Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики — процессов управления
Кафедра высшей математики

ЦИМФЕР Сергей Александрович

Выпускная квалификационная работа

Прямой метод Ляпунова для анализа характеристик переходного процесса управляемых систем линейных дифференциально-разностных уравнений

Направление 010400 «Прикладная математика и информатика»
Основная образовательная программа ВМ.5689.2017 «Прикладная математика и информатика в задачах цифрового управления»
(магистратура)

Научный руководитель:
Заслуженный работник ВШ РФ,
профессор кафедры теории управления СПбГУ
доктор физ.-мат. наук,
Жабко А. П.

Рецензент:
ООО «Персей Групп»,
замдиректора по финансам,
Климова Е. В.

Санкт-Петербург
2019

Содержание

Введение

Системы дифференциально-разностных уравнений моделируют динамику широкого класса реальных явлений и процессов. Например, задача о распространении эпидемии с учетом вакцинации приводит к системе дифференциальных уравнений с запаздыванием, равным времени действия вакцины. Одними из основных параметров подобных задач является запас устойчивости заданной системы и величина перерегулирования. В зависимости от конкретной области приложения, они могут иметь различную физическую интерпретацию: так, в уже упомянутой задаче распространения эпидемии запас устойчивости определяет скорость затухания заболевания. В механических системах величина перерегулирования зачастую связана с максимальным отклонением от положения равновесия, а комбинация двух характеристик позволяет определить колебательность системы. Кроме того, наличие подобных количественных параметров дает возможность сравнивать различные решения между собой, составляя тем самым основу задач вариационного исчисления, рассматриваемых, например, в [3]. Ранее в статьях [1, 2] предложены алгоритмы оценки указанных параметров, однако их практическое применение затруднено необходимостью решения оптимизационных задач высокой размерности. Цель данной работы — разработка методов, лишенных этого недостатка.

Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений аналогичная задача была поставлена и решена Ляпуновым в монографии [4] в 1892 году. Для более сложных классов уравнений, в том числе и для уравнений с запаздывающим аргументом, задача ставится в работах [5, 6, 9, 10]. Для ее решения применяются методы, обзор которых приведен далее.

В следующем разделе сформулирована математическая постановка задачи, введены обозначения и определения, используемые в дальнейшем, а также приведен краткий обзор существующей литературы на исследуемую тему. Основная часть работы состоит из двух глав, в которых приведены необходимые вспомогательные теоретические сведения, представлены полученные результаты и описана программная реализация алгоритма с помощью языка программирования Python, решающего поставленную задачу. Работа программы проиллюстрирована на численном примере.

Постановка задачи

Рассмотрим систему линейных стационарных дифференциально-разностных уравнений

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-h), \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ — вектор, $A, B \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ — квадратные матрицы, $h > 0$ — некоторое положительное запаздывание. Зададимся, кроме того, некоторой кусочно-непрерывной начальной функцией $\varphi : [-h, 0] \to \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$. Функция $x(t, \varphi)$, удовлетворяющая условию $x(\vartheta, \varphi) = \varphi(\vartheta)$ для всех $\vartheta \in [-h, 0]$ и системе (1) при $t \geqslant t_0$, называется решением этой системы с заданными начальными условиями.

Определение 1. Функция $x_t(\vartheta, \varphi) = x(t + \vartheta, \varphi)$, определенная при $\vartheta \in [-h, 0]$ называется состоянием системы (1) в момент времени t.

Определение 2. Величина $x(t)$ называется положением системы.

Определение 3. Квадратная $n \times n$ матрица $K(t)$ называется фундаментальной матрицей системы (1), если она удовлетворяет матричному уравнению

$$\frac{d}{dt}K(t) = K(t)A + K(t-h)B, \quad t > 0,$$

и, кроме того, $K(t) = \mathbb{O}_{n\times n}$ для $t < 0$, $K(0) = E_{n\times n}$. Здесь и в дальнейшем E — единичная матрица.

