формуле (12):

$$\sigma_{\rho\rho}(r) = -p_r < 0.$$

Из неравенства

$$p_r r^2 - p_R R^2 > 0 \quad (22)$$

следует  $0 < p_r r^2 - p_R R^2 < p_r R^2 - p_R R^2 = R^2(p_r - p_R)$  (т. к.  $R > r > 0$ ), т. е.  $p_r - p_R > 0$ .

Отсюда и из условия (22) получим, что  $\sigma_{\theta\theta}(r) > \sigma_{zz} > \sigma_{\rho\rho}(r)$  для любого варианта  $\sigma_{zz}$  из формулы (10).

Теперь вычислим  $\sigma_{\theta\theta}(c)$  по формуле (13):

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}(c) &= \frac{p_r r^2 - p_R R^2}{R^2 - r^2} + \frac{p_r - p_R}{R^2 - r^2} \frac{R^2 r^2}{c^2} + \frac{p_c c^2}{R^2 - c^2} \left(1 + \frac{R^2}{c^2}\right) = \\ &= \frac{p_r r^2 - p_R R^2}{R^2 - r^2} + \frac{p_r - p_R}{R^2 - r^2} Rr + \frac{p_r - p_R}{2}. \end{aligned}$$

Вычислим  $\sigma_{\rho\rho}(c)$  по формуле (14):

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}(c) &= \frac{p_r r^2 - p_R R^2}{R^2 - r^2} - \frac{p_r - p_R}{R^2 - r^2} \frac{R^2 r^2}{c^2} + \frac{p_c c^2}{R^2 - c^2} \left(1 - \frac{R^2}{c^2}\right) = \\ &= \frac{p_r r^2 - p_R R^2}{R^2 - r^2} - \frac{p_r - p_R}{R^2 - r^2} Rr + \frac{p_r - p_R}{2} \frac{(R - r)^2}{R^2 - r^2}. \end{aligned}$$

Определим знак  $\sigma_{\rho\rho}(c)$  при соблюдении условия (22):

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}(c) &= \frac{1}{R^2 - r^2} \left( p_r R^2 - p_R R^2 - rR(p_r - p_R) - \frac{1}{2}(p_r - p_R)(R - r)^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2(R^2 - r^2)} (p_r + p_R)(r^2 - R^2) < 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что  $\sigma_{\theta\theta}(r) > \sigma_{zz} > \sigma_{\rho\rho}(r)$  для любого варианта  $\sigma_{zz}$  из формулы (10) при соблюдении условия (22).

Таким образом, требование (21) выполняется при наложении ограничения (22) на радиусы цилиндра и оказываемые на него давления.

### 3.4 Сравнение с однослойным вариантом

Для однослойного цилиндра в случае выполнения условия (22) несложно вычислить значение эквивалентного напряжения на внутренней поверхности по формулам (8) и (9):

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{r,1} = (p_r - p_R) \frac{2R^2}{R^2 - r^2}.$$

Для составного двухслойного цилиндра с натягом (17) минимальное значение эквивалентного напряжения достигается при условии (19):

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{r,min} = (p_r - p_R) \frac{R}{R - r}.$$

Если сравнить отношение этих формул, то получим:

$$\frac{\sigma_{\text{ЭКВ}}^{r,1}}{\sigma_{\text{ЭКВ}}^{r,min}} = \frac{2R}{R + r}.$$

Таким образом, оценка выигрыша от использовании составного цилиндра по сравнению с однослойным вариантом при условии (22) аналогичен результату, полученному в [13] в случае наличия только внутреннего давления и одинаковых материалов составной трубы. Результат в [13] является частным случаем условия (22), выведенного в этой работе.

