Санкт-Петербургский государственный университет

Фарвазов Константин Мидарисович

Выпускная квалификационная работа магистра

Математическая модель сопровождения инвестиционного проекта

Направление 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
Основная образовательная программа ВМ.5517.2017 ««Методы прикладной математики и информатики в задачах управления»

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук,
профессор Малафеев О.А.

Рецензент:
доктор физ.-мат. наук,
профессор Пичугин Ю.А.

Санкт-Петербург

2019

Содержание

Введение

Реализация и сопровождение инвестиционных проектов в конкурентных условиях ставит перед инвесторами множество различных задач, которые требуют строгого и формализованного подхода к решению. Часто в инвестиционных проектах, связанных с расширением деятельности компаний и выходом на новые рынки сбыта, одной из важнейших задач является задача размещения объектов инфраструктуры, в первую очередь таких, как пункты производства, переработки и реализации той или иной продукции. Такие задачи могут требовать решения в условиях различных конфигураций транспортных сетей, а также вариантов расположения в них покупателей и иных инфраструктурных объектов.

В данной работе строится математическая модель выбора и сопровождения инвестиционного проекта, который реализуется инвесторами в условиях выхода на новый рынок сбыта для своей продукции. Инвестиционный проект заключается в размещении пунктов производства продукции и пунктов её реализации в доступных для этого узлах имеющейся транспортной сети. Цель проекта – наладить продажу однотипной продукции конечным покупателям, расположенным в некоторых узлах транспортной сети, и получить от этого максимальную прибыль. При этом инвесторы договариваются между собой о размещении своих объектов на основе принципа оптимальности. В качестве принципа оптимальности в данной работе рассматривается компромиссное решение.

Для производства продукции инвесторам необходимо закупать сырье в одном из пунктов добычи сырья, расположенных в некоторых узлах транспортной сети. При этом количество закупаемого сырья определяется спросом на продукцию, который, в свою очередь, диктуется покупателями. Далее сырье доставляется в пункты производства, где, согласно производственным функциям, производится продукция. В качестве производственных функций в данной работе рассматриваются функции Кобба-Дугласа.

После производства продукцию для временного хранения отправляют на один из складов, которые также расположены в некоторых узлах транспортной сети. При этом перед инвесторами возникает необходимость оплаты аренды склада. Со склада продукция отправляется в пункт реализации, где её могут приобрести покупатели. Покупатели стремятся минимизировать свои затраты на покупку необходимого им количества продукции и исходя из этого выбирают тот или иной пункт реализации.

Для реализации инвестиционного проекта инвесторам необходимо решить задачу размещения пунктов производства и пунктов реализации продукции в узлах транспортной сети при заданном расположении пунктов добычи сырья, складов и покупателей в соответствии с принципом компромиссного решения.

В работу входит введение, неформальная постановка задачи и её формализация, обзор литературы, две главы, выводы, заключение, список литературы и приложение.

Во введении представлено описание исследуемой модели, определена задача и описаны объекты исследования.

В обзоре литературы содержится информация об источниках, использованных при написании данной работы.

В первой главе представлен формализованный алгоритм решения поставленной задачи, а также рассмотрены алгоритмы, использующиеся в процессе решения: алгоритм Флойда-Уоршелла нахождения кратчайших расстояний между вершинами взвешенного графа и алгоритм нахождения компромиссного решения.

Во второй главе приведен численный пример для случая размещения двух пунктов производства и двух пунктов реализации продукции при заданном расположении шести покупателей, двух пунктов добычи сырья и двух складов.

Выводы содержат описание полученных результатов.

В заключении подводятся итоги работы и описываются возможности применения работы на практике.

Приложение включает в себя программу на языке C++, реализующую алгоритм Флойда-Уоршелла нахождения кратчайших расстояний между вершинами взвешенного графа.

Неформальная постановка задачи размещения пунктов производства и пунктов реализации продукции в узлах транспортной сети при заданном расположении пунктов добычи сырья, складов и покупателей в соответствии с принципом компромиссного решения

В задаче рассматривается некоторая транспортная сеть, все узлы которой связаны так, что из любого узла сети можно попасть в любой другой, при этом, возможно, не единственным способом. В данной транспортной сети взаимодействуют несколько участников рынка – инвесторов. Их цель – наладить производство и продажу однотипной продукции конечным покупателям, расположенным в некоторых узлах транспортной сети, и получить от этого максимальную прибыль. Для этого реализуется инвестиционный проект, который заключается в размещении пунктов производства продукции и пунктов его реализации в доступных для этого узлах имеющейся транспортной сети.

В некоторых узлах этой транспортной сети располагаются покупатели, каждый из которых желает приобретать определенное количество продукции. При этом каждый покупатель стремится минимизировать свои затраты, которые складываются из затрат на оплату продукции в определенном пункте реализации и затрат на доставку продукции от этого пункта реализации до узла месторасположения покупателя. Исходя из этого покупатели выбирают тот или иной пункт реализации.

Для инвесторов и для покупателей на каждом из рёбер сети заданы функции транспортных издержек, которые обозначают затраты на перемещение по данному ребру. При чём функции транспортных издержек для инвесторов различаются при перевозке сырья и готовой продукции.

В некоторых узлах транспортной сети расположены пункты добычи сырья, где инвесторы могут закупать сырье для своей продукции по фиксированным ценам. Количество закупаемого сырья определяется спросом на продукцию, который, в свою очередь, диктуется покупателями. Далее сырье партиями доставляется в пункты производства, где продукция производится согласно функции Кобба-Дугласа, определенной для каждого пункта производства. Каждый инвестор может разместить свой пункт производства в одном из узлов сети, составляющих множество возможного размещения пунктов производства.

Далее, в некоторых узлах транспортной сети располагаются склады, где инвесторы могут временно хранить произведенную продукцию. При этом возникает необходимость оплаты аренды склада. Продукция от пункта производства до арендуемого склада доставляется определенными партиями.

Со складов продукция отправляется в пункты реализации, где её могут приобрести покупатели. При этом со склада до пункта реализации продукция тоже доставляется определенными партиями. Каждый инвестор может разместить свой пункт реализации в одном из узлов сети, составляющих множество возможного размещения пунктов реализации.

Для реализации инвестиционного проекта инвесторам необходимо решить задачу размещения конечного числа пунктов производства продукции в узлах транспортной сети, принадлежащих множеству узлов возможного размещения пунктов производства, а также пунктов реализации продукции в узлах транспортной сети, принадлежащих множеству узлов возможного размещения пунктов реализации, при заданном расположении пунктов добычи сырья, складов и покупателей в соответствии с принципом компромиссного решения.

