

Санкт-Петербургский государственный университет

КРИВОШЕИН Сергей Борисович

Выпускная квалификационная работа

**Кинематическое моделирование дисковой подсистемы
планетарных туманностей Галактики и коррекция их шкал
расстояний**

Уровень образования:

Направление 03.06.01 «Физика и астрономия»

Основная образовательная программа МК.3007.2015 Астрономия

Научный руководитель:

доцент Кафедры небесной механики,
к.ф.-м.н., доцент И.И. Никифоров

Рецензент:

заведующий отделом астрометрии
и службы времени ГАИШ МГУ,
д.ф.-м.н. А.К. Дамбис

Санкт-Петербург

2019

Saint Petersburg State University

Sergey Krivoshein

Post-Graduation Thesis

*Kinematic modelling for disc subsystem of Galactic planetary
nebulae and correction of their distance scales*

Scientific supervisor:

Associate Professor at the Chair of
Celestial Mechanics, Candidate of
Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor

I.I. Nikiforov

Reviewer:

Head of the Astrometry and Time
Service Division of Sternberg
Astronomical Institute of Lomonosov
Moscow State University, Doctor of
Physical and Mathematical Sciences

A.K. Dambis

Saint Petersburg

2019

Содержание

1. Введение	4
2. Кинематическое моделирование дисковой подсистемы ПТ Галактики	6
2.1. Использование планетарных туманностей для моделирования вращения Галактического диска	7
2.2. Решение нелинейной системы условных уравнений	8
2.3. Формирование выборки	11
2.3.1. Исключение объектов, имеющих избыточные невязки	11
2.3.2. Исключение объектов, сильно смещающих результат	13
2.3.3. Исключение объектов вблизи априорного положения оси Галактики	14
2.4. Выбор порядка аппроксимирующего полинома для закона вращения . .	15
2.5. Общее описание алгоритма получения решения	16
3. Непосредственное сравнение шкал расстояний по общим объектам каталогов	19
4. Применение метода к каталогам расстояний до планетарных туманностей	22
4.1. Результаты для каталога Zhang (1995)	23
4.2. Результаты для каталога Phillips (2004)	28
4.3. Результаты для каталога Stanghellini et al. (2008)	33
4.4. Результаты для каталога Frew (2016)	40
5. Калибровка по тригонометрическим параллаксам GAIA DR2	45
6. Заключение	50
Список литературы	53

1. Введение

Проблема расстояния до центра Галактики (проблема R_0), является актуальной уже без малого сто лет. Первые оценки были сделаны Shapley в 1918 году. С тех пор техника и качество оценок развивались, одними из последних результатов являются оценки Camarillo et al. (2018) [7] 8.0 ± 0.3 , Vallee (2017) [27] 8.0 ± 0.2 , Reid et al. (2014) [23] 8.4 ± 0.15 кпк, полученная по мазерным источникам, и оценки Ghez et al. (2008) [11] 8.0 ± 0.6 кпк и Gillessen et al. (2009) [12] 8.33 ± 0.35 кпк, полученные по данным о вращении звёзд вблизи сверхмассивной чёрной дыры в центре нашей Галактики. Несмотря на повысившуюся точность оценок, разброс между ними сохраняется до сих пор. Одним из выходов является получение усреднённых оценок по всей совокупности измерений этого параметра (например, Никифоров (2003) [4]), ввиду того, что среднее значение имеет малую неопределённость и слабо меняется со временем. Тем не менее, усовершенствование имеющихся и разработка новых методов определения R_0 является актуальной задачей и по сей день.

Планетарные туманности (ПТ) являются довольно яркими объектами, которые видны на больших расстояниях. По этой причине считалось, что этот класс объектов должен хорошо подойти для определения R_0 . Потенциально для этого могут использоваться два класса методов: пространственные и кинематические. Идея пространственных методов заключается в том, чтобы исследовать пространственное распределение объектов, находить в нём какую-то особенность или просто искать его центр. К сожалению, такие методы очень сильно подвержены эффектам наблюдательной селекции, которые будут напрямую смещать результат. Кинематические методы лишены этой проблемы и сводятся к построению модели вращения системы ПТ и нахождению центра её вращения (барицентра), который и принимается за центр Галактики. Первая попытка применить такой метод к ПТ была осуществлена Samn (1938) [8], однако уже тогда автор указывал на общую проблему использования ПТ при определении R_0 . Дело в том, что до последнего времени расстояния до ПТ определялись очень неточно, как в случайном, так и в систематическом смысле. Гипотетические оценки R_0 по ПТ давали бы большие систематические ошибки, отражающие ошибки калибровок соответствующих шкал.

Отсутствие надёжных шкал расстояний до планетарных туманностей до последнего времени являлось фундаментальной проблемой, связанной с изучением этих объектов. В обзорах последних лет зачастую отмечают отдельные шкалы, которые, по-видимому, лишены большей части проблем, с которыми традиционно сталкиваются исследователи ПТ. С каждым годом таких шкал становится все больше и больше, но сохраняется некоторая неуверенность в объективном качестве этих шкал — в частности, потому, что выводы делаются зачастую на основании их сравнения друг с другом, либо со сравнительно маленькой выборкой близких объектов, для которых расстояния измерены непосредственно. Оценка масштабов шкал путем сравнения параметров вращения Галактики, полученных в ходе построения кинематической модели дает возможность сравнительно независимой оценки масштабов этих шкал.

Другим вариантом, который стал доступен сравнительно недавно, является калибровка шкал по данным GAIA DR2. Хотя данный метод потенциально является очень перспективным, принципиально он не отличается от калибровок по нескольким десяткам тригонометрических параллаксов, которые предпринимались ранее. Таким образом, качество результатов, полученных этим методом также требуется предварительно оценить, прежде, чем их можно будет использовать на практике. Впрочем, несомненно они будут являться неплохой вспомогательной либо основной оценкой масштабов исследуемых шкал.

В случае подтверждения корректности масштаба той или иной шкалы, полученные результаты кинематического моделирования можно будет использовать для исследования свойств дисковой подсистемы ПТ в других исследованиях. В случае же, если надежным будет признан масштаб нескольких шкал, на их основании возможно будет построить синтетический (сводный) каталог, содержащий систематически более точные расстояния, чем в отдельных шкалах. Кроме того, кинематическое моделирование дисковой подсистемы ПТ Галактики можно использовать для получения по ним индивидуальных оценок R_0 .

2. Кинематическое моделирование дисковой подсистемы ПТ Галактики

Подсистема объектов тонкого диска Галактики примечательна тем, что её вращение можно описывать сравнительно простыми моделями. Выполнение моделирования и нахождение параметров модели, включая главный — расстояние до центра Галактики R_0 , позволяет получить оценки соответствующих параметров галактического вращения. Для этой цели была выбрана одна из кинематических моделей Галактики, основанная на следующих предположениях:

1. Вращение центроидов объектов является чисто круговым («цилиндрическая» модель вращения)
2. Система объектов является плоской, т.е. скорость вращения зависит только от расстояния R до оси вращения Галактики (далее — «галактоосевое расстояние»), и не зависит от высоты объекта над плоскостью диска.

В таком случае, модельная лучевая скорость для объекта, наблюдаемого на галактических координатах (l, b) и расстоянии r , будет выражаться следующей формулой:

$$V_r^{\text{mod}} = (\omega - \omega_0)R_0 \sin l \cos b - u_0 \cos l \cos b - v_0 \sin l \cos b - w_0 \sin b + K. \quad (1)$$

Здесь ω и ω_0 — угловые скорости на галактоосевых расстояниях R и R_0 соответственно, $V_0 = (u_0, v_0, w_0)$ — линейная скорость движения Солнца относительно системы ПТ в системе координат, где ось X направлена в центр Галактики, ось Y — в сторону вращения Галактики и ось Z — в северный полюс Галактики, K характеризует К-эффект.

Второе предположение из указанных выше позволяет представить линейную скорость вращения полиномами:

$$\Theta(x) = \sum_{i=0}^n \theta_i (\Delta x)^i, n \geq 1 \quad (2)$$

Здесь $x = \frac{R}{R_0}$, $\Delta x = x - 1$. Переход от R к такому параметру разложения позволяет сделать значения коэффициентов θ_i независимыми от масштаба шкалы расстояний до объектов, а также позволяет избежать расходимости вблизи нуля. Разложение именно линейной, а не угловой скорости выбрано по той причине, что кривые вращения галактик в первом приближении являются плоскими, то есть $\Theta(x) \approx \theta_0$. В случае же разложения в ряд угловой скорости $\omega(x)$, ограничиться одним членом при описании плоских кривых вращения будет невозможно. Впрочем, помня, что $\omega(x) = \frac{\Theta(x)}{R}$, легко связать полученные коэффициенты θ_i с угловой скоростью:

$$\theta_i = \frac{R_0}{k!} (x\omega(x))^{(i)} \Big|_{x=1} \quad (3)$$

Таким образом, $\theta_0 = \omega_0 R_0$, $\theta_1 = \omega_0 R_0 + \frac{d\omega}{dx} \Big|_{x=1} R_0 = R_0(\omega_0 + \omega'_0 R_0) \equiv R_0(\omega_0 - 2A)$, где A — первый параметр Оорта. Подставим полученные выражения в формулу (1):

$$\begin{aligned}
V_r^{\text{mod}} &= (\Theta(x) - R\omega_0) x \sin l \cos b - V_\odot + K = \\
&= \left(\theta_0 + \theta_1 \Delta x + \sum_{i=2}^n \theta_i (\Delta x)^i - R\omega_0 \right) x \sin l \cos b - V_\odot + K = \\
&= \left(\omega_0 R_0 + (\omega_0 + \omega'_0 R_0) R_0 \Delta x + \sum_{i=2}^n \theta_i (\Delta x)^i - R\omega_0 \right) x \sin l \cos b - \\
&- V_\odot + K = \left(-2AR_0 \Delta x + \sum_{i=2}^n \theta_i (\Delta x)^i \right) x \sin l \cos b - V_\odot + K.
\end{aligned} \tag{4}$$

Переход от гелиоцентрических расстояний r , непосредственно измеряемых для объектов, к галактоосевым расстояниям R , используемым в модели, осуществляется по формуле

$$R = \sqrt{R_0^2 + r^2 \cos^2 b - 2R_0 r \cos l \cos b}. \tag{5}$$

Так как используемые объекты принадлежат диску Галактики и сконцентрированы вблизи его плоскости, значение параметра w_0 оказывается плохо обусловленным [17], так что его величина была зафиксирована ($w_0 = w_\odot = 7.7$ км/с).

2.1. Использование планетарных туманностей для моделирования вращения Галактического диска

Для моделирования вращения Галактического диска можно использовать ПТ, принадлежащие плоской подсистеме Галактики [17]. У этого класса объектов есть ряд преимуществ и недостатков при использовании их в таком качестве. К первым следует отнести высокую яркость ПТ, позволяющую наблюдать их на больших расстояниях. Пространственная распределённость объектов критична для пространственно-кинематического моделирования, что изначально и привело к попыткам использования ПТ. Кроме того, будучи продуктами распада старых звёзд, они менее подвержены локальным кинематическим отклонениям, чем молодые объекты. К недостаткам следует отнести большее отклонение орбит ПТ от круговых, чем у молодых объектов, но, в первую очередь, конечно, здесь нужно упомянуть проблему расстояний до ПТ.

Со времён Шкловского, впервые попытавшегося определить расстояния до ПТ, задача так и не была полностью решена. Причиной этого является малое количество туманностей, расстояния до которых измерены напрямую (согласно Haywood (2014) [13], на данный момент таких насчитывается 16), невозможность использования спектрального параллакса [5], а также трудности в калибровке иных индивидуальных и статистических методов. В целом, последние шкалы расстояний до ПТ, основанные на разных методах, существенно рассогласуются. В частности, некоторые исследователи стали обращать внимание на существование группы «коротких» и группы «длинных» шкал, масштабы которых различаются примерно в 2 раза. Впрочем, после этого (и, возмож-

но, вследствие этого) появилась группа «средних» шкал, которые, по утверждениям их авторов (Abdullah et al. (2013) [6], Frew et al. (2016) [9], Smith (2014) [13]), являются более точными, чем их предшественники из обеих групп.

В качестве критерия оценки качества шкал в основном использовались те же самые астрофизические методы, что и для их калибровки. Это наводит на мысль о возможном порочном круге. Проблему мог бы решить независимый метод, не опирающийся на физику объектов. И в данном случае мы можем воспользоваться описанным выше методом пространственно-кинематического моделирования Галактики, немного его доработав. Дело в том, что за счёт жёсткой связи шкалы расстояний, по которой строится модель, и получаемых параметров модели, мы можем не только получать оценки параметров по шкале, которую считаем надёжной, но и калибровать саму шкалу, если мы считаем её известной менее надёжно, чем расстояние до центра Галактики. Таким образом, мы можем попытаться решить проблему расстояний до ПТ через кинематическую калибровку шкал расстояний, а если для конкретной шкалы проблема не будет наблюдаться, по ней можно будет получить оценки параметров вращения Галактики.

2.2. Решение нелинейной системы условных уравнений

Рассмотрим общий вид системы нелинейных условных уравнений:

$$f(X, \mathbf{a}) = y. \quad (6)$$

Здесь X , y — известные величины, \mathbf{a} — вектор искомых величин, f — функция принятой модели. Число искомых величин обозначим M , число уравнений N , тогда размерность вектора y равна N , размерность вектора \mathbf{a} — M . Есть ряд способов решения такой системы:

- линеаризация системы (6) и её последующее итеративное решение относительно Δa_m , $m = 1, \dots, M$,
- численный поиск минимума суммы квадратов невязок

$$\sigma^2(\mathbf{a}) = \frac{1}{N_{\text{free}}} \sum_{j=1}^N p_j (y_j - f(x_j, \mathbf{a}))^2, N_{\text{free}} = N - M, N > M. \quad (7)$$

В нашей модели вектор неизвестных параметров выглядит следующим образом:

$$\mathbf{a} = (R_0, A, \theta_2, \dots, \theta_n, u_0, v_0, K). \quad (8)$$

N будет равно числу объектов, $M = n + 4$, где n — порядок модели, который должен сохраняться постоянным на протяжении всего решения системы. Модель задаётся построчно следующим образом:

$$f(X_j, a) = V_{\text{mod}}(\mathbf{a}, w_0, n, r_j, l_j, b_j). \quad (9)$$

Весы уравнений p_j в системе (6) будем считать единичными.

Так как в рассматриваемой модели существует всего один нелинейный параметр — $R_0 \equiv a_1$, мы можем применить значительно более простой способ решения системы. Для этого нам необходимо исключить данный параметр путём его фиксации $a_1 = (a_1)_i$. При фиксированном параметре система становится линейной, и остальные параметры можно находить обычным линейным методом наименьших квадратов (МНК). Для нахождения же точечной оценки a_1 нужно найти среди всех то значение $(a_1)_i$, при котором достигается минимум $\sigma^2(a_1)$, что можно сделать, например, методом градиентного спуска. Таким образом, мы получаем набор значений параметров $(a_1)_0, ((a_2)_0, \dots, (a_M)_0) = \mathbf{a}_0$, являющийся решением системы.

Формальные ошибки (доверительные интервалы) всех параметров, в том числе нелинейного, мы можем найти с помощью статистики

$$\chi^2(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^N \left(\frac{y_j - f_j(\mathbf{a})}{\sigma_j} \right)^2. \quad (10)$$

При этом должны выполняться следующие предположения:

1. Нам должны быть известны абсолютные значения ошибок наблюдений σ_j^2 .
2. Величины y_j распределены по нормальному закону с математическим ожиданием $f(x_j, a)$ и среднеквадратическим отклонением σ_j .
3. Модель $f(x_j, a)$ — линейная или выборка достаточно велика, чтобы σ_{a_m} не выходили из области линеаризации $f(x_j, a)$.

Согласно [19] границы доверительного интервала параметра a_m для уровня 1σ ($\approx 68.3\%$) являются корнями уравнения

$$\chi_1^2(a_m) = \chi_0^2 + 1. \quad (11)$$

Здесь χ_0^2 — значение глобального минимума функции $\chi^2(\mathbf{a})$, $\chi_1^2(a_m)$ — минимальное значение $\chi^2(\mathbf{a})$ при фиксированном значении a_m :

$$\chi_0^2 \equiv \min(\chi^2(\mathbf{a})) = \chi^2(a_0), \quad (12)$$

$$\chi_1^2(a_m) \equiv \min_{a_m = \text{const}}(\chi^2(\mathbf{a})) \quad (13)$$

Ошибки параметров необходимо скорректировать за неизвестный масштаб ошибок измерений y_j . Введём поправку

$$\sigma_j = \sigma_0 \tilde{\sigma}_j, \quad (14)$$

где σ_0 — средний масштаб отклонений измерений от модели:

$$\sigma_0^2 \equiv \frac{1}{N_{\text{free}}} \min(\varsigma^2(\mathbf{a})), \quad (15)$$

здесь

$$\zeta^2(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^N p_j (y_j - f_j(\mathbf{a}))^2. \quad (16)$$

Тогда формула (11) для доверительных интервалов преобразуется в

$$\chi_1^2(a_m) = N_{\text{free}} + 1. \quad (17)$$

Поскольку на практике мы будем минимизировать $\zeta^2(\mathbf{a})$, нам будет удобнее переписать 17 в терминах статистики (16):

$$\zeta_1^2(a_m) = \zeta_0^2 \left(1 + \frac{1}{N_{\text{free}}} \right), \quad (18)$$

$$\zeta_1^2(a_m) \equiv \min_{a_m = \text{const}} (\zeta^2(\mathbf{a})), \quad (19)$$

$$\zeta_0^2 \equiv \min (\zeta^2(\mathbf{a})) \quad (20)$$

В нашей задаче, так как веса уравнений приняты единичными, $\tilde{\sigma}_j^2 = 1$, а σ^2 является наблюдаемой средней дисперсией скоростей.

Доверительные интервалы, найденные таким образом, соответствуют реальному масштабу отклонения от модели, так как, по сути, напрямую сравнивают наблюдаемые данные и предсказываемый моделью результат, без возможности не учесть какие-то факторы. Этот метод необходим для определения формальных ошибок R_0 , однако подходит и для линейных параметров. В отличие от ошибок, найденных по матрице ковариаций, данные доверительные интервалы формально не обязаны быть симметричны, что является дополнительной проверкой отсутствия ошибок и линейности параметра вблизи полученного значения.

В случае необходимости нахождения оценок и доверительных интервалов параметров для фиксированного значения $R_0 = R_0^{\text{fix}} \pm \sigma_{R_0}^{\pm}$, значения будут найдены стандартным образом для фиксированного значения R_0 , в то время как ошибки будут складываться из двух компонент: собственной ошибки параметра $\sigma_{\text{in}}(a_m)$, найденной по статистике (18), с параметром R_0 исключенным из вектора искомых величин, и внешней ошибки за счёт неопределенности R_0 . Границы доверительного интервала в последнем случае выражаются формулами

$$\sigma_{\text{ext}}^+(a_m) = \left| a_m \Big|_{R_0=R_0^{\text{fix}}+\sigma_{R_0}^+} - (a_m)_0 \right|, \quad (21)$$

$$\sigma_{\text{ext}}^-(a_m) = \left| a_m \Big|_{R_0=R_0^{\text{fix}}-\sigma_{R_0}^-} - (a_m)_0 \right|. \quad (22)$$

Из полученных величин можно получить суммарную ошибку по формуле

$$\sigma_{\text{tot}}^2(a_m) = \sigma_{\text{in}}^2(a_m) + \sigma_{\text{ext}}^2(a_m), \quad (23)$$

либо рассматривать полученные величины отдельно.