## 4 Моделирование процесса коррозии

При условии (22) имеем  $\sigma_1 = \sigma_{\theta\theta}$ . Перепишем систему (1):

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= [a_r + |m_r \sigma_{\theta\theta}(r)|] \exp(-b_r t) \text{ при } |\sigma_{\theta\theta}(r)| \geq |\sigma_r^{th}|, \\ \frac{dR}{dt} &= -[a_R + |m_R \sigma_{\theta\theta}(R)|] \exp(-b_R t) \text{ при } |\sigma_{\theta\theta}(R)| \geq |\sigma_R^{th}|,\end{aligned}\tag{23}$$

где  $a_r, a_R, m_r, m_R$  — некоторые постоянные, определяемые опытным путём,  $\sigma_r^{th}, \sigma_R^{th}$  — пороговые напряжения,  $b_r, b_R$  — показатели затухания коррозии,  $\sigma_{\theta\theta}$  — окружное напряжение.

При этом  $a_r = v_r^0 - |m_r \sigma_r^{th}|$ ,  $a_R = v_R^0 - |m_R \sigma_R^{th}|$ , где  $v_r^0, v_R^0$  — начальные скорости коррозии при  $|\sigma_{\theta\theta}(r)| < |\sigma_r^{th}|$ ,  $|\sigma_{\theta\theta}(R)| < |\sigma_R^{th}|$ .

Таким образом, имеем задачу Коши, состоящую из системы обыкновенных дифференциальных уравнений (23) и начальных условий

$$\begin{aligned}r|_{t=0} &= r_0, \\ R|_{t=0} &= R_0,\end{aligned}\tag{24}$$

где через  $r_0, R_0$  обозначены начальные внутренний и внешний радиусы цилиндра.

В системе (23) для вычисления  $\sigma_{\theta\theta}(r)$  и  $\sigma_{\theta\theta}(R)$  необходимо использовать формулы (11) и (13) соответственно. Получим следующие выражения для определения окружных напряжений на внутренней и внешней поверхностях составной трубы:

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta}(r) &= \frac{p_r r^2 - p_R R^2}{R^2 - r^2} + \frac{p_r - p_R}{R^2 - r^2} R^2 - \frac{2p_c c^2}{c^2 - r^2}, \\ \sigma_{\theta\theta}(R) &= \frac{p_r r^2 - p_R R^2}{R^2 - r^2} + \frac{p_r - p_R}{R^2 - r^2} r^2 + \frac{2p_c c^2}{R^2 - c^2}.\end{aligned}\tag{25}$$

Если натяг  $\Delta$  и межтрубный радиус  $c$  выбраны произвольным образом в допустимых пределах, то межтрубное давление  $p_c$  в данных выражениях вычисляется по формуле (6).

Если же натяг  $\Delta$  и межтрубный радиус  $c$  выбраны оптимальным образом согласно условиям равнопрочности по формулам (17) и (19) соответственно, то межтрубное давление  $p_c$  вычисляется по формуле (18). При этом стоит отметить, что при этом натяг и межтрубный радиус не изменяются во времени, то есть при  $t > 0$  формулы (17) и (19) примут следующий вид:

$$\Delta = \left( \frac{1 - \mu_2}{E_2} \frac{c^3}{R_0^2 - c^2} + \frac{1 + \mu_2}{E_2} \frac{cR_0^2}{R_0^2 - c^2} + \frac{1 - \mu_1}{E_1} \frac{c^3}{c^2 - r_0^2} + \frac{1 + \mu_1}{E_1} \frac{cr_0^2}{c^2 - r_0^2} \right) (p_r - p_R) \frac{R_0^2}{c^2} \frac{c^2 - r_0^2}{R_0^2 - r^2} \frac{(R_0^2 - c^2)(c^2 - r_0^2)}{R_0^2(c^2 - r_0^2) + c^2(R_0^2 - c^2)} \quad (26)$$

и

$$c = \sqrt{R_0 r_0}. \quad (27)$$

Полагаем, что долговечность составной трубы определяется моментом времени выполнения какого-либо из следующих условий:

- 1) в какой-либо точке трубы эквивалентное напряжение  $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\rho\rho}$  достигает заранее установленного предела прочности  $\sigma_s$ ;
- 2) радиусы трубы достигают критического значения.