Формализация задачи размещения пунктов производства и пунктов реализации продукции в узлах транспортной сети при заданном расположении пунктов добычи сырья, складов и покупателей в соответствии с принципом компромиссного решения

Рассматривается транспортная сеть, представимая в виде связного неориентированного графа $\Gamma = (N, E)$, где N – конечное множество узлов, E – множество ребер сети (x, y), $x, y \in N$. В данной сети взаимодействуют m инвесторов, цель которых – наладить продажу однотипной продукции конечным покупателям, расположенным в некоторых узлах транспортной сети, и получить от этого максимальную прибыль. Для этого реализуется инвестиционный проект, который заключается в размещении пунктов производства продукции, составляющих множество $T = \{t_i\}_{i=1}^{m}$, и пунктов её реализации, составляющих множество $W = \{w_i\}_{i=1}^{m}$, в доступных для этого узлах имеющейся транспортной сети.

Каждому ребру сети (x, y) соответствуют значения функций транспортных издержек для перемещения по данному ребру транспорта инвесторов: $\overline{C_a^1}(x, y) \geq 0$ при перевозке ресурсов и $\overline{C_a^2}(x, y) \geq 0$ при перевозке готовой продукции; а также значение функции транспортных издержек $\overline{C_b}(x, y) \geq 0$ для транспорта покупателей при перевозке готовой продукции.

В узлах, составляющих множество $P = \{p_j\}_{j=1}^{s}$, располагаются s покупателей. Каждый покупатель желает приобретать определенное количество продукции. Количества единиц продукции, которые желают приобретать покупатели, составляют множество $V = \{v_j\}_{j=1}^{s}$. Совокупные расходы U_j^i покупателя p_j в пункте реализации w_i складываются из стоимости покупки необходимого ему количества продукции, и собственных суммарных транспортных издержек на пути от этого пункта реализации до места расположения этого покупателя:

$$U_j^i = v_j * Pr + C_{i,j}^3$$

где: v_j - количество единиц продукции, которое желает приобретать покупатель p_j; Pr – рыночная стоимость единицы продукции; $C_{i,j}^3$ - транспортные издержки покупателя p_j на пути от пункта реализации w_i до узла его собственного расположения. При этом каждый покупатель стремится минимизировать свои совокупные расходы и исходя из этого выбирает для покупки тот или иной пункт реализации, решая таким образом задачу нахождения $\underset{i}{argmin}\, U_j^i$.

Далее, в некоторых свободных узлах транспортной сети, составляющих множество $B = \{b_x\}_{x=1}^e$, $e \geq m$, возможного размещения пунктов реализации, инвесторы имеют возможность разместить свои пункты реализации. Таким образом в узлах транспортной сети из множества B могут располагаться m пунктов реализации продукции, составляющих множество $W = \{w_i\}_{i=1}^m$, $W \subseteq B$.

В некоторых узлах сети, которые составляют множество $D = \{d_z\}_{z=1}^h$, располагаются h пунктов добычи сырья, где инвесторы могут закупать сырье для производства своей продукции. Стоимости единицы сырья в различных пунктах добычи составляют множество $L = \{l_z\}_{z=1}^h$.

Далее, в некоторых свободных узлах транспортной сети инвесторы могут расположить свои пункты производства продукции. Эти узлы составляют множество $G = \{g_y\}_{y=1}^c$ узлов возможного размещения пунктов производства, с $\geq m$. Таким образом в узлах транспортной сети из множества G могут располагаться m пунктов производства, которые составляют множество $T = \{t_i\}_{i=1}^m$, $T \subseteq G$.

Количество сырья $Vl_i(z)$, закупаемого инвестором i, $i = \overline{1,m}$ для своего пункта производства t_i составляет:

$$Vl_i = \frac{I(t_i)}{\gamma} = \frac{I(w_i)}{\gamma}$$

где $I(t_i)$ – количество производимой продукции в пункте производства t_i равное общему спросу покупателей $I(w_i)$ в пункте реализации продукции w_i; γ – коэффициент выхода готовой продукции из единицы сырья.

От пунктов добычи сырья до пунктов производства продукции сырье доставляется фиксированными партиями в R^1 штук.

Каждый пункт производства t_i используя полученное сырье производит определенный объем продукции $I(t_i)$, который может быть выражен в денежном эквиваленте следующим образом:

$$Q_i = I(t_i) * Pr = I(w_i) * Pr$$

где Pr – рыночная стоимость единицы продукции; $I(t_i)$ – количество производимой продукции в пункте производства t_i равное общему спросу покупателей $I(w_i)$ в пункте реализации продукции w_i. При этом каждый пункт производства t_i производит продукцию в соответствии со своей производственной функцией Кобба-Дугласа:

$$Q_i = A_i * K_i^{\alpha_i} * L_i^{\beta_i}$$

где A_i – производственный коэффициент пункта производства; K_i – капитал пункта производства; L_i – количество используемого труда; α_i – коэффициент эластичности по труду; β_i – коэффициент эластичности по капиталу.

В некоторых узлах сети, которые составляют множество $K = \{k_f\}_{f=1}^{r}$, располагаются r складов, где инвесторы могут хранить свою продукцию после производства. При этом возникает необходимость оплаты аренды склада. Стоимости аренды различных складов составляют множество $S = \{s_f\}_{f=1}^{r}$.

От пунктов производства до складов и от складов до пунктов реализации продукция доставляется фиксированными партиями в R^2 штук.

Совокупные расходы $TC_i(z,f)$ инвестора i, $i = \overline{1,m}$, в зависимости от выбранного пункта добычи сырья d_z и склада k_f составляют:

$$TC_i(z,f) = Vl_i * l_z + C_i^1(z) * \left\lceil \frac{Vl_i(z)}{R^1} \right\rceil + K_i + s_i(f) + (C_i^{21}(f) + C_i^{22}(f)) * \left\lceil \frac{I(w_i)}{R^2} \right\rceil$$

где: Vl_i – количество сырья, закупаемого инвестором i для своего пункта производства t_i; l_z – стоимость единицы сырья в пункте добычи d_z; $C_i^1(z)$ - транспортные издержки инвестора при перевозке сырья от пункта добычи d_z до пункта производства продукции t_i; R^1 – размер партий, которыми сырье доставляется от пунктов добычи сырья до пунктов производства продукции; K_i - капитал пункта производства t_i; $s_i(f)$ - плата за аренду склада k_f; $C_i^{21}(f)$ и $C_i^{22}(f)$ - транспортные издержки инвестора при перевозке продукции от пункта производства t_i до склада k_f и от этого склада до пункта реализации продукции w_i, соответственно; $I(w_i)$ – спрос на продукцию в пункте реализации w_i; R^2 – размер партий, которыми продукция доставляется от пунктов производства до складов и от складов до пунктов реализации.

Совокупные доходы TR_i инвестора $i, i = \overline{1,m}$, составляют:

$$TR_i = I(w_i) * Pr$$

где Pr – рыночная стоимость единицы продукции; $I(w_i)$ – спрос на продукцию в пункте реализации w_i.

