

Санкт-Петербургский государственный университет

*ВЕСЕЛОВА Ангелина Владимировна*

Выпускная квалификационная работа

*Параметрическое пространственное моделирование  
сегментов спиральных рукавов Галактики*

Уровень образования:

Направление 03.06.01 «Физика и астрономия»

Основная образовательная программа МК.3007.2015 Астрономия

Научный руководитель:

доцент Кафедры небесной механики,  
к.ф.-м.н., доцент И.И. Никифоров

Рецензент:

заведующий Лабораторией динамики  
Галактики ГАО РАН,  
д.ф.-м.н. В.В. Бобылев

Санкт-Петербург  
2019

Saint Petersburg State University

*Angelina Veselova*

Post-Graduation Thesis

*Parametric Spatial Modeling of Spiral Arm Segments of the Galaxy*

Scientific supervisor:

Associate Professor of Chair of Celestial  
Mechanics, Candidate of Physical  
and Mathematical Sciences

I.I. Nikiforov

Reviewer:

Head of the Milky Way Dynamics  
Laboratory, the Central Astronomical  
Observatory of the Russian Academy  
of Sciences at Pulkovo, Doctor of Sciences

V.V. Bobylev

Saint Petersburg  
2019

# Содержание

<b>1. Введение</b>	<b>3</b>
<b>2. Задача определения параметров логарифмической спирали по точкам ее сегмента</b>	<b>5</b>
2.1. Формулы для определения параметров спирали по трем точкам . . . . .	5
2.2. Число корней трехточечного уравнения для расстояния до полюса спирали . . .	7
2.3. О возможности определения параметров логарифмической спирали по четырем точкам . . . . .	14
<b>3. Применение трехточечного метода определения параметров спирали к данным о мазерах</b>	<b>15</b>
3.1. Алгоритм . . . . .	16
3.1.1. Определение доверительной области для модельной спирали, найденной трехточечным методом . . . . .	18
3.1.2. Оценка природного среднеквадратического разброса мазеров поперек спирального сегмента . . . . .	19
3.2. Результаты для отдельных спиральных сегментов . . . . .	21
3.3. Средняя оценка расстояния до центра Галактики по результатам применения трехточечного метода к мазерам . . . . .	26
3.4. Исследование трехточечного алгоритма методом Монте-Карло и итоговое решение по мазерам . . . . .	27
3.5. Обсуждение результатов применения трехточечного метода . . . . .	28
<b>4. Моделирование методом Монте-Карло измерения расстояния до центра Галактики по геометрии спирального сегмента</b>	<b>32</b>
4.1. Параметры модельного сегмента . . . . .	32
4.2. Неопределенность тригонометрических параллаксов по данным о мазерах . . .	33
4.3. Процедура моделирования . . . . .	38
4.4. Выбор базовых наборов параметров модельных сегментов . . . . .	40
4.5. Результаты моделирования . . . . .	43
4.6. Обсуждение . . . . .	49
<b>5. Заключение</b>	<b>54</b>
<b>Список литературы</b>	<b>58</b>

# 1. Введение

Исследования наблюдаемых проявлений спиральной структуры галактик, предоставляющие исходные ограничения для построения теорий ее формирования, имеют фундаментальное значение для галактической астрономии и звездной динамики. Такие исследования для нашей Галактики потенциально могут дать наиболее детальную информацию, однако они осложнены наблюдением спиральной структуры „с ребра“ из-за нахождения Солнца вблизи плоскости диска, хорошей изученностью только локального галактоцентрического сектора, поглощением света в диске, экранированием области за центром Галактики, низкой точностью или отсутствием данных о гелиоцентрических расстояниях для индикаторов спирального узора и другими трудностями. Существует два класса методов изучения спиральной структуры Галактики: 1) по пространственному положению трейсеров (индикаторов) деталей этой структуры и 2) по кинематике таких трейсеров (подробнее см., например, Никифоров, Шеховцова, 2001). Каждый из классов имеет свои преимущества и недостатки. Кинематический подход в случае привязки к динамическим возмущениям со стороны спирального узора может продуцировать хорошо обусловленные параметрические модели, но требует дополнительных предположений (в частности о природе спиральных рукавов), которые могут оказаться неадекватными. Пространственный подход, не нуждающийся в таких предположениях, применим к любым деталям спиральной структуры безотносительно их природы, но надежных результатов от анализа пространственного распределения можно ожидать только для тех типов трейсеров, по которым эти детали выделяются однозначно.

До недавнего времени пространственное моделирование спиральной структуры Галактики проводилось преимущественно по данным о тангенциальных и иных концентрациях газа и объектов, трассирующих спиральные рукава, в попытке „сложить“ из этих отдельных сегментов регулярную структуру, руководствуясь при этом не столько геометрией отдельных концентраций, сколько их положениями (Ефремов, 2011). Конечно, сделать это можно только в некоторых предположениях. Не всегда, но обычно при таком моделировании предполагалось следующее: 1) рукава имеют форму логарифмической спирали; 2) угол закрутки ( $i$ ) спирали постоянный; 3) угол  $i$  одинаковый для всех рукавов; 4) число рукавов в Галактике задается (как правило, два или четыре, иногда рассматривались оба варианта), что во многом определяет угол закрутки; 5) полюс спиральных рукавов находится в центре Галактики; 6) расстояние от Солнца до центра Галактики ( $R_0$ ) принимается фиксированным. При этом зачастую использовались разнородные, в том числе и не очень надежные, оценки гелиоцентрических расстояний с большой долей кинематических расстояний, особенно для далеких структурных деталей. Задачу осложняет и тот факт, что объекты, в принципе тяготеющие к спиральным рукавам, населяют и межрукавное пространство.

Очевидно, вследствие этих трудностей и, возможно, неадекватности принимаемых предположений, однозначных результатов в рамках такого подхода получить не удастся. Так, Ефремов (2011) пришел к выводу, что во внутренней области Галактики ( $R < 9-10$  кпк) с данными о распределении нейтрального, молекулярного и ионизованного водорода лучше согласуется четырехрукавная схема спирального узора при  $i = 10-12^\circ$ . Фрэнсис, Андерсон (2012), напротив, заключают, что распределение HI, гигантских молекулярных облаков, областей HII и источников 2MASS соответствует, также во внутренней области ( $R < 12-15$  кпк), двухрукавной логарифмической спирали с  $i \sim 5^\circ$ . Поль и др. (2008) для представления данных по линии CO также предпочли двухрукавную модель, но с  $i \sim 12^\circ$ , отказавшись,

впрочем, от воспроизведения моделью некоторых деталей построенного ими распределения молекулярного газа.

Вместе с тем возможен альтернативный подход — пространственное моделирование *отдельного* сегмента рукава или нескольких сегментов рукавов *по отдельности*, что, в частности, дает возможность определения углов закрутки сегментов без предположения (номер 4 в нашем списке) о числе рукавов в Галактике. Подобный анализ предпринимался в работах Павловской, Сучкова (1984), Аведисовой (1985), Дэйма и др. (1986), Валле (1988), Грабельского и др. (1988), однако развитие этого направления сдерживалось недостатком надежных оценок расстояний, особенно для трейсеров с сильной концентрацией к спиральным рукавам.

Ситуацию заметно меняет недавнее появление баз данных, позволяющих формировать выборки трейсеров спирального узора, которые 1) сильно концентрируются к спиральным рукавам, 2) имеют хотя бы внутренне точные гелиоцентрические расстояния, 3) позволяют проследить сегменты рукавов на достаточном протяжении, чтобы выявить их геометрию (желательно — кривизну). Выборки с такими свойствами имеются по крайней мере для мазеров с тригонометрическими параллаксами (например, Рид и др., 2014) и для молодых рассеянных скоплений (см, например, Попова, Локтин, 2005; Никифоров, Казакевич, 2009).

Анализ пространственного распределения трейсеров по новым данным с целью определения геометрических параметров отдельных спиральных сегментов уже выполнялся рядом исследовательских групп. Попова, Локтин (2005) оценили угол закрутки спиральных ветвей по данным „Однородного каталога параметров РЗС“, не используя предположение 4, но считая углы закрутки одинаковыми для всех сегментов (предположение 3 в нашем списке). Рид и др. (2009, 2014), Сюй и др. (2013), Бобылев, Байкова (2013, 2014) провели соответствующее моделирование для мазеров с тригонометрическими параллаксами при отказе от предположений 4, и 3. Отметим, что при исследовании природы Местного рукава (Сюй и др., 2013), подразумевающим нахождение параметров именно этой детали, отказа от предположения 3 требует сама постановка задачи.

Аналогичный анализ для классических цефеид более проблематичен из-за их в целом менее выраженной концентрации к спиральным рукавам. В работах Поповой (2006) и Дамбиса и др. (2015) для получения более устойчивых результатов по цефеидам применялись процедуры выделения объектов, принадлежащих *хребтам* спиральных сегментов (заметим, что Попова, Локтин (2005) использовали ту же процедуру и для рассеянных скоплений). С другой стороны, более дисперсное распределение цефеид отчасти компенсируется высокой внутренней точностью оценок расстояний до них и большим объемом современных выборок этих объектов. В обеих работах получены результаты без использования предположения 4, а в статье Дамбиса и др. (2015) — и при отказе от предположения 3.

Если принять, что при современных данных пространственное моделирование спиральных сегментов позволяет уверенно устанавливать их геометрию (в частности определять угол закрутки), не основываясь на предположениях 3 и 4, то можно попытаться пойти еще дальше и освободить параметр  $R_0$ , т.е. отказаться от предположения 6. Это позволит выполнять более полное моделирование спиральных сегментов, так как из общих соображений можно ожидать наличия существенной зависимости углов закрутки от  $R_0$  (что подтверждается нашими вычислениями). Кроме того, это может дать новый метод определения расстояния до центра Галактики как расстояния от Солнца до полюса (геометрического центра) спиральной структуры. Предлагаемый метод может стать первым пространственным методом определе-

ния  $R_0$ , применимым к объектам плоской подсистемы Галактики. Метод может быть как абсолютным, при использовании данных о мазерах с тригонометрическими параллаксами, так и относительным, если он применяется к объектам с фотометрическими расстояниями (см. классификацию измерений  $R_0$  в обзоре Никифорова, 2004). В принципе, метод может быть приложен к любым объектам, траассирующим спиральную структуру Галактики.