Для проверки выполнения первого условия необходимо исследовать изменение величины эквивалентного напряжения  $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\rho\rho}$  на внутренних поверхностях обоих слоёв составной трубы, так как ранее в данной работе было показано, что своё максимальное значение эквивалентное напряжение  $\sigma_{\text{экв}}$  достигает именно там. Для этой цели необходимо вычислять их изменяющееся значение в течение времени по формулам (15) и (16), учитывая изменение величин внутреннего радиуса  $r$ , внешнего радиуса  $R$  и межтрубного давления  $p_c$ .

Для проверки выполнения второго условия необходимо рассмотреть время достижения величинами внутреннего радиуса  $r$  и внешнего радиуса  $R$  значения межтрубного радиуса  $s$ , а также толщины трубы  $R - r$  некоторой критической величины, определяемой каким-либо из множества способов.

## 5 Численные эксперименты

Ввиду того, что построить аналитическое решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (23) не представляется возможным, для исследования данной системы следует использовать численные методы.

Для этой цели был проведён анализ возможных для использования методов.

Проведём анализ на следующем примере — имеется двухслойная составная труба, при этом:

- начальный внутренний радиус  $r_0 = 50$  мм,
- начальный внешний радиус  $R_0 = 100$  мм,
- материал внутренней трубы имеет модуль Юнга  $E1 = 210$  ГПа и коэффициент Пуассона  $\mu_1 = 0.3$ ,
- материал внешней трубы имеет модуль Юнга  $E2 = 70$  ГПа и коэффициент Пуассона  $\mu_2 = 0.3$ ,
- составная труба подвержена внутреннему давлению  $p_r = 150$  МПа,
- а также внешнему давлению  $p_R = 10$  МПа,
- в условиях коррозии  $a_r = a_R = 0.1 \frac{\text{мм}}{\text{год}}$ ,  $m_r = m_R = 0.0005 \frac{\text{мм}}{\text{год}\cdot\text{Па}}$ ,  
 $b_r = b_R = 0.001 \frac{1}{\text{год}}$ ,
- предел прочности принимаем равным  $\sigma_s = 450$  МПа.

Для данного примера используем формулу (27) для вычисления межтрубного радиуса  $c$ :

$$c = \sqrt{R_0 r_0} = \sqrt{5000} \approx 70.71 \text{ мм}$$



и формулу (26) для вычисления натяга  $\Delta$ :

$$\Delta \approx 0.09899 \text{ мм.}$$

Также вычислим начальное межтрубное давление по формуле (18):

$$p_c \approx 23.33 \text{ МПа.}$$

Самым простейшим численным методом решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений является метод Эйлера с постоянным шагом. Определим долговечность составной трубы с помощью данного метода при различных величинах шага  $\Delta t$ . Прделаем то же самое с помощью метода Рунге-Кутты 5-го порядка. Результат представлен в таблице 1.

$\Delta t$ , мм	$t_E$ , год	$t_{RK}$ , год	$\Delta t$ , мм	$t_E$ , год	$t_{RK}$ , год
2	58	56	0.01	55.93	55.92
1	57	56	0.005	55.92	55.92
0.5	56.5	56	0.002	55.92	55.92
0.2	56	56	0.001	55.919	55.919
0.1	56	56	0.0005	55.9185	55.9185
0.05	55.95	55.95	0.0002	55.9184	55.9184
0.02	55.94	55.92	0.0001	55.9184	55.9184

Таблица 1:  $\Delta t$  — шаг метода,  $t_E$  — долговечность составной трубы по методу Эйлера,  $t_{RK}$  — долговечность по методу Рунге-Кутты 5-го порядка

Из таблицы 1 можно сделать вывод о наличии внутренней сходимости метода обоих методов для нашего случая, так как долговечность составной трубы при уменьшении шага изменяется в пределах величины уменьшения шага. Существенной разницы между результатами обоих методов нет, поэтому достаточно использования метода Эйлера с постоянным шагом.

Исследуем изменение эквивалентного напряжения  $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\rho\rho}$  на внутренних поверхностях обоих слоёв составной трубы из данного выше примера в процессе коррозии. Результат представлен на рис. 4.