Таким образом, прибыль (убыток) $\mathrm{N}V_i(z,f)$ инвестора $i, i = \overline{1,m}$ есть разница между совокупными доходами TR_i и совокупными расходами $TC_i(z,f)$:

$$\mathrm{N}V_i(z,f) = TR_i - TC_i(z,f)$$

Для реализации инвестиционного проекта инвесторам необходимо решить задачу размещения конечного числа пунктов производства продукции в узлах транспортной сети, принадлежащих множеству узлов возможного размещения пунктов производства, а также пунктов реализации продукции в узлах транспортной сети, принадлежащих множеству узлов возможного размещения пунктов реализации, при заданном расположении пунктов добычи сырья, складов и покупателей в соответствии с принципом компромиссного решения. При этом в качестве функций выигрыша рассматривается прибыль инвесторов.

Обзор литературы

При исследовании поставленной задачи использовалась научная литература зарубежных и отечественных авторов.

В статье [1] представлены начальные сведения о теории размещения и описан механизм поиска оптимального месторасположения предприятия по отношению к источникам сырья. Более комплексная формулировка задачи размещения представлена в работе [2]. В работе [3] рассмотрена модель теории размещения, где основной задачей ставится максимизация прибыли, что отличает её от предложенных ранее моделей, где главная роль была отведена снижению издержек.

Широко применяющаяся для анализа пространственной конкуренции теоретико-игровая модель линейного города Хотеллинга описана в статье [4]. Решению задачи пространственной конкуренции также посвящены статья [5], где учтены угрозы вытеснения игроков с рынка, и статья [6], в которой рассматривается модель Хотеллинга для случая расположения игроков по кругу. В книге [7] исследуется метод межотраслевого баланса, в котором описывается связь между выпуском продукции и затратами на него.

Основная информация по теории игр и её приложениях представлена в книгах [8] и [9]. В книге [10] изложена информация о потоках в сетях и описаны алгоритмы нахождения многокритериальных решений при различных принципах оптимальности.

Задачи из области теории матричных игр и линейного программирования, а также статические и динамические модели производства описаны в книге [11]. Основная информация по теории графов, описание задачи о кратчайших путях и алгоритмы её решения представлены в книгах [12] и [13].

Основы экономической теории изложены в книге [14].

Глава 1. Решение задачи размещения пунктов производства и пунктов реализации продукции в узлах транспортной сети при заданном расположении пунктов добычи сырья, складов и покупателей в соответствии с принципом компромиссного решения

1.1. Общий алгоритм решения задачи

1. Пользуясь алгоритмом Флойда-Уоршелла находим пути с минимальными транспортными издержками для покупателей от узлов их расположения до узлов возможного расположения пунктов реализации продукции.
2. Пусть Pr - рыночная стоимость единицы продукции; $C^3_{x,j}$ - транспортные издержки покупателя p_j на пути от узла b_x возможного расположения пункта реализации продукции до узла его собственного расположения; v_j - количество единиц продукции, которое желает приобретать покупатель p_j. Тогда можем вычислить совокупные расходы U^x_j покупателя p_j при покупке продукции в пункте реализации b_x:
$$U^x_j = v_j Pr + C^3_{x,j}$$
3. Для каждого покупателя p_j, $j = \overline{1,s}$, находим минимальные совокупные расходы:
$$\min_{x=1,\dots,e} U^x_j = \min_{x=1,\dots,e}\left(v_j Pr + C^3_{x,j}\right)$$
Исходя из полученных значений, для каждого покупателя определяем узел возможного расположения пункта реализации продукции b_x, $x = \operatorname*{argmin}_{x=1,\dots,e} U^x_j$, где покупка будет наиболее выгодной для этого покупателя.
4. Вычисляем доход пункта реализации в зависимости от его расположения в узлах возможного расположения пунктов реализации:

$$Q_x = I(b_x) * Pr = \left(\sum_{j=1,\dots,s} D_j^x \right) * Pr$$

где D_j^x – спрос покупателя j в пункте реализации продукции при его расположении в узле b_x; Pr - рыночная стоимость единицы продукции; $I(b_x)$ – общий спрос покупателей в пункте реализации продукции при его расположении в узле b_x.

5. Используя функцию Кобба-Дугласа и полагая, что производственный коэффициент и количество используемого труда заданы, вычисляем капитал пункта производства инвестора i, $i = \overline{1, m}$:

$$K_i^x = \sqrt[\beta]{\frac{Q_x}{A_i * L_i^\alpha}}$$

где A_i – производственный коэффициент пункта производства i-го инвестора, K_i^x – капитал пункта производства i-го инвестора при объеме производимой продукции, выраженном в денежном эквиваленте, Q_x, и равным доходу пункта реализации инвестора, при его расположении в узле b_x; L_i – количество используемого труда; α_i – коэффициент эластичности по труду; β_i – коэффициент эластичности по капиталу.

6. Вычисляем количество сырья, которое необходимо закупать инвестору для своего пункта производства при расположении пункта реализации в узле b_x:

$$Vl_x = \frac{I(b_x)}{\gamma}$$

где $I(b_x)$ – количество производимой продукции в пункте производства инвестора, равный общему спросу покупателей в пункте реализации продукции b_x этого инвестора; γ – коэффициент выхода готовой продукции из единицы сырья.

7. Последовательно применяя алгоритм Флойда-Уоршелла, находим пути с минимальными транспортными издержками для инвесторов от узлов расположения пунктов добычи сырья до узлов возможного

расположения пунктов производства продукции, а также от узлов возможного расположения пунктов производства продукции до складов и от складов до узлов возможного расположения пунктов реализации продукции.

8. Вычисляем совокупные расходы $TC_i^{(x,y)}(z,f)$ инвестора $i,\ i=\overline{1,m}$ в зависимости от расположения пункта производства и пункта реализации продукции, а также выбора пункта добычи сырья и склада:

$$TC_i^{(x,y)}(z,f) = Vl_x * l_z + C_i^1(z,y) * \left\lceil \frac{Vl_x}{R^1} \right\rceil + K_i^x +$$

$$s_i(f) + (C_i^{21}(y,f) + C_i^{22}(f,x)) * \left\lceil \frac{I(b_x)}{R^2} \right\rceil$$

где Vl_x – количество сырья, которое необходимо закупать инвестору для своего пункта производства при расположении пункта реализации в узле b_x; l_z – стоимость единицы сырья в пункте добычи d_z; $C_i^1(z,y)$ - транспортные издержки инвестора при перевозке сырья от пункта добычи сырья d_z до узла возможного размещения пункта производства продукции g_y; R^1 – размер партий, которыми сырье доставляется от пунктов добычи сырья до пунктов производства продукции; K_i^x – капитал пункта производства i-го инвестора при объеме производимой продукции Q_x; $s_i(f)$ - плата за аренду склада k_f; $C_i^2(y,f)$ и $C_i^2(f,x)$ - транспортные издержки инвестора при перевозке продукции от узла возможного размещения пункта производства g_y до склада k_f и от этого склада до узла возможного размещения пункта реализации продукции b_x, соответственно; $I(b_x)$ – спрос на продукцию в пункте реализации при его расположении в узле b_x; R^2 – размер партий, которыми продукция доставляется от пунктов производства до складов и от складов до пунктов реализации.