Строгое рассмотрение настоящей задачи с учетом двух неопределенностей (дисперсии поперек рукава и случайных ошибок гелиоцентрических расстояний), возможно, позволит дополнительно отказаться и от каких-то других предположений из приведенного выше списка. Однако строгий метод предполагает трудоемкие вычисления даже в рассматриваемом здесь варианте (при отказе только от предположений 3, 4, 6). Поэтому прежде всего следует проверить принципиальную работоспособность нового подхода как для современных данных, так и на перспективу. В настоящей работе сначала рассматривается идеализированная (геометрическая) задача о восстановлении параметров логарифмической спирали как фигуры по принадлежащим ей точкам в предположении, что направление на полюс спирали (центр Галактики) известно (раздел 2). Затем, в целях апробации предлагаемого подхода, мы строим упрощенный метод решения задачи для реальных данных и применяем его к мазерам (раздел 3). В подразделе 3.4 упрощенный метод тестируется при помощи численного моделирования. Метод и полученные результаты обсуждаются в подразделе 3.5.

В разделе 4 трехточечный метод используется для численного исследования статистических свойств оценки  $R_0$  по геометрии сегмента спирального рукава в зависимости от параметров задачи. Будучи относительно нетрудоемким, данный упрощенный метод позволяет за разумное время выполнить большое количество численных экспериментов. Последнее существенно для оценки условий применимости и принципиальных возможностей нового способа нахождения  $R_0$  как для современных данных, так и на перспективу.

## 2. Задача определения параметров логарифмической спирали по точкам ее сегмента

### 2.1. Формулы для определения параметров спирали по трем точкам

Рассмотрим геометрическую задачу о возможности восстановления параметров логарифмической спирали по точкам, принадлежащим ее сегменту. Будем считать, что спираль находится в плоскости Галактики, а направление от Солнца к полюсу спирали (к центру Галактики) является известным. Тогда представим отдельный рукав Галактики участком логарифмической спирали

$$R(\lambda) = |R_0|e^{k(\lambda-\lambda_0)}. \quad (1)$$

Здесь  $\lambda \in (-\infty, +\infty)$  — галактоцентрическая долгота (отсчитывается от направления на Солнце по часовой стрелке, если смотреть с северного полюса Галактики, т.е. в направлении вращения Галактики);  $k \equiv \operatorname{tg} i$ , где  $i$  — угол закрутки (отрицательный для отстающей спирали);  $\lambda_0$  — позиционный параметр ( $R(\lambda_0) = |R_0|$ ). В направлении на Солнце полагаем  $\lambda = 0 \pm 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Поскольку логарифмическая спираль задается уравнением (1), содержащим три параметра  $(R_0, k, \lambda_0)$ , рассмотрим возможность определения этих параметров по трем (различными)

точкам  $M_1(r_1, l_1, b_1)$ ,  $M_2(r_2, l_2, b_2)$ ,  $M_3(r_3, l_3, b_3)$ , лежащим на одном витке спирали при проектировании на плоскость Галактики. Здесь  $r_j$ ,  $l_j$ ,  $b_j$  — гелиоцентрическое расстояние, галактическая долгота и широта точки  $M_j$  соответственно,  $j = 1, 2, 3$ . Примем, что  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ ; тогда галактоцентрические долготы подобных точек удовлетворяют неравенству

$$\lambda_3 - \lambda_1 < 2\pi. \quad (2)$$

Формула (1) дает выражения для галактоосевых расстояний  $R_j$  точек  $M_j$  через соответствующие галактоцентрические долготы:

$$R_j = |R_0| e^{k(\lambda_j - \lambda_0)}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (3)$$

С другой стороны, величины  $R_j$  можно найти по координатам  $r_j$ ,  $b_j$ ,  $l_j$  точек  $M_j$  в зависимости от параметра  $R_0$  спирали

$$R_j = \sqrt{R_0^2 + r_j^2 \cos^2 b_j - 2R_0 r_j \cos l_j \cos b_j}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Перейдя к декартовым координатам

$$X_j = r_j \cos l_j \cos b_j, \quad Y_j = r_j \sin l_j \cos b_j, \quad Z_j = r_j \sin b_j, \quad (5)$$

запишем следующие выражения для галактоосевого расстояния и галактоцентрических долгот:

$$R_j = \sqrt{R_0^2 + X_j^2 + Y_j^2 - 2R_0 X_j}, \quad (6)$$

$$X_j = R_0 - R_j \cos \lambda_j, \quad Y_j = R_j \sin \lambda_j. \quad (7)$$

Формулы (5), (7) показывают, что при известных  $r_j$ ,  $b_j$ ,  $l_j$  и заданном значении  $R_0$  для точек  $M_j$  однозначно могут быть определены только *номинальные* галактоцентрические долготы  $\Lambda_j$  такие, что

$$-\pi \leq \Lambda_1 \leq \Lambda_2 \leq \Lambda_3 < \pi; \quad (8)$$

$$\sin \Lambda_j = \frac{Y_j}{R_j}, \quad \cos \Lambda_j = \frac{R_0 - X_j}{R_j}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (9)$$

*Поворотные* долготы  $\lambda \in (-\infty, +\infty)$  могут отличаться от номинальных долгот  $\Lambda$  на целое число полных поворотов. В итоговые формулы для вычисления параметров спирали  $R_0$  и  $k$  галактоцентрические долготы входят только в виде разностей долгот двух точек, принадлежащих (по изначальному предположению) одному витку спирали, что позволяет заменить в формулах поворотные долготы на номинальные.

Основываясь на равенствах (3), составим, например, следующую систему уравнений для неизвестных параметров  $R_0$  и  $k$ :

$$\frac{R_1}{R_2} = e^{k(\Lambda_1 - \Lambda_2)}, \quad \frac{R_2}{R_3} = e^{k(\Lambda_2 - \Lambda_3)}. \quad (10)$$

Выразим  $k$ , например, из первого равенства (10), тогда  $k = \ln(R_1/R_2)/(\Lambda_1 - \Lambda_2)$ , и подставим во второе. Логарифмируя последнее, получаем уравнение для  $R_0$

$$(\Lambda_3 - \Lambda_2) \ln R_1 + (\Lambda_1 - \Lambda_3) \ln R_2 + (\Lambda_2 - \Lambda_1) \ln R_3 = 0. \quad (11)$$

Все величины в (11) являются функциями только  $R_0$  и координат точек  $M_j$ . Значения  $R_j$  и  $\Lambda_j$  определяются формулами (4) и (9) соответственно. Уравнение (11) предполагается решать численно.

После нахождения  $R_0$  из уравнения (11) два других параметра спирали определяются любой парой из следующих выражений:

$$k = \frac{\ln(R_j/R_m)}{\Lambda_j - \Lambda_m}, \quad j, m = 1, 2, 3, \quad j \neq m; \quad (12)$$

$$\lambda_0 = \Lambda_j - \frac{\ln(R_j/|R_0|)}{k}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (13)$$

При  $k = 0$  (спираль вырождается в окружность) уравнение (11) тривиально, а формула (12) не имеет смысла. Уравнение (11) и выражения (12), (13) составляют формальный аппарат метода определения параметров логарифмической спирали, который мы будем называть *трехточечным*.

Заметим, что сэкономить на вычислениях можно, используя вместо уравнения (11) эквивалентное ему уравнение

$$(\Lambda_3 - \Lambda_2) \ln R_1^2 + (\Lambda_1 - \Lambda_3) \ln R_2^2 + (\Lambda_2 - \Lambda_1) \ln R_3^2 = 0. \quad (14)$$

Тогда достаточно находить  $R_j^2$ , не извлекая корня. Для нахождения  $\Lambda_j$  знание  $R_j$  не обязательно.

## 2.2. Число корней трехточечного уравнения для расстояния до полюса спирали

Поскольку уравнение (11) является трансцендентным, то отдельного рассмотрения заслуживает вопрос о количестве его корней, т.е. вопрос об однозначности восстановления параметров логарифмической спирали по трем точкам, принадлежащим одному ее витку. Пусть такие точки  $M_1, M_2, M_3$  принадлежат спирали с параметрами  $R_0, k, \lambda_0$ . Рассмотрим переменную  $R'_0$ , имеющую смысл пробного значения  $R_0$ , определяющего величины  $R_j, \Lambda_j, j = 1, 2, 3$ . Для левой части (11) введем обозначение

$$f(R'_0) \equiv (\Lambda_3 - \Lambda_2) \ln R_1 + (\Lambda_1 - \Lambda_3) \ln R_2 + (\Lambda_2 - \Lambda_1) \ln R_3. \quad (15)$$

При  $R'_0 = R_0$  значение  $f(R'_0)$  равно нулю. Но верно ли обратное: означает ли нахождение такого  $R'_0$ , что  $f(R'_0) = 0$ , *однозначное* определение параметра  $R_0$  спирали, проходящей через три точки? То есть определяют ли три точки спираль в данной постановке задачи?

Проведенное, преимущественно численное, исследование поведения  $f(R'_0)$  в зависимости от начальных данных и параметров спирали позволило выявить основные свойства этой функции. Проиллюстрируем их на примере модельных спиралей, соответствующих внешнему и внутреннему по отношению к Солнцу рукавам Галактики.

Пусть начальные точки  $M_1, M_2, M_3$ , принадлежат одному витку логарифмической спирали, представляющей рукав Стрельца, с параметрами  $R_0 = 8.0$  кпк,  $i = -18^\circ 7'$  (Никифоров, Шеховцова, 2001),  $\lambda_0 = -30^\circ$ . В дальнейшем будем называть эту спираль *исходной*. При вычислении функции  $f(R'_0)$ , определяемой набором трех начальных точек, последние для



каждого значения  $R'_0$  заново нумеровались так, чтобы выполнилось условие (8), т.е. нумерация точек  $M_j$  при  $R'_0 \neq R_0$  могла совпадать или не совпадать с начальной. Это обеспечивает при невырожденных конфигурациях ( $\Lambda_j \neq \Lambda_m, j \neq m$ ) увеличение номера точки с ростом формальной долготы  $\Lambda(R'_0)$  при любом значении  $R'_0$ . Такое правило нумерации и условие (8) вытекают из самой постановки задачи поиска спирали, проходящей через три заданные точки за один виток, а также из отсутствия предположения, что порядок прохождения точек спиралью нам заранее известен.