Евклидова метрика и индуцированная ею нормы используются для векторов и матриц. Пространство кусочно-непрерывных функций дополнено следующей нормой

$$\|\varphi\|_h = \sup_{\vartheta\in[-h,0]} \|\varphi(\vartheta)\|.$$

Определение 4. Система (1) называется *экспоненциально устойчивой*, если существуют такие вещественные постоянные $\gamma \geqslant 1$ и $\sigma > 0$, что для любой начальной функции $\varphi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ при всех $t \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$\|x(t, \varphi)\| \leqslant \gamma e^{-\sigma t} \, \|\varphi\|_h. \tag{2}$$

Определение 5. Постоянная σ называется *степенью затухания.*

Определение 6. Минимальные допустимые значения постоянных $-\sigma$ и γ из неравенства (2) называют соответственно *запасом устойчивости* и *величиной перерегулирования* системы (1).

Как показано в [6], точная верхняя грань для степени затухания может быть найдена как $\sigma = -\max\limits_k \operatorname{Re}(\lambda_k)$, где λ_k — комплексные корни характеристического уравнения

$$\det(\lambda E - A - Be^{-\lambda h}) = 0,$$

однако ввиду сложности задачи вычисления корней в общем случае трансцендентного уравнения данный метод не приобрел распространения.

Другой подход к поставленной задаче предполагает использование различных линейных матричных неравенств, в качестве неизвестной в которых используется норма положения системы. Он подробно описан в [7].

Наконец, третья группа методов использует аппарат прямого метода Ляпунова. Они базируются либо на применении конечномерных функций положения системы — функциях Ляпунова–Разумихина [8], либо на использовании бесконечномерных функционалов на множестве состояний системы — функционалах Ляпунова–Красовского [9]. Во многих случаях результаты, полученные с помощью этих методов, являются прямым следствием теоремы Красовского об устойчивости [9]. В данной работе используются функционалы с заданной производной, в частности, функционалы полного типа, подробно описанные в [10].

Глава 1. Вспомогательные сведения

1.1. Функционалы полного типа

Сформулируем критерий экспоненциальной устойчивости — теорему Красовского для систем линейных стационарных дифференциальных уравнений с запаздыванием.

Теорема 1[9]. *Система* (1) *является экспоненциально устойчивой, если существует функционал* $v : PC([-h, 0], \mathbb{R}^{\mathrm{n}}) \to \mathbb{R}$ *такой, что выполняются следующие условия:*

1. *Для некоторых положительных постоянных* α_1, α_2 *выполняется*
$$\alpha_1 \|\varphi(0)\|^2 \leqslant v(\varphi) \leqslant \alpha_2 \|\varphi\|_h^2;$$

2. *Для некоторого положительного* β *выполняется неравенство*
$$\frac{d}{dt} v(x_t)\bigg|_{(1)} \leqslant -\beta \|x(t)\|^2, \quad t \geqslant 0,$$
вдоль решений системы.

Данная теорема имеет несколько путей возможного применения. С одной стороны, можно взять функционал $v(\varphi)$ достаточно общего вида, который заведомо удовлетворяет первому условию теоремы, найти его производную в силу системы и исследовать ее отрицательную определенность. Во многих случаях эта задача приводит к необходимости решения уже упомянутых матричных неравенств, однако существенным недостатком данного подхода является то, что выбираемый функционал $v(\varphi)$, по сути, изначально никак не связан с системой (1).

С другой стороны, можно строить $v(\varphi)$ по его заведомо известной (и отрицательно-определенной) производной. По построению, функционал явно связан с рассматриваемой системой, поэтому может быть использован не только для анализа устойчивости, но и различных свойств системы (1). В то же время, вопрос существования (и, возможно, построения) квадратичных оценок снизу остается и в этом случае серьезной проблемой.