9. Вычисляем совокупный доход TR_i^x инвестора $i,\ i=\overline{1,m}$ в зависимости от расположения пункта реализации продукции b_x:

$$TR_i^x = I(b_x) * Pr$$

10. Вычисляем прибыль (убыток) инвестора i, $i=\overline{1,m}$, в зависимости от расположения пункта производства g_y и пункта реализации продукции b_x, а также выбора пункта добычи сырья d_z и склада k_f:

$$NV_i^{(x,y)}(z,f)=TR_i^x-TC_i^{(x,y)}(z,f)$$

11. Выбрав оптимальным образом пункт добычи сырья и склад для каждого инвестора найдем его максимальную прибыль $NV_i^{(x,y)}$ для всех случаев расположения его пункта производства и пункта реализации продукции:

$$NV_i^{(x,y)}=\max_{\substack{z=1,\dots,h\\ f=1,\dots,r}} NV_i^{(x,y)}(z,f)$$

12. Таким образом мы получили значение прибыли каждого инвестора для любого случая расположения его пункта производства продукции в узлах возможного размещения пунктов производства и его пункта реализации продукции в узлах возможного размещения пунктов реализации. Все эти варианты определяются различными парами (x,y), где x – номер узла возможного расположения пункта реализации продукции b_x, $x=\overline{1,e}$; y – номер узла возможного расположения пункта производства продукции g_y, $y=\overline{1,\text{с}}$.

13. Теперь, используя алгоритм нахождения компромиссного решения можем найти оптимальное расположение пунктов производства и пунктов реализации продукции в соответствии с принципом компромиссного решения. В качестве функций выигрыша будем рассматривать прибыль инвесторов $NV_i^{(x,y)}$, $i=\overline{1,m}$.

1.2. Алгоритм Флойда — Уоршелла нахождения кратчайших расстояний между всеми вершинами взвешенного графа

Пусть имеется непустой неориентированный взвешенный граф $\Gamma = (N, E)$. Необходимо найти кратчайшие пути между всеми парами вершин этого графа. При этом будем полагать, что циклов с отрицательной суммарной длиной в графе нет.

Итак, построим матрицу D^0 размерности $N \times N$, элементы которой определяются по правилу:

$$\begin{cases} d_{ii}^0 = 0 \\ d_{ij}^0 = weight(v_i, v_j), \quad i \neq j, \quad \text{если в графе существует ребро } (v_i, v_j) \\ d_{ij}^0 = \infty, \quad i \neq j, \quad \text{если в графе не существует ребра } (v_i, v_j) \end{cases}$$

Положим $m \coloneqq 0$ и будем строить матрицу D^{m+1} по D^m, вычисляя её элементы следующим образом:

$$\begin{cases} d_{ii}^{m+1} = 0 \\ d_{ij}^{m+1} = min\{d_{ij}^m, d_{i,m+1}^m + d_{m+1,j}^m\}, \ \ i \neq j \end{cases} \qquad (1)$$

При этом если $d_{im}^m + d_{mi}^m < 0$ для какого-либо i, то в графе существует цикл отрицательной длины, проходящий через вершину v_i.

Далее, положим $m \coloneqq m + 1$. До тех пор, пока $m < N$, повторяем шаг (1). В итоге, при $m = N$ будет построена матрица D^N, элементы которой равны длинам кратчайших путей между соответствующими вершинами.

Одной из реализаций алгоритма Флойда — Уоршелла является программа на языке C++, представленная в приложении к работе.

1.3. Алгоритм нахождения компромиссного решения

Для нахождения компромиссного решения необходимо знать функции выигрыша каждого инвестора. В рассматриваемой задаче функцией выигрыша будет прибыль инвестора.

Пусть у нас построена матрица прибыли инвесторов в зависимости от расположения пунктов производства и пунктов реализации продукции. Она будет являться матрицей выигрышей A в строках которой - возможные ситуации в игре, а в столбцах – выигрыши инвесторов:

$$A = \left(\alpha_{p,m}\right)$$

где p - количество ситуаций в игре; m – количество инвесторов.

Построим идеальный вектор, состоящий из максимальных по всем ситуациям значений выигрышей всех инвесторов:

$$M = (M_1, \dots, M_m), \qquad \text{где } M_i = \max_{j=1,\dots,p}(\alpha_{j,i}), i = \overline{1,m}$$

Далее, составим матрицу невязок. Для этого необходимо вычислить величины отклонений выигрышей от максимального выигрыша для каждого инвестора в каждой ситуации:

$$B_M = \begin{pmatrix} M_1 - \alpha_{1,1} & \cdots & M_m - \alpha_{1,m} \\ \cdots & & \cdots \\ M_1 - \alpha_{p,1} & \cdots & M_m - \alpha_{p,m} \end{pmatrix} = (\beta_{p,m})$$

Теперь упорядочим в матрице невязок в каждой ситуации значения по возрастанию так, чтобы в первом столбце были наименьшие невязки, а в последнем - наибольшие. Таким образом последний столбец будет содержать максимальные невязки $\max\limits_{i=1,\dots,m}\left(\beta_{p,i}\right)$.

Наконец, среди найденных максимальных невязок выберем минимальное значение $\min\limits_{j=1,\dots,p}\left[\max\limits_{i=1,\dots,m}(\beta_{j,i})\right]$. Ситуация, соответствующая данному значению, будет являться компромиссным решением.

Если в последнем столбце несколько минимальных значений, то следует искать минимум на столбец левее, и так далее. В этом случае ситуаций, являющихся компромиссным решением, несколько.

Глава 2. Пример

2.1. Размещение двух пунктов производства и двух пунктов реализации продукции при заданном расположении шести покупателей, двух пунктов добычи сырья и двух складов.

Рассмотрим транспортную сеть, представленную в виде графа, изображенного на рисунке 1, в котором содержится 50 узлов $x_0, \ldots, x_{49}$ и 90 ребер. В сети взаимодействуют 2 инвестора, каждый из которых желает разместить в ней пункт производства и пункт реализации продукции.