2.3. Формирование выборки

Для получения наилучших оценок параметров нам необходимо иметь выборку объектов, наиболее точно описываемых принятой моделью. Здесь мы руководствовались следующими соображениями:

1. Наша модель хорошо описывает только объекты, принадлежащие тонкому диску Галактики, так что в выборке должны остаться именно такие объекты.
2. Один объект не должен определять решение. Объекты, которые влияют на решение слишком сильно, должны быть исключены, а решение определяться остальными объектами.
3. Чем больше объектов в выборке, тем точнее результат и меньше дисперсия. Мы должны отбросить как можно меньше объектов.

На основании этого мы пришли к следующему алгоритму, обеспечивающему требуемые свойства выборки. В первую очередь, используемый каталог туманностей проходит предварительную обработку: из него выбираются лишь те объекты, которые явно помечены как туманности диска. Туманности гало, балджа, а также те, что имеют неясный статус, исключаются из рассмотрения и никаким образом не участвуют в решении. Затем анализируются пространственные положения туманностей и исключаются объекты, находящиеся на слишком большой высоте от диска, а также те, что находятся на слишком большом галактоосевом расстоянии. В первом случае речь идёт лишь о наиболее удалённых объектах, как правило, находящихся на высотах более 3 кпк и очевидно никакого отношения к диску не имеющих. Во втором случае несколько объектов, имеющих галактоосевые расстояния в два раза больше, чем у остальных, будут вызывать оверфиттинг, «притягивая» к себе кривую вращения, поэтому, чтобы снизить их влияние, от них придётся отказаться. Данная процедура проводится заранее, один раз для каталога, и выбранные объекты сразу же помечаются как «выбросы», так что они не используются при получении решения. Затем мы последовательно применяем три критерия отброса объектов.

2.3.1. Исключение объектов, имеющих избыточные невязки

По первоначальной выборке, полученной к этому моменту, можно найти первое решение системы (6). Путём сравнения модельных и наблюдаемых скоростей мы можем

отследить ненадёжные данные, объекты, которые плохо описываются нашей моделью. Для этого мы проводим анализ невязок $\varepsilon = O - C$. Избыточные невязки

$$\frac{|\varepsilon_j|}{\sigma_j} \gg 1 \quad (24)$$

противоречат основному предположению МНК о нормальности закона распределения $f(\varepsilon/\sigma) = N(0, 1)$, что может приводить к смещению оценок параметров. Поэтому мы проводили исключение объектов с избыточными невязками следующим образом:

1. Из статистики

$$\text{erfc}(s) = \frac{\sqrt{2}}{n}, \quad (25)$$

где erfc — дополнительная функция ошибок, находился критический уровень невязки $s_j = \frac{|\varepsilon_j|}{\sigma_j}$. Найденный таким образом уровень соответствует математическому ожиданию числа объектов с такой либо большей невязкой равному единице. Исключению подлежат объекты с

$$\frac{|\varepsilon_j|}{\sigma_j} > s_{\text{crit}}. \quad (26)$$

Наличие более чем одного такого объекта будет противоречить гипотезе нормальности распределения.

2. Лишние объекты с невязками, большими либо равными критической, исключаются из выборки как выбросы. Среди них в выборке следует один объект с наименьшей невязкой, в случае, если его существование не противоречит гипотезе нормальности.
3. В случае, если объект, удовлетворяющий условию (26), остался в выборке, нужно проверить, что его невязка s_j не является чрезмерно большой сама по себе. Для этого нужно свериться со статистикой

$$\text{erfc}(s_{\text{max}}) = p \times \frac{\sqrt{2}}{n}, \quad (27)$$

где p — заданный уровень вероятности существования туманности с таким уровнем невязки или большим. В нашем случае было принято значение $p = 0.05$. Таким образом, в случае, если у объекта невязка $s_j > s_{\text{max}}$, это значит, что вероятность соответствия его основной гипотезе о нормальности распределения менее, чем 5%. Такие объекты также подлежат исключению.

После проведения этих действий по полученной промежуточной выборке получалось новое решение системы, пересчитывались значения невязок s_j и критического уровня s_{crit} , и процедура повторялась до тех пор, пока не окажется, что больше нет объектов, требующих исключения по этому критерию.

У этого подхода есть ряд преимуществ по сравнению со стандартным критерием «трёх сигм». В первую очередь нужно отметить, что здесь критический уровень невязки зависит от объёма выборки, что является статистически верным. При большом объёме выборки существование нескольких объектов с невязками более 3σ будет нормальным, тогда как при малом объёме выборки выбросами будут и объекты, не выходящие за этот уровень. Динамический выбор уровня является изящным выходом из этой ситуации. Кроме того, сохранение одного объекта с невязкой большей, чем критический уровень, вполне объясняется наличием «хвоста» у нормального распределения и соответствует его сохранению.

2.3.2. Исключение объектов, сильно смещающих результат

Есть и другой подход к очистке выборки от выбросов. В данном случае речь идёт о «методе складного ножа», или jackknife, технике составления выборки, также позволяющей получить оценки дисперсии и смещения параметра [21, 22, 26]. Данный метод заключается в том, что мы последовательно исключаем из изначальной выборки по одному объекту, рассматривая всю выборку без него. Для полученных подвыборок мы находим оценки параметров \tilde{a}_m^i и их средние

$$\tilde{a}_m^{\text{JK}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N \tilde{a}_m^i. \quad (28)$$

Джекнайфовскую дисперсию мы можем оценить следующим образом:

$$\text{Var}(a_m) = \frac{N-1}{N} \sum_{i=1}^N (\tilde{a}_m^i - \tilde{a}_m^{\text{JK}})^2. \quad (29)$$

Данный метод также позволяет получить ожидаемое смещение результата из-за конечности выборки, которое основывается на данных обо всей выборке. Скорректированное значение параметра вычисляется следующим образом:

$$\tilde{a}_{m,\text{corr}} = N\tilde{a}_m - (N-1)\tilde{a}_m^{\text{JK}}. \quad (30)$$

В таком случае, величина ожидаемой коррекции равна

$$\Delta^{\text{JK}}(a_m) = \tilde{a}_{m,\text{corr}} - \tilde{a}_m. \quad (31)$$

Так как данный метод просчитывает смещение лишь на один шаг вперед, для достижения надёжного результата следует удалять объекты по одному, выбирая тот, у которого величина смещения $|\tilde{a}_m^j - \tilde{a}_m^{\text{JK}}|$ окажется наибольшей, и повторяя расчёт, до тех пор, пока выборка не окажется достаточно хорошей.

Как видно, определённую проблему представляет критерий остановки данного алгоритма, так как не существует связанного с ним «естественного» критерия, как в преды-

дущем методе. Так как первоочередной является задача стабилизации главного параметра модели R_0 , мы будем рассматривать оценки, связанные именно с ним.

Распределение джекнайфовских смещений $|\tilde{a}_m^j - \tilde{a}_m^{\text{JK}}|$ не является нормальным, что не позволяет аппроксимировать его гауссианой и установить критический уровень отклонения. Фактически, распределение отклонений очень похоже на лог-нормальное, однако даже если оно и является таким для некоторых выборок, оно вовсе не обязано являться таким в общем случае, а значит мы не можем опираться на это предположение. Установление истины в данном случае могло бы послужить предметом отдельного исследования.

Логичным кажется дождаться того момента, когда значение коррекции $\Delta^{\text{JK}}(R_0)$ станет очень мало, и, следовательно, выборка окажется свободна от систематического смещения результата. Однако, величина $\Delta^{\text{JK}}(R_0)$ не опускается ровно до нуля, а начинает колебаться вблизи него на некотором расстоянии. Значение, до которого опустится коррекция, не представляется определить заранее, и оно достигается очень быстро, судя по всему, не отражая реального состояния качества выборки. Порой, практически нулевое значение величина $\Delta^{\text{JK}}(R_0)$ принимает случайно, что, тем не менее, при таком алгоритме считалось бы точкой останова.

Наиболее робастным критерием из испробованных является критерий останова по глобальному минимуму относительной джекнайфовой дисперсии

$$\frac{\sigma_{\text{JK}}(R_0)}{\tilde{R}_{0,\text{corr}}}. \quad (32)$$

Данный критерий показал себя достаточно робастным, точка останова соответствует выборке, дающей наиболее точную оценку параметра, а глобальный минимум не является особенностью, которая бы показывала резкие смещения под действием внешних факторов.

Окончательным результатом будет считаться скорректированное значение R_0 , полученное по окончательной выборке, соответствующей точке останова метода.

2.3.3. Исключение объектов вблизи априорного положения оси Галактики

Несмотря на свою универсальность, критерий jackknife является достаточно косвенным, и на выборке, содержащей множество выбросов, может очень медленно сходиться, при этом отбрасывается гораздо больше объектов, чем необходимо. Для ускорения сходимости этого критерия мы можем заранее исключить объекты, находящиеся вблизи центра Галактики, так как именно среди них вероятнее всего могут находиться объекты, принадлежащие к подсистеме балджа, но по ошибке отмеченные как дисковые. Исключению подлежат объекты с

$$x < x_{\min}. \quad (33)$$

При всей простоте, у этого критерия есть ряд проблем. Первая из них заключается в том, что для вычисления значений x для составления нам требуется некоторое

априорное значение параметра R_0^{prior} . Кроме того, алгоритм приобретает итеративный вид: если значение R_0 , полученное путём решения системы, не совпадёт с R_0^{prior} , нам придётся повторить операцию, приравняв априорное значение следующего шага результату предыдущего. Отсюда проистекает вторая проблема: из-за дискретности системы алгоритм не обязан сходиться, результат может осциллировать между двумя близкими значениями R_0 . Третья проблема заключается в том, что мы не знаем, чему равно оптимальное значение параметра x_{\min} , которое вообще может меняться от каталога к каталогу. Четвёртая проблема заключается в том, что данный критерий не апеллирует ни к каким свойствам объектов, кроме пространственных, и наверняка помимо объектов, ошибочно помеченных как дисковые, исключает также множество других, вполне надёжных.

Первая проблема ведёт лишь к увеличению вычислительной сложности, о решении второй речь пойдёт чуть ниже. Третья и четвёртая же могут быть решены путём получения решений при разных значениях параметра x_{\min} , в том числе нулевого (соответствует отключению критерия). Полученные результаты сравниваются, и среди них выбирается наилучший, а сочетание факторов ускорения сходимости метода jackknife, изменения объёма выборки и исключения ложных дисковых объектов оказывается заложено в этот результат и не требует дополнительного исследования в рамках решаемой задачи.

Вместе с тем, важно отметить, что хотя в дальнейшем речь о задаче пойдёт как об итеративной, и требующей начального значения R_0^{prior} , при принятии параметра x_{\min} равным нулю, никакого априорного значения нам не требуется, и мы способны получить самостоятельную и независимую оценку R_0 , близкую к другим возможным решениям, и поэтому удобную для использования в качестве начального значения при прогонке с ненулевым x_{\min} , требующего предварительного принятия такового.

2.4. Выбор порядка аппроксимирующего полинома для закона вращения

Большим преимуществом принятой модели является возможность выбора порядка разложения. Однако при применении критериев отбора мы вынуждены полагаться на результаты, полученные по какому-то одному порядку, поэтому его придётся выбрать и зафиксировать. Подходящая процедура описана у Никифорова [3] и позволяет определить такие порядки разложения, которые обеспечат адекватное представление кривой вращения по заданной выборке (назовём их допустимыми).

В начале нам нужно ограничить множество допустимых порядков сверху. Для этого по результатам решения системы (6) мы получаем зависимость $\sigma_0^2(n)$. Хотя эта функция в среднем убывающая и стремится к нулю при большом n , в реальности после начального резкого уменьшения величины σ_0^2 дальнейшее падение замедляется для нескольких значений n . Данный эффект связан с воспроизведением общего вида кривой: увеличение n не ведёт к выявлению новых деталей в данных и, следовательно, к снижению σ_0^2 .

Затем ограничение сверху может быть усилено, в случае, если найдётся порядок меньше максимального, для которого срабатывает один из следующих критериев:

1. все коэффициенты θ_i становятся незначимыми

$$\sigma_{\theta_i} \gtrsim 0.5, \forall 2 \leq i \leq n; \quad (34)$$

2. значимость коэффициента θ_n снижается до уровня 1σ

$$\sigma_{\theta_n} \gtrsim 1; \quad (35)$$

3. модель Θ_n оказывается явно нереалистичной на краях интервала R .

Последнее часто сопровождается резким спадом σ_0 из-за оверфиттинга, поэтому излишне сложные модели отсекаются уже на предыдущем этапе. Проведённое дополнительное сужение интервала приводит к тому, что допустимыми оказываются несколько самых простых моделей.

Кроме того, в качестве вторичного критерия использовалась мера Мэллоуза

$$C_p = \frac{S_0^2}{S^2} - N + 2n. \quad (36)$$

Данный критерий подходит для сравнения нескольких подряд идущих порядков и выбора из них оптимального. Величина S равна σ_0 для наибольшего порядка из ряда. В отличие от величины σ^2 , C_p содержит штраф за увеличение порядка, поэтому оптимальным порядком по этому критерию назначается тот, который имеет наименьшую меру. Впрочем, при оверфиттинге данный критерий всё равно может ложно указывать на большой порядок, так что он использовался только для подтверждения результатов основного критерия и выбора одного порядка в случае, если в множестве допустимых порядков их оказывалось более одного.

2.5. Общее описание алгоритма получения решения

Так как воспроизводимость результата является нашим приоритетом, здесь приведено краткое, но объёмное описание реализованного алгоритма. Оно также будет полезно для лучшего понимания хода произведённых действий при получении результатов в следующей главе.

1. На вход программе поступают следующие данные из каталога ПТ: галактические координаты (l, b) , расстояния до них r , лучевые скорости V_r и их ошибки $\sigma(V_r)$, пометки о принадлежности определённой подсистеме Галактики.
2. ПТ, помеченные как не принадлежащие к дисковой подсистеме Галактики удаляются из каталога. После этого под размером каталога подразумевается то, что

осталось в результате этого действия.

3. Строится пространственное распределение туманностей. Объекты, находящиеся на слишком большой высоте над плоскостью Галактики или имеющие слишком большое удаление от центра x помечаются как выбросы. Для определения критической высоты использовалась гистограмма распределения высот, позволяющая найти явные выбросы. Кроме того, мы можем вновь вернуться к этому шагу для исключения объектов на больших x , если после построения кривой вращения выяснится, что остались объекты, притягивающие её к себе.
4. Мы получаем первоначальное решение, для определения начального приближения R_0 . Поэтому мы принимаем x_{\min} равным нулю.
5. Мы получаем решение по имеющейся на этот момент выборке для набора различных порядков и сверяемся с критериями выбора оптимального порядка. При исключении объектов из выборки мы сможем опираться только на один из них. Мы выбираем и фиксируем оптимальный порядок.
6. Мы определяем критический уровень невязки и производим исключение объектов, имеющих избыточные невязки, согласно (26), оставляя один объект с наименьшей невязкой при (27) показывающем уровень не менее 0.05. Это действие повторяется, пока на очередном шаге мы не исключим ни одного нового объекта.
7. Мы находим джеккнайфовские отклонения для каждого объекта и исключаем тот из них, который обладает наибольшим. Это действие повторяется до тех пор, пока мы не найдём глобальный минимум относительной джеккнайфовой дисперсии.
8. Мы находим решение для полученной выборки, после чего ещё раз пересчитываем значения параметров, прибавив к полученному R_0 ожидаемое значение $\Delta_{R_0}^{\text{JK}}$.
9. Мы снова сверяемся с критериями выбора порядка. В случае, если теперь, по факту, оптимальным кажется другой порядок, пункты 6 – 8 проводятся для него. Полученные для двух разных допустимых порядков решения сверяются вручную.
10. Мы принимаем значение R_0^{prior} равным полученному на предыдущем этапе. Затем мы ищем с шагом 0.05 первое значение параметра x_{\min} , при котором результат не будет совпадать с полученным в первоначальном решении (при малых значениях x_{\min} критерий не будет иметь эффекта, так как не исключит ни одного объекта). Когда мы находим это значение, мы приравниваем ему x_{\min} .
11. Мы повторяем действия 5 – 9 и получаем новую оценку R_0^{new} . В случае, если $R_0^{\text{prior}} \neq R_0^{\text{new}}$, мы приравниваем первое второму.
12. Мы повторяем действие 11, пока R_0^{prior} и R_0^{new} не совпадут, либо не войдут в замкнутый цикл, при котором R_0^{new} принимает последовательно некоторый набор

значений, после чего возвращается к его началу, и не может сойтись. В первом случае мы считаем полученные оценки параметров решением для данного x_{\min} . Во втором случае, так как единственное различие в начальных данных между осциллирующими значениями заключается в объектах, выброшенных по критерию x_{\min} , мы исключаем все объекты, исключённые по этому критерию хотя бы для одного из решений и повторяем пункты 5 – 9. Тогда окончательным решением для данного x_{\min} мы считаем полученное по вышеописанной выборке.

13. Принимая новые значения x_{\min} с шагом 0.05 и, повторяя действие 12, получаем результаты для всех интересующих нас значений x_{\min} .
14. Мы сравниваем результаты при разных x_{\min} . Критерием качества является размер доверительного интервала для основного параметра R_0 . В случае, если он является наименьшим при $x_{\min} = 0$, мы принимаем в качестве основного решения для данного каталога решение для этого значения параметра. В противном случае, если существует значение x_{\min} , при котором дисперсия заметно меньше, чем при остальных, мы принимаем в качестве основного решения для каталога это решение. В противном случае мы усредняем среди трёх решений (для наименьшего значения x_{\min} и двух его соседей) по формуле

$$\overline{R_0} = \frac{1}{P} \sum p_i R_0^i, \quad (37)$$

где $p_i = \frac{1}{(\sigma_\sigma)_i^4}$, $P = \sum p_i$.

15. Путём соотнесения с хорошо известным значением расстояния до центра Галактики $R_0^{\text{best}} = 7.9 \pm 0.2$ кпк [4], мы находим калибровочный коэффициент для каталога.

3. Непосредственное сравнение шкал расстояний по общим объектам каталогов

В случае сравнения или калибровки шкал по заранее известному расстоянию до центра Галактики R_0^{best} масштабы шкал соотносятся только по одному параметру (собственно, модельному расстоянию до центра Галактики). В случае же сравнения шкал между собой кажется более целесообразным сравнивать отношения расстояний до конкретных объектов по всей выборке. Основная идея данного метода состоит в наивном сравнении всех пар расстояний до ПТ по двум каталогам (r_1, r_2) и их отношения $\frac{r_1}{r_2}$, вычислении среднего этой величины, которое и будет равно среднему отношению масштабов этих шкал.

Однако на поверку всё оказалось не так просто, и расстояния до туманностей, равно как и их отношение, оказываются распределены не нормальным образом.