Исследуем поведение функции  $f$  на бесконечности с учетом правила нумерации точек. При  $R'_0 \rightarrow \pm\infty$  функция  $f(R'_0) \rightarrow 0$ , что видно из следующих асимптотических выражений; вид выражения при  $R'_0 \rightarrow -\infty$  зависит от того, расположены ли исходные точки по одну сторону от направления на полюс спирали.

При  $R'_0 \rightarrow +\infty$  для любой конфигурации точек и при  $R'_0 \rightarrow -\infty$  для  $\Lambda_1 \leq 0, \Lambda_2 < 0, \Lambda_3 < 0$

$$f(R'_0) = \frac{(Y_3 - Y_2)X_1 + (Y_1 - Y_3)X_2 + (Y_2 - Y_1)X_3}{R_0'^2} + o(1/R_0'^2); \quad (16)$$

при  $R'_0 \rightarrow -\infty$

$$\text{для } \Lambda_1 \leq 0, \Lambda_2 > 0, \Lambda_3 > 0 \quad f(R'_0) = 2\pi \frac{X_2 - X_3}{R_0'} + o(1/R_0'); \quad (17)$$

$$\text{для } \Lambda_1 \leq 0, \Lambda_2 < 0, \Lambda_3 > 0 \quad f(R'_0) = 2\pi \frac{X_2 - X_1}{R_0'} + o(1/R_0'). \quad (18)$$

Здесь нумерация точек (в общем случае не начальная) расставлена по указанному выше правилу, отрицательному значению  $R_0$  соответствует положение полюса спирали в области отрицательных значений  $X$ . Знак функций, эквивалентных  $f(R'_0)$ , во всех случаях (16)–(18) зависит только от координат точек  $M_j$ , но не от величины  $R'_0$ . Это означает, что при  $R'_0 \rightarrow \pm\infty$  функция  $f(R'_0)$  асимптотически приближается к оси абсцисс, но не пересекает ее. Следовательно, корни уравнения (11) существуют лишь на ограниченном промежутке  $R'_0$  (включающем исходное значение  $R_0$ ). Прямые вычисления  $f(R'_0)$  это подтверждают (см. примеры на рис. 1, 2). Функция  $f(R'_0)$  при аргументе, близком к  $X_1$  или  $X_2$  или  $X_3$ , может испытывать резкие колебания, а при вырождениях конфигурации ( $\Lambda_j = \Lambda_m, j \neq m$ ) терпит разрывы из-за смены порядка нумерации точек (см. врезки на рис. 2).

Расчеты показывают, что в общем случае значение  $f(R'_0) = 0$  достигается в одной, двух или трех точках. Один корень фиксирован ( $R'_0 = R_0 = 8.0$  кпк), *дополнительные* корни меняют свое положение в зависимости от галактоцентрических долгот  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ .

Если сегмент спирали, ограниченный точками  $M_1$  и  $M_3$ , *пересекает ось X* (линию центр-антицентр Галактики), количество корней уравнения  $f(R'_0) = 0$  зависит от расположения точек на исходной спирали. На рис. 1а–1в представлены примеры функций  $f(R'_0)$  для тех конфигураций точек, при которых число корней равно одному, двум или трем. В особых случаях число корней чувствительно даже к небольшим изменениям долготы одной точки. Например, к изменениям  $\Lambda_3$ , если это единственная положительная долгота, значение  $\Lambda_3$  невелико, а интервал между  $\Lambda_j$  — большой (рис. 1г); заметим, что для семейства  $f(R'_0)$  на рис. 1г в интервале  $\Lambda_3 \in (14^\circ, 15^\circ)$  существует значение, при котором число корней становится равным двум.

В случае расположения сегмента *по одну сторону от оси X*, включая случаи, когда одна

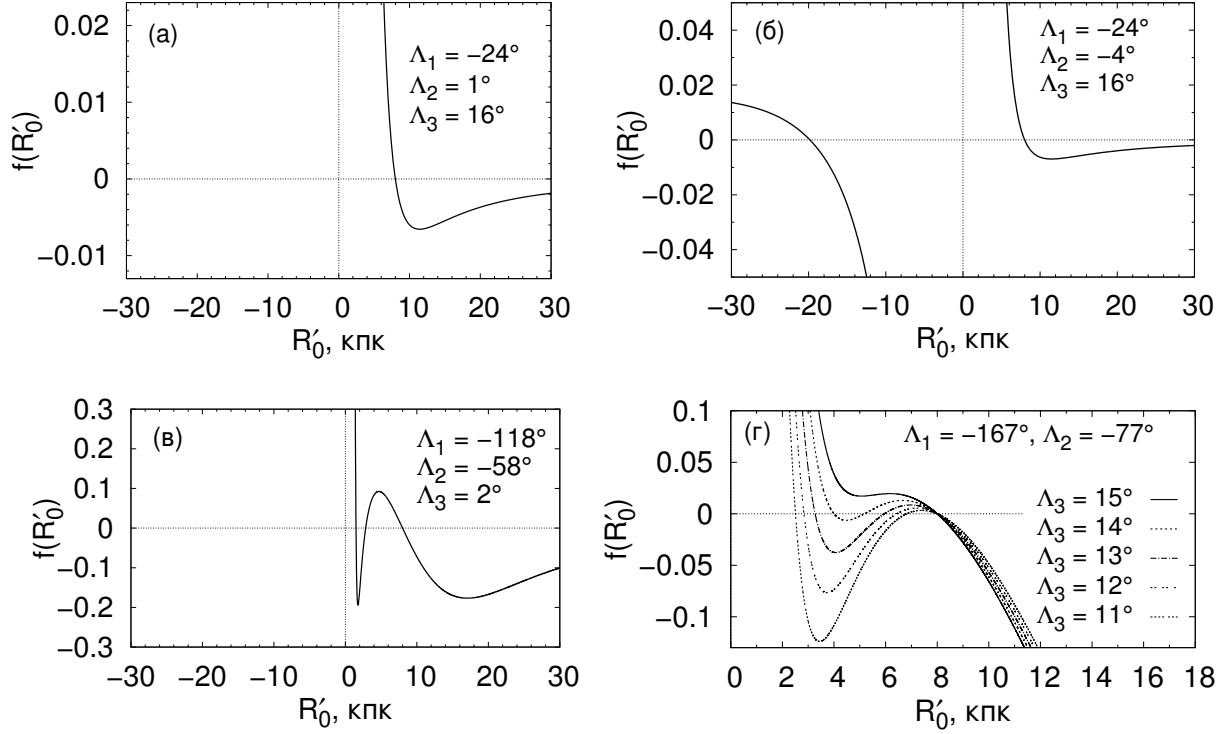


Рис. 1. Графики функций  $f(R'_0)$  для сегментов, пересекающих направление на полюс спирали. (а)–(в) — Примеры  $f(R'_0)$ , имеющих различное количество корней. (г) — Пример зависимости числа корней  $f(R'_0)$  от долготы  $\Lambda_3$ . Указана начальная нумерация точек.

из крайних его точек  $M_1$ ,  $M_3$  находится точно на оси  $X$ , всегда существует два корня, один из которых совпадает с исходным  $R_0$  (рис. 2).

Каждому корню функции  $f(R'_0)$  и вычисленным для него по формулам (12), (13) двум оставшимся параметрам соответствует спираль, проходящая через все три исходные точки (см. примеры на рис. 3), т.е. количество таких спиралей равно числу корней. Таким образом, в общем случае по трем точкам нельзя однозначно восстановить логарифмическую спираль, проходящую через них за один виток, даже если направление на полюс спирали известно.

Рассмотрим найденные закономерности более детально на примере важного для некоторых приложений случая равноудаленных по долготе  $\Lambda$  начальных точек  $M_j$ . Обозначим параметр  $R_0$  исходной спирали через  $R_{0,1}$ , а дополнительные корни (11), если они существуют, — через  $R_{0,2}$ ,  $R_{0,3}$ . Исследуем зависимость наличия/отсутствия дополнительных корней и величин  $R_{0,2}$ ,  $R_{0,3}$  от положения троек начальных точек  $\{M_{1,n}, M_{2,n}, M_{3,n}\}_{n=1}^N$ , лежащих на исходной спирали. Начальные долготы этих точек зададим следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{2,n} - \Lambda_{1,n} &\equiv \Delta\Lambda \equiv \Lambda_{3,n} - \Lambda_{2,n}, \\
 \Lambda_{1,n+1} - \Lambda_{1,n} &= 1^\circ, \\
 \Lambda_{1,1} &= -180^\circ, \quad \Lambda_{3,N} = 180^\circ - 1^\circ = 179^\circ.
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

Таким образом (почти полный) виток спирали покрывался тройками точек с шагом  $1^\circ$ . Для каждой тройки определялся набор решений.