Рассмотрим функционал $w_0(x)$ в виде квадратичной формы с заданной матрицей W: $w_0(x) = x^{\mathrm{T}} W x$. Найдем функционал $v_0(\varphi)$, определенный на множестве кусочно-непрерывных функций, такой, что
$$\frac{d}{dt} v_0(x_t) = -w_0(x), \quad t \geqslant 0.$$

Предполагая экспоненциальную устойчивость системы (1) и используя формулу Коши [6], получим следующее выражение для искомого функционала:

$$\begin{aligned} v_0(\varphi) = \varphi^{\mathrm{T}}(0)U(0)\varphi(0) + 2\varphi^{\mathrm{T}}(0)\int_{-h}^{0} U(-h-\theta)B\varphi(\theta)d\theta + \\ + \int_{-h}^{0}\varphi^{\mathrm{T}}(\theta_1)B^{\mathrm{T}}\left[\int_{-h}^{0} U(\theta_1-\theta_2)B\varphi(\theta_2)d\theta_2\right]d\theta_1, \end{aligned} \tag{3}$$

где матрицу

$$U(\tau) = \int_{0}^{\infty} K^{\mathrm{T}}(t)WK(t+\tau)dt$$

будем называть матрицей Ляпунова, ассоциированной с матрицей W. Матрица $K(t)$, как и ранее, представляет собой фундаментальную матрицу системы (1).

По построению функционал v_0 удовлетворяет второму условию теоремы Красовского, если матрица W является положительно-определенной. С другой стороны, функционал v_0, вообще говоря, не допускает квадратичной оценки снизу, необходимой для выполнения первого условия теоремы 1, поэтому необходима существенная модификация функционала, выбираемого в качестве производной искомого.

Для трех симметричных матриц $W_j, j = 0, 1, 2$, определим функционал следующего вида

$$w(\varphi) = \varphi^{\mathrm{T}}(0)W_0\varphi(0) + \varphi^{\mathrm{T}}(-h)W_1\varphi(-h) + \int_{-h}^{0}\varphi^{\mathrm{T}}(\theta)W_2\varphi(\theta)d\theta.$$

Как показано в [10], функционал $v(\varphi)$ будет определяться следующей формулой

$$v(\varphi) = v_0(\varphi) + \int_{-h}^{0}\varphi^{\mathrm{T}}(\theta)\left[W_1 + (h+\theta)W_2\right]\varphi(\theta)d\theta, \tag{4}$$

где $v_0(\varphi)$ обозначает функционал вида (3), полученный с использованием матрицы Ляпунова, ассоциированной с матрицей $W = W_0 + W_1 + hW_2$. Вдоль решений системы (1) $v(\varphi)$ удовлетворяет условию

$$\frac{d}{dt}v(x_t) = -w(x_t), \quad t \geqslant 0.$$

Назовем функционал (5) функционалом полного типа, если матрицы $W_j, j = 0, 1, 2$, являются положительно-определенными. Кроме того, в работе [10] доказано существование квадратичных оценок сверху и снизу на функционалы подобного типа в случае устойчивой системы, что приводит нас к более сильному аналогу теореме Красовского.

Теорема 2[10]. *Система* (1) *является экспоненциально устойчивой тогда и только тогда, когда существует функционал полного типа и положительные постоянные* α_1, α_2 *такие, что*
$$\alpha_1\|\varphi(0)\|^2 \leqslant v(\varphi) \leqslant \alpha_2\|\varphi\|_h^2.$$

Кроме того, в [10] указан полуаналитический метод нахождения $U(\tau)$ для системы (1). Данный метод предполагает решение системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений со специальным начальным условием.

Глава 2. Основные результаты

2.1. Итеративный метод нахождения запаса устойчивости σ

Для нахождения запаса устойчивости экспоненциально устойчивой системы (1) рассмотрим замену переменных $y(t) = e^{\delta t}x(t)$. Она переводит исходную систему в систему

$$\dot{y}(t) = (A + \delta E)\ y(t) + e^{\delta h}By(t-h). \tag{5}$$

При $\delta < \sigma$ система (5) остается экспоненциально устойчивой, а δ является оценкой снизу запаса устойчивости. Следующее утверждение дает условия, накладываемые на δ, выполнение которых гарантирует устойчивость системы (5).