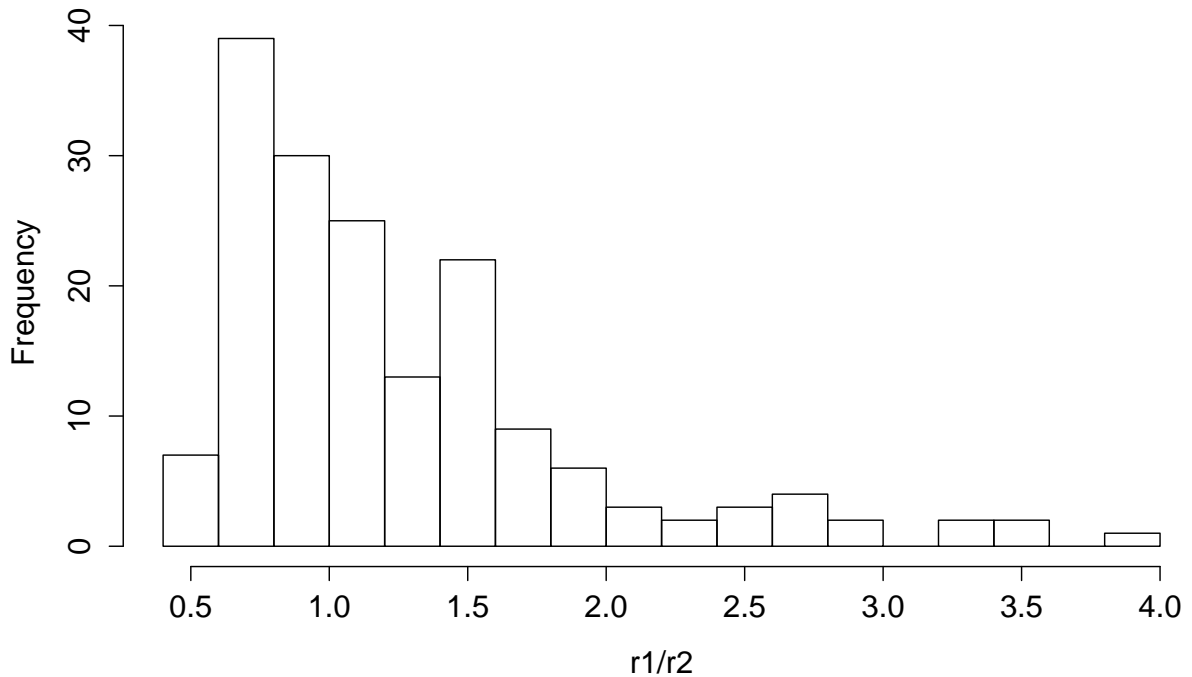


Рис. 1. Пример распределения отношения $\frac{r_1}{r_2}$. Тест Шапиро показывает $p = 2.4 \times 10^{-12}$, распределение не нормально.

Скорее, такое распределение является лог-нормальным. Таким образом, мы можем получить нормальное распределение, совершив переход к модулям расстояний:

$$d = 5 \lg r + 10. \quad (38)$$

Отношение расстояний $\frac{r_1}{r_2}$, в таком случае, перейдёт в разницу модулей расстояний

$$\Delta d = d_1 - d_2. \quad (39)$$

Эта величина оказывается распределена нормально, следовательно, для неё является корректным вычисление среднего и дисперсии. Затем, от этих величин можно совершить обратный переход к среднему и дисперсии отношения масштабов. Мы вычисляем

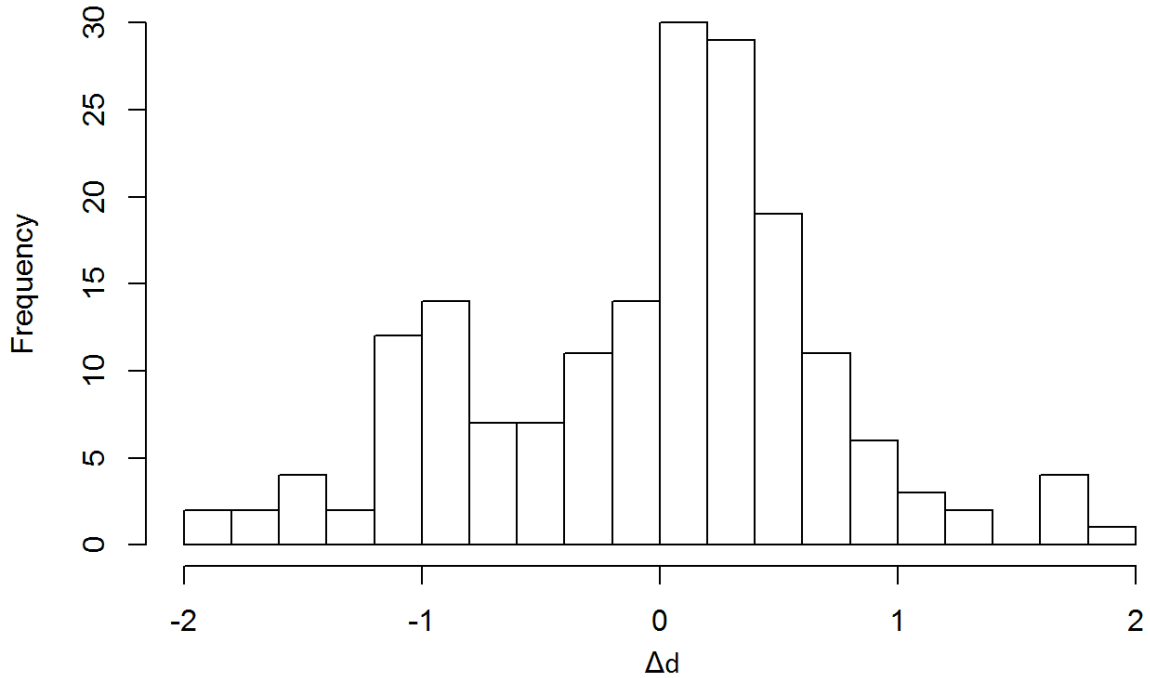


Рис. 2. Пример распределения разности Δd . Тест Шапиро показывает $p = 0.0008$, распределение похоже на нормальное.

значение среднего и среднего квадратического модуля расстояний как

$$\langle \Delta d \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta d_i, \quad (40)$$

$$\langle (\Delta d)^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Delta d_i)^2. \quad (41)$$

Затем мы вычисляем стандарт распределения Δd

$$\sigma_{\Delta d} = \left(\left(\langle (\Delta d)^2 \rangle - \langle \Delta d \rangle^2 \right) \frac{N}{N-1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (42)$$

и неопределённость средней разности модуля расстояний:

$$\sigma_{\langle \Delta d \rangle} = \frac{\sigma_{\Delta d}}{\sqrt{N}} \quad (43)$$

Обратный переход осуществляется как

$$\left\langle \frac{r_1}{r_2} \right\rangle = 10^{0.2\langle \Delta d \rangle}, \quad (44)$$

$$\sigma_{\left\langle \frac{r_1}{r_2} \right\rangle} = \frac{\ln 10}{5} \left\langle \frac{r_1}{r_2} \right\rangle \sigma_{\langle \Delta d \rangle}. \quad (45)$$

Над выборкой осуществлялась процедура отбора, аналогичная (26), с определением критического уровня и всеми прочими атрибутами. Результат, полученный в тот момент, когда выборка стабилизировалась, считался окончательным. В приведённой ниже таблице указаны полученные масштабы шкал (r_1 соответствует строке, а r_2 — столбцу).

Таблица 1. Отношение масштабов шкал для различных каталогов

$r_2 \backslash r_1$	P04b	Z95	SSV	F16
P04	-	1.118	1.167	1.195
Z95	0.894	-	1.027	1.034
SSV	0.857	0.974	-	0.999
F16	0.837	0.967	1.001	-

Здесь и далее: F16 — Frew (2016) [9]; P04 — Phillips (2004) [18]; SSV — Stanghellini et al. (2008) [25]; Z95 — Zhang (1995) [28].

Доверительный интервал для отношения P04 – Z95 равен 0.006, для остальных шкал – от 0.015 до 0.016. Отношения масштабов рассматриваемых шкал близки к единице, хотя, для большинства пар, имеют отличие на уровне статистической значимости. Довольно маленький разброс масштабов говорит о том, что сделанные нами предположения о данных шкалах являются в целом верными, т.е. выборка является сравнительно однородной, и можно рассчитывать на качественные оценки. По результатам сравнения шкала P04 является самой «короткой», т.е. в среднем имеет наименьшие оценки расстояний до отдельных объектов.

Из такого сравнения также можно вывести и внутреннюю неопределенность модулей расстояний исследуемых шкал. В предположении, что ошибки расстояний в разных шкалах не коррелируют, мы можем представить найденные дисперсии отношения расстояний как корень из суммы квадратов внутренних дисперсий рассматриваемых шкал:

$$\sigma_i^2 + \sigma_j^2 = \sigma_{ij}^2 \quad (46)$$

Нам известны все σ_{ij} (всего 6 пар), отсюда все σ_i и σ_j можно узнать путем решения избыточной системы уравнений методом наименьших квадратов.

При решении полной системы значения для каталогов Z95 и P04 оказываются неадекватными - скорее всего, это говорит о том, что дисперсии данных каталогов коррелируют. Выходом из этой ситуации является независимое решение двух систем уравнений

Таблица 2. Дисперсии модулей расстояний для разных каталогов

Каталог	SSV	F16	P04	Z95
σ_d	0.57	0.40	0.21	0.44

для набора каталогов (F16, SSV, P04) и (F16, SSV, Z95). При таком подходе проблем не возникает, для шкал Z95 и P04 используем полученные единственные решения, а для SSV и F16 — усредним полученные из обеих систем. Итоговые значения приведены в таблице 2.

4. Применение метода к каталогам расстояний до планетарных туманностей

Описанный выше алгоритм был применён к ряду каталогов. Согласно [13], имеется значительный разброс в масштабах шкал: не все из них могут быть полезны с точки зрения получения практического результата по параметрам вращения Галактики. В работе Frew (2016) [9], которая сама представляет шкалу расстояний, также содержится обзор других шкал, методов их построения и сравнение масштабов с представленным в их работе результатом. Путем анализа этих данных, были выделены следующие шкалы, представляющие наибольший интерес: Frew (2016), Stanghellini (2008), Zhang (1995) и Phillips (2004). Шкала Frew (2016) рекомендована в обзоре [13], является довольно свежим результатом, а также содержит обширный анализ и сравнение иных шкал, подтверждающий высокую точность данной шкалы. Шкалы Stanghellini (2008) оба обзора не рекомендуют, считая её «короткой» (расстояния занижены) – однако данная шкала является широко известной, базируется на более старой работе, и, по нашим данным, имеет близкий к нормальному масштаб расстояний. Ещё две шкалы – Phillips (2004) и Zhang (1995), рекомендованы в работе Frew (2016), при этом подчеркивается как близость их масштабов к масштабу шкалы Frew (2016), так и внутреннее качество использованных моделей. В случае с каталогом Zhang (1995) необходимо отметить, что непосредственно в данной работе результирующая шкала расстояний была построена путем усреднения двух шкал, полученных разными косвенными методами. При этом результирующая шкала имеет плохую точность и качество. Frew проводит анализ исходных шкал по отдельности, и выделяет одну из них, построенную с использованием зависимости $T_b - r$, как имеющую гораздо более высокую точность – она и понимается под шкалой Zhang (1995) в дальнейшем.

Так как данные о лучевых скоростях не представлены в использованных работах, их пришлось взять из отдельного источника – статьи Durand et al. (1998). Для сопоставления расстояний и лучевых скоростей, а также с целью сравнения расстояний по разным шкалам была проведена кросс-валидация объектов, в результате которой был построен рабочий каталог, содержащий информацию для 1491 планетарной туманности.

4.1. Результаты для каталога Zhang (1995)

Каталог в оригинале содержит две независимых шкалы (основанные на яркостной температуре T_b и ионизованной массе M_i), которые наивным образом усредняются, при этом расстояния в итоговой шкале оказываются систематически завышены. В работе [9] отмечается, что шкала, использующая калибровку по T_b , дает намного лучшие результаты, чем M_i , поэтому целесообразно рассматривать только одну из шкал.

Данный вывод был проверен, для расстояний, полученных по M_i предварительный результат оказался не очень адекватным ($R_0 = 9.85 \pm 0.27$), а результат для второй шкалы оказался гораздо более точным, поэтому везде в качестве шкалы Z95 понимается шкала расстояний, полученных по T_b .

В каталоге содержится 322 объекта, обозначенных как дисковые. Остальные объекты были отброшены.

Затем было получено предварительное решение для $x_{\min} = 0$. Оптимальным порядком согласно предварительной прогонке для него является $n = 2$. Для него по критерию (26) было отброшено 5 объектов со значением $s > 2.956$, по критерию jackknife объекты отброшены не были.

По итоговой выборке, в которой осталось 217 объектов, было построено промежуточное решение и получена предварительная оценка R_0 :

$$R_0^{\text{prior}} = 7.67_{-0.16}^{+0.18} \text{ кпк.} \quad (47)$$

Таблица 3. Результаты для разных x_{\min} для каталога Zhang (1995)

x_{\min}	0.0	0.2	0.3	0.4
n	2	2	2	2
N	317	278	302	253
R_0 , КПК	$7.67^{+0.18}_{-0.16}$	$5.85^{+0.31}_{-0.27}$	$6.72^{+0.26}_{-0.25}$	$6.01^{+0.33}_{-0.31}$

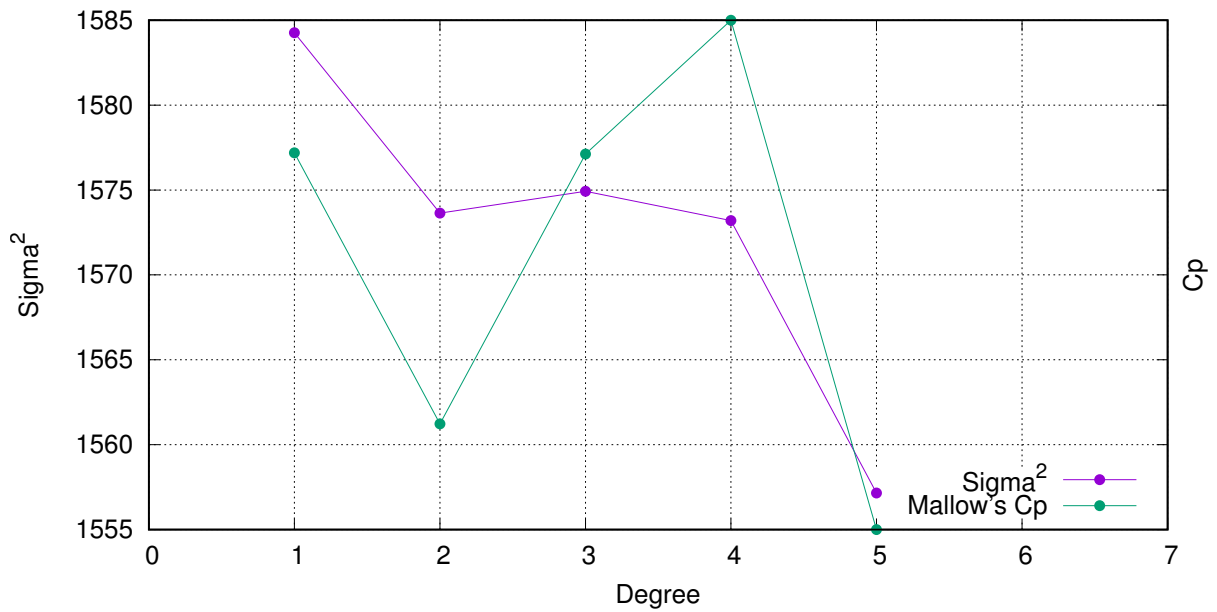


Рис. 3. Зависимость σ^2 и C_p от порядка для $x_{\min} = 0.0$

Согласно критериям выбора порядка, второй порядок является оптимальным, а также самосогласованным. В этом случае мы используем полученное значение в качестве начального приближения для других решений (при ненулевом x_{\min}). Для нахождения оптимального значения параметра x_{\min} и построения окончательного решения рассматривались значения этого параметра на интервале $[0.2, 0.4]$. Был получен набор решений для различных значений параметра на заданном интервале, для выбора оптимального рассматривался основной параметр модели R_0 и его дисперсия σ_{R_0} :

Решение для $x_{\min} = 0$ имеет существенно более низкую дисперсию, чем все остальные, поэтому в качестве окончательного решения мы берём его.

Таблица 4. Оценки параметров модели (нескорректированные) для разных порядков разложения при $x_{\min} = 0.0$ для каталога Zhang (1995).

n	R_0 , кpc	σ^2 , km^2/s^2	AR_0 , km/s	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	u_0 , km/s	v_0 , km/s	K , km/s
1	7.66 +0.18 -0.16 +2.33% -2.15%	1584.26 39.80	83.49 +4.65 -4.63 +5.57% -5.55%					15.19 ± 3.51 $\pm 23.10\%$	29.05 ± 3.51 $\pm 12.08\%$	-1.76 ± 2.56 $\pm 144.92\%$
2	7.63 +0.18 -0.16 +2.35% -2.14%	1573.64 39.67	78.69 +5.33 -5.31 +6.77% -6.75%	34.81 +19.71 -19.74 +56.62% -56.71%				15.57 +3.51 -3.49 +22.51% -22.41%	32.16 ± 3.92 $\pm 12.18\%$	-2.07 ± 2.54 $\pm 123.05\%$
3	7.64 +0.18 -0.16 +2.34% -2.14%	1574.93 39.69	84.23 +8.33 -8.32 +9.89% -9.88%	34.22 +19.73 -19.74 +57.64% -57.69%	29.85 +34.71 -34.54 +116.28% -115.70%			15.26 ± 3.52 $\pm 23.10\%$	32.84 ± 4.00 $\pm 12.18\%$	-2.17 ± 2.56 $\pm 117.58\%$
4	7.63 +0.18 -0.16 +2.35% -2.14%	1573.20 39.66	83.03 +8.47 -8.49 +10.20% -10.22%	6.73 ± 30.84 $\pm 458.30\%$	11.27 +38.44 -38.58 +341.06% -342.33%	38.46 +33.19 -33.21 +86.30% -86.35%		14.83 ± 3.54 $\pm 23.88\%$	31.27 ± 4.22 $\pm 13.50\%$	-2.42 ± 2.57 $\pm 105.86\%$
5	7.58 +0.23 -0.16 +3.07% -2.12%	1557.15 39.46	95.99 +10.76 -10.65 +11.21% -11.09%	-72.76 +50.58 -49.91 +69.52% -68.59%	95.12 +58.99 -56.95 +62.02% -59.87%	173.94 +75.87 -74.53 +43.62% -42.85%	-75.55 +36.58 -36.77 +48.43% -48.67%	14.64 ± 3.52 $\pm 24.07\%$	29.05 +4.39 -4.40 +15.11% -15.16%	-2.20 ± 2.56 $\pm 116.02\%$