На рис. 4а корни  $f(R'_0)$  отложены в зависимости от долготы точки  $M_2$  при некоторых

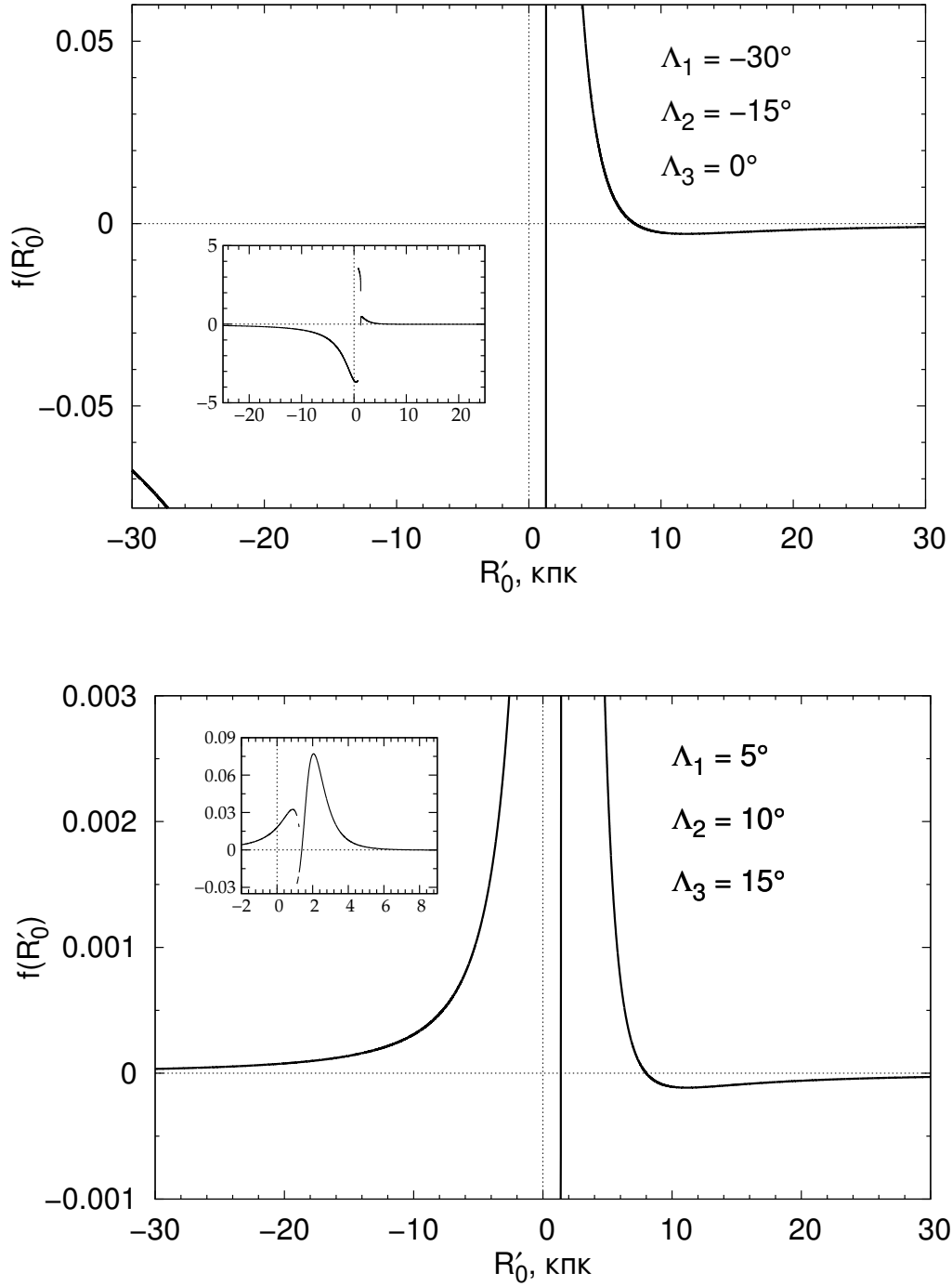


Рис. 2. Графики функций  $f(R'_0)$  для сегментов, расположенных по одну сторону от направления на полюс спирали. На врезках показаны графики тех же функций для больших промежуточных значений. В окрестностях корней  $R'_0 \approx 1.30$  кпк на левой панели и  $R'_0 \approx 1.39$  кпк на правой панели  $f(R'_0)$  имеет большую, но конечную, положительную производную. Указана начальная нумерация точек.

значениях  $\Delta\Lambda$  для модели, представляющей рукав Стрельца. Количество корней для тройки точек с заданными  $\Delta\Lambda$  и  $\Lambda_2$  равно числу пересечений прямой  $\Lambda_2 = \text{const}$  с приведенными на рисунке ветвями решений (включая ветвь  $R_{0,1} = 8$  кпк) для этой величины  $\Delta\Lambda$ . Обобщение

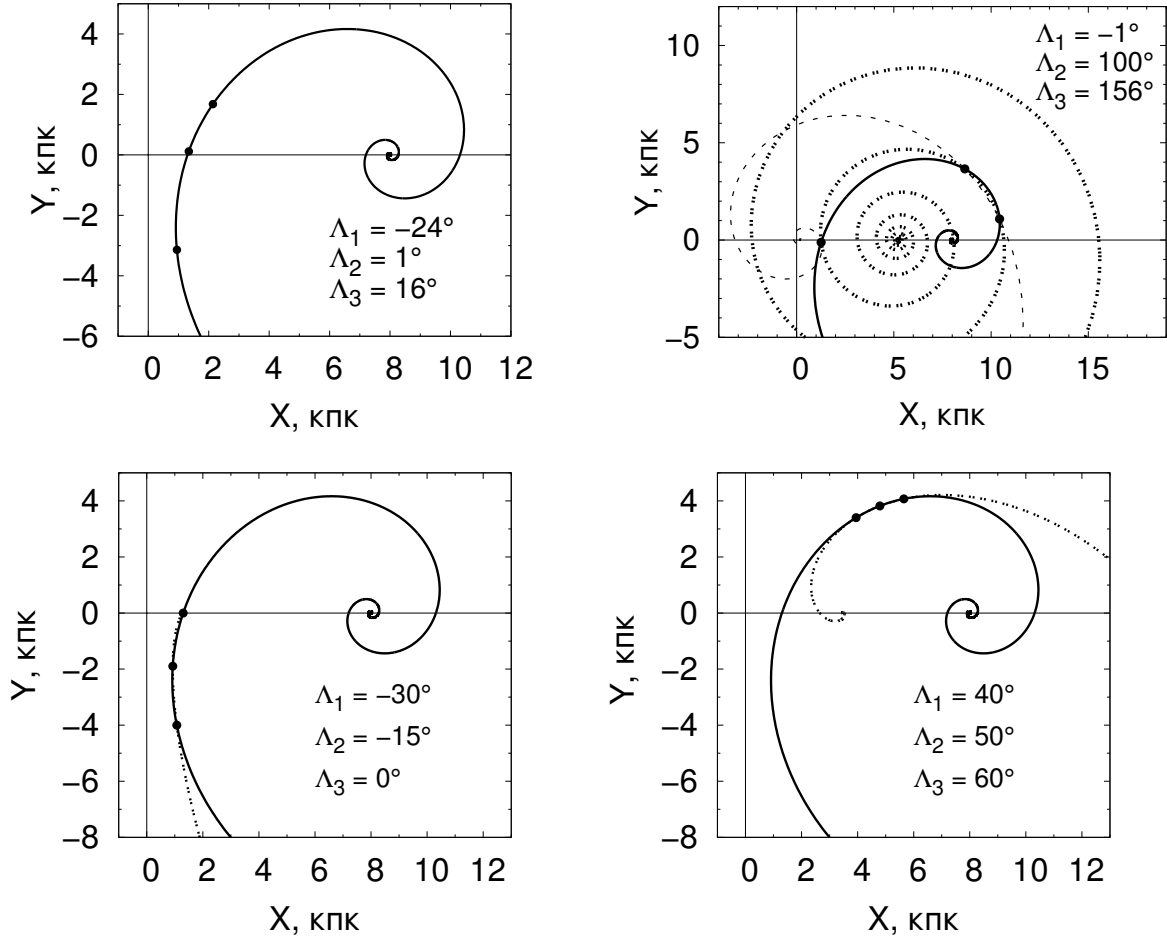


Рис. 3. Примеры конфигураций начальных точек, при которых образуемый ими сегмент пересекает направление на полюс спирали (верхние панели) или расположен по одну сторону от этого направления (нижние панели). Сплошной линией изображена исходная спираль. На левой нижней панели полюс дополнительной спирали находится рядом с точкой  $M_3$ . Нумерация точек — начальная.

полученных результатов представлено на рис. 5а для конфигурационной плоскости  $(\Lambda_2, \Delta\Lambda)$ , на которой область возможных конфигураций (ОВК) в данной постановке задачи ограничена равнобедренным треугольником с вершинами  $(\Lambda_2, \Delta\Lambda) = (-\pi, 0), (\pi, 0), (0, \pi)$ . ОВК не образует замкнутое множество, поскольку ей не принадлежит правая боковая сторона треугольника (по определению (8)  $\Lambda_3 < \pi$ ) и его основание (по определению  $\Delta\Lambda > 0$ ). Анализ графиков ветвей решений (рис. 4а) и результаты сканирования по правилу (19) показывают, что ОВК разделяется на шесть двумерных областей, все точки каждой из которых имеют одинаковое число корней (рис. 5а).