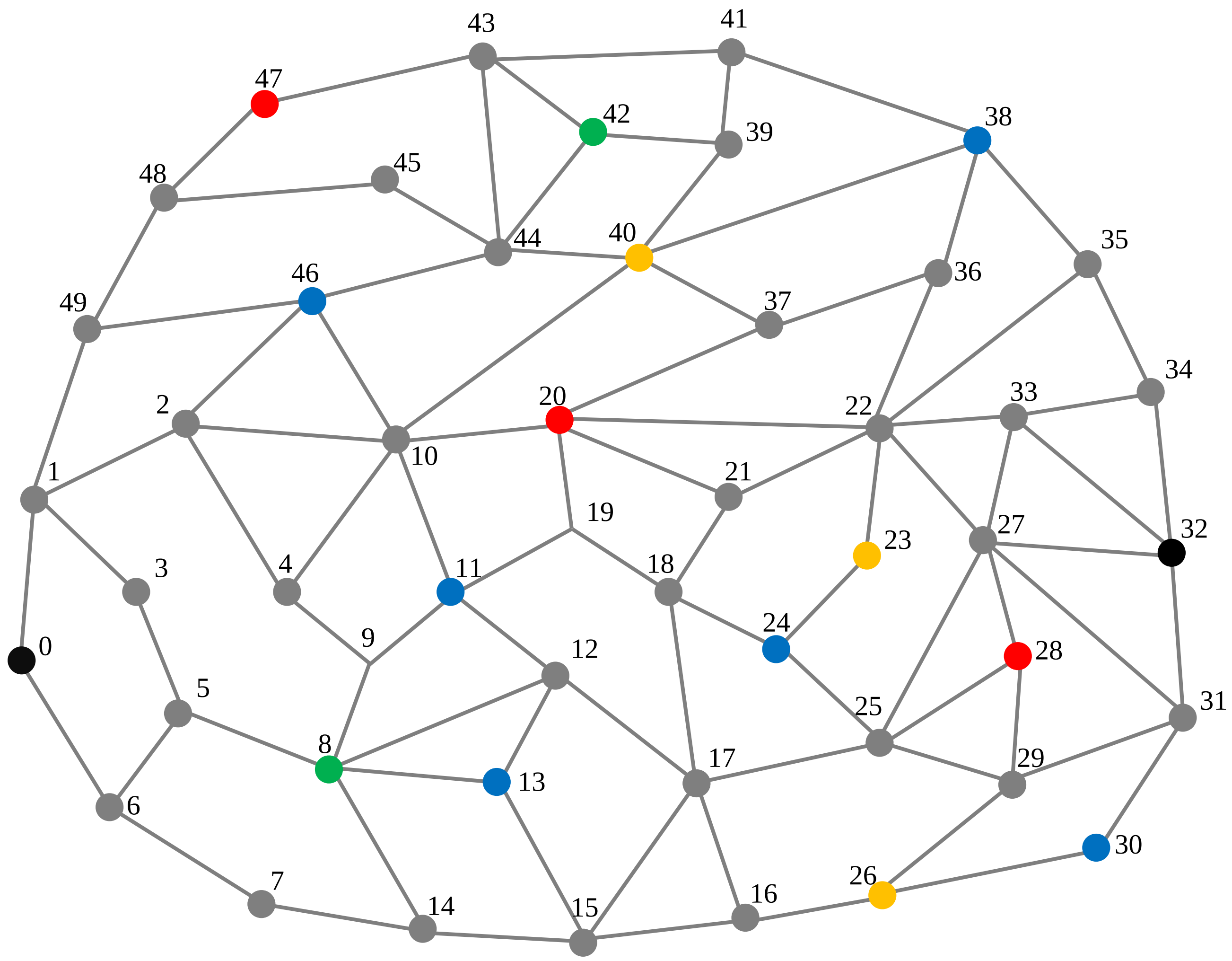

Рисунок 1

В узлах x_0 и x_{32} (выделены чёрным цветом) расположены пункты добычи сырья d_1 и d_2, где инвесторы могут закупать сырье для производства своей продукции. Стоимости единицы сырья в пунктах добычи составляют

$l_1 = 0{,}6$ и $l_2 = 1$, соответственно. В узлах x_8 и x_{42} (выделены зеленым цветом) располагаются склады k_1 и k_2, где инвесторы могут хранить произведенную продукцию. Плата за аренду складов составляет $s_1 = 20$ и $s_2 = 10$, соответственно.

Далее, в узлах x_{11}, x_{13}, x_{24}, x_{30}, x_{38}, x_{46} (выделены синим цветом) находятся покупатели $p_1, \dots, p_6$. Каждый покупатель желает приобретать определенное количество продукции: $v_1 = 12$, $v_2 = 15$, $v_3 = 14$, $v_4 = 20$, $v_5 = 18$, $v_6 = 15$, соответственно.

Также в сети заданы три узла x_{20}, x_{28} и x_{47} (выделены красным цветом), составляющих множество $G = \{g_1, g_2, g_3\}$, где инвесторы могут разместить свои пункты производства t_1 и t_2, а также три узла x_{23}, x_{26} и x_{40} (выделены желтым цветом), составляющих множество $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, где инвесторы могут разместить свои пункты реализации w_1 и w_2.

На каждом ребре графа заданы значения функций транспортных издержек для инвесторов при перевозке сырья $\overline{C_a^1}(x,y)$ и готовой продукции $\overline{C_a^2}(x,y)$, а также для покупателей $\overline{C_b}(x,y)$ при перевозке продукции. Они представлены в таблице 1.

(x,y)	$\overline{C_a^1}(x,y)$	$\overline{C_a^2}(x,y)$	$\overline{C_b}(x,y)$
(0,6)	6	4	7
(5,6)	12	8	10
(0,1)	3	2	8
(1,3)	10	9	5
(1,2)	13	6	13
(3,4)	19	12	7
(3,5)	11	7	8
(5,8)	6	2	2
(6,7)	21	16	7
(7,14)	10	6	9
(8,14)	19	15	9
(8,13)	16	9	5

(8,9)	10	7	13
(4,9)	9	5	9
(4,10)	17	13	5
(2,4)	14	12	14
(2,10)	15	11	9
(10,11)	6	5	7
(11,19)	12	7	3
(10,20)	15	10	11
(19,20)	16	12	5
(20,21)	10	6	8
(20,22)	23	14	15
(21,22)	12	10	14
(18,21)	8	6	6
(18,19)	9	5	2
(11,12)	24	13	9
(9,11)	15	10	3
(8,12)	13	8	8
(12,13)	13	7	8
(12,17)	17	10	14
(17,18)	5	4	5
(18,24)	12	10	2
(23,24)	19	10	13
(22,23)	16	11	8
(22,27)	9	6	9
(27,28)	21	15	14
(25,27)	6	3	7
(24,25)	16	13	11
(17,25)	7	5	9
(13,15)	12	6	3
(15,17)	14	8	6
(14,15)	15	10	6
(15,16)	9	5	9
(16,17)	20	15	4
(16,26)	14	11	14