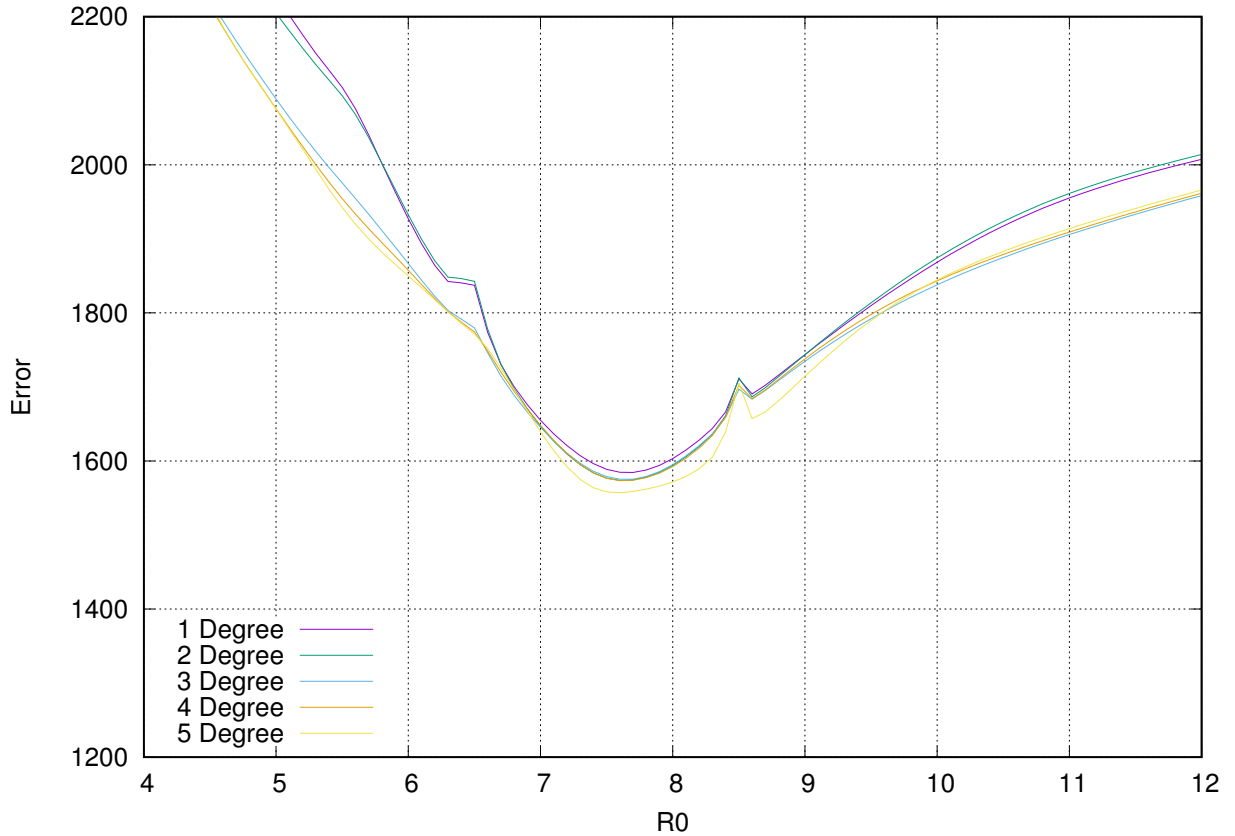
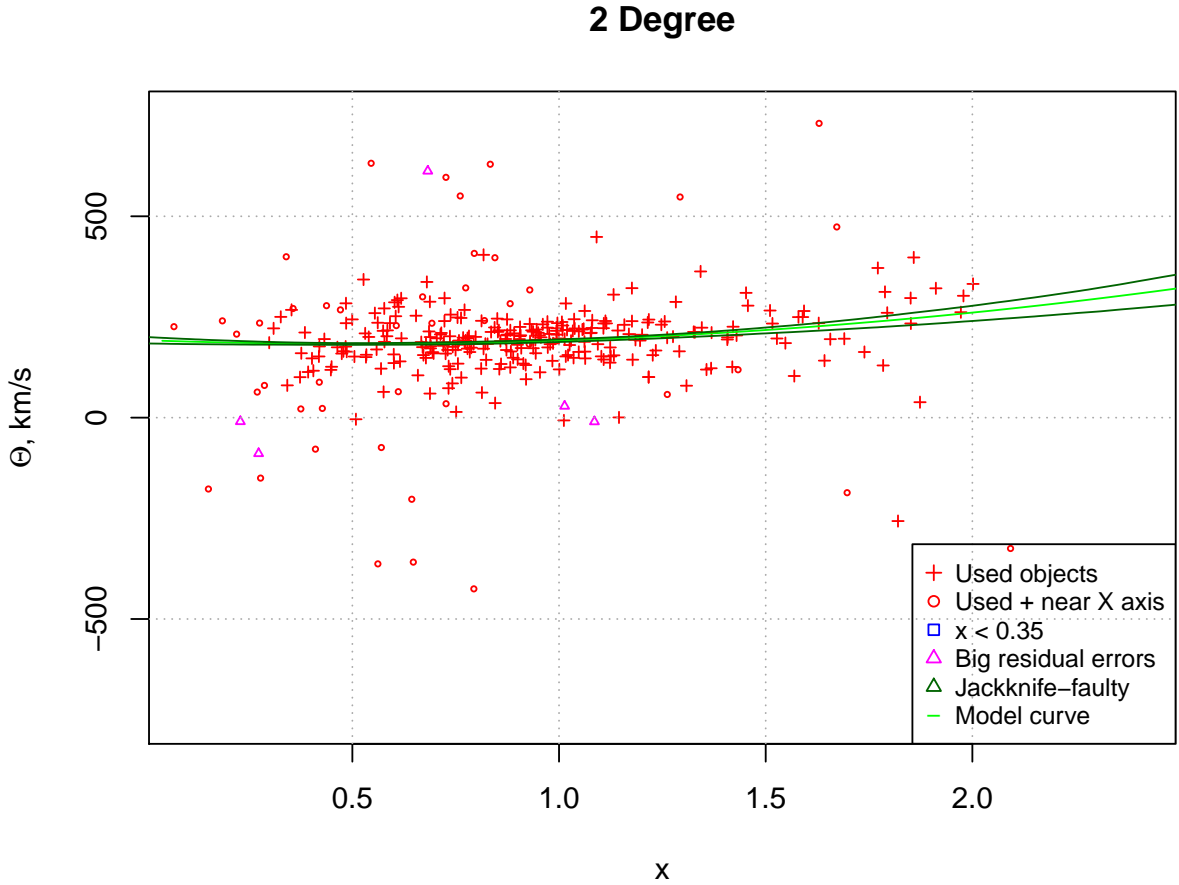


Рис. 4. Профиль функции σ^2 для параметра R_0 .

Полученный результат имеет очень высокую обусловленность: он имеет очень низкую дисперсию, почти не меняется при изменении порядка и значения x_{\min} .

Каталог	Z95	Параметр	Величина	ошибка	ед. изм.
N	266	R_0	7.67	$^{+0.18}_{-0.16}$	КПК
n	1	AR_0	78.85	$\pm 4.48^{+0.63}_{-0.76}$	км/с
M	5	θ_2	34.57	$\pm 14.96^{+0.08}_{-1.03}$	км/с
σ , км/с	39.67	u	15.61	$\pm 3.04^{+0.15}_{-0.20}$	км/с
x_{\min}	0.0	v	32.17	$\pm 3.46^{+0.12}_{-0.03}$	км/с
	0.0	w	7.7		км/с
		K	-2.09	$\pm 2.22^{+0.08}_{-0.09}$	км/с

Рис. 5. Кривые вращения для второго порядка разложения для каталога Z95



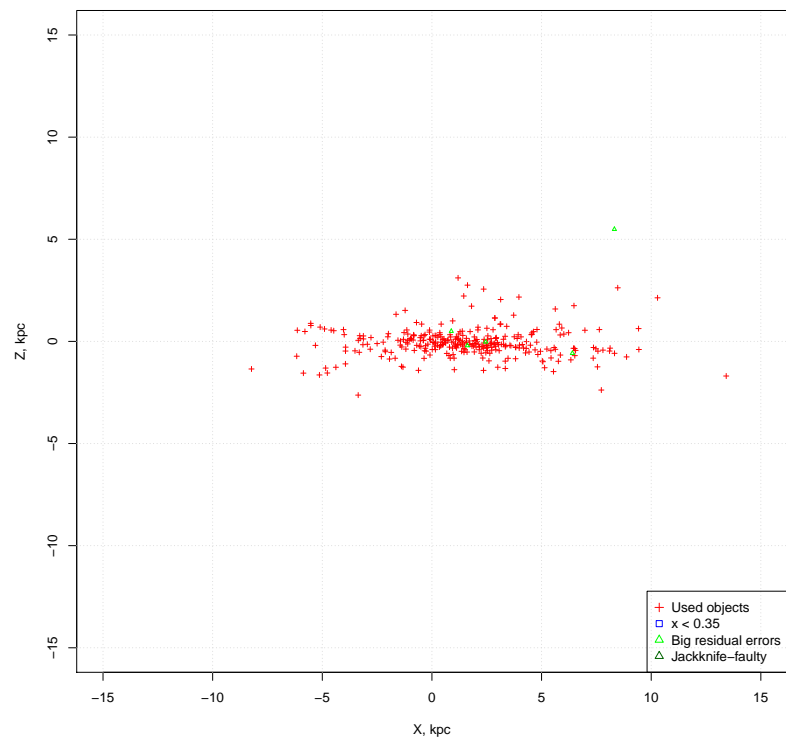
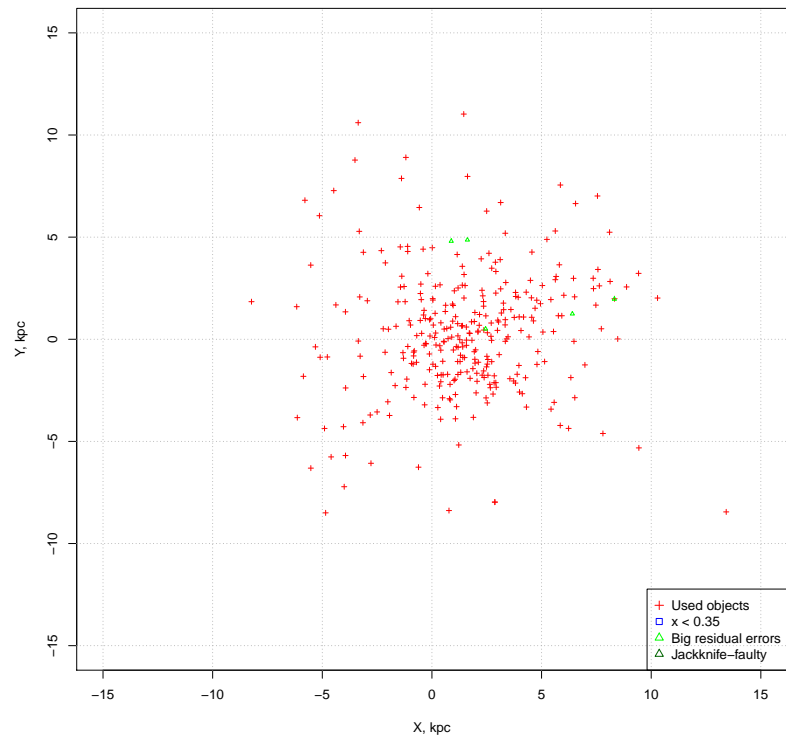
По полученному решению мы находим следующее значение калибровочного коэффициента:

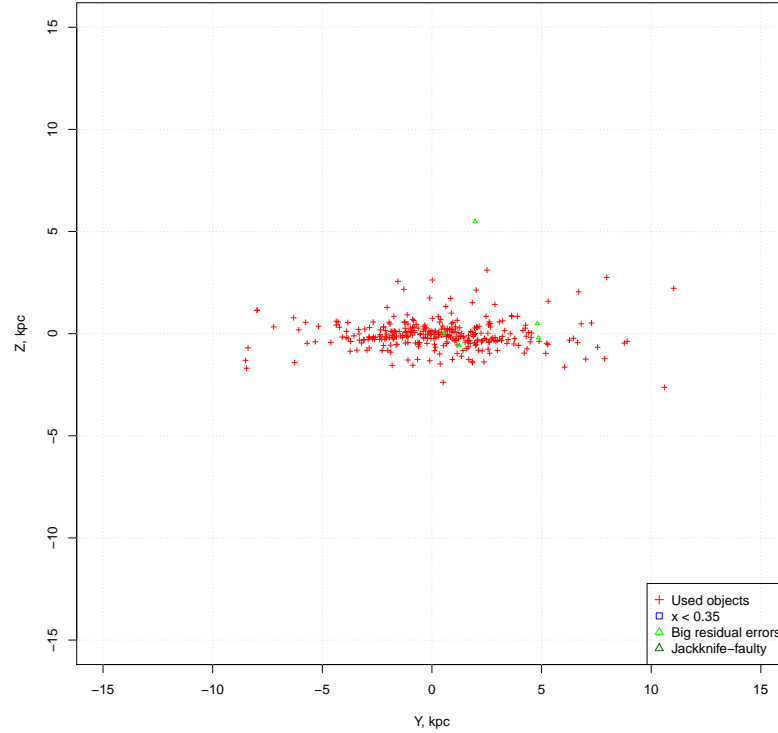
$$k_{St} = 1.03 \pm 0.02. \quad (48)$$

Нормировку на произвольное калибровочное расстояние можно осуществить по формуле

$$k = (k_{cat}) \times \left(\frac{R_0}{8.0} \right)_{\text{КПК}}. \quad (49)$$

Рис. 6. Пространственное распределение объектов для каталога Zh95.





Калиброванные расстояния для каталога вычисляются по формуле

$$r_{\text{cal}} = kr \quad (50)$$

4.2. Результаты для каталога Phillips (2004)

В каталоге содержится 291 объект, обозначенный как дисковый. Остальные объекты были отброшены.

Затем было получено предварительное решение для $x_{\min} = 0$. Оптимальным порядком согласно предварительной прогонке для него является $n = 1$. Для него по критерию (26) было отброшено 9 объектов со значением $s > 2.927$. Затем применялся критерий jackknife, по нему было отброшен 1 объект.

По итоговой выборке, в которой осталось 281 объектов, было построено промежуточное решение и получена предварительная оценка R_0 :

$$R_0^{\text{prior}} = 7.39_{-0.26}^{+0.28} \text{ кпк.} \quad (51)$$

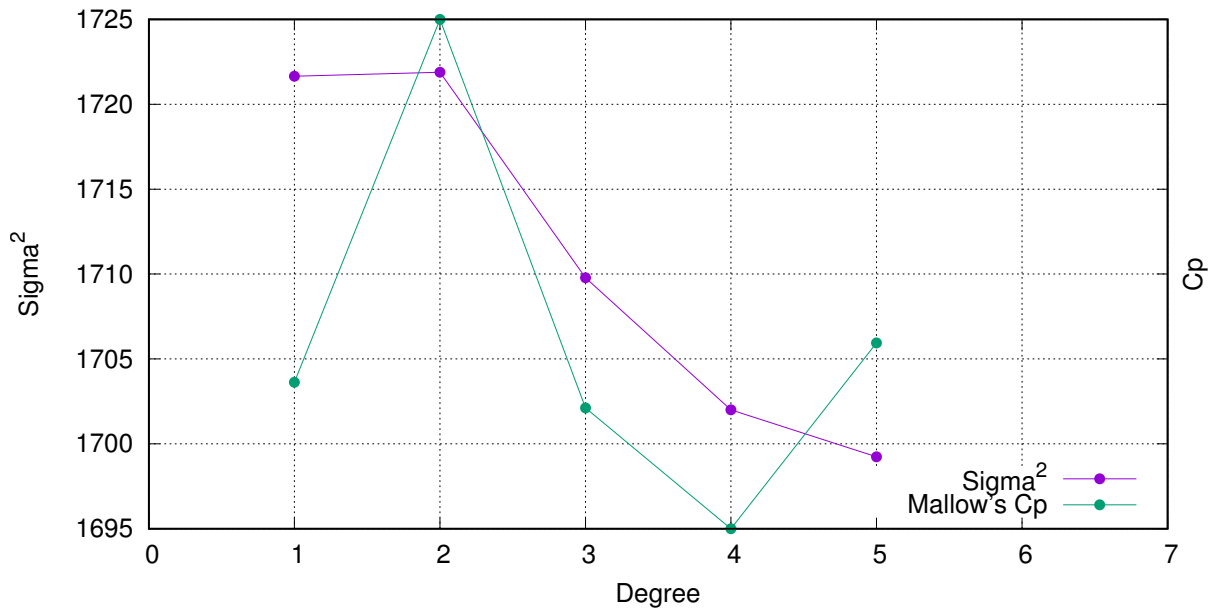


Рис. 7. Зависимость σ^2 и C_p от порядка для $x_{\min} = 0.0$

Второй порядок разложения сравним по средней ошибке с первым, но мера Мэллоуза однозначно говорит о преимуществе первого порядка, а погрешности коэффициентов при разложении до более высокого порядка не позволяют нам их использовать, так что было решено остановиться на первом, для которого уже полученное значение использовалось в качестве начального приближения для других решений (при ненулевом x_{\min}). Для нахождения оптимального значения параметра x_{\min} и построения окончательного решения рассматривались значения этого параметра на интервале $[0.2, 0.4]$. Был получен набор решений для различных значений параметра на заданном интервале, для выбора оптимального рассматривался основной параметр модели R_0 и его дисперсия σ_{R_0} :

Таблица 5. Результаты для разных x_{\min} для каталога P04

x_{\min}	0.0	0.2	0.3	0.4
n	1	1	1	1
N	281	283	234	226
R_0 , кПК	7.39^{+0.28}_{-0.26}	7.55 ^{+0.31} _{-0.28}	5.55 ^{+0.37} _{-0.34}	5.60 ^{+0.36} _{-0.33}

Из таблицы видно, что значение дисперсии R_0 растёт с увеличением x_{\min} , поэтому, согласно нашему плану действий, в качестве окончательного решения здесь мы берём

Таблица 6. Оценки параметров модели (нескорректированные) для разных порядков разложения при $x_{\min} = 0.0$ для каталога P04

n	R_0 , kpc	σ^2 , km ² /s ²	AR_0 , km/s	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	u_0 , km/s	v_0 , km/s	K , km/s
1	7.38 +0.28 -0.26 +3.79% -3.49%	1721.65 41.49	83.79 +5.19 -5.13 +6.20% -6.12%					12.42 ± 3.84 ± 30.91%	31.20 ± 3.79 ± 12.13%	-2.35 ± 2.77 ± 117.58%
2	7.38 +0.26 -0.24 +3.54% -3.31%	1721.89 41.50	80.66 +6.06 -5.98 +7.51% -7.41%	22.04 +22.58 -22.47 +102.47% -101.98%				12.69 ± 3.85 ± 30.32%	33.10 +4.24 -4.26 +12.82% -12.87%	-2.49 ± 2.78 ± 111.33%
3	7.34 +0.28 -0.27 +3.84% -3.65%	1709.78 41.35	94.49 +10.04 -10.02 +10.63% -10.60%	23.17 +22.97 -22.59 +99.15% -97.53%	82.26 +47.96 -47.78 +58.31% -58.09%			12.42 ± 3.84 ± 30.91%	34.85 ± 4.38 ± 12.57%	-2.48 ± 2.76 ± 111.33%
4	7.42 +0.28 -0.26 +3.74% -3.51%	1702.00 41.26	99.40 +10.87 -10.68 +10.93% -10.75%	-62.15 +62.06 -61.40 +99.87% -98.79%	77.06 +50.47 -49.13 +65.49% -63.76%	150.92 +106.23 -101.37 +70.39% -67.17%		11.91 ± 3.85 ± 32.28%	31.99 ± 4.77 ± 14.92%	-2.68 ± 2.76 ± 102.93%
5	7.50 ± 0.27 ± 3.55%	1699.24 41.22	114.04 +16.46 -16.25 +14.43% -14.25%	-69.30 +61.96 -61.88 +89.42% -89.29%	290.02 +194.85 -184.97 +67.18% -63.78%	198.59 +109.64 -107.75 +55.21% -54.26%	-262.03 +237.92 -219.37 +90.80% -83.72%	11.89 ± 3.84 ± 32.28%	32.85 ± 4.84 ± 14.72%	-2.30 ± 2.77 ± 120.70%

решение для $x_{\min} = 0$, только что полученное нами.