Самой большой является область единственного корня ( $R_{0,1} = 8$  кпк), занимающая немного меньше половины площади ОВК. К ней относится подавляющее большинство троек, чьи сегменты пересекают ось  $X$ , среди них — все тройки с  $\Lambda_2 = 0$ . Такими же свойствами области единственного корня получаются и для моделей других рукавов Галактики (см. примеры на рис. 6). Т.е. трехточечные конфигурации с единственным решением уравнения (11) соответствуют сегментам рукавов в околосолнечном секторе Галактики. Подобные сегменты обычно и выявляются по трейсерам с некинематическими (т.е. более надежными) расстояни-

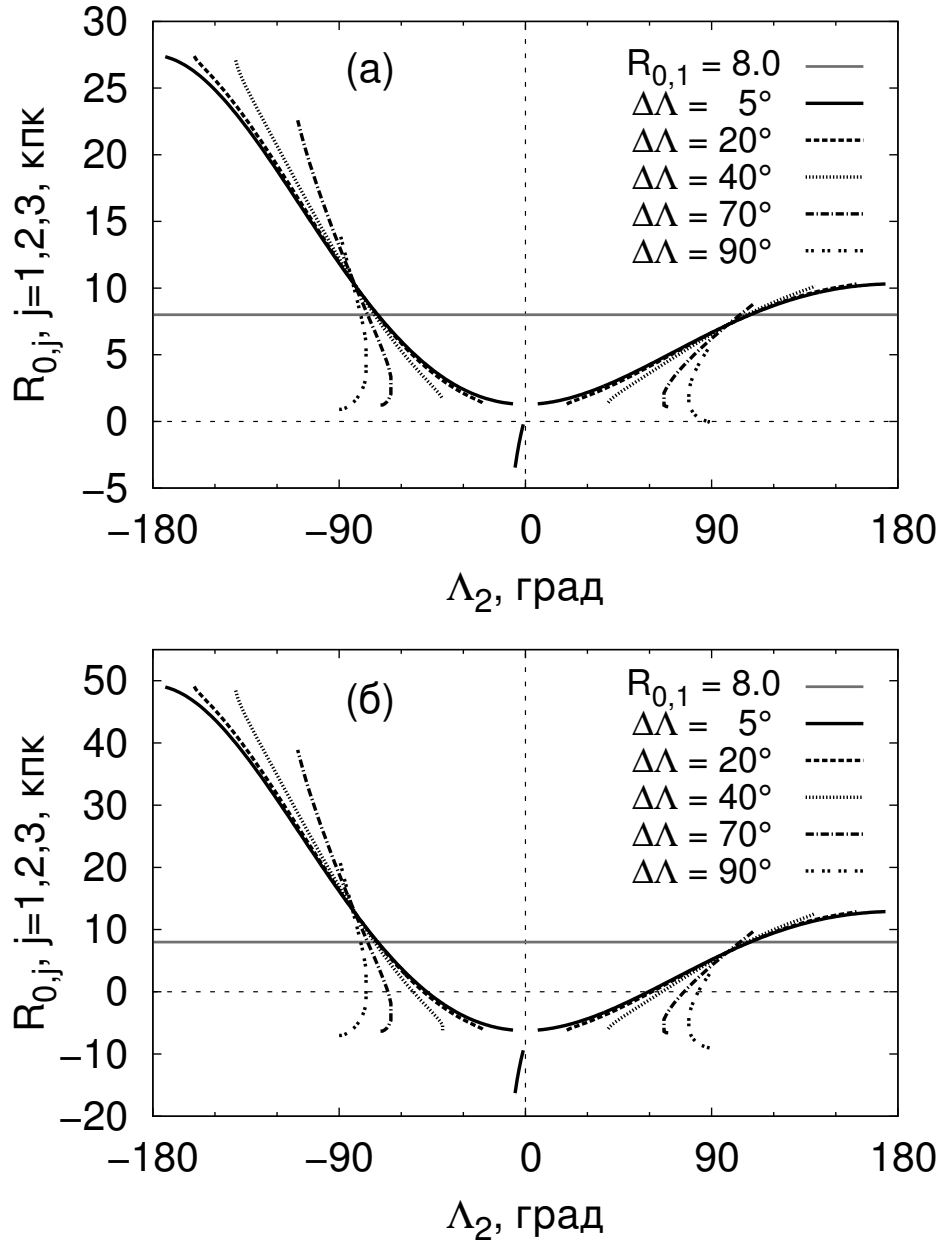


Рис. 4. Ветви решений уравнения  $f(R'_0) = 0$  как функции от долготы центральной точки в тройке при разных  $\Delta\Lambda$  для спиралей, представляющих рукав Стрельца (а) и рукав Персея (б).

ями (см., например, работы Поповой, Локтина, 2005; Никифорова, Казакевич, 2009; Дамбиса и др., 2015).

Два корня  $f(R'_0)$  существуют в двух больших областях, ограниченных треугольниками с вершинами  $(\Lambda_2, \Delta\Lambda) = (-\pi, 0), (0, 0), (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  и  $(0, 0), (0, \pi), (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  и вместе занимающих половину площади ОВК (рис. 5а). Однако им соответствуют сегменты, лежащие по одну сторону от оси  $X$ , включая случаи касания этой оси крайней точкой ( $\Lambda_1 = 0$  или  $\Lambda_3 = 0$ ), а такие конфигурации нехарактерны для трейсеров с некинематическими расстояниями.

Между указанными областями двух корней и областью единственного корня имеются незначительные по площади двумерные области трех корней, ограниченные одна линией

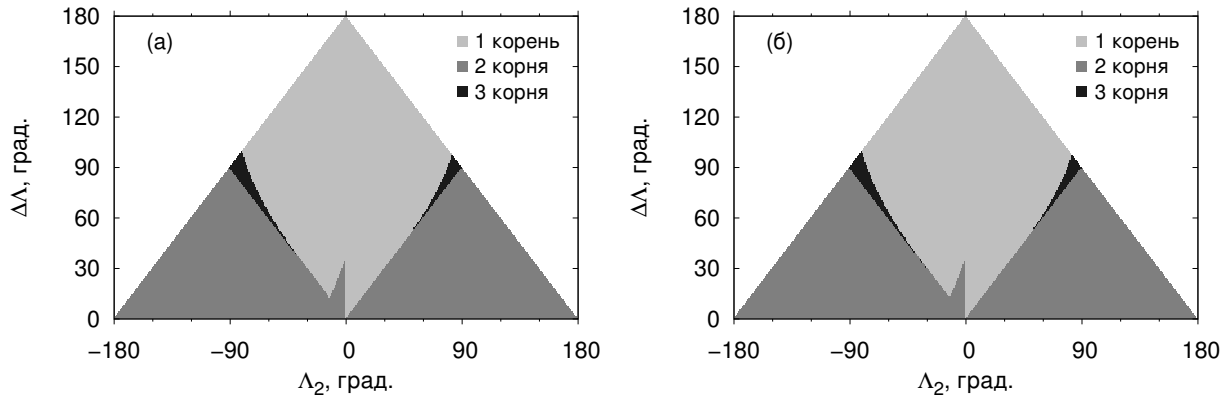


Рис. 5. Зависимость количества корней уравнения (11) от долготы центральной точки  $\Lambda_2$  и расстояния между соседними точками  $\Delta\Lambda$  для спиралей, представляющих рукав Стрельца (а) и рукав Персея (б).

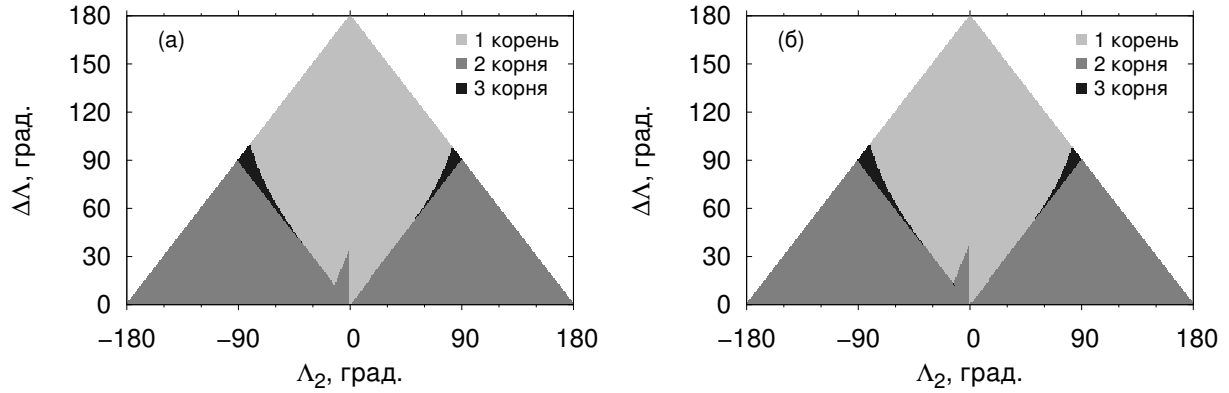


Рис. 6. Зависимость количества корней уравнения (11) от долготы центральной точки  $\Lambda_2$  и расстояния между соседними точками  $\Delta\Lambda$  для спиралей в области рукава Щита и Внешнего рукава  $i = -20^\circ$ ,  $\lambda_0 = -55^\circ$  (а) и  $i = -20^\circ$ ,  $\lambda_0 = +100^\circ$  (б).

$\Lambda_2 = -\Delta\Lambda$ , другая — линией  $\Lambda_2 = +\Delta\Lambda$  (рис. 5а). Первая выявляется при значениях расстояния  $\Delta\Lambda$  между соседними точками  $39^\circ \leq \Delta\Lambda \leq 99^\circ$  для троек с  $\Lambda_{1,n} < -\Delta\Lambda < \Lambda_{2,n} < 0 < \Lambda_{3,n}$ . Вторая — при  $54^\circ \leq \Delta\Lambda \leq 97^\circ$  для троек с  $\Lambda_{1,n} < 0 < \Lambda_{2,n} < \Delta\Lambda < \Lambda_{3,n}$ .

Также при  $\Delta\Lambda \leq 34^\circ$  выявлена небольшая область двух корней, имеющая треугольную форму и ограниченная линиями  $\Lambda_2 = 0$ ,  $\Lambda_2 = -\Delta\Lambda$ , но их не включающая (рис. 5а). Область соответствует коротким сегментам, пересекающим ось  $X$  с  $\Lambda_{1,n} < -\Delta\Lambda < \Lambda_{2,n} < 0 < \Lambda_{3,n}$ . Однако даже при  $\Lambda_2 \rightarrow -0$  для фиксированного  $\Delta\Lambda$  дополнительный корень  $R_{0,2}$  много меньше исходного  $R_0 = 8$  кпк, а при уменьшении  $\Lambda_2$  он становится еще меньше; в точке  $\Lambda_2 = -\Delta\Lambda$  зависимость  $R_{0,2}(\Lambda_2)$  терпит разрыв и решение  $R_{0,2}$  скачком переходит на другую ветвь с большими значениями (см. график для  $\Delta\Lambda = 5^\circ$  на рис. 4а). С ростом  $\Delta\Lambda$  ветвь  $R_{0,2}(\Lambda_2)$  на  $-\Delta\Lambda < \Lambda_2 < 0$  резко уходит в отрицательную область, поэтому в промежуток значений  $R_{0,j}$ , показанных на рис. 4а, эта ветвь попала только для  $\Delta\Lambda = 5^\circ$ . При уменьшении нижнего предела поиска корней высота рассматриваемой области двух корней увеличивается за счет смещения вверх ее верхней наклонной границы, но очень медленно (на рис. 5а эта область приведена для  $R'_0 \geq -5000$  кпк). Очевидно, что наличие такой ветви решений, сильно отклоняющейся от исходного значения  $R_{0,1}$ , не создает неоднозначности при выборе корня.