Теорема 3[10]. *Пусть система* (1) *является экспоненциально устойчивой. Для трех положительно-определенных матриц* $W_j, j = 0, 1, 2,$ *система* (5) *остается экспоненциально устойчивой, если выполняются следующие условия:*

$$\begin{gathered}
\lambda_{\min}(W_0) \geqslant \mathrm{v}[\delta(2 + bh) + b(e^{\delta h} - 1)], \\
\lambda_{\min}(W_1) \geqslant b\mathrm{v}(e^{\delta h} - 1)(1 + bh), \\
\lambda_{\min}(W_2) \geqslant b\mathrm{v}[\delta + b(e^{\delta h} - 1)].
\end{gathered} \tag{6}$$

Здесь $\mathrm{v} = \|U\|_h,\ b = \|B\|$.

Предположим, что для исходной системы (1) найдена максимальная величина δ, удовлетворяющая системе неравенств (6). Обозначим ее δ_1. Рассматривая систему (5) при $\delta = \delta_1$ в качестве исходной системы (1) и повторяя рассуждения, можно найти значение δ_2. В этом случае теорема 2 гарантирует, что система вида (5) будет оставаться экспоненциально устойчивой и при $\delta = \delta_1 + \delta_2$. Введя обозначения $\delta_0 = 0$ и $\sigma_k = \sum_{i=0}^{k} \delta_i$, можно заключить, что система (5) остается экспоненциально устойчивой для любого $\delta = \sigma_k$, полученного подобным образом.

Теорема 4. *Последовательность* $\{\sigma_k\}$ *является сходящейся, причем*

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_k = \sigma.$$

Доказательство. По построению, $\{\sigma_k\}$ является монотонно возрастающей последовательностью. Кроме того, она ограничена сверху: $\sigma_k < \sigma$ для любого k. Значит, предел указанной последовательности существует.

Предположим, что рассматриваемый предел не совпадает со значением запаса устойчивости, т. е.

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_k = \widehat{\sigma} \neq \sigma.$$

По построению $\widehat{\sigma} < \sigma$, поэтому при $\delta = \widehat{\sigma}$ система (5) экспоненциально устойчива. В этом случае неравенства (6) выполняются как минимум при $\delta = 0$. Из непрерывности правых частей неравенств следует существование $\nu > 0$ такого, что неравенства остаются верны и для любого $\delta \in [0, \nu)$. Следовательно, для значения $\delta = \widehat{\sigma} + \nu/2$ система (5) также является экспоненциально устойчивой. С другой стороны, по определению $\widehat{\sigma}$, для любого $\varepsilon > 0$ условия (6) нарушаются при $\delta = \widehat{\sigma} + \varepsilon$. Полученное противоречие доказывает теорему. $\square$

Теоремы 3 и 4 позволяют свести задачу нахождения запаса устойчивости системы (1) к последовательному нахождению максимальных величин δ_k, удовлетворяющих неравенствам из условий теоремы 3. Кроме этого, аналогичные построения справедливы и для систем линейных разностных уравнений.

Следует заметить, что значения δ_k также зависят от выбираемых матриц W_j. Несмотря на то, что оптимальный выбор этих матриц может существенно увеличить скорость сходимости алгоритма, в дальнейшем он не рассматривается.