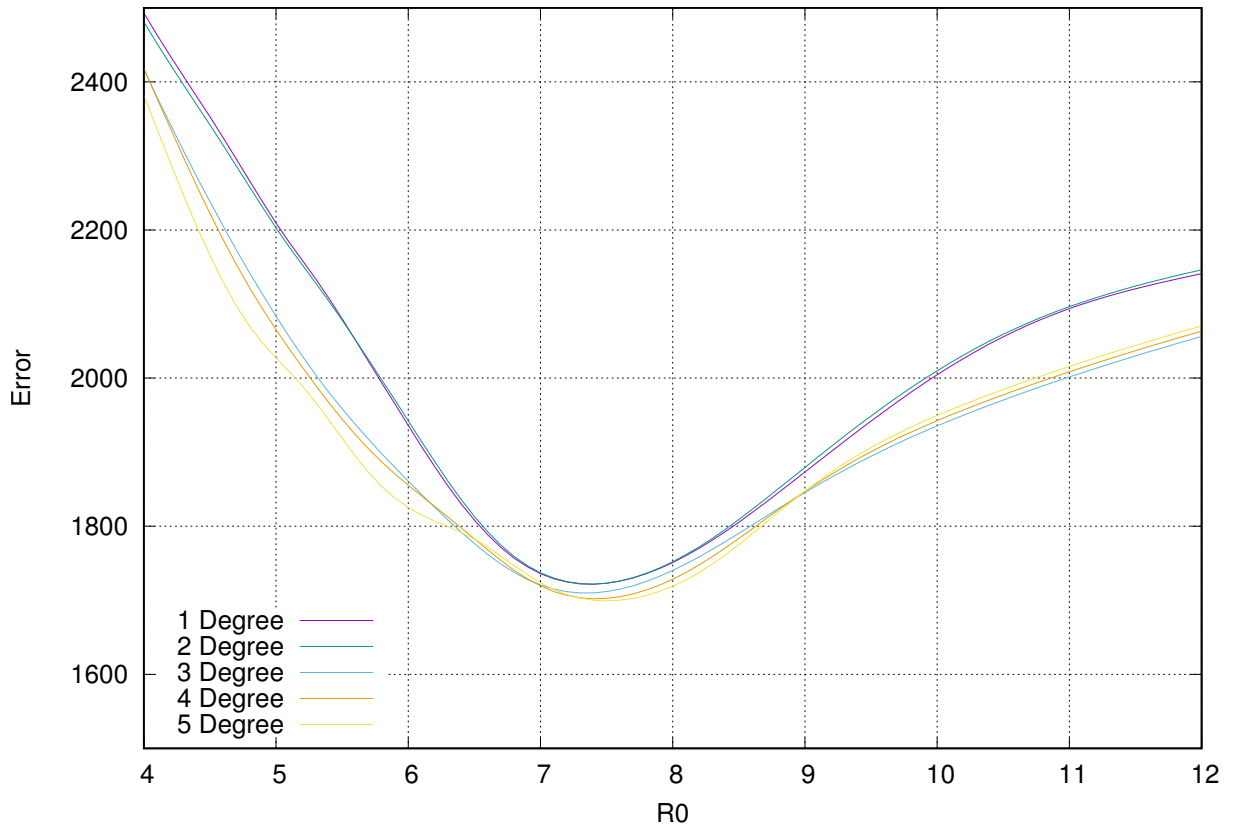
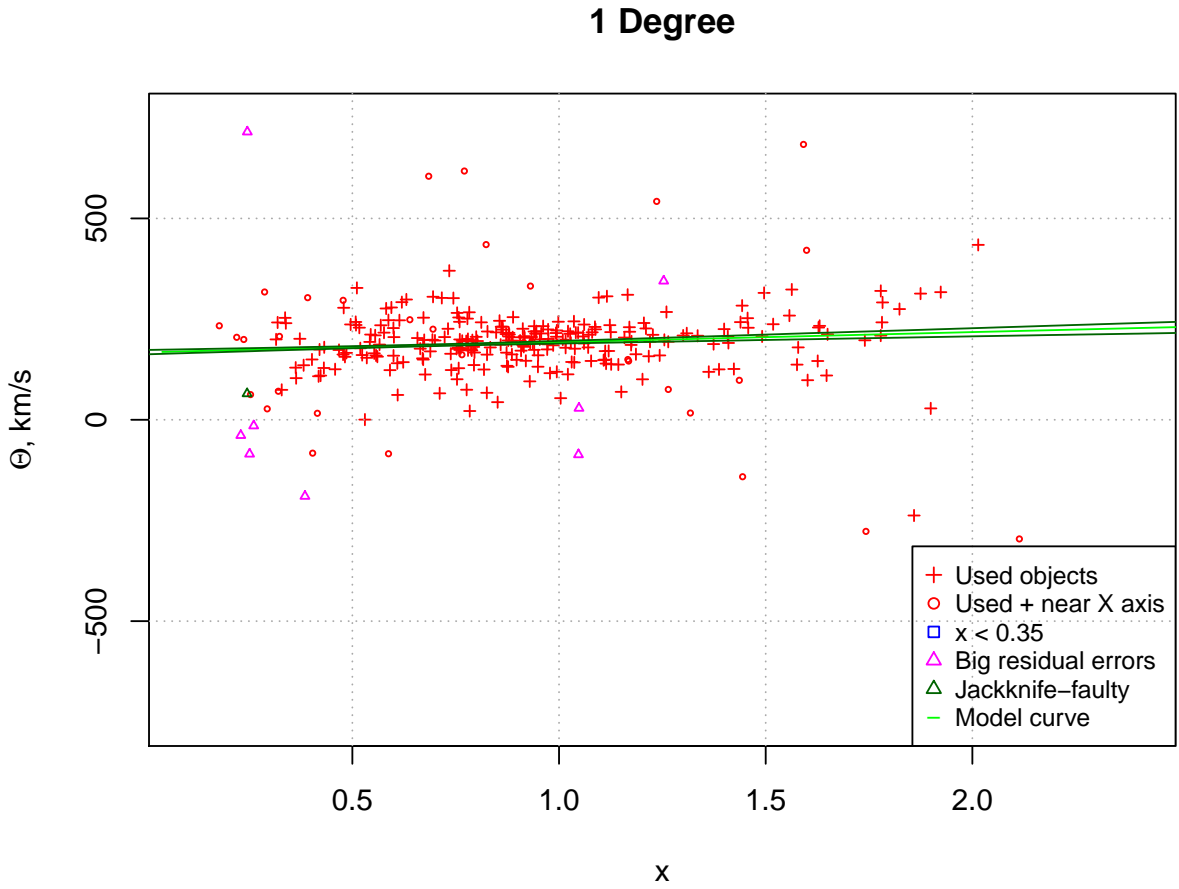


Рис. 8. Профиль функции σ^2 для параметра R_0 .

Примечательно, что результат для данного каталога оказался правдоподобным даже без использования «дополнительного» критерия x_{\min} .

Каталог	P04	Параметр	Величина	ошибка	ед. изм.
N	281	R_0	7.39	$+0.28$ -0.26	КПК
n	1	AR_0	83.86	± 4.81 $^{+1.71}$ $_{-1.63}$	км/с
m	5	u	12.43	± 3.42 $^{+0.10}$ $_{-0.13}$	км/с
σ , км/с	41.49	v	31.22	± 3.73 $^{+0.42}$ $_{-0.37}$	км/с
x_{\min}	0.0	w	7.7		км/с
		K	-2.36	$\pm 2.48 \mp 0.10$	км/с

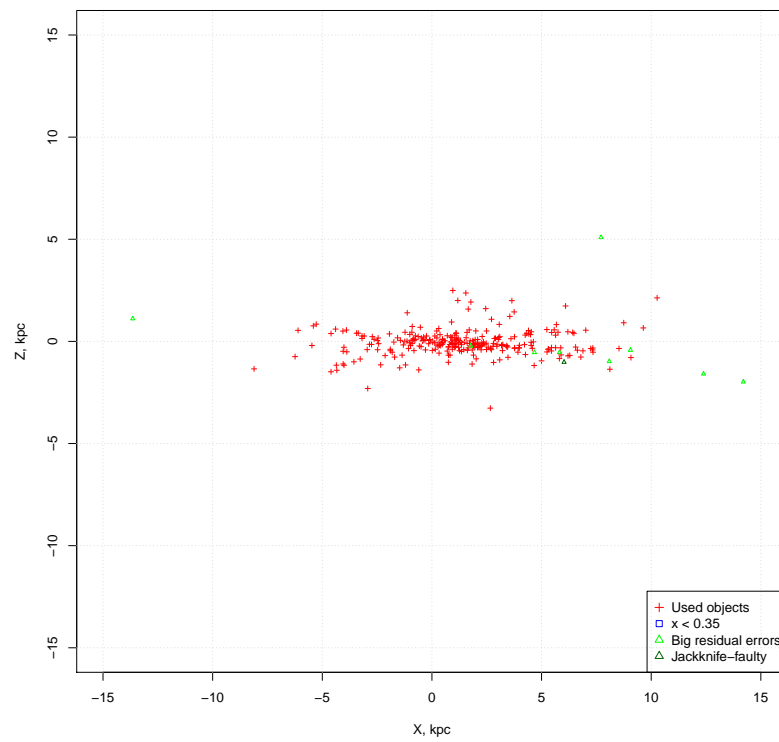
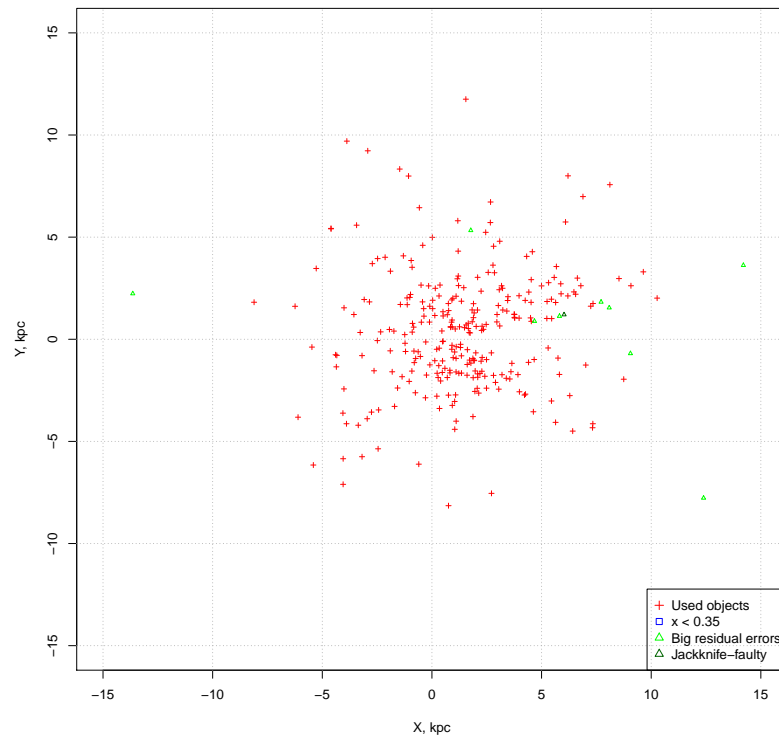
Рис. 9. Кривые вращения для разных порядков разложения для каталога Phillips

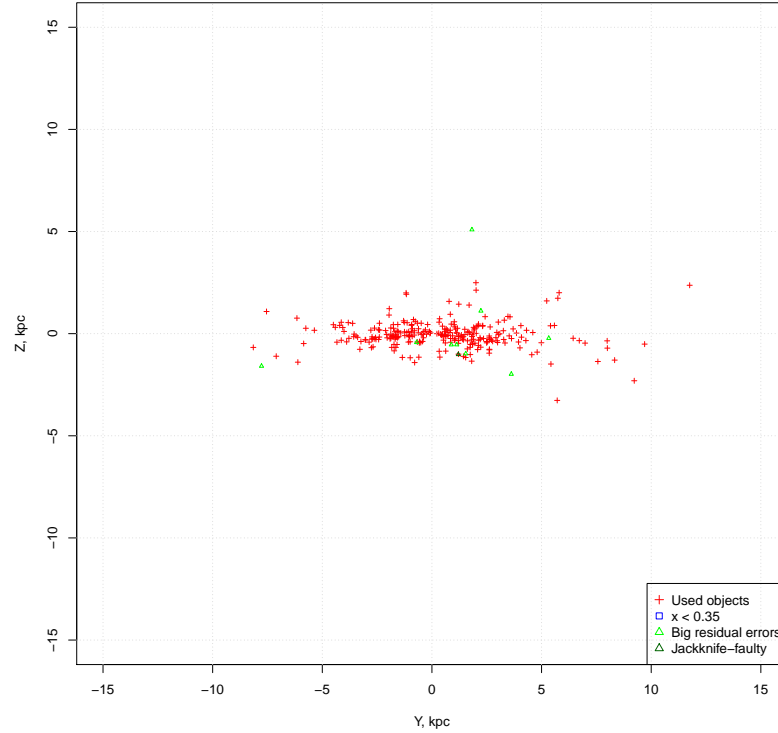


Сверяя масштаб этой шкалы с R_0^{best} , также получаем значение калибровочного коэффициента, близкое к единице, т.е. подтверждающее надежность данной шкалы.:

$$k_{P04} = 1.08 \pm 0.06. \quad (52)$$

Рис. 10. Пространственное распределение объектов для каталога P04.





4.3. Результаты для каталога Stanghellini et al. (2008)

В каталоге содержится 281 объект, обозначенный как дисковый. Остальные объекты были отброшены. Было построено пространственное распределение объектов, после чего отброшены девять, находящиеся на очень большой Галактической высоте или большом удалении от центра Галактики: **PC 12, M 2-13, Sn 1, Vy 1-2, Ps 1, K 3-66, K 3-70, M 1-9, Me 2-1.**

Затем было получено предварительное решение для $x_{\min} = 0$. Оптимальным порядком согласно предварительной прогонке для него является $n = 2$. Для него по критерию (26) было отброшено 5 объектов, а по критерию jackknife — 17 объектов.

По итоговой выборке, в которой осталось 250 объектов, было построено промежуточное решение и получена предварительная оценка R_0 :

$$R_0^{\text{prior}} = 8.03_{-0.49}^{+0.46} \text{ кпк.} \quad (53)$$

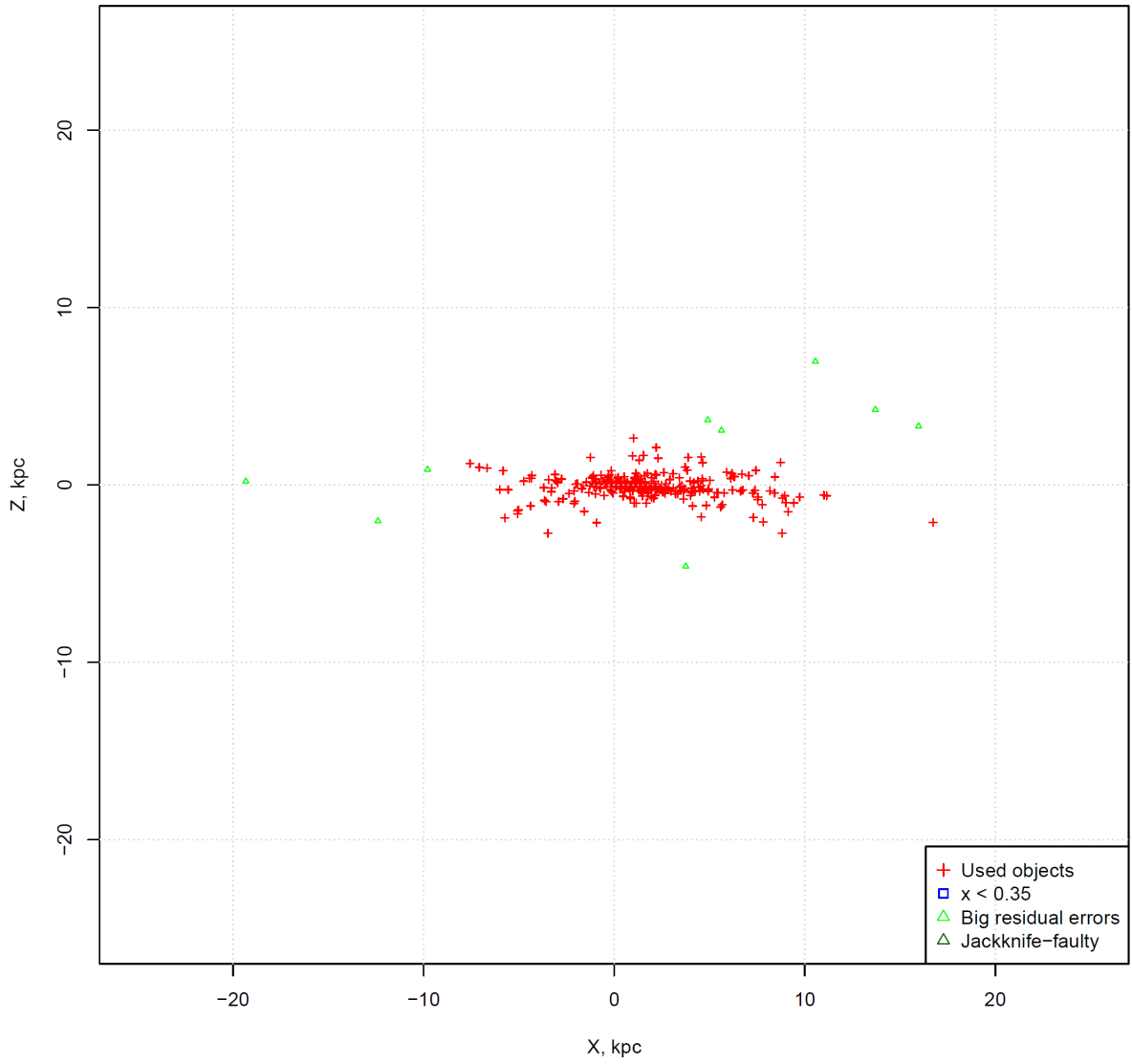


Рис. 11. Пространственное распределение для каталога SSV в координатах XZ. Выброшенные объекты выделены зелёным.

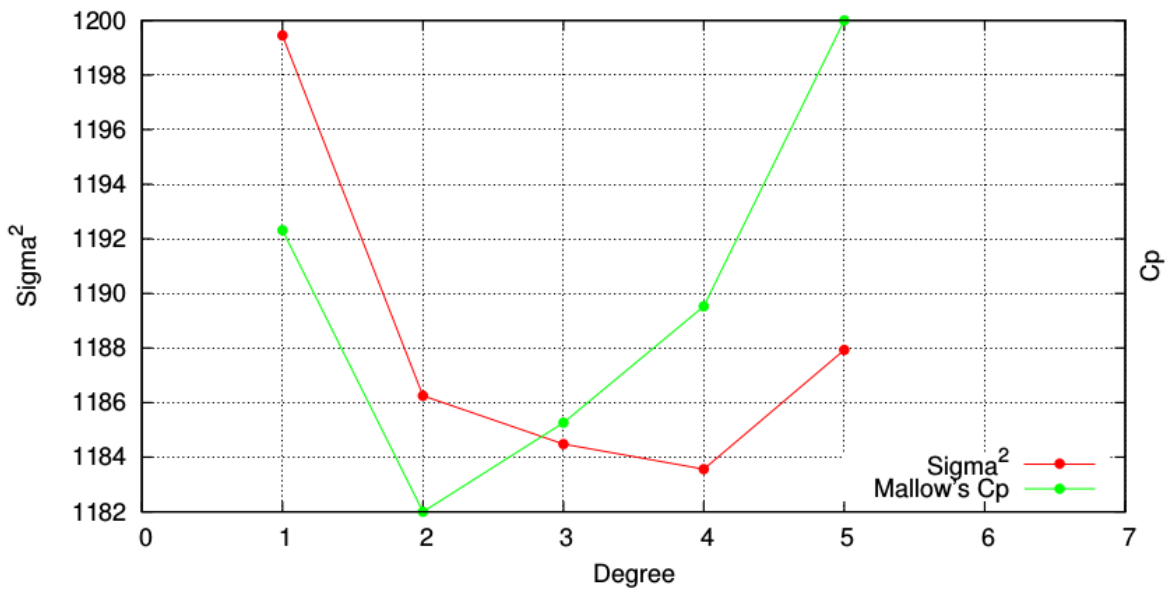


Рис. 12. Зависимость σ^2 и C_p от порядка для $\alpha = 0.0$

Согласно критериям выбора порядка, второй порядок является оптимальным и само-согласованным. Для нахождения оптимального значения параметра x_{\min} и построения окончательного решения рассматривались значения этого параметра на интервале $[0.2, 0.4]$. Был получен набор решений для различных значений параметра на заданном интервале, для выбора оптимального рассматривался основной параметр модели R_0 и его дисперсия σ_{R_0} :

Таблица 7. Результаты для разных x_{\min} для каталога St08

x_{\min}	0.0	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4
n	2	2	2	2	2	2
N	250	250	242	242	224	212
R_0 , кпк	$7.94^{+0.45}_{-0.42}$	$8.03^{+0.49}_{-0.46}$	8.16 ± 0.45	8.16 ± 0.45	$8.23^{+0.48}_{-0.45}$	$8.28^{+0.56}_{-0.52}$

Из таблицы видно, что значение дисперсии R_0 растёт с увеличением x_{\min} , поэтому, согласно нашему плану действий, в качестве окончательного решения здесь мы берём решение для $x_{\min} = 0$, только что полученное нами.