То же верно и на большей части протяженности других ветвей дополнительных корней (рис. 4а), где решения отличимы от исходной спирали и по углу закрутки. Исключение составляют случаи, когда средняя точка сегмента находится вблизи траверсных направлений:  $\Lambda_{2,n} \approx -80^\circ \div -70^\circ$  и  $+100^\circ \div +115^\circ$  (интервалы пересечений ветвями дополнительных корней линии  $R_{0,1} = 8$  кпк на рис. 4а). При анализе участков спиральных рукавов по мазерам, данные о которых покрывают преимущественно I и II квадранты (например, Рид и др., 2014, см. также раздел 3 настоящей работы), такие ситуации вполне возможны. Это значит, что какой-то алгоритм выбора между корнями  $R_{0,j}$  в общем случае нужен.

Существуют две вырожденные одномерные области (т.е. линии) двух корней, которым на рис. 4а соответствуют точки слияния/бифуркации ветвей двух дополнительных корней, где эти ветви имеют бесконечные производные. На рис. 5а данные линии образуют границы между областью одного корня и областями трех корней. Имея нулевую площадь, линии двух корней при произвольном сканировании типа (19) не выявляются и поэтому не отображены на рис. 5а. Также существуют одномерные области, находящиеся частично в области двух и частично в области трех корней, обусловленные пересечением ветви дополнительных корней линии  $R_{0,1} = 8$  кпк. Это случаи слияния одного дополнительного корня с исходным значением. Данные линии также не отображены на рис. 5а.

Такое же исследование было выполнено для модельной спирали, представляющей рукав Персея, с параметрами  $R_0 = 8.0$  кпк,  $i = -18.7^\circ$ ,  $\lambda_0 = 97^\circ$  (Никифоров, Шеховцова, 2001). Полученные результаты (рис. 4б, 5б) показывают, что основные свойства решений уравнения (11) при переходе от внутреннего спирального рукава к внешнему остаются прежними. Отличия касаются лишь некоторых деталей. Для рукава Персея нижние части всех ветвей дополнительных корней находятся в области  $R_0 < 0$  кпк (поскольку у внешнего рукава многие тройки имеют отрицательные координаты  $X_j$ ), разброс значений  $R_{0,2}$  и  $R_{0,3}$  получается бóльшим, левая область трех корней выявляется при  $\Delta\Lambda \geq 31^\circ$  (для рукава Стрельца — при  $\Delta\Lambda \geq 39^\circ$ ). Остальные параметры малых областей двух и трех корней с точностью до  $1^\circ$  такие же, как для рукава Стрельца. Для спиралей, представляющих области рукава Щита ( $i = -20^\circ$ ,  $\lambda_0 = -55^\circ$ ) и Внешнего рукава ( $i = -20^\circ$ ,  $\lambda_0 = +100^\circ$ ), проведенное исследование приводит к аналогичным выводам (см. рис. 6).

В целом несущественны изменения результатов и при варьировании углов закрутки исходных спиралей. Величина  $i$  влияет лишь на некоторые характеристики малых областей: с уменьшением  $|i|$  область двух корней, прилегающая к линии  $\Lambda_2 = 0$ , уменьшается (при  $i = -10^\circ$  для обоих рукавов  $(\Delta\Lambda)_{\max} = 17^\circ$ ); немного варьируется нижняя по  $\Delta\Lambda$  граница выявления левой области трех корней (см. рис. 7, модельные спирали представляют гипотетические сегменты, расположенные вблизи центра Галактики (а) и за Внешним рукавом (б)).

### 2.3. О возможности определения параметров логарифмической спирали по четырем точкам

Поскольку трехточечный метод в общем случае дает неоднозначный результат, рассмотрим возможность восстановления параметров спирали по четырем точкам  $M_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , расположенным на одном ее витке. Из четверки точек выделим две произвольные тройки, например,  $M_1, M_2, M_3$  и  $M_1, M_3, M_4$ , запишем для них уравнения вида (11) и поставим задачу

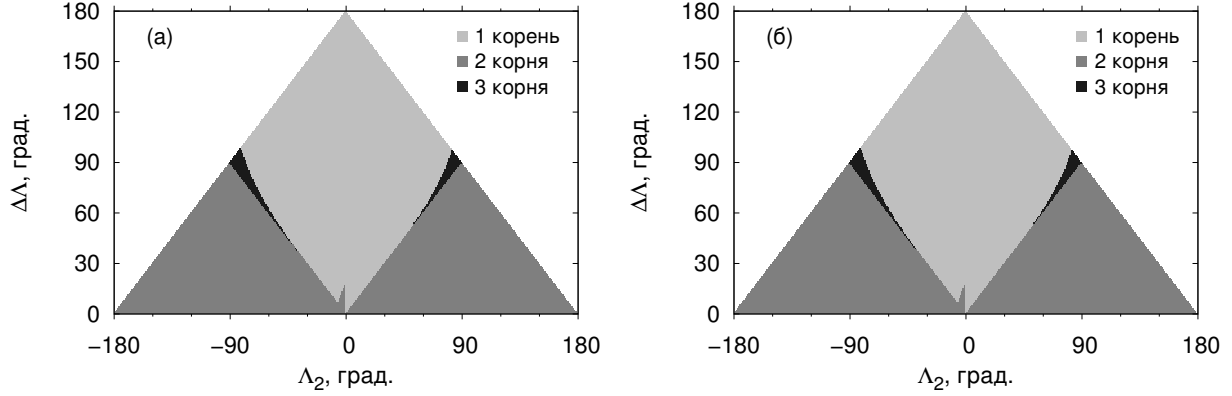


Рис. 7. Зависимость количества корней уравнения (11) от долготы центральной точки  $\Lambda_2$  и расстояния между соседними точками  $\Delta\Lambda$  для спиралей с углом закрутки  $i = -10^\circ$  при  $\lambda_0 = -70^\circ$  (а) и  $\lambda_0 = +190^\circ$  (б).

найти решение, одинаковое для обеих троек. Это приводит к уравнению для  $R_0$

$$f_4(R'_0) \equiv |f_{123}| + |f_{134}| = 0, \quad (20)$$

где

$$f_{123}(R'_0) = (\ln R_1 - \ln R_2)(\lambda_2 - \lambda_3) + (\ln R_3 - \ln R_2)(\lambda_1 - \lambda_2), \quad (21)$$

$$f_{134}(R'_0) = (\ln R_1 - \ln R_3)(\lambda_3 - \lambda_4) + (\ln R_4 - \ln R_3)(\lambda_1 - \lambda_3). \quad (22)$$

Модули в (20) нужны для того, чтоб избежать посторонних корней при значениях  $R'_0$  таких, что  $f_{123} = -f_{134} \neq 0$ , которым не соответствуют спирали, проходящие через четыре (и даже через три) точки.

Проверка показала, что уравнение (20) действительно имеет единственный корень в точке, где положительно определенная функция  $f_4(R'_0)$  *касается* (имеет одну общую точку) оси абсцисс. Однако даже при малом варьировании положения хотя бы одной точки  $M_j$  уравнение (20) в общем случае становится неразрешимым (см. рис. 8, черным цветом показан график  $f_4(R'_0)$  для точек, смещенных относительно логарифмической спирали, график не касается оси абсцисс), поскольку произвольные четыре точки не лежат на одном витке спирали. Это делает потенциальный четырехточечный метод неприменимым к псевдослучайным или реальным данным. При дальнейшем увеличении числа начальных точек это свойство сохраняется.

С другой стороны, произвольная тройка точек лежит на одном витке по крайней мере одной спирали, значит, не менее одного решения при варьировании положений точек существовать будет всегда. Поэтому трехточечный метод может быть применен к реальным данным и в численных экспериментах при условии введения критерия выбора между корнями. Далее мы будем использовать трехточечный метод.

### 3. Применение трехточечного метода определения параметров спирали к данным о мазерах

Формальный аппарат для определения спирали по начальным точкам нужен как простой инструмент для изучения методом численного моделирования возможностей оценивания  $R_0$



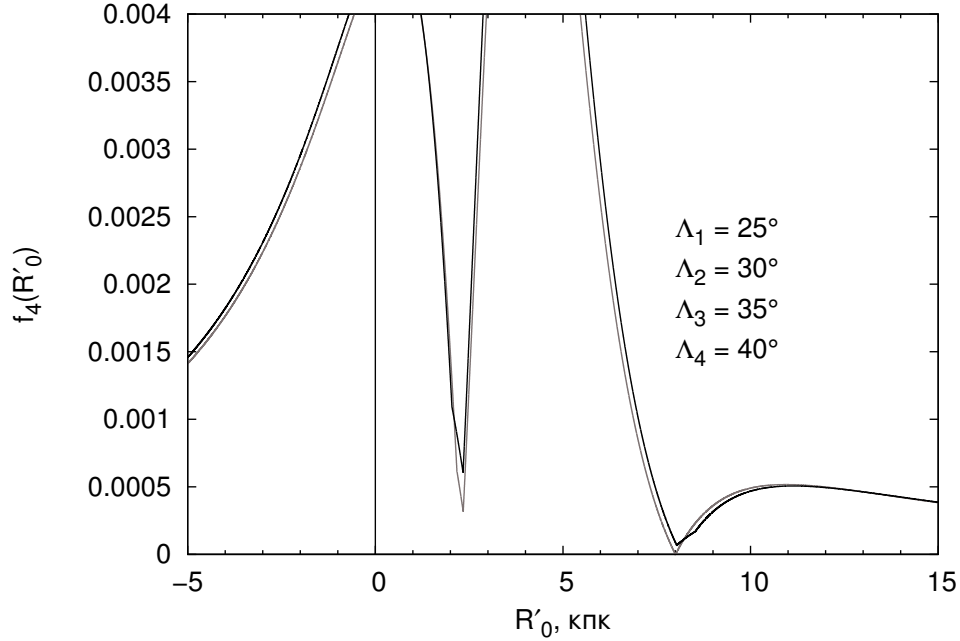


Рис. 8. График функций  $f_4(R'_0)$  для сегмента, расположенного по одну сторону от направления на полюс спирали. Серым цветом показан график для точек, снятых с логарифмической спирали, представляющей рукав Стрельца, черным цветом изображен график для точек, положение которых смещено на  $\pm 0.1$  кпк относительно спирали.