Рассмотрим вопрос нахождения максимального значения δ, удовлетворяющего всем неравенствам теоремы 3. Для этого воспользуемся W-функцией Ламберта: она определяется как решение функционального уравнения

$$\mathrm{W(z)} \cdot e^{\mathrm{W(z)}} = z.$$

Первое и третье условия теоремы 3 могут быть преобразованы к виду $e^{h\delta} \leqslant a(d-\delta)$ с некоторыми вещественными постоянными a, d. Решение подобных неравенств с помощью W-функции Ламберта выглядит следующим образом:

$$\delta \leqslant d - \frac{1}{h} \cdot \mathrm{W}\left(\frac{he^{hd}}{a}\right).$$

В развернутом виде:

$$\delta \leqslant \frac{\lambda_{min}(W_0) + b\mathrm{v}}{\mathrm{v}(2+bh)} - \frac{1}{h} \cdot \mathrm{W}\left(bhe^{h \cdot \frac{\lambda_{min}(W_0) + b\mathrm{v}}{\mathrm{v}(2+bh)}}\right), \tag{7}$$

$$\delta \leqslant \frac{\lambda_{min}(W_2) + b^2\mathrm{v}}{b\mathrm{v}} - \frac{1}{h} \cdot \mathrm{W}\left(bhe^{h \cdot \frac{\lambda_{min}(W_2) + b^2\mathrm{v}}{b\mathrm{v}}}\right). \tag{8}$$

Второе условие можно записать в виде:

$$\delta \leqslant \frac{1}{h} \cdot \ln\left(1 + \frac{\lambda(W_1)}{b\mathrm{v}(1+bh)}\right). \tag{9}$$

Обозначим через $\delta^j, j = 0, 1, 2$, правые части соответственно выражений (7) – (9). Окончательно, получаем

$$\delta = \min\left\{\delta^0, \delta^1, \delta^2\right\}. \tag{10}$$

2.2. Графический метод нахождения σ

Рассмотрим характеристическое уравнение системы (5)

$$f(\lambda,\delta)=\det\Big((\lambda-\delta)E-A-Be^{-(\lambda-\delta)h}\Big).$$

Вводя обозначение $y=e^{-\lambda h}$ получаем функцию

$$f(\lambda,y,\delta)=\det\Big((\lambda-\delta)E-A-ye^{\delta h}B\Big),$$

которая является полиномом по переменным λ, y со степенями N_λ и N_y соответственно. Кроме того, можно заметить, что наряду с равенством $f(\lambda,y,\delta)=0$ должно выполняться и равенство $f(-\lambda,y^{-1},\delta)=0$. Таким образом, получаем систему уравнений

$$\begin{cases}\varphi_1(\lambda,y,\delta)=f(\lambda,y,\delta)=0,\\ \varphi_2(\lambda,y,\delta)=y^{N_y}f(-\lambda,y^{-1},\delta)=0.\end{cases}\tag{11}$$

Для нахождения значения запаса устойчивости σ необходимо найти минимальное вещественное положительное значение δ, удовлетворяющее данной системе уравнений, вместе со значениями λ^*, y^* такими, что $\mathrm{Re}(\lambda^*)=0$, $|y^*|=1$.

Преобразуем систему (11). Каждое из уравнений является полиномом по переменным λ и y. Это позволяет использовать результант для исключения переменной y:

$$e_1=\mathrm{res}(\varphi_1,\varphi_2;y).$$

Подстановка $\lambda=iw$ позволяет учесть условие на значения λ.

Для получения второго уравнения вновь используем результант, но по переменной λ:

$$g=\mathrm{res}(\varphi_1,\varphi_2;\lambda).\tag{12}$$

Так как $y=e^{-\lambda h}$, а $\lambda=iw$, то $y=\cos(wh)-i\sin(wh)$. Подставляя это выражение в (12) и приравнивая нулю соответственно вещественную и мнимую части, получаем

$$\begin{cases}s_1(\sin(wh),\cos(wh),\delta)=\mathrm{Re}\,\Big(g(\sin(wh),\cos(wh),\delta)\Big)=0,\\ s_2(\sin(wh),\cos(wh),\delta)=\mathrm{Im}\,\Big(g(\sin(wh),\cos(wh),\delta)\Big)=0.\end{cases}\tag{13}$$