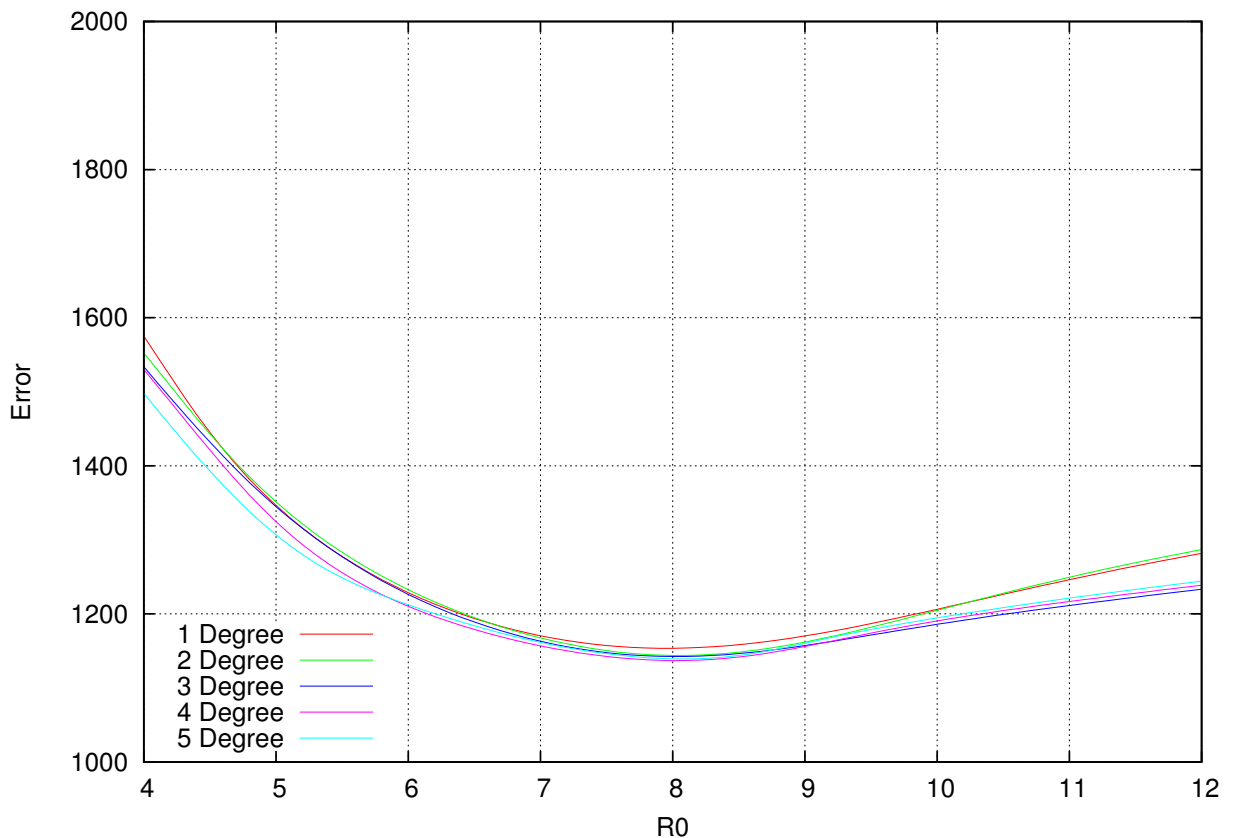


Рис. 13. Профиль функции σ^2 для параметра R_0 .

Примечательно, что результат для данного каталога оказался правдоподобным даже без использования «дополнительного» критерия x_{\min} .

n	R_0 , kpc	σ^2 , km ² /s ²	AR_0 , km/s	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	u_0 , km/s	v_0 , km/s	K , km/s
1	7.88 +0.47 -0.43 +5.95% -5.48%	1199.45 34.63	82.95 +6.18 -5.90 +7.45% -7.11%					14.55 ± 3.37 ± 23.19%	27.08 ± 3.38 ± 12.48%	-1.77 ± 2.39 ± 134.77%
2	7.99 +0.49 -0.46 +6.12% -5.75%	1186.25 34.44	80.74 +6.20 -5.92 +7.68% -7.34%	41.39 +23.05 -21.74 +55.68% -52.53%				14.62 ± 3.36 ± 23.00%	30.69 ± 3.84 ± 12.52%	-1.73 ± 2.38 ± 137.89%
3	7.97 +0.46 -0.43 +5.71% -5.35%	1184.48 34.42	89.67 +9.82 -9.70 +10.96% -10.82%	33.31 +24.21 -23.12 +72.68% -69.41%	51.28 +44.98 -43.88 +87.71% -85.56%			14.58 ± 3.35 ± 23.00%	31.26 ± 3.88 ± 12.43%	-1.71 ± 2.38 ± 138.67%
4	7.93 +0.51 -0.48 +6.43% -6.10%	1183.56 34.40	88.65 +10.19 -10.21 +11.49% -11.52%	-15.82 +49.49 -50.77 +312.84% -320.95%	22.43 +52.40 -51.70 +233.67% -230.54%	84.37 +80.34 -77.23 +95.23% -91.55%		14.71 ± 3.35 ± 22.80%	29.32 +4.29 -4.33 +14.62% -14.77%	-1.67 ± 2.38 ± 142.58%
5	7.94 +0.50 -0.47 +6.24% -5.91%	1187.93 34.47	85.16 +14.79 -14.51 +17.36% -17.03%	-4.08 +61.25 -61.37 +1500.59% -1503.32%	-22.59 +149.98 -147.18 +663.79% -651.39%	54.66 +119.44 -119.37 +218.49% -218.37%	55.32 +178.09 -167.65 +321.91% -303.04%	14.85 ± 3.39 ± 22.80%	29.40 +4.27 -4.31 +14.53% -14.67%	-1.64 ± 2.38 ± 144.92%

Рис. 14. Оценки параметров модели (нескорректированные) для разных порядков разложения при $x_{\min} = 0.0$ для каталога SSV

Каталог	St08	Параметр	Величина	ошибка	ед. изм.
N	250	R_0	8.03	+0.45 -0.42	кпк
n	2	AR_0	80.98	±5.11 ^{+2.94} _{-5.69}	км/с
m	6	θ_2	41.95	±18.08 ^{+7.54} _{-5.50}	км/с
σ , км/с	34.44	u	14.60	±3.06 ^{-0.24} _{+0.32}	км/с
x_{\min}	0.0	v	30.76	±3.30 ^{+0.82} _{-0.81}	км/с
		w	7.7		км/с
		K	-1.72	±2.17 ^{+0.04} _{-0.06}	км/с

Масштаб этой шкалы оказывается близок к калибровочному, и это говорит о том, что современные «средние» шкалы, видимо, являются достаточно точными и надежными. Для этой шкалы получаем значение калибровочного коэффициента:

$$k_{\text{St}} = 1.00 \pm 0.06. \quad (54)$$

Рис. 15. Кривые вращения для разных порядков разложения для каталога Stanghellini

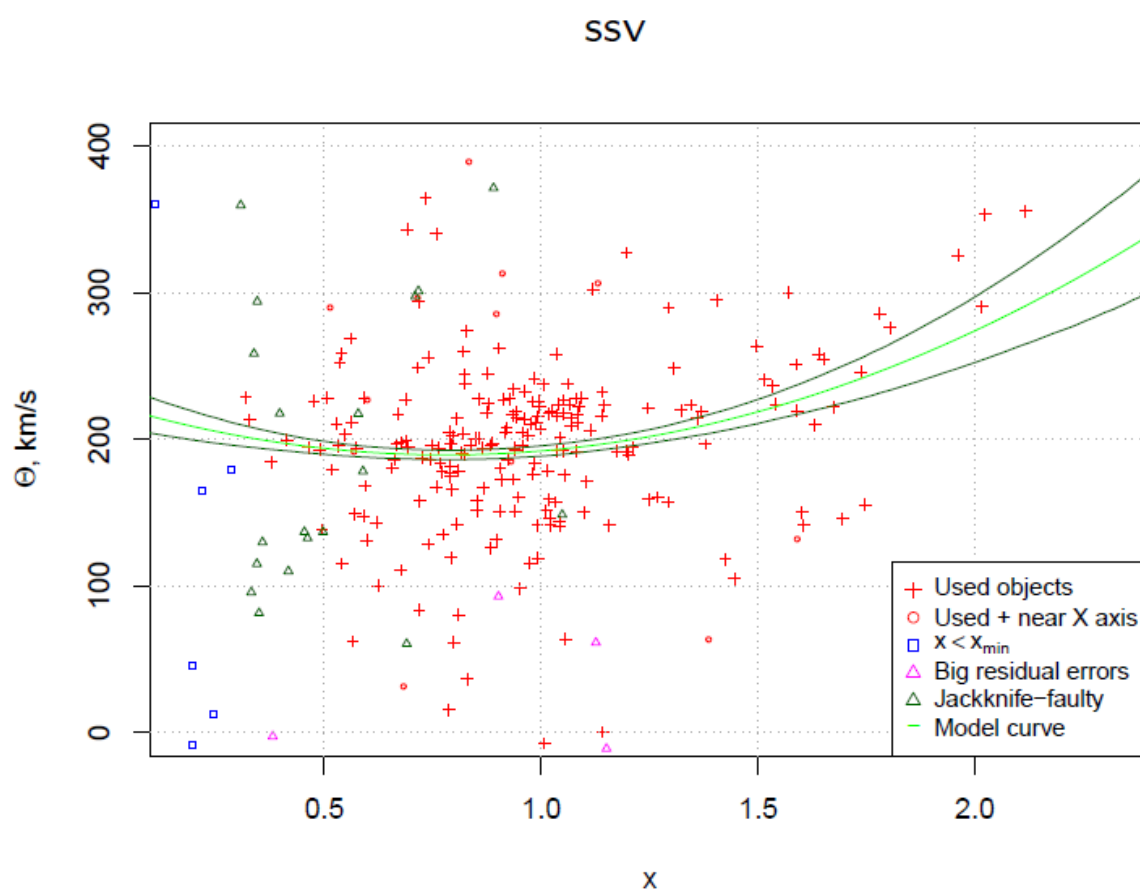
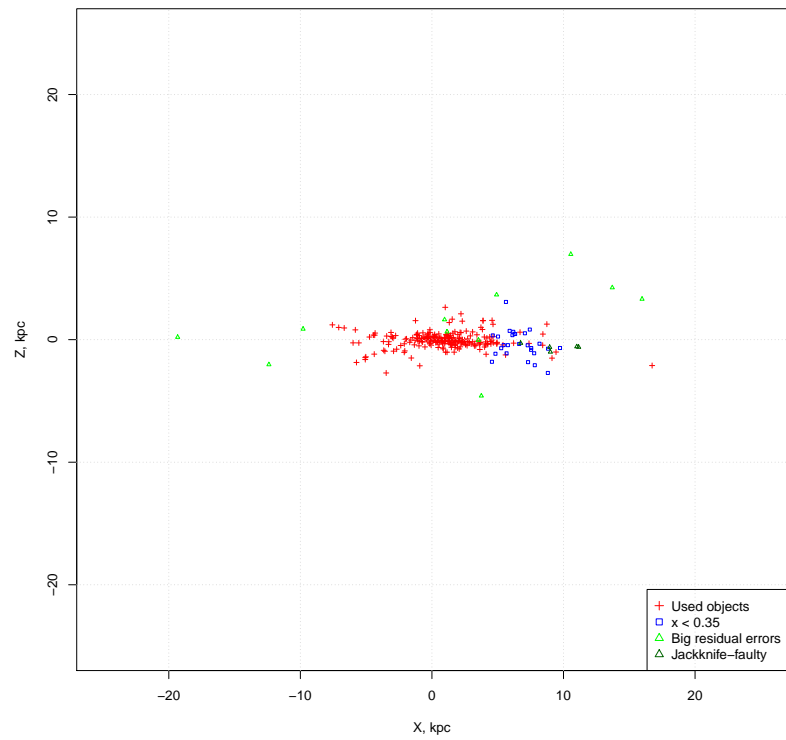
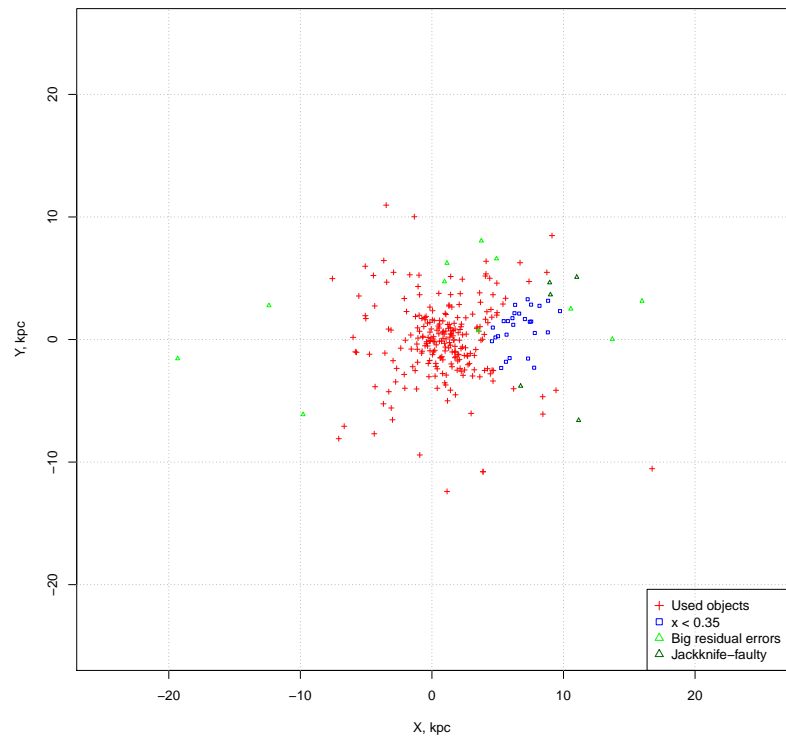
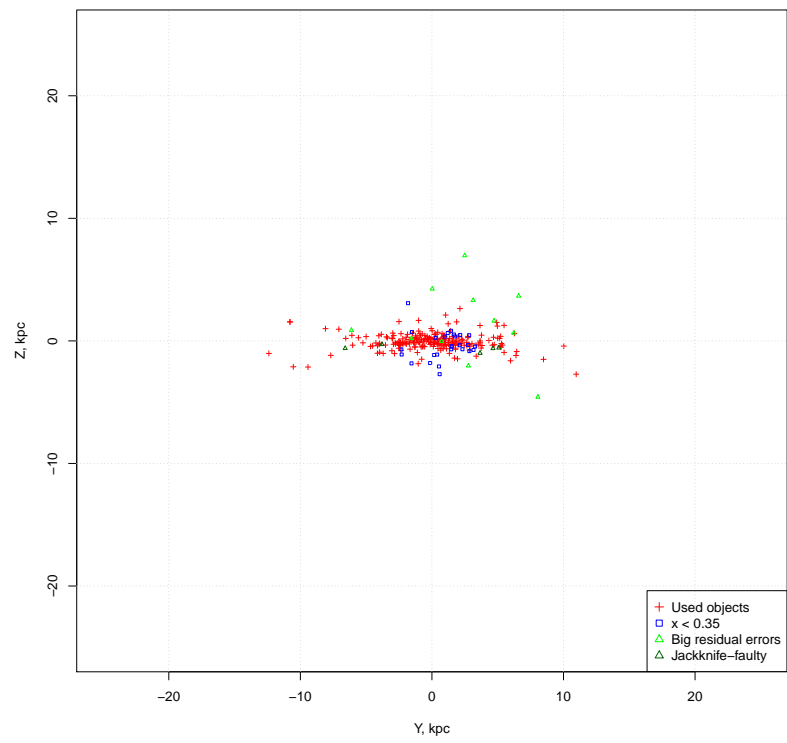


Рис. 16. Пространственное распределение объектов для каталога St08.





4.4. Результаты для каталога Frew (2016)

В каталоге содержится 564 объекта, которые обозначены как дисковые. Остальные объекты были отброшены. Затем было получено предварительное решение для $x_{\min} = 0$. Оптимальным порядком согласно предварительной прогонке для него является $n = 1$. Для него по критерию (26) было отброшено 14 объектов со значением $s > 3.012$. Затем применялся критерий jaskknife, по нему было отброшен 9 объектов.

По итоговой выборке, в которой осталось 372 объекта, было построено промежуточное решение и получена предварительная оценка R_0 :

$$R_0^{\text{prior}} = 9.16_{-0.32}^{+0.72} \text{ кпк.} \quad (55)$$

Согласно критериям выбора порядка, после чистки выборки оптимальным остался $n = 1$, так как для второго и следующих порядков дисперсии σ_{θ_i} оказываются больше соответствующих значений параметров (см. (34)), поэтому пересчёт не потребовался. Полученное значение использовалось в качестве начального приближения для других решений (при ненулевом x_{\min}). Для нахождения оптимального значения параметра x_{\min} и построения окончательного решения рассматривались значения этого параметра на интервале $[0.35, 0.5]$. Был получен набор решений для различных значений параметра на заданном интервале, для выбора оптимального рассматривался основной параметр модели R_0 и его дисперсия σ_{R_0} :

Таблица 8. Результаты для разных x_{\min} для каталога Frew

x_{\min}	0.0 – 0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
n	1	1	1	1	1
N	372	311	373	340	329
R_0 , кпк	$9.16_{-0.32}^{+0.72}$	$6.28_{-0.47}^{+0.56}$	$7.67_{-0.46}^{+0.50}$	$7.20_{-0.51}^{+0.57}$	$6.68_{-0.49}^{+0.54}$

Из таблицы видно, что значение дисперсии R_0 достигает своего минимума при $x_{\min} = 0.4$. Поэтому в качестве выборки для построения финального решения бралась выборка, полученная для $x_{\min} = 0.4$.

Опишем более подробно процесс составления финальной выборки. Оптимальным порядком разложения является первый.