(26,29)	19	17	9
(25,29)	9	7	3
(25,28)	14	8	4
(28,29)	16	13	10
(26,30)	13	6	6
(29,31)	10	9	4
(30,31)	11	10	9
(27,31)	17	12	7
(31,32)	8	3	4
(27,32)	10	8	7
(32,33)	14	11	10
(27,33)	4	3	5
(22,33)	6	5	5
(32,34)	17	15	9
(33,34)	11	5	3
(22,35)	14	10	7
(34,35)	15	14	9
(35,38)	9	8	5
(38,40)	17	15	16
(37,40)	8	7	5
(22,36)	10	8	6
(36,38)	11	6	6
(36,37)	4	3	4
(20,37)	8	7	4
(10,40)	22	15	12
(2,46)	10	8	7
(40,44)	9	7	10
(44,46)	18	16	14
(38,41)	10	9	9
(39,41)	5	5	5
(39,40)	11	5	7
(39,42)	11	10	8
(10,46)	13	7	9
(42,44)	8	8	6

(41,43)	12	7	8
(42,43)	10	9	7
(43,44)	16	13	9
(43,47)	20	17	12
(47,48)	7	7	7
(45,48)	6	4	5
(44,45)	10	10	11
(46,49)	12	8	6
(48,49)	11	9	9
(1,49)	7	6	3

Таблица 1

Рыночная цена готовой продукции составляет $Pr = 20.$ Размеры партий, которыми сырье доставляется от пунктов добычи до пунктов производства продукции, и партий, которыми продукция доставляется от пунктов производства до складов и от складов до пунктов реализации равны, соответственно, $R^1 = 30$ и $R^2 = 10$.

Производственные коэффициенты функций Кобба-Дугласа пунктов производства инвесторов равны $A_1 = A_2 = 9$; количества используемого труда равны $L_1 = L_2 = 7$; значения коэффициентов эластичности по труду и коэффициентов эластичности по капиталу составляют, соответственно, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}3$ и $\beta_1 = \beta_2 = 0{,}7$. Равенство единице суммы коэффициентов α_i и β_i демонстрирует постоянную отдачу при изменении капитала пунктов производства. Коэффициент выхода готовой продукции из единицы сырья равен $\gamma = 0{,}9$.

Итак, для решения поставленной задачи воспользуемся алгоритмом, представленном в главе 1.

Для начала необходимо найти пути с минимальными транспортными издержками для покупателей от узлов их расположения до узлов возможного расположения пунктов реализации продукции. Воспользовавшись алгоритмом Флойда-Уоршелла получим следующие значения для соответствующих узлов сети:

	x_{11}	x_{13}	x_{24}	x_{30}	x_{38}	x_{46}
x_{23}	20	29	13	33	20	36
x_{26}	28	26	23	6	40	44
x_{40}	17	30	18	40	15	21

Таблица 2

Зная количества продукции, которые желают приобретать покупатели, и рыночную цену за единицу продукции, можем вычислить совокупные расходы покупателей при покупке продукции в различных пунктах реализации:

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
b_1	260	329	293	433	380	336
b_2	268	326	303	406	400	344
b_3	257	330	298	440	375	321

Таблица 3

Теперь можем найти минимальные совокупные расходы покупателей и исходя из полученных значений, для каждого покупателя определить узел возможного расположения пункта реализации продукции, где покупка будет наиболее выгодной для этого покупателя:

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
$\min\limits_{x=1,\ldots,3} U_j^x$	257	326	293	406	375	321
$b_x, x = \operatorname*{argmin}\limits_{x=1,\ldots,3} U_j^x$	b_3	b_2	b_1	b_2	b_3	b_3

Таблица 4

Далее, определим спрос на продукцию в пунктах реализации и вычислим их доход в зависимости от расположения:

	b_1	b_2	b_3
$I(b_x)$	14	35	45
Q_x	280	700	900

Таблица 5

Вычислим капитал K_i^x пункта производства инвестора $i,\ i = 1,2,$ при объеме производимой продукции Q_x, выраженном в денежном эквиваленте и равным доходу пункта реализации этого инвестора, при его расположении в узле b_x. Для этого воспользуемся функцией Кобба-Дугласа:

$$K_1^x = K_2^x = \sqrt[0,7]{\frac{Q_x}{9 * 7^{0,3}}}$$

В зависимости от расположения пункта производства получим следующие значения:

	b_1	b_2	b_3
K_1^x	58,96	218,29	312,58
K_2^x	58,96	218,29	312,58

Таблица 6

Вычислим количество сырья, которое необходимо закупать инвестору для своего пункта производства при расположении его пункта реализации в узле b_x:

	b_1	b_2	b_3
Vl_x	15,56	38,89	50

Таблица 7

Применив алгоритм Флойда — Уоршелла, найдем пути с минимальными транспортными издержками для инвесторов от узлов расположения пунктов добычи сырья до узлов возможного расположения пунктов производства продукции:

	x_{20}	x_{28}	x_{47}
x_0	46	75	28
x_{32}	41	30	73

Таблица 8

Аналогично найдем пути минимальными транспортными издержками для инвесторов от узлов возможного расположения пунктов производства продукции до складов:

	x_8	x_{42}
x_{20}	32	29
x_{28}	31	50
x_{47}	38	26

Таблица 9

И, наконец, найдем пути минимальными транспортными издержками для инвесторов от складов до узлов возможного расположения пунктов реализации продукции:

	x_{23}	x_{26}	x_{40}
x_8	42	31	37
x_{42}	44	66	15

Таблица 10

Теперь можем вычислить совокупные расходы $TC_i^{(x,y)}(z,f)$ инвесторов в зависимости от расположения пункта производства и пункта реализации продукции, а также выбора пункта добычи сырья и склада по формуле:

$$TC_i^{(x,y)}(z,f) = Vl_x * l_z + C_i^1(z,y) * \left\lceil \frac{Vl_x}{R^1} \right\rceil + K_i^x + s_i(f) + (C_i^{21}(y,f) + C_i^{22}(f,x)) * \left\lceil \frac{I(b_x)}{R^2} \right\rceil$$

Учитывая, что $K_1^x = K_2^x$, для каждого инвестора получим следующие значения:

$(g_y, b_x) \setminus (d_z, k_f)$	(x_0, x_8)	(x_0, x_{42})	(x_{32}, x_8)	(x_{32}, x_{42})
(x_{20}, x_{23})	282,3	266,3	283,52	267,52
(x_{20}, x_{26})	605,62	583,62	611,18	589,18
(x_{20}, x_{40})	799,58	774,58	809,58	784,58
(x_{28}, x_{23})	309,3	337,3	270,52	298,52
(x_{28}, x_{26})	659,62	725,62	585,18	651,18
(x_{28}, x_{40})	852,58	937,58	782,58	867,58
(x_{47}, x_{23})	276,3	242,3	327,52	293,52
(x_{47}, x_{26})	593,62	535,62	699,18	641,18
(x_{47}, x_{40})	793,58	723,58	903,58	833,58