Каждое из уравнений (13) является полиномом по переменным $\sin(wh)$ и $\cos(wh)$. Это позволяет повторно применить результант для исключения одной из них:

$$e_2=\mathrm{res}(s_1,s_2;\sin(wh)).$$

Окончательно, получаем систему из двух уравнений

$$\begin{cases} e_1(w, \delta) = 0, \\ e_2(\cos(wh), \delta) = 0. \end{cases} \tag{14}$$

При подстановке фиксированного значения δ^* в (14) получаем два полиномиальных уравнения относительно w и $\cos(wh)$ соответственно. Обозначим их наборы корней $w_i, i = 1, \dots, N_1$, и $c_j, j = 1, \dots, N_2$, соответственно. Так как корни полиномов являются непрерывными функциями его коэффициентов, а коэффициенты полиномов e_1, e_2 непрерывно зависят от δ, получаем, что наборы корней w_i, c_j являются непрерывными функциями параметра δ. Введем обозначения

$$\mathrm{W}_1(\delta) = \Big\{ \cos(w_i h) \;\Big|\; e_1(w_i, \delta) = 0, i = 1, \dots, N_1 \Big\},$$

$$\mathrm{W}_2(\delta) = \Big\{ c_j \;\Big|\; e_2(c_j, \delta) = 0, j = 1, \dots, N_2 \Big\}.$$

Изображая множества $\mathrm{W}_1(\delta), \mathrm{W}_2(\delta)$ на плоскости при непрерывном изменении δ, можно получить кривые изменения корней уравнений из (14). Для нахождения значения запаса устойчивости σ достаточно найти минимальное значение δ^* такое, что:

1. $\mathrm{W}_1(\delta^*) \cup \mathrm{W}_2(\delta^*) \neq \varnothing$
2. $\exists\, x \in \mathrm{W}_1(\delta^*) \cup \mathrm{W}_2(\delta^*) : |x| \leqslant 1$

Первое из условий гарантирует, что при выбранном δ^* существует хотя бы одно решение системы (14), в то время как второе обеспечивает выполнение $\mathrm{Re}(\lambda^*) = 0$.

Таким образом, алгоритм нахождения запаса устойчивости σ:

1. Вычисление характеристического уравнения системы (5) и составление (11)
2. С помощью серии замены переменных и вычисления результантов составить (14)
3. Для заданного шага τ составить сетку значений $\delta_k = k\tau$. Для каждого δ_k вычислить корнЬ уравнений e_1, e_2. Выбрать минимальное k, при котором кривые изменения корней имеют пересечение в точке, модуль которой меньше единицы

2.3. Вычисление величины γ

Для нахождения γ рассмотрим замену $t = \alpha\tau$, $\alpha \neq 0$. Получаем

$$\dot{\xi}(\tau) = \alpha A\xi(\tau) + \alpha B\xi(\tau - h/\alpha).$$

Выбором параметра α можно перейти к системе, аналогичной (1), с произвольно малой величиной запаздывания. Заметим, что данное преобразование не влияет на значение γ.

Введем равномерное разбиение $\tau_k = kh/\alpha$ с шагом h/α, совпадающим с величиной запаздывания, и заменим производную на левую дискретную разность. Полученную систему можно записать в виде

$$\xi(\tau_{k+1}) = (E - hA)^{-1}(E + hB)\xi(\tau_k). \tag{15}$$

При шаге дискретизации, стремящемся к нулю, решение данной разностной системы стремится к фундаментальному решению исходной. В то же время, (15) не зависит от α, и определяется для (1) единственным образом. Предполагая экспоненциальную устойчивость, имеем

$$\|\xi(\tau_k)\| \leqslant \gamma_d e^{-\sigma_d \tau_k}\ \|\varphi(-h)\|.$$

Перейдем к уравнению относительно фундаментальной матрицы системы (15). Вводя обозначение $P = (E - hA)^{-1}(E + hB)$, получаем систему уравнений и оценку для величины перерегулирования

$$\begin{cases} Z(\tau_{k+1}) = PZ(\tau_k), \\ Z(0) = E, \end{cases} \tag{16}$$

$$\gamma_d \geqslant \max_{k\geqslant 0}\Big\{\|Z(\tau_k)\| e^{\sigma_d \tau_k}\Big\}. \tag{17}$$

Таким образом, задача нахождения γ_d сведена к задаче нахождения σ_d и интегрирования системы (16).