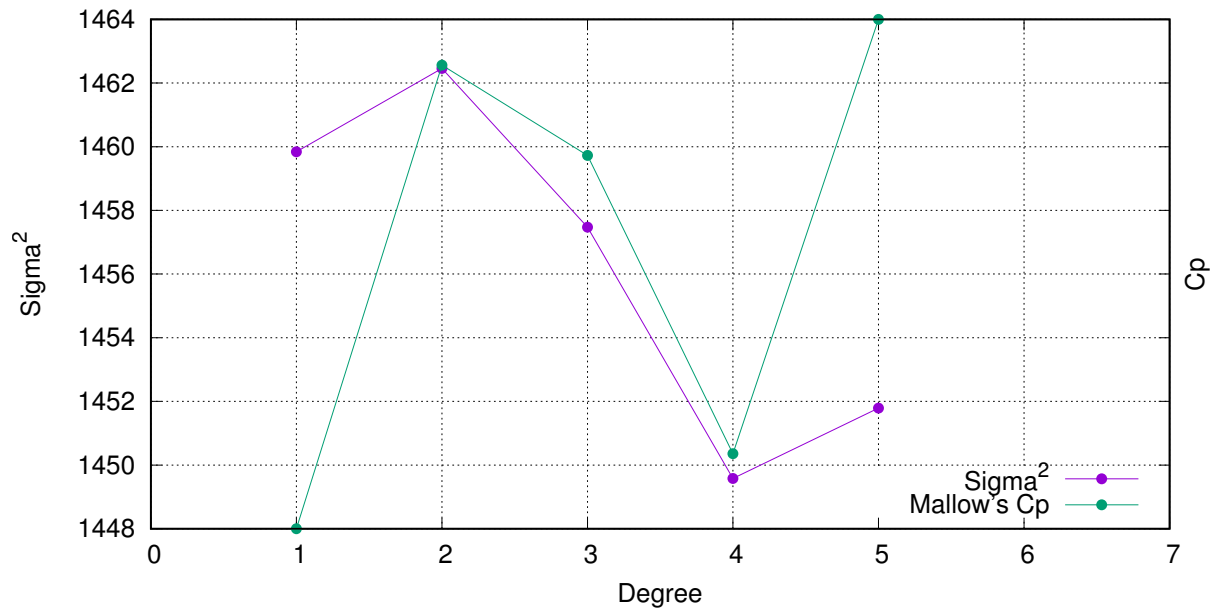


Рис. 17. Зависимость σ^2 и C_p от порядка для $x_{\min} = 0.4$

Решение для $x_{\min} = 0.4$ получалось итерациями по R_0^{prior} . Данный параметр последовательно принимал следующие значения:

$$R_0^{\text{prior}}(\text{кпк}) : 9.16 \rightarrow 9.97 \rightarrow 7.36 \rightarrow \mathbf{9.47} \rightarrow \mathbf{6.54} \rightarrow \mathbf{8.06} \rightarrow \mathbf{7.67}$$

При достижении последнего значения решение стабилизируется, по критерию (26) было отброшено 22 объекта, по критерию jackknife — 1 объект.

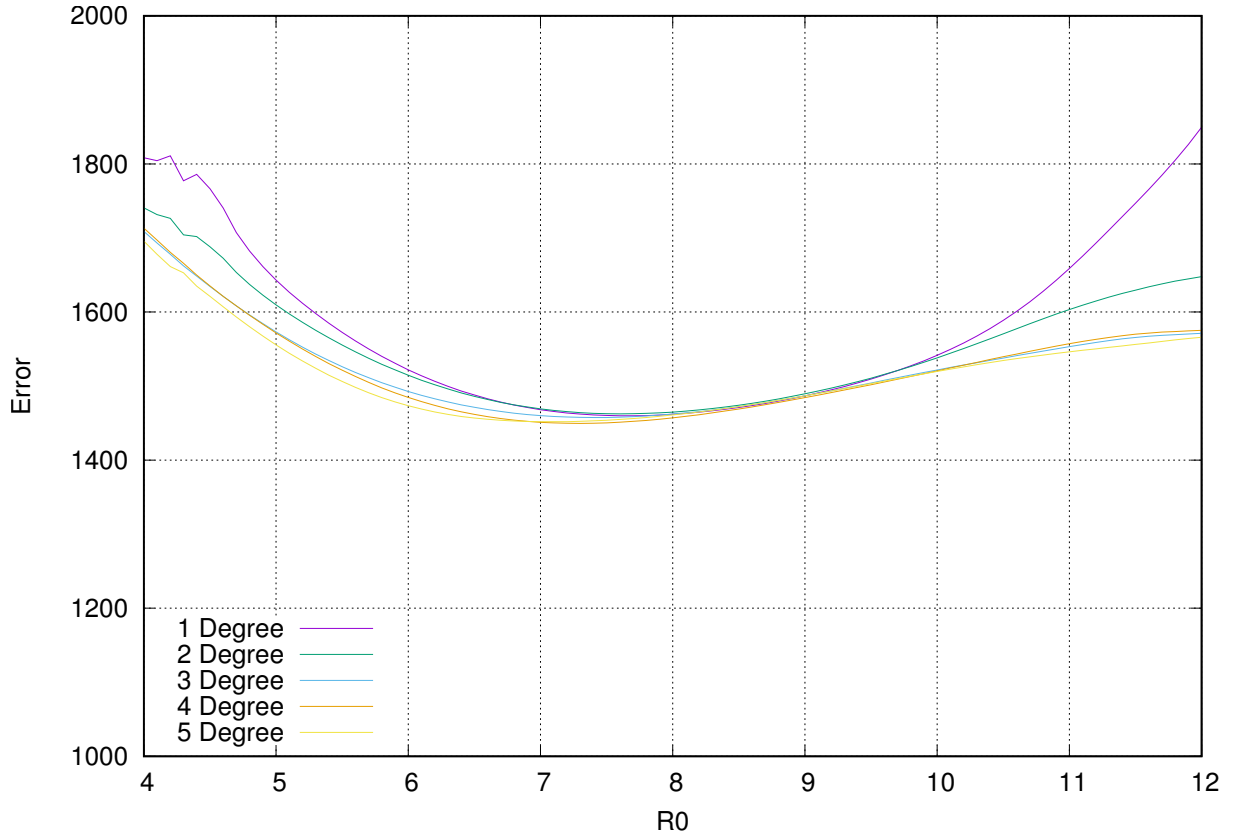


Рис. 18. Профиль функции σ^2 для параметра R_0 .

Таблица 9. Оценки параметров модели (нескорректированные) для разных порядков разложения при $x_{\min} = 0.4$ для каталога Frew et al. (2016)

n	R_0 , kpc	σ^2 , km ² /s ²	AR_0 , km/s	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	u_0 , km/s	v_0 , km/s	K , km/s
1	7.65	1459.84	74.43					15.34	27.71	-2.24
	+0.50		+5.91					± 3.06	+3.15	± 2.23
	-0.46	38.21	-5.71						-3.16	
	+6.55%		+7.95%					$\pm 19.97\%$	+11.35%	$\pm 99.61\%$
	-6.06%		-7.68%						-11.40%	
2	7.61	1462.46	74.91	-13.71				15.28	26.48	-2.27
	+0.51		+6.14	+23.28				± 3.07	+3.81	± 2.24
	-0.47	38.24	-5.86	-23.66					-3.83	
	+6.64%		+8.19%	+169.78%				$\pm 20.07\%$	+14.38%	$\pm 98.83\%$
	-6.21%		-7.82%	-172.51%					-14.48%	
3	7.41	1457.47	86.16	-36.93	84.07			15.06	25.76	-2.26
	+0.55		+9.89	+27.41	+55.06			± 3.07	+3.96	± 2.24
	-0.50	38.18	-9.59	-28.17	-54.86				-4.04	
	+7.37%		+11.48%	+74.24%	+65.50%			$\pm 20.36\%$	+15.36%	$\pm 98.83\%$
	-6.74%		-11.13%	-76.29%	-65.25%				-15.70%	
4	7.28	1449.58	91.83	43.43	189.86	-199.91		14.62	28.41	-2.26
	+0.51		+10.00	+58.00	+79.53	+127.40		± 3.06	+4.27	± 2.24
	-0.47	38.07	-9.93	-54.59	-80.23	-114.48			-4.32	
	+6.96%		+10.89%	+133.53%	+41.89%	+63.73%		$\pm 20.95\%$	+15.01%	$\pm 98.83\%$
	-6.43%		-10.81%	-125.70%	-42.26%	-57.27%			-15.21%	
5	7.08	1451.79	84.93	83.40	95.31	-335.31	187.10	14.63	28.64	-2.08
	+0.59		+14.43	+78.69	+167.05	+215.79	+235.78	± 3.07	+4.33	± 2.25
	-0.52	38.10	-13.48	-81.70	-142.50	-238.48	-298.50		-4.37	
	+8.28%		+16.99%	+94.35%	+175.27%	+64.36%	+126.02%	$\pm 20.95\%$	+15.11%	$\pm 108.20\%$
	-7.39%		-15.88%	-97.97%	-149.52%	-71.12%	-159.54%		-15.26%	

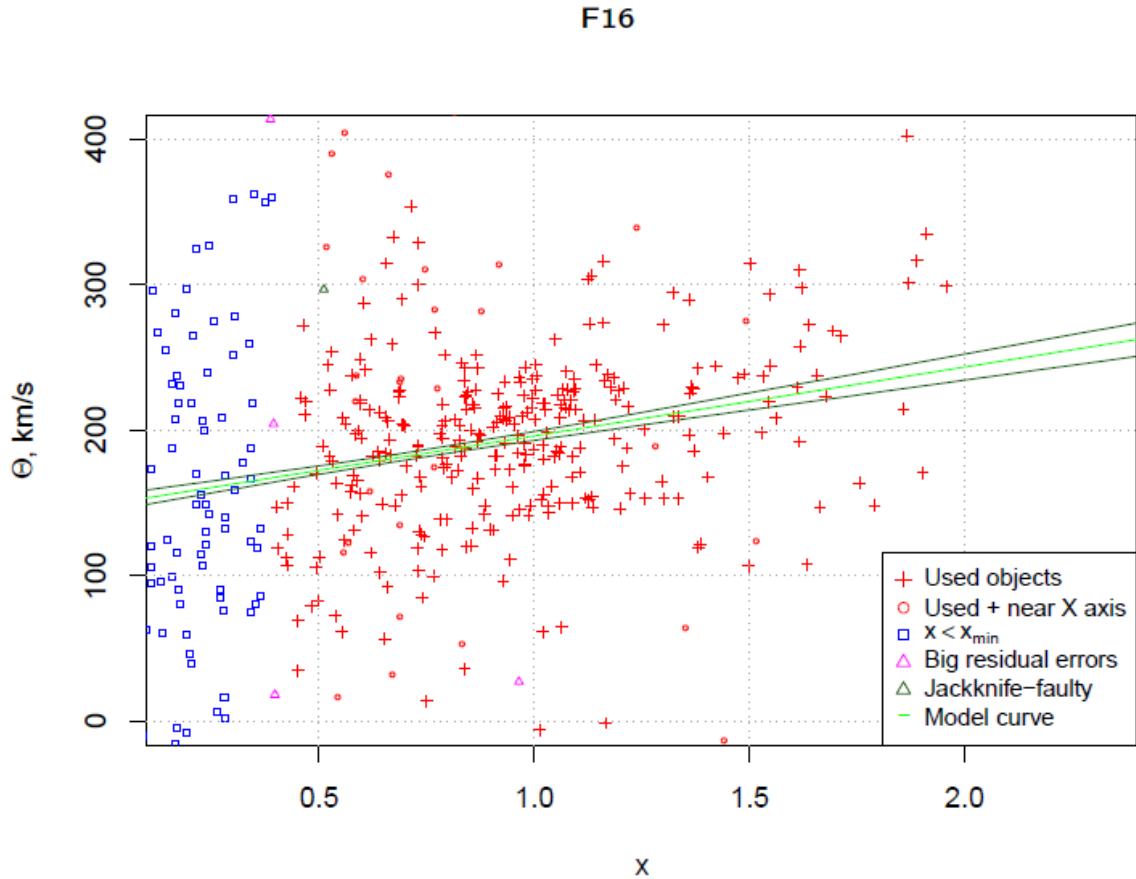
Окончательная выборка содержит 373 объекта. После учета поправки за конечность выборки мы получили финальную оценку параметра R_0 :

$$R_0^{F16} = 7.67^{+0.50}_{-0.46}. \quad (56)$$

Полученное при данной величине R_0 решение является основным для данного каталога, и мы считаем соответствующие оценки параметров модели финальными оценками для данной шкалы.

Каталог	F16	Параметр	Величина	ошибка	ед. изм.
N	373	R_0	7.67	$+0.50$ -0.46	КПК
n	1	AR_0	74.56	$\pm 4.80 \pm 3.31$	км/с
m	5	u	15.34	$\pm 2.72 \pm 0.01$	км/с
σ , км/с	38.21	v	27.75	$\pm 3.03^{+0.75}$ -0.82	км/с
x_{\min}	0.40	w	7.7		км/с
		K	-2.24	$\pm 1.99 \pm 0.06$	км/с

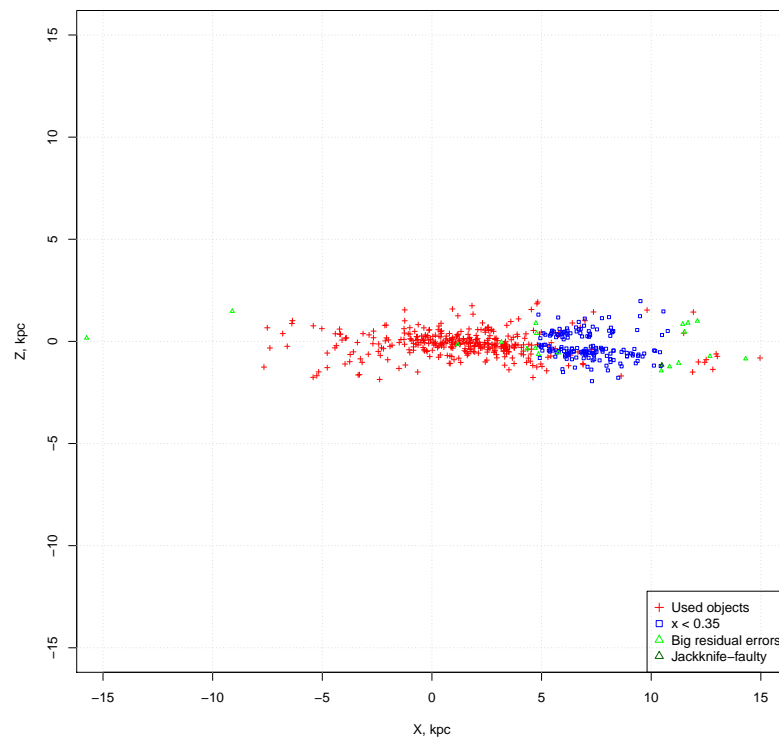
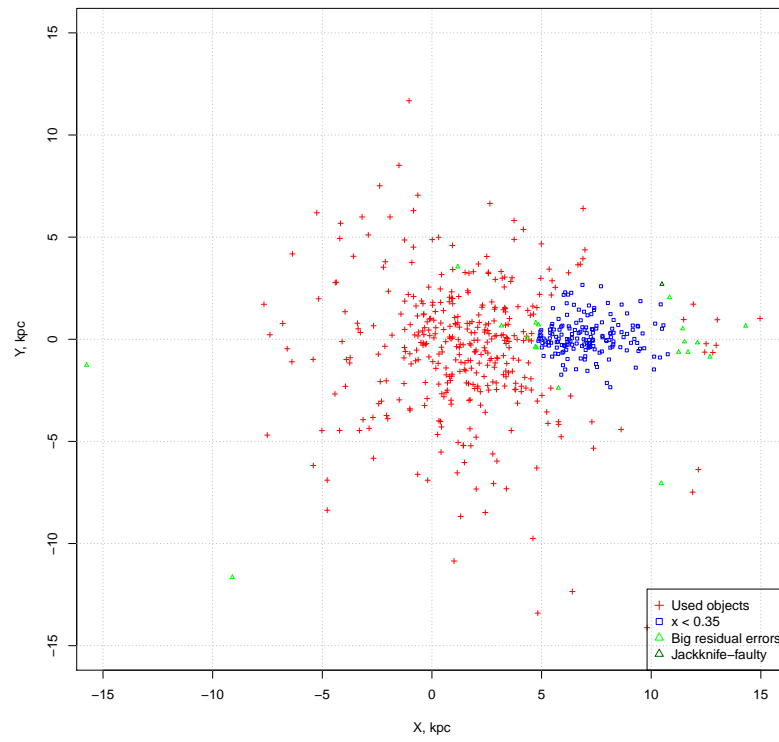
Рис. 19. Кривая вращения для первого порядка разложения для каталога Frew et al.

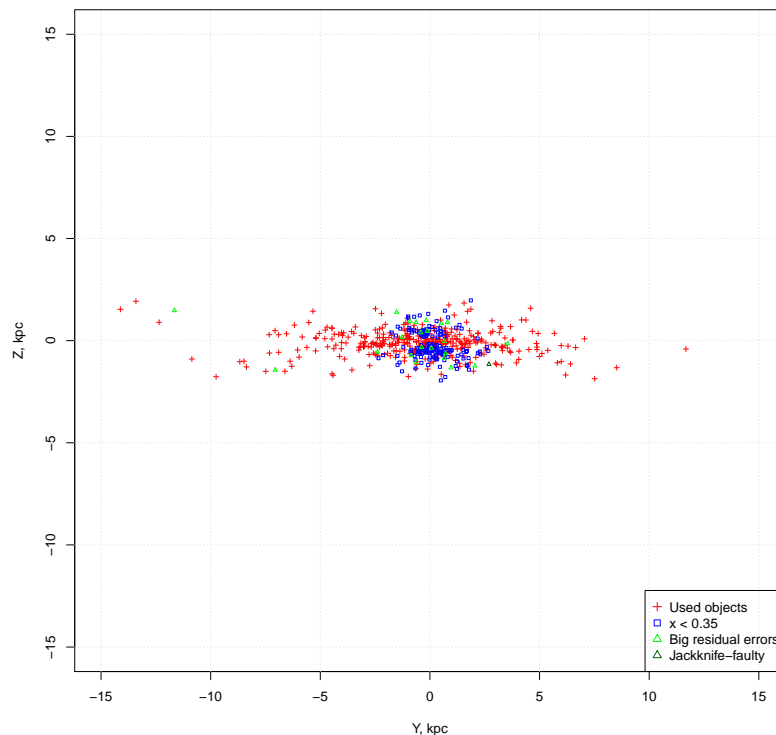


Результат согласуется с положительными оценками, данными этой шкале в работе Smith. Сопоставление полученного результата с современными оценками параметра R_0 [7] [27], приводит к следующему значению калибровочного коэффициента:

$$k_{F16} = 1.03^{+0.10}_{-0.09} \quad (57)$$

Рис. 20. Пространственное распределение объектов для каталога F16.





5. Калибровка по тригонометрическим параллаксам GAIA DR2

В связи с публикацией GAIA DR2, для большого количества объектов (более миллиарда) стали доступны данные, включающие собственные движения и тригонометрически параллаксы. Среди такого большого числа объектов должны обнаружиться и центральные звезды планетарных туманностей, позволяя, таким образом, получить непосредственную оценку расстояний до большого количества объектов. Это, в свою очередь, делает возможным как непосредственное использование полученных таким образом расстояний в прикладных задачах, так и калибровку кинематических шкал.

Ввиду очень большого количества объектов в каталоге, а также отсутствия их классификации в исходных данных, определенную проблему представляет отождествление их с известными планетарными туманностями, в том числе теми, которые представлены в использованных каталогах расстояний. Для этой цели была использована работа Kimeswenger, Borgia (2018) [14], в которой ими была выполнена кросс-валидация данных GAIA DR2 с центральными звездами планетарных туманностей и составлен каталог из 382 объектов, идентифицированных, как планетарные туманности.

Эти объекты были кросс-валидированы с объединенным каталогом, включающим расстояний по всем использованным шкалам, а также данные о лучевых скоростях туманностей. Кросс-валидация производилась путем сопоставления экваториальных координат объектов. В случае неоднозначного соответствия объекты отбрасывались. Таким образом, была получена возможность сопоставления расстояний, полученных в качестве оценок по используемым нами шкалам, и непосредственно – из тригонометрических параллаксов.