по геометрии сегментов спиральных рукавов в зависимости от параметров задачи. Такое исследование будет выполнено в подразделе 3.4 настоящей работы.

Однако трехточечный метод также позволяет сразу выполнить тестирование нового подхода на реальных данных. В качестве трассирующих спиральные рукава объектов были выбраны мазерные источники с тригонометрическими параллаксами, поскольку они несомненно удовлетворяют всем трем сформулированным во Введении требованиям для проведения пространственного моделирования отдельных сегментов рукавов, а также имеют абсолютные (не нуждающиеся в калибровке) измерения гелиоцентрических расстояний. Данные были взяты из каталога мазеров  $\text{H}_2\text{O}$  и  $\text{CH}_3\text{OH}$  в областях образования массивных звезд, приведенного в работе Рида и др. (2014). Каталог содержит экваториальные координаты  $\alpha$  и  $\delta$  (J2000), параллакс и другие характеристики 103 мазеров, полученные в рамках РСДБ-обзоров BeSSeL, VERA, VLBI и EVN; типичная точность определения параллаксов составляет примерно 20 мксд. По этим данным Рид и др. (2014) выделили пять спиральных сегментов, отнеся к тому или иному из них подавляющее большинство мазеров в результате сопоставления положений мазеров и эмиссионных деталей CO и HI на диаграмме  $l-V_{\text{LSR}}$ , где  $V_{\text{LSR}}$  — лучевая скорость относительно Местного стандарта покоя. В рамках настоящей работы было принято распределение мазеров по сегментам, предложенное Ридом и др. (2014) (наблюдательные характеристики сегментов см. в табл. 1).

### 3.1. Алгоритм

Каждая выборка мазеров, отнесенных к одному из сегментов, анализировалась отдельно по алгоритму, основанному на трехточечном методе. На данном этапе (проверка работоспо-

Таблица 1. Данные о спиральных сегментах, выделенных Ридом и др. (2014) по мазерам.  $l_{\min}$ ,  $l_{\max}$ ,  $\Delta l$  — границы и протяженность по галактической долготе. Сегменты указаны в направлении от центра Галактики к внешней области

Сегмент	Число мазеров	$l_{\min}$	$l_{\max}$	$\Delta l$
Рукав Щита	17	$6^\circ$	$32^\circ$	$26^\circ$
Рукав Стрельца	18	$-9^\circ$	$52^\circ$	$61^\circ$
Местный рукав	25	$60^\circ$	$239^\circ$	$179^\circ$
Рукав Персея	24	$43^\circ$	$241^\circ$	$198^\circ$
Внешний рукав	6	$75^\circ$	$196^\circ$	$121^\circ$

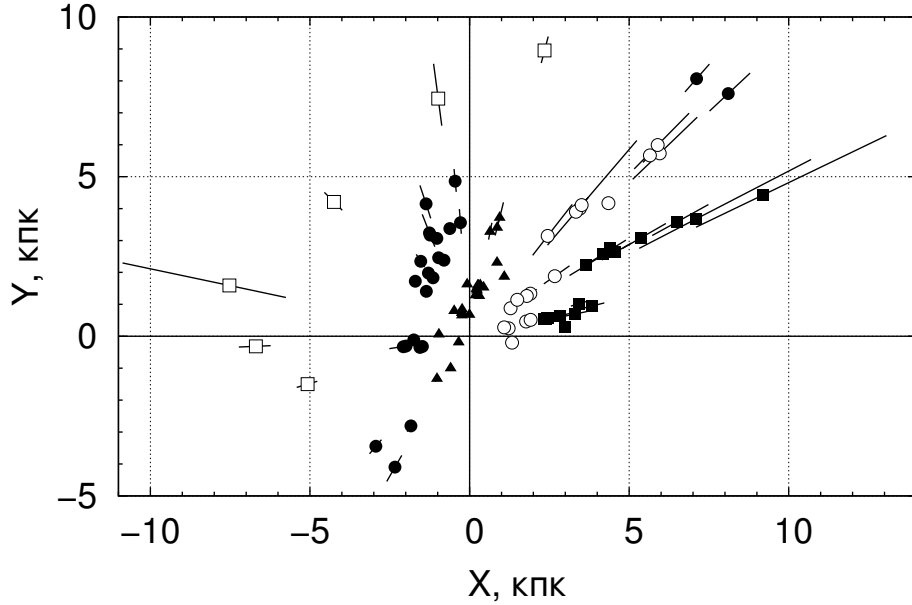


Рис. 9. Распределение мазерных источников в проекции на галактическую плоскость. Объекты Внешнего рукава изображены светлыми квадратами, рукава Персея — темными кружками, Местного рукава — темными треугольниками, рукава Стрельца — светлыми кружками, рукава Щита — темными квадратами. Бары ошибок показывают неопределенность параллаксов.

способности подхода) ошибки расстояний до мазерных источников не учитывались. В выборке мазеров находились все такие наборы трех объектов  $M_{1,j}$ ,  $M_{2,j}$ ,  $M_{3,j}$ , для которых угловое расстояние между соседними объектами  $l(M_{m+1,j}) - l(M_{m,j})$ ,  $m = 1, 2$ , не меньше некоторого принятого значения  $(\Delta l)_{\min}$  (здесь  $j$  — номер набора); величина  $(\Delta l)_{\min}$  оптимизировалась для каждой выборки заново. Для каждой из отобранных троек объектов вычислялись значения  $R_0$  как корни уравнения (11) и соответствующие им параметры  $k$  и  $\lambda_0$  по формулам (12) и (13). Поиск  $R_0$  проводился на отрезке  $[-60.0, 60.0]$  кпк.

Было рассмотрено два способа обработки случаев неединственного решения для  $R_0$ : 1) исключение троек с неединственным решением; 2) выбор из корней  $R_{0,1,j}$ ,  $R_{0,2,j}$  и, возможно,  $R_{0,3,j}$  такого, который приводит к наименьшей дисперсии мазеров выборки относительно определяемой им спирали. Первый способ — простой и более надежный, но он применим только при значительной доле троек с единственным решением в общей выборке. Поскольку

спиральные ветви по этим данным получаются отстающими (Рид и др., 2014), то тройки, соответствующие лидирующим спиральям (с  $k_j > 0$ ), были исключены из рассмотрения в обоих способах.

При заданном  $(\Delta l)_{\min}$  точечные оценки параметров  $R_0$ ,  $k$  и  $\lambda_0$  для рассматриваемого сегмента определялись как медианы (Me) множеств  $\{R_{0,j}\}$ ,  $\{k_j\}$  и  $\{\lambda_{0,j}\}$ , полученных по всем тройкам  $\{M_{1,j}, M_{2,j}, M_{3,j}\}$ , оставшимся после исключений в рамках одного из указанных выше способов; здесь  $j = 1, \dots, N_{\text{sol}}$ , где  $N_{\text{sol}}$  — число решений, принятых в обработку. Затем в качестве оптимального значения  $(\Delta l)_{\min}^0$  выбиралось то  $(\Delta l)_{\min}$ , для которого дисперсия среднего значения  $\langle R_0 \rangle$  является наименьшей. За окончательный результат для выборки сегмента принимались оценки Me  $R_0$ , Me  $k$ , Me  $\lambda_0$ , найденные для  $(\Delta l)_{\min}^0$ . Границы доверительных интервалов для этих оценок на уровне  $1\sigma$  рассчитывались на основе порядковых статистик (см., например, Кобзарь, 2006).

Для исследуемых сегментов были определены доверительные области для уровня значимости  $1\sigma$  (см. 3.1.1), а также получены оценки природного среднеквадратического разброса поперек спирального сегмента  $(\sigma_w)_0$  (см. 3.1.2). Таким образом были обработаны выборки мазеров для всех пяти сегментов спиральных рукавов Галактики, выделенных Ридом и др. (2014).

### 3.1.1. Определение доверительной области для модельной спирали, найденной трехточечным методом

Для *модельной спирали* (с параметрами Me  $R_0$ , Me  $k$ , Me  $\lambda_0$ , полученными при  $(\Delta l)_{\min} = (\Delta l)_{\min}^0$ ) доверительная область для уровня значимости  $1\sigma$  определялась по следующему алгоритму. Фиксировался луч  $C_0M$ , выходящий из полюса  $C_0$  модельной спирали под углом  $\Lambda$  к оси  $X$  (см. рис. 10а). Для данного  $\Lambda$  определялись точки пересечения  $P_j$  луча  $C_0M$  с каждой из  $N_{\text{sol}}$  спиралей, полученных по тройкам мазеров  $M_{1,j}, M_{2,j}, M_{3,j}$ .