2.4. Программная реализация

Полученные результаты позволяют свести задачу нахождения параметров σ и γ к последовательному решению системы неравенств и интегрированию разностной системы специального вида. Программа, выполняющая данные задачи, реализована на языке программирования Python. Рассмотрим пример системы (1), используемый в работах других авторов [11]:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 \\ 4 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

В результате работы программы при $h = 0{,}5$ получено значение $\bar{\sigma} = 1{,}1534775$, совпадающее с полученным в цитируемой работе значением. Алгоритм дает 3 верных значащих знака после запятой после 55 итераций. В то же время, анализ получаемых после разного числа итераций значений показывает, что имеет место не менее чем линейная зависимость между числом итераций и количеством верных значащих знаков после запятой, продемонстрированная в Табл. 1.

Число итераций	Количество верных знаков
55	3
105	6
150	9
250	18

Таблица 1: Демонстрация увеличения точности алгоритма с повышением числа итераций.

Также получено значение $\gamma = 1{,}7882373$. На рис. 1 представлено сравнение получаемых значений с результатами [11] для $h \in [0, 1]$. Заметим, что при $h \longrightarrow 0^+$ значение γ_d стремится к величине перерегулирования для системы $\dot{x}(t) = (A + B)x(t)$.

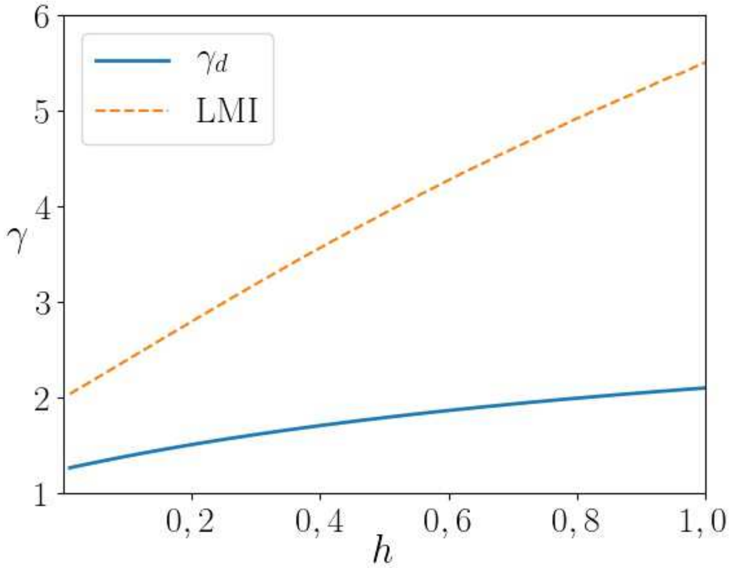

Рис. 1: Сравнение алгоритмов

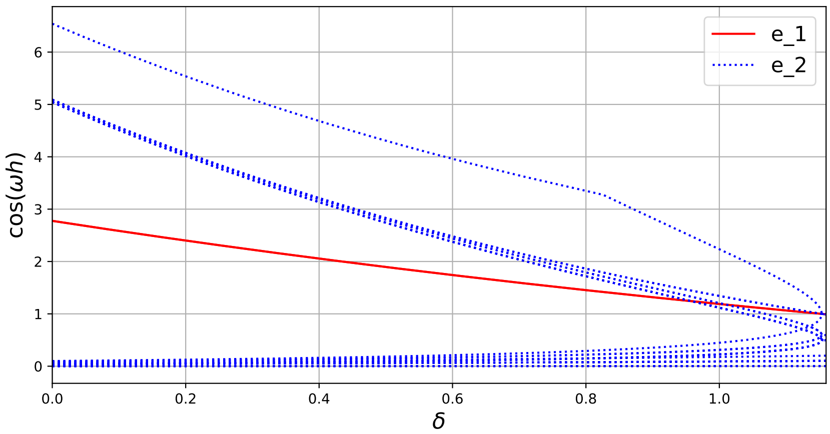

Рис. 2: Графики решений e_1 и e_2

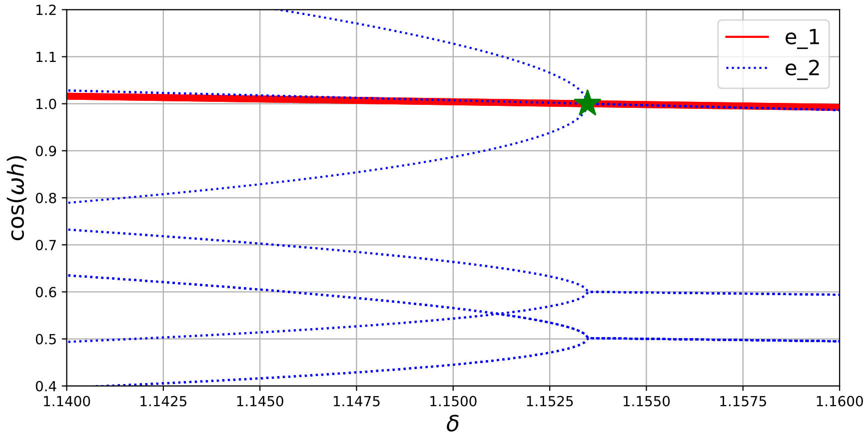

Рис. 3: Графический способ нахождения σ

На рис. 2 и рис. 3 показано графическое решение системы (14). Для наглядности отображены не все кривые, соответствующие решениям уравнений e_1 и e_2. Точка пересечения решений первого и второго уравнения системы с минимальной абсциссой, имеющая ординату, меньшую или равную единицы, отмечена на рис. 3. Уменьшение шага сетки, с помощью которой построены графики, позволяет сколь угодно точно вычислять значение σ.