В зависимости от шкалы было соотнесено разное количество объектов: для каталога SSV — 212 объектов, для каталога F16 — 240 объектов, для каталога P04 — 161 объект, а для каталога Z95 — 224 объекта.

Абсолютная точность тригонометрических параллаксов мало зависит от расстояний до исследуемых объектов. Таким образом, с увеличением расстояния до объекта (т.е. уменьшением параллакса) относительная его ошибка будет увеличиваться. Таким образом, вне зависимости от точности определения параллаксов найдется расстояние, дальше которого они не будут значимы.

Размер области пространства, в которой оценки расстояний можно считать значимыми, играет важную роль, т.к. для построения кинематической модели требуется покрытие объектами как можно большего участка кривой вращения, а для сопоставления шкал — участие разных объектов, которые будут восстанавливать генеральную совокупность. Построив пространственное распределение объектов с отмеченными на нем неопределенностями расстояний, мы видим, что параллаксы сохраняют свою значимость до расстояний в 3-4 кпк. Это позволяет эффективно использовать данные для запланированных целей. Отметим, что погрешность фотометрических шкал растет с расстоянием не так быстро, поэтому, даже при резком увеличении точности имеющихся у нас в распоряжении тригонометрических параллаксов (как произошло при выходе GAIA DR2), фотометрические расстояния будут полезны для определения расстояний до более далеких объектов, при этом тригонометрические параллаксы можно также использовать для калибровки таких шкал.

В общем случае, для сравнения с полученными результатами кинематической калибровки, осмысленно использовать аналогичную модель:

$$r_{\text{trig}} = K_r r_{\text{phot}} \quad (58)$$

Здесь r_{trig} — расстояние, соответствующее тригонометрическому параллаксу из GAIA DR2, r_{phot} — расстояние, полученное косвенным (фотометрическим) способом, а K_r — калибровочный коэффициент (который и будет находиться для конкретной шкалы).

Согласно последним данным (например, Ripepi et al.(2019) [20]), тригонометрические параллаксы в GAIA DR2 могут быть смещены (занижены). Для учета этого фактора в модели, введем также фактор смещения параллаксов Δ_p . Чтобы отразить его в модельной формуле, совершим переход от расстояний r к параллаксам p , пользуясь тем, что $p[\text{mas}] = \frac{1}{r}[\text{kpc}]$:

$$p_{\text{mod}} = \frac{p_{\text{phot}}}{K_r} + \Delta_p, \quad (59)$$

где p_{mod} — модельный (средний) параллакс, ожидаемый при заданном фотометрическом расстоянии. С учетом наличия сопоставимых формальных ошибок как для p_{mod} , так и для p_{phot} , для оптимизации кажется целесообразным использовать метод наибольшего правдоподобия. В этом методе оптимизационную задачу можно представить как

Таблица 10. Значения параметров калибровки по тригонометрическим параллаксам (для сравнения)

Каталог	SSV	F16	P04	Z95
K_r	$1.147^{+0.062}_{-0.059}$	$0.841^{+0.035}_{-0.034}$	$1.348^{+0.073}_{-0.068}$	0.812 ± 0.037
Δ_d	$0.034^{+0.015}_{-0.016}$	-0.067 ± 0.017	0.017 ± 0.016	$-0.092^{+0.019}_{-0.021}$
K_r^{far}	$1.148^{+0.070}_{-0.067}$	$0.981^{+0.051}_{-0.047}$	$1.490^{+0.097}_{-0.082}$	$1.046^{+0.058}_{-0.056}$
Δ_d^{far}	$0.034^{+0.016}_{-0.017}$	$-0.014^{+0.017}_{-0.018}$	0.057 ± 0.017	$-0.020^{+0.018}_{-0.018}$
k_{kin}	$0.96^{+0.082}_{-0.074}$	$1.030^{+0.097}_{-0.085}$	$1.069^{+0.068}_{-0.064}$	$1.030^{+0.050}_{-0.048}$

нахождение минимума логарифмической функции правдоподобия \mathcal{L} :

$$\mathcal{L} = \sum_{i=0}^N \min_{d_i} \left(\ln(2\pi) + \ln(\sigma_{p,i}) + \ln(\sigma_d) + \frac{(p_{\text{obs},i} - p_{\text{mod},i}(d_i))^2}{2\sigma_{p,i}^2} + \frac{(d_{\text{obs},i} - d_i)^2}{2\sigma_d^2} \right) \quad (60)$$

где $\sigma_{p,i}$ — каталожная неопределенность измерения $p_{\text{mod},i}$, σ_d — средняя стандартная ошибка модулей расстояния для рассматриваемой шкалы, найденная в разделе 3, $d_{\text{obs},i} = 5 \lg(r_{\text{phot},i}) + 10$, d_i — модуль расстояния, минимизирующий значение компонента целевой функции, относящейся к данному объекту.

Доверительные интервалы параметров функции соответствуют её уровню $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_0 + 1/2$ и находились численно по достижению данного уровня.

Определив все необходимые параметры, мы оптимизировали функцию правдоподобия 60 относительно K_r и Δ_d . С целью повышения качества решения, проводилась процедура объектов, не соответствующих модели, аналогичная 26. Значения параметров, полученные путем оптимизации, приведены в таблице 10.

На основании графиков отношения тригонометрических и фотометрических параллаксов был сделан предварительный вывод, что группа наиболее близких (и, соответственно, имеющих наибольшие веса) объектов может оказывать существенное влияние на результат, поэтому было построено второе решение, в котором были исключены объекты с $p_{\text{trig}}^2 + p_{\text{phot}}^2 > (2.0 \text{ mas})^2$ — с целью сравнения с первоначальным решением на предмет робастности полученных параметров. Результаты для сравнения приведены в таблице 10.

Сравнивая результаты, полученные по всей выборке, и полученные только по основной массе наиболее далеких объектов, очевидно, что для всех каталогов, кроме SSV, невозможно говорить об устойчивости полученных результатов в терминах пременной модели: нельзя сказать, имеется ли статистически значимое смещение у тригонометрических параллаксов, или вычислить калибровочный коэффициент.

Тем не менее, у шкалы SSV решение является весьма устойчивым, а масштаб шкалы статистически значимо не отличается от единицы ни по кинематической, ни по тригонометрической калибровке. Таким образом, подтверждается в целом соответствующий действительности масштаб шкалы, а для калибровки можно использовать оба полученных результата.

Рис. 21. Соотношение тригонометрических и фотометрических параллаксов

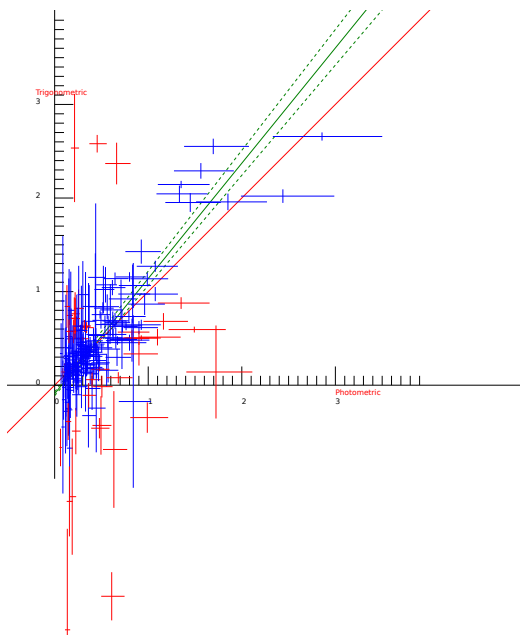


Рис. 22. Z95

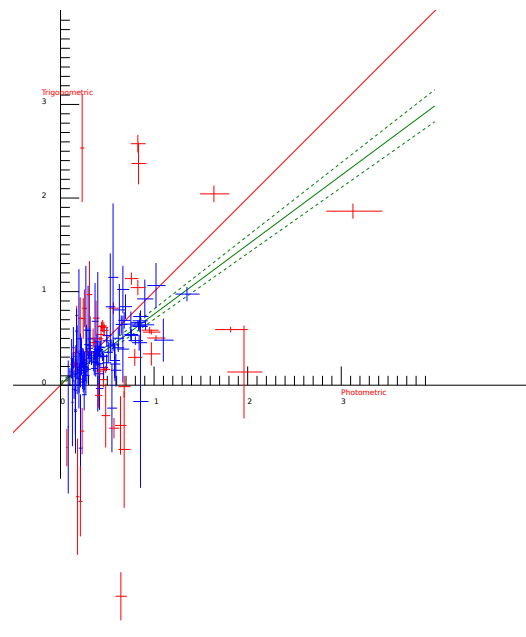


Рис. 23. P04

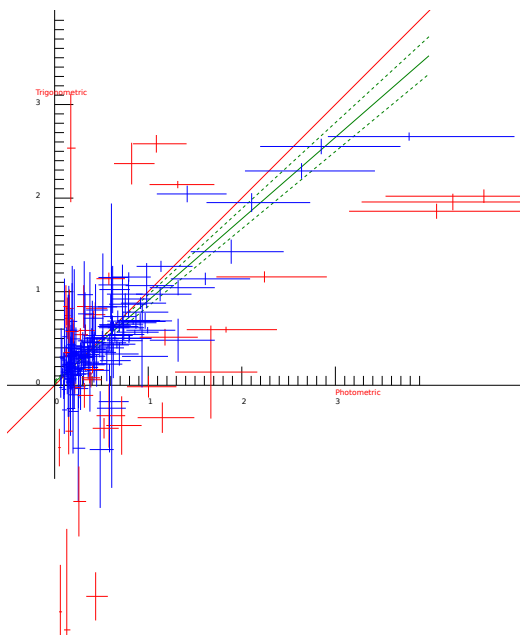


Рис. 24. SSV

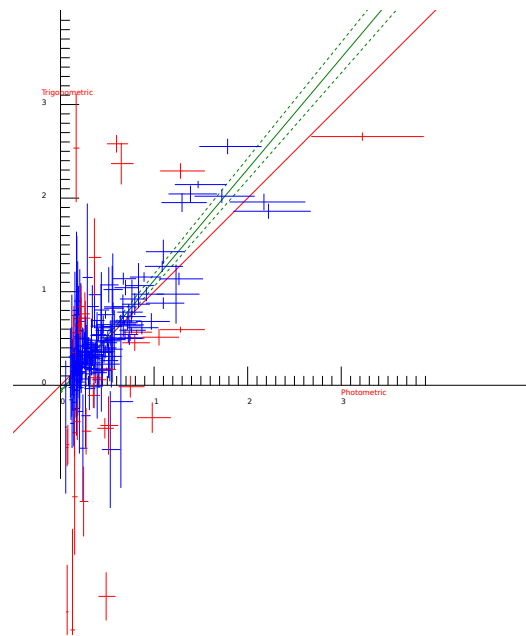


Рис. 25. F16

Для шкал F16 и Z95, при исключении смещающих (близких) объектов, по крайней мере, масштаб шкалы значимо не отличается от единицы, что, в принципе, тоже говорит о надежности этих шкал. Для шкалы P04 результат показывает существенную заниженность расстояний (при том, что данная шкала оказывалась самой короткой и при непосредственном сравнении). Это может быть признаком того, что наши предположения о высоком качестве данной шкалы все же были неверны.

6. Заключение

1. Был разработан и реализован алгоритм кинематической калибровки шкал расстояний до планетарных туманностей. Данный алгоритм позволяет получать независимые от физической модели оценки масштабов шкал, что является важным шагом в решении проблемы расстояний до ПТ. Алгоритм был максимально автоматизирован и формализован, чтобы исключить «человеческий фактор».

В рамках алгоритма реализованы критерии исключения объектов, позволяющие очистить выборку от выбросов. Реализован «умный» критерий исключения объектов с большими невязками, который, будучи похожим на стандартный «критерий трёх сигм», полностью опирается на статистические параметры выборки. Реализован критерий исключения объектов *jackknife*, позволяющий находить неочевидные выбросы по их влиянию на решение, а также исследован и решён вопрос остановки итераций данного критерия, что позволяет использовать его в автоматизированных алгоритмах. Была исследована зависимость параметров решения от факта применения критерия x_{\min} и значения его параметра, критерий применялся только с оптимальным значением параметра (а не с произвольно взятым).

Решение, получаемое данным алгоритмом, является самосогласованным, независимым от выбора начального приближения. Алгоритм позволяет исключить множество различных типов выбросов, и таким образом получить чистую и однородную выборку. Важным преимуществом является хорошая сходимость алгоритма: даже на существенно неоднородных и систематически смещенных данных алгоритм показал отличную работоспособность.

2. Была проведена работа по выявлению наиболее качественных шкал расстояний до ПТ, алгоритм был применен к выявленным шкалам. Были получены параметры вращения диска Галактики по четырем различным каталогам расстояний до ПТ. Данные решения оптимизировались по множеству параметров, включая размер зоны исключения для балджа и порядка разложения кривой вращения. В итоге были получены решения, согласующиеся с современными представлениями о вращении Галактики и расстоянии до её центра. Полученные решения можно использовать в качестве независимых оценок параметров, или для построения сводного каталога расстояний до ПТ.
3. Исследуемые шкалы были сопоставлены с тригонометрическими параллаксами GAIA DR2 с учетом ошибок измерений и модулей расстояния, и параллаксов в рамках метода наибольшего правдоподобия, который позволяет определять среднюю систематическую смещенность параллаксов. Итоги этого сравнения вновь подтверждают, что лучшие из современных шкал расстояний до ПТ верны — то есть проблема расстояний до ПТ перестает быть безвыходной, и появляются надежные источники расстояний до этих объектов.

Аналогично, для исследованных шкал отсутствует систематическое различие между использованными методиками — они дают схожий по порядку и точности результат. Это подтверждает обоснованность использования кинематического моделирования для калибровки шкал расстояний и позволяет осуществлять калибровку двумя независимыми методами.

4. Результат, полученный при исключении близких объектов, в некоторой степени бросает тень на методы, опирающиеся на подобные (исключенной) выборки для калибровки. В частности, таким образом калибровалась работа Frew et al. (2016), и тем удивительнее итоговая точность, достигаемая этой шкалой. Однако, данный пример вряд ли снижает значимость сделанного вывода: выборка из нескольких десятков близких ПТ может и не вполне точно описывать генеральную совокупность, и теперь, когда данные из GAIA DR2 свободно доступны, желательно опираться хотя бы на большие и более широко пространственно распределенные выборки.

Поправки к тригонометрическим параллаксам GAIA DR2 для некоторых выборок формально получились значимо отличными от нуля, однако для разных шкал поправки имеют разные знаки (для двух отрицательные, для двух положительные). Робастными оказались поправки только в случае шкалы SSV и они лишь маргинально значимы: $+0.034 \pm (0.015 \div 0.017)$ mas. Эти результаты говорят в пользу того, что среднее смещение параллаксов GAIA DR2 -0.03 mas (заниженность параллаксов; Gaia Collaboration, 2018 [10]) не является универсальной характеристикой для любой выборки из этого каталога, а региональная систематика играет существенную роль. Следовательно, чтобы учесть последнюю, нужно для каждой выборки оценивать средний нуль-пункт параллаксов заново.

Основные результаты работы представлены в следующих публикациях.

1. С.Б. Кривошеин. Кинематическая калибровка шкал расстояний до планетарных туманностей // Труды 43-й Международной студенческой научной конференции «Физика космоса». 2014.
2. С.Б. Кривошеин. Формализация моделирования кинематики и коррекция шкал расстояний для подсистемы планетарных туманностей диска Галактики // Труды 44-й Международной студенческой научной конференции «Физика космоса». 2015.
3. Krivoshein S. Kinematic Calibration of Distance Scales for Planetary Nebulae: Formalizing the Algorithm. // International Student Conference "Science and Progress". Conference Proceedings. 2016. p. 30-34

Список литературы

1. Агемян Т. А. Основы теории ошибок для астрономов и физиков. Москва: Наука, 1968. 148 с.
2. Мартынов Д. Я. Звезды и звездные системы. Москва: Наука, 1981. 416 с.
3. Никифоров И. И. // *Астрофизика*. 1999. Т. 42. С. 399.
4. Никифоров И. И. Пространственно-кинематическое и динамическое моделирование Галактики. // Дис. кандидата физ.-мат. наук (СПб: СПбГУ). 2003. 197 с.
5. Потташ С. Планетарные туманности. Москва: Мир, 1987. С. 115–146.
6. Abdullah S. A., Ali N. A., Sallih M. A. // *IJAA*. 2013. V. 3. P. 81–86.
7. Camarillo T., Mathur V., Mitchell T., Ratra B. Median Statistics Estimate of the Distance to the Galactic Center // *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*. 2018. V. 130. I. 984. pp. 024101
8. Camm G. L. // *MNRAS*. 1938. V. 99. P. 71–90.
9. Frew D. J., Parker Q. A., Bojčić I. S. // *MNRAS*. 2016. V. 455. I. 2. P. 1459–1488.
10. Gaia Collaboration // *Astronomy & Astrophysics*, Volume 616, A1.
11. Ghez A. M., Salim S., Weinberg N. N., Lu J. R., Do T., Dunn J. K., Matthews K., Morris M. R., Yelda S., Becklin E. E., Kremenek T., Milosavljevic M., Naiman J. // *Astrophys. J*. 2008. V. 689. P. 1044–1062.
12. Gillessen S., Eisenhauer F., Trippe S., Alexander T., Genzel R., Martins F., Ott T. // *Astrophys. J*. 2009. V. 692. P. 1075–1109.
13. Haywood Smith Jr. // *Mon. Not. R. Astron. Soc*. 2014. V. 449. P. 2980–3005.
14. Kimeswenger S., Barria D. // *Astronomy & Astrophysics*, Volume 616, id.L2, 4 pp.
15. Kholtygin A. F., Milanova Yu. V., Akimkin V. V. // *Highlights of Astronomy*. 2010. V. 15. P. 792.
16. Kholtygin A. F., Nikiforov I. I., Akimkin V. V. // *Proc. of the IAU, IAU Symposium*, 2012. V. 283. P. 406–407.
17. Nikiforov I. I., Bobrova A. Yu. // *Кинематика и физика небесных тел. Приложение*. 1999. Т. 2. С. 29–33.
18. Phillips J. P. // *Mon. Not. R. Astron. Soc*. 2004. V. 353. P. 589–600.
19. Press W. H., Flannery B. P., Teukolsky S. A., Vetterling W. T. *A Numerical Recipes in Fortran: The Art of Scientific Computing*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001.

20. Ripepi V., Molinaro R., Musella I., Marconi M., Leccia S., Eyer L. // *Astronomy & Astrophysics*, Volume 625, id.A14, 17 pp.
21. Quenouille M.H. // *J. R. Stat. Soc. Series B*. 1949. V. 11. P. 18–44.
22. Quenouille M.H. // *Biometrika*. 1956. V. 161. P. 353–360.
23. Reid M. J., Menten K. M., Brunthaler A., Zhang X. W., Dame T. M., Xu Y., Wu Y., Zhang B., Sanna A., Sato M., et al. // *Astrophys. J.* 2014. V. 783. P. 130.
24. Reid M. J. // *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* 1993. V. 31. P. 345–372.
25. Stanghellini L., Shaw R. A., Villaver E. // *Astrophys. J.* 2008. V. 689. P. 194–202.
26. Tukey J. V. // *Astrophys. Space Sci.* 2017. V. 362. P. 79.
27. Vallee J.P. Recent advances in the determination of some Galactic constants in the MilkyWay // *Ann. Math. Stat.* 1958. V. 29. P. 614.
28. Zhang C. Y., 1995 // *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 1995. V. 98. P. 659.