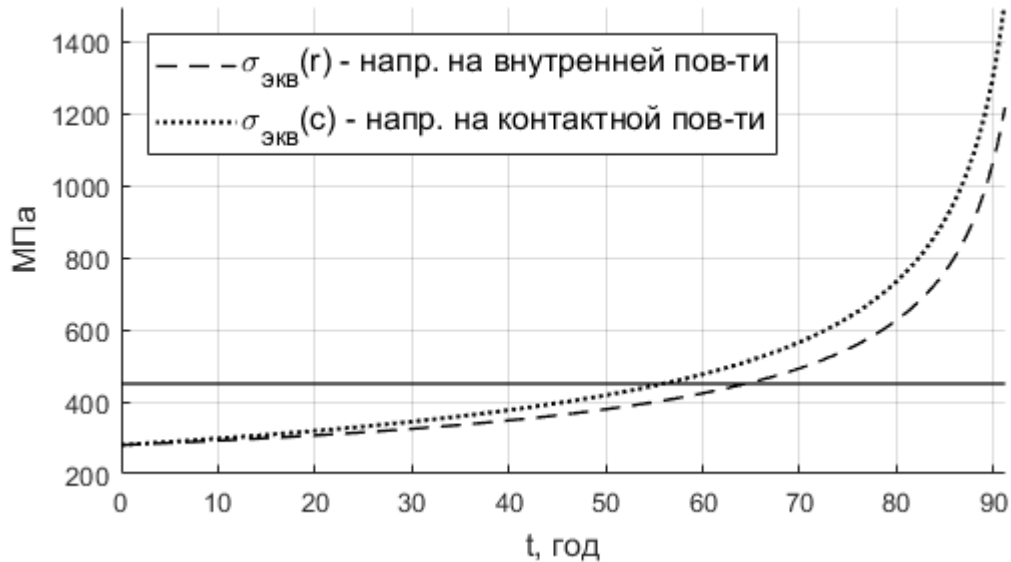


Рис. 4: изменение эквивалентного напряжения на внутренних поверхностях обоих слоёв составной трубы в процессе коррозии

Как видно, одинаково прочные в начальный момент времени обе поверхности в процессе коррозии перестают быть таковыми. Увеличивающийся внутренний радиус  $r$  и уменьшающийся внешний радиус  $R$  составной трубы увеличивают эквивалентное напряжение. При этом  $\sigma_{\text{экв}}$  на внутренней поверхности внешнего слоя достигается раньше.

Стоит отметить, что межтрубное давление  $p_c$  уменьшается, как показано на рис. 5, но изменение радиусов вносит более существенный вклад в величину эквивалентного напряжения.

Сравним долговечность составной трубы по сравнению с однослойным вариантом. На рис. 6 представлены графики изменения эквивалентного напряжения  $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\rho\rho}$  в составной трубе из данного выше примера, где она состоит из двух слоёв из разных материалов, и однослойной трубы с такими же геометрическими характеристиками, но при этом модуль

Юнга материала трубы  $E = 210$  ГПа по всей толщине трубы.

Составная труба в начальный момент времени имеет более низкое эквивалентное напряжение за счёт напряжений натяга. В процессе коррозии составная труба остаётся прочнее однослойного варианта и достигает предела прочности позже на  $t = 56 - 36 = 20$  лет.