Заключение

В работе поставлена и решена задача нахождения запаса устойчивости системы линейных стационарных дифференциально-разностных уравнений. На основе прямого метода Ляпунова предложен алгоритм нахождения указанной величины для устойчивых систем и его программная реализация в среде Python.

В качестве направления для дальнейших исследований следует отметить возможное обощение результатов на системы уравнений с несколькими запаздываниями разной величины, а также рассмотрение уравнений нейтрального типа.

Список литературы

[1] Цимфер С. А. Оценка параметров переходного процесса линейной системы на основе прямого метода Ляпунова // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 138–143.

[2] Цимфер С. А. Метод Нелдера – Мида в задаче оценки параметров переходного процесса линейной дифференциально-разностной системы // Процессы управления и устойчивость. 2017. Т. 4. № 1. С. 69–74.

[3] Веремей Е. И. Линейные системы с обратной связью: Учебное пособие. СПб.: Лань, 2013. 448 с.

[4] Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М. : ОНТИ. Гл. ред. общетехн. лит., 391 с.

[5] Зубов В. И. Устойчивость движения. М. : Высшая школа, 1973. 273 с.

[6] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 424 с.

[7] Boys S. P., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994. 206 p.

[8] Разумихин Б. С. Устойчивость систем с запаздыванием // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20. № 4. С. 500–512.

[9] Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Гос.изд-во физ.-мат. литературы, 1959. 211 с.

[10] Kharitonov V. L. Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices.. Basel: Birkhauser, 2013. 311 p.

[11] Mondie S., Kharitonov V. L. Exponential estimates for retarded time-delay systems: an LMI approach // IEEE Trans. Autom. Control. 2005. Vol. 50, no. 2. P. 268–273.