Таблица 11

Также вычислим совокупный доход TR_i^x инвесторов в зависимости от расположения пункта реализации продукции по формуле:

$$TR_i^x = I(b_x) * Pr$$

Для каждого инвестора получим следующие значения:

b_1	b_2	b_3
280	700	900

Таблица 12

Теперь найдем прибыль (убыток) инвесторов в зависимости от расположения пункта производства и пункта реализации продукции, а также выбора пункта добычи сырья и склада по формуле:

$$NV_i^{(x,y)}(z,f) = TR_i^x - TC_i^{(x,y)}(z,f)$$

Учитывая, что $K_1^x = K_2^x$, для обоих инвесторов получим:

$(g_y, b_x) \setminus (d_z, k_f)$	(x_0, x_8)	(x_0, x_{42})	(x_{32}, x_8)	(x_{32}, x_{42})
(x_{20}, x_{23})	-2,3	13,7	-3,52	12,48
(x_{20}, x_{26})	94,38	116,38	88,82	110,82
(x_{20}, x_{40})	100,42	125,42	90,42	115,42
(x_{28}, x_{23})	-29,3	-57,3	9,48	-18,52
(x_{28}, x_{26})	40,38	-25,62	114,82	48,82
(x_{28}, x_{40})	47,42	-37,58	117,42	32,42
(x_{47}, x_{23})	3,7	37,7	-47,52	-13,52
(x_{47}, x_{26})	106,38	164,38	0,82	58,82
(x_{47}, x_{40})	106,42	176,42	-3,58	66,42

Таблица 13

Выберем пункт добычи сырья и склад так, чтобы максимизировать прибыль $NV_i^{(x,y)}$ для всех случаев расположения его пункта производства и пункта реализации продукции:

(g_y, b_x)	$NV_i^{(x,y)}$
(x_{20}, x_{23})	13,7
(x_{20}, x_{26})	116,38
(x_{20}, x_{40})	125,42
(x_{28}, x_{23})	9,48
(x_{28}, x_{26})	114,82
(x_{28}, x_{40})	117,42
(x_{47}, x_{23})	37,7
(x_{47}, x_{26})	164,38
(x_{47}, x_{40})	176,42

Таблица 14

Построим матрицу прибыли инвесторов в зависимости от расположения их пунктов производства и пунктов реализации продукции.

	1-ый инвестор	2-ой инвестор
$((x_{20}, x_{23}), (x_{28}, x_{26}))$	13,7	114,82
$((x_{20}, x_{23}), (x_{28}, x_{40}))$	13,7	117,42
$((x_{20}, x_{23}), (x_{47}, x_{26}))$	13,7	164,38
$((x_{20}, x_{23}), (x_{47}, x_{40}))$	13,7	176,42
$((x_{20}, x_{26}), (x_{28}, x_{23}))$	116,38	9,48
$((x_{20}, x_{26}), (x_{28}, x_{40}))$	116,38	117,42
$((x_{20}, x_{26}), (x_{47}, x_{23}))$	116,38	37,7
$((x_{20}, x_{26}), (x_{47}, x_{40}))$	116,38	176,42
$((x_{20}, x_{40}), (x_{28}, x_{23}))$	125,42	9,48
$((x_{20}, x_{40}), (x_{28}, x_{26}))$	125,42	114,82
$((x_{20}, x_{40}), (x_{47}, x_{23}))$	125,42	37,7
$((x_{20}, x_{40}), (x_{47}, x_{26}))$	125,42	164,38
$((x_{28}, x_{23}), (x_{47}, x_{26}))$	9,48	164,38
$((x_{28}, x_{23}), (x_{47}, x_{40}))$	9,48	176,42
$((x_{28}, x_{26}), (x_{47}, x_{23}))$	114,82	37,7
$((x_{28}, x_{26}), (x_{47}, x_{40}))$	114,82	176,42
$((x_{28}, x_{40}), (x_{47}, x_{23}))$	117,42	37,7
$((x_{28}, x_{40}), (x_{47}, x_{26}))$	117,42	164,38

Таблица 15

Данная матрица является матрицей выигрышей A, в столбцах которой стоят значения прибыли инвесторов, а в строках - возможные ситуации в игре:

Идеальный вектор М в данной ситуации будет иметь вид:

$$M = (M_1 \quad M_2) = \left(\max_{j=1,\dots,18}(\alpha_{j,1}) \quad \max_{j=1,\dots,18}(\alpha_{j,2})\right) = (125{,}42 \quad 176{,}42)$$

В свою очередь матрица невязок

$$B_M = \begin{pmatrix} M_1 - \alpha_{1,1} & M_2 - \alpha_{1,2} \\ \dots & \dots \\ M_1 - \alpha_{18,1} & M_2 - \alpha_{18,2} \end{pmatrix} = (\beta_{p,m}), \qquad p = 18, m = 2,$$

будет иметь вид:

$((x_{20}, x_{23}), (x_{28}, x_{26}))$	111,72	61,6
$((x_{20}, x_{23}), (x_{28}, x_{40}))$	111,72	59
$((x_{20}, x_{23}), (x_{47}, x_{26}))$	111,72	12,04
$((x_{20}, x_{23}), (x_{47}, x_{40}))$	111,72	0
$((x_{20}, x_{26}), (x_{28}, x_{23}))$	9,04	166,94
$((x_{20}, x_{26}), (x_{28}, x_{40}))$	9,04	59
$((x_{20}, x_{26}), (x_{47}, x_{23}))$	9,04	138,72
$((x_{20}, x_{26}), (x_{47}, x_{40}))$	9,04	0
$((x_{20}, x_{40}), (x_{28}, x_{23}))$	0	166,94
$((x_{20}, x_{40}), (x_{28}, x_{26}))$	0	61,6
$((x_{20}, x_{40}), (x_{47}, x_{23}))$	0	138,72
$((x_{20}, x_{40}), (x_{47}, x_{40}))$	0	12,04
$((x_{28}, x_{23}), (x_{47}, x_{26}))$	115,94	12,04
$((x_{28}, x_{23}), (x_{47}, x_{40}))$	115,94	0
$((x_{28}, x_{26}), (x_{47}, x_{23}))$	10,6	138,72
$((x_{28}, x_{26}), (x_{47}, x_{40}))$	10,6	0
$((x_{28}, x_{40}), (x_{47}, x_{23}))$	8	138,72
$((x_{28}, x_{40}), (x_{47}, x_{26}))$	8	12,04

Таблица 16

Теперь упорядочим в матрице невязок в каждой ситуации значения по возрастанию таким образом, чтобы в левом столбце были наименьшие невязки, а в правом - наибольшие. Получим:

$((x_{20}, x_{23}), (x_{28}, x_{26}))$	61,6	111,72
$((x_{20}, x_{23}), (x_{28}, x_{40}))$	59	111,72
$((x_{20}, x_{23}), (x_{47}, x_{26}))$	12,04	111,72
$((x_{20}, x_{23}), (x_{47}, x_{40}))$	0	111,72
$((x_{20}, x_{26}), (x_{28}, x_{23}))$	9,04	166,94
$((x_{20}, x_{26}), (x_{28}, x_{40}))$	9,04	59
$((x_{20}, x_{26}), (x_{47}, x_{23}))$	9,04	138,72
$((x_{20}, x_{26}), (x_{47}, x_{40}))$	0	9,04
$((x_{20}, x_{40}), (x_{28}, x_{23}))$	0	166,94
$((x_{20}, x_{40}), (x_{28}, x_{26}))$	0	61,6
$((x_{20}, x_{40}), (x_{47}, x_{23}))$	0	138,72
$((x_{20}, x_{40}), (x_{47}, x_{40}))$	0	12,04
$((x_{28}, x_{23}), (x_{47}, x_{26}))$	12,04	115,94
$((x_{28}, x_{23}), (x_{47}, x_{40}))$	0	115,94
$((x_{28}, x_{26}), (x_{47}, x_{23}))$	10,6	138,72
$((x_{28}, x_{26}), (x_{47}, x_{40}))$	0	10,6
$((x_{28}, x_{40}), (x_{47}, x_{23}))$	8	138,72
$((x_{28}, x_{40}), (x_{47}, x_{26}))$	8	12,04

Таблица 17

Наконец, в правом столбце, содержащем максимальные невязки $\underset{i=1,2}{max}(\beta_{p,i})$, выберем минимальное значение:

$$\underset{j=1,\dots,18}{min}\left[\underset{i=1,2}{max}(\beta_{j,i})\right] = 9{,}04$$

Полученному значению соответствует единственная ситуация $((x_{20}, x_{26}), (x_{47}, x_{40}))$, которая и является компромиссным решением.

Таким образом, согласно принципу компромиссного решения один из инвесторов должен разместить свои пункт производства и пункт реализации продукции в узлах x_{20} и x_{26}, соответственно, а другой в узлах x_{47} и x_{40}. При этом прибыль инвесторов составит 116,38 и 176,42, соответственно.

Выводы

По результатам работы можно сделать вывод о том, что поставленная задача полностью решена. Приведен общий формализованный алгоритм решения поставленной задачи, который применим к любой конфигурации транспортной сети, представимой в виде связного неориентированного графа, и любым вариантам расположения в ней покупателей и инфраструктурных объектов, таких как пункты добычи сырья и склады. Решение задачи проиллюстрировано на численном примере, в котором найдена компромиссная ситуация для двух инвесторов реализующих инвестиционный проект по размещению двух пунктов производства продукции и двух пунктов ее реализации в транспортной сети из 50 узлов и 90 ребер при заданном расположении шести покупателей, двух пунктов добычи сырья и двух складов.

Заключение

В результате рассмотрения модели выбора и сопровождения инвестиционного проекта, была решена задача размещения конечного числа пунктов производства и пунктов реализации продукции в узлах транспортной сети, при заданном расположении пунктов добычи сырья, покупателей и складов в соответствии с принципом компромиссного решения с помощью представленных в первой главе алгоритмов, проиллюстрированных на примере во второй главе.

Рассмотренная в работе модель может быть применена к различным областям экономики, связанным с производством, хранением и реализацией продукции. При этом алгоритмы, приведенные в работе, за счет строгой формализации позволяют решать задачи размещения в отличных от рассматриваемой в данной работе конфигурациях сетей и множеств инфраструктурных объектов, что расширяет область возможного применения модели на практике.

Дальнейшим развитием представленной модели может стать рассмотрение в её рамках инвестиционного проекта, подразумевающего производство и реализацию разных типов продукции.

Литература

[1] Launhardt W. Die Bestimmung des zweckmässigsten Standortes einer Gewerblichen Anlage // Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure. v.26 (Mar), 1882. P. 106-115.

[2] Вебер А. О размещении промышленности: чистая теория штандорта, 1909.

[3] Лёш А. Географическое размещение хозяйства. М., 1959. 455 с.

[4] Hotelling H. Stability in competition // The Economic Journal. Vol. 153, № 39, 1929. P. 41-57.

[5] Искаков. М.Б. Полное решение задачи Хотеллинга: концепция равновесия в безопасных стратегиях для игры определения цен, Журнал Новой экономической ассоциации № 1 (13), 2012. С. 10–33.

[6] Steven C. Salop, Monopolistic Competition with Outside Goods // The Bell Journal of Economics. Vol.10, No.1, 1979. P. 141-156.

[7] Леонтьев. В. Экономические эссе. Теории, исследования, факты и политика, М.:Политиздат, 1990. 415 с.

[8] Колокольцов В.Н., Малафеев О.А. Теория игр для всех (введение в математический анализ многоагентных систем конкуренции и кооперации). СПб.: Изд-во СПбГУ, 2007. 309 с.

[9] Петросян Л.А., Зенкевич Н.А. Теория игр. - М.: изд-ва ВШ и "Книжный дом "Университет", 1998. 300 с.

[10] Малафеев О.А., Зубова А.Ф. Математическое и компьютерное моделирование социально-экономических систем на уровне многоагентного взаимодействия (введение в проблемы равновесия, устойчивости и надежности). СПб.: Изд-во СПбГУ, 2006. 1006 с.

[11] Гейл Д. Теория линейных экономических моделей. М.: Издательство иностранной литературы, 1963. 408 с.

[12] Christofides N. Graph Theory: An Algorithmic Approach. Academic Press, 1975. 400 p.

[13] Новожилова Л.М. Графы, сети, трасы. СПб.: Издательский Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2007. 108 с.

[14] Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Айрис-Пресс, 2002. 553 с.

Приложение

Текст программы на C++, реализующей алгоритм Флойда — Уоршелла:

```
#include <fstream>
#include <iostream>
#include <cstring>
#include <cstdlib>
const int inf=1E9;
using namespace std;
int main()
{
    int n=50;
    int i,j,k,r[10],d[50][50];
    char buff[10];
    ifstream fin("input_matrix.txt");
    for (i=0;i<n;++i)
        for (j=0;j<n;++j)
        {
            fin >> buff;
            r[0]=buff[0]-0x30;
            r[1]=buff[1]-0x30;
            d[i][j]=r[0]*10+r[1];
            if (i==j)
                d[i][j]=0;
            if (d[i][j]==∞)
                d[i][j]=inf;
        }
    for (k=0;k<n;++k)
        for (i=0;i<n;++i)
            for (j=0;j<n;++j)
                if (d[i][k]<inf && d[k][j]<inf)
                  d[i][j]=min(d[i][j],d[i][k]+d[k][j]);
    for (i=0;i<n;++i)
        if (d[i][i]<0)
        {
            printf("error");
            return 0;
        }
    for (i=0;i<n;++i,printf("\n"))
        for (j=0;j<n;++j)
            if (d[i][j]==inf)
                printf("%d ","∞");
            else
```

```
                if (d[i][j]<10)
                {
                    printf("%d", 0);
                    printf("%d ", d[i][j]);
                }
                else
                    printf("%d ", d[i][j]);
    fin.close();
    return 0;
}
```