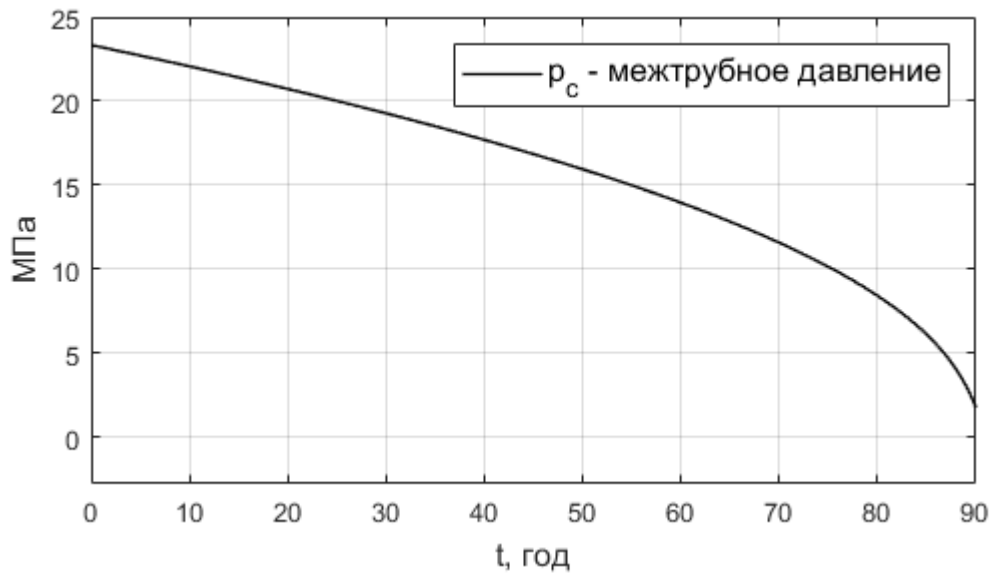


Рис. 5: изменение межтрубного давления в составной трубе в процессе коррозии

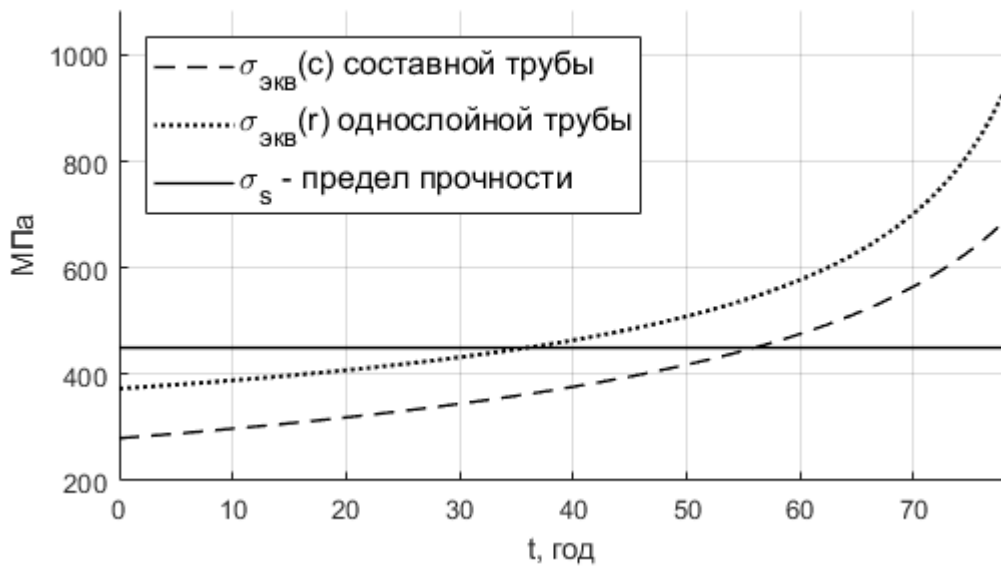


Рис. 6: изменение прочности в составной трубе и однослойном варианте в процессе коррозии

## Заключение

В данной работе исследованы составные трубы, подверженные равномерной механохимической коррозии. Выведено оптимальное значение натяга в составной трубе, зависящее от размеров и характеристик материалов трубы. Исследовано изменение напряжений в процессе коррозии. Оценена долговечность составных труб по сравнению с их однослойными вариантами.

## Список литературы

- [1] Гутман Э. М. Механохимия металлов и защита от коррозии // М.: Металлургия, 1981. 232 с
- [2] Дарков А. В., Шпиро Г. С. Сопротивление материалов. Изд. 4-е, переработанное // М.: Высшая школа, 1975. 654 с.
- [3] Долинский В. М. Расчет нагруженных труб, подверженных коррозии // Химическое и нефтяное машиностроение. 1967. №2. С. 9-10.
- [4] Кац Н. Г., Стариков В. П., Парфенова С. Н. Химическое сопротивление материалов и защита оборудования нефтегазопереработки // М.: Машиностроение, 2011. 436 с.
- [5] Овчинников И. Г. Об одной модели коррозионного разрушения // Механика деформ. сред, Саратов: СПИ, №6, 1979. С. 183–188.
- [6] Павлов П. А., Кадырбеков Б. А., Колесников В. А. Прочность сталей в коррозионных средах // Алма-Ата: Наука, 1987. 272 с.
- [7] Петров В. В., Овчинников И. Г., Шихов Ю. М. Расчет элементов конструкций, взаимодействующих с агрессивной средой // Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1987. 288 с.
- [8] Пронина Ю. Г. Оценка устойчивости упругой трубы под давлением коррозионных сред // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2006. №3. С. 55-63.
- [9] Пронина Ю. Г. Расчет долговечности упругой трубы под действием продольной силы, давления и осесимметричного нагрева в условиях равномерной коррозии // Проблемы прочности и пластичности. 2009. №71. С. 129-135.

- [10] Седова О. С., Пронина Ю. Г. О выборе эквивалентного напряжения в задачах о механохимической коррозии сферических элементов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. №2. С. 33–44.
- [11] Седова О. С., Пронина Ю. Г., Кабриц С. А. Коррозия сферических элементов под действием давления и неравномерного нагрева // Деформация и разрушение материалов. 2018. № 1. С. 2-7.
- [12] Солодовников А. Ю. Воздействие нефтегазопроводов на окружающую среду в Тюменской области: факторы и последствия // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 7. Геология. География. 2004. №4. С. 85-96.
- [13] Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. Учеб. для вузов. 10-е изд., перераб. и доп. // М.: Изд-во МГТУ, 2000. 592 с.
- [14] Bahoum K., Diany M., Mabrouki M. Stress analysis of compound cylinders subjected to thermo-mechanical loads // Journal of Mechanical Science and Technology, 31(4), 2017, pp. 1805–1811.
- [15] Fridman M. M., Elishakoff I. Design of bars in tension or compression exposed to a corrosive environment // Ocean Systems Engineering, Vol. 5(1), 2015, pp. 21-30.
- [16] Gutman E.M., Bergman R.M., Levitsky S.P. Influence of internal uniform corrosion on stability loss of a thin-walled spherical shell subjected to external pressure // Corrosion Science, Vol. 111, 2016, pp. 212-215.
- [17] Majzoobi G. H., Ghomi A. Optimization of compound pressure cylinders // Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering, Vol. 15, 2006, pp. 135-145.

- [18] Pronina Y. An analytical solution for the mechanochemical growth of an elliptical hole in an elastic plane under a uniform remote load // *European Journal of Mechanics, A/Solids*, Vol. 61, 2017, pp. 357-363.
- [19] Pronina Y. G., Khryashchev S.M. Mechanochemical growth of an elliptical hole under normal pressure // *Materials Physics and Mechanics*, Vol. 31(1-2), 2017, pp. 52-55.
- [20] Pronina Y., Sedova O., Grekov M., Sergeeva T. On corrosion of a thin-walled spherical vessel under pressure // *International Journal of Engineering Science*, Vol. 130, September, 2018, pp. 115-128
- [21] Rusanov A.I. Thermodynamic aspects of materials science // *Russian Chemical Reviews*, Vol. 85(1), 2016, pp. 1-13.
- [22] Sedova O., Pronina Y. A New Model for the Mechanochemical Corrosion of a Thin Spherical Shell // *EPJ Web of Conferences*, Vol. 108, 2016, art. no. 02040.
- [23] Sedova O. S., Pronina Y. G., Kuchin N. L. A thin-walled pressurized sphere exposed to external general corrosion and nonuniform heating // *AIP Conference Proceedings*, Vol. 1959, 2018, art. no. 070032.
- [24] Yang H.-Q., Zhang Q., Tu S.-S., Wang Y., Li Y.-M., Huang Y. A study on time-variant corrosion model for immersed steel plate elements considering the effect of mechanical stress // *Ocean Engineering*, Vol. 125, 2016, pp. 134-146.
- [25] Zhang Q., Wang Z. W., Tang C. Y., Hu D. P., Liu P. Q., Xia L. Z. Analytical solution of the thermo-mechanical stresses in a multilayered composite pressure vessel considering the influence of the closed ends // *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 98, 2012, pp. 102-110.