Выведем уравнение для поиска долготы  $\lambda_j$  точки пересечения  $P_j(X_{P_j}, Y_{P_j})$  спирали и луча с началом на оси  $X$ . Для точки  $P_j$ , принадлежащей спирали с параметрами  $R_{0,j}, k_j, \lambda_{0,j}$ , справедливы равенства

$$\begin{aligned} R(\lambda_j) &= |R_{0,j}| e^{k_j(\lambda_j - \lambda_{0,j})}, \\ X_{P_j} &= R_{0,j} - R(\lambda_j) \cos \lambda_j, \\ Y_{P_j} &= R(\lambda_j) \sin \lambda_j \end{aligned} \quad (23)$$

(см. выражения (3), (7)). Уравнение прямой  $C_0M$  в декартовых координатах имеет вид

$$Y = (\text{Me } R_0 - X) \text{tg } \Lambda. \quad (24)$$

Подставляя выражения (23) для координат  $X_{P_j}, Y_{P_j}$  в (24), получаем равенство

$$R(\lambda_j) \sin \lambda_j = [\text{Me } R_0 - R_{0,j} + R(\lambda_j) \cos \lambda_j] \text{tg } \Lambda, \quad (25)$$

справедливое для точки  $P_j$  как пересечения спирали и прямой. Учитывая формулу (23) для  $R(\lambda_j)$ , окончательно получаем уравнение для долготы  $\lambda_j$  искомой точки  $P_j$

$$|R_{0,j}| e^{k_j(\lambda_j - \lambda_{0,j})} \sin \lambda_j - [\text{Me } R_0 - R_{0,j} + |R_{0,j}| e^{k_j(\lambda_j - \lambda_{0,j})} \cos \lambda_j] \text{tg } \Lambda = 0. \quad (26)$$

Корни уравнения (26) вычисляются на отрезке  $\lambda_j \in [-\pi; \pi)$ . Из двух формальных корней выбирается тот, знак которого совпадает со знаком  $\Lambda$ . Величина  $\lambda_j$  определяет точку  $P_j$  согласно формулам (23).

Для заданного  $\Lambda$  определяется медиана множества расстояний  $\{R_j\}_{j=1}^{N_{\text{sol}}}$ , где  $R_j = |C_0 P_j|$ , и два квантиля распределения  $R_j$ , отсчитываемых от медианы по разные стороны от нее и содержащих вместе долю распределения для доверительного уровня  $1\sigma$ , т.е. по  $\frac{\approx 68.3\%}{2}$  в каждом квантиле. Внешние границы квантилей принимаются за границы доверительного интервала для модельной величины  $R(\Lambda)$ , определяемой модельной спиралью для данного  $\Lambda$  (рис. 10б). Решение той же задачи при переборе значений  $\Lambda$  позволяет найти границы доверительной области для модельной спирали с любым разрешением по  $\Lambda$  (рис. 10б, см. также рис. 13).

В настоящей работе приводится доверительная область для рукава Персея (см. рис. 13); для других исследуемых сегментов границы доверительных областей имеют менее регулярный характер и не являются информативными.

### 3.1.2. Оценка природного среднеквадратического разброса мазеров поперек спирального сегмента

Для всех исследуемых сегментов была предпринята попытка оценить природный среднеквадратический разброс  $(\sigma_w)_0$  мазеров поперек спирального рукава.

Пусть  $M_j$  — номинальное положение мазера в соответствии с измерениями,  $\varpi_j$  и  $\sigma_{\varpi_j}$  — параллакс мазера и его неопределенность, приведенные в каталоге, соответственно. Здесь  $j = 1, 2, \dots, N$ , где  $N$  — объем выборки мазеров, отнесенных к данному сегменту. Введем

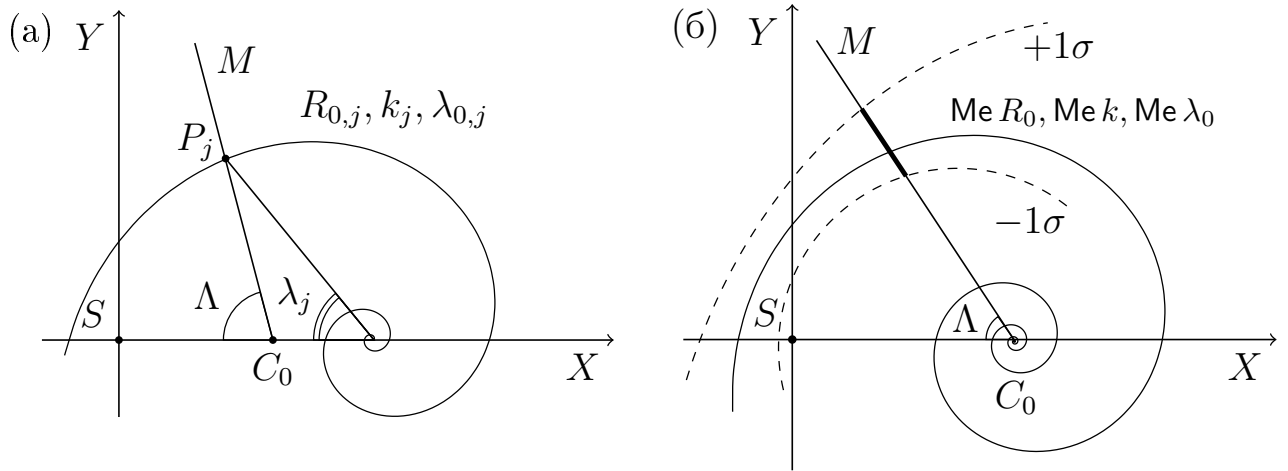


Рис. 10. (а) — К выведению уравнения для поиска долготы  $\lambda_j$  точки пересечения  $P_j$  спирали с параметрами  $R_{0,j}, k_j, \lambda_{0,j}$  и луча  $C_0M$ . (б) — К определению доверительной области для модельной спирали с параметрами  $\text{Me } R_0, \text{Me } k, \text{Me } \lambda_0$ ; пунктирные линии обозначают границы этой области для доверительного уровня  $1\sigma$ ; выделенный отрезок на луче  $C_0M$  изображает доверительный интервал для модельного значения  $R$  при заданном  $\Lambda$ .  $C_0$  — полюс модельной спирали,  $S$  — положение Солнца.

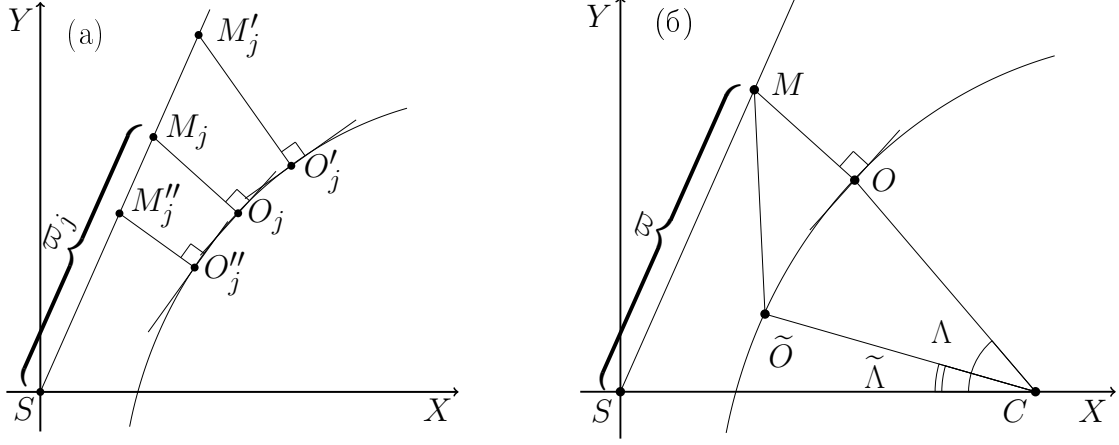


Рис. 11. (а) — К определению разброса поперек сегмента спирального рукава. (б) — К определению расстояния от точки ( $M$ ) до спирали.  $S$  — положение Солнца,  $C$  — полюс спирали.

следующие обозначения для расстояний от точек на луче зрения до оснований перпендикуляров, проведенных через эти точки к спирали (рис. 11а):

$$\begin{aligned} \rho_j &= |M_j O_j|, & |M_j S| &= \varpi_j^{-1}, \\ \rho_{j,1} &= |M'_j O'_j|, & |M'_j S| &= (\varpi_j - \sigma_{\varpi_j})^{-1}, \\ \rho_{j,2} &= |M''_j O''_j|, & |M''_j S| &= (\varpi_j + \sigma_{\varpi_j})^{-1}. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь  $O_j, O'_j, O''_j$  — точки оснований перпендикуляров, определяемые положением точек  $M_j, M'_j, M''_j$  на луче зрения соответственно;  $S$  — положение Солнца.

Знание расстояний (27) позволяет получить следующие оценки наблюдаемой дисперсии объектов поперек сегмента спирального рукава,  $(\sigma_w)_{\text{obs}}^2$ , вклада в эту дисперсию неопределенностей параллаксов,  $(\sigma_w)_{\varpi}^2$ , и природной дисперсии объектов поперек сегмента,  $(\sigma_w)_0^2$ :

$$(\sigma_w)_{\text{obs}}^2 = \frac{1}{N-3} \sum_{j=1}^N \rho_j^2, \quad (28)$$

$$(\sigma_w)_{\varpi}^2 = \frac{1}{N-3} \left[ \sum_{j=1}^N \frac{(\rho_j - \rho_{j,1})^2 + (\rho_j - \rho_{j,2})^2}{2} \right], \quad (29)$$

$$(\sigma_w)_0^2 = (\sigma_w)_{\text{obs}}^2 - (\sigma_w)_{\varpi}^2. \quad (30)$$

Расстояния (27) от точек до спирали вычислялись следующим образом. Пусть  $(X_0, Y_0)$  — декартовы координаты точки  $M$ ;  $\tilde{O}(\tilde{X}, \tilde{Y})$  — произвольная точка спирали, имеющая номинальную галактоцентрическую долготу  $\tilde{\Lambda}$ ;  $R_0, k, \lambda_0$  — параметры спирали. Находилось такое значение долготы  $\Lambda$ , при котором расстояние  $|\tilde{M}\tilde{O}|$  ( $\tilde{\Lambda} = \Lambda$ ) является наименьшим (рис. 11б).

Выразим координаты точки  $\tilde{O}$  через  $\tilde{\Lambda}$  и параметры спирали:

$$\tilde{X} = R_0 - |R_0| e^{k(\tilde{\Lambda} - \lambda_0)} \cos \tilde{\Lambda}, \quad (31)$$

$$\tilde{Y} = |R_0| e^{k(\tilde{\Lambda} - \lambda_0)} \sin \tilde{\Lambda}. \quad (32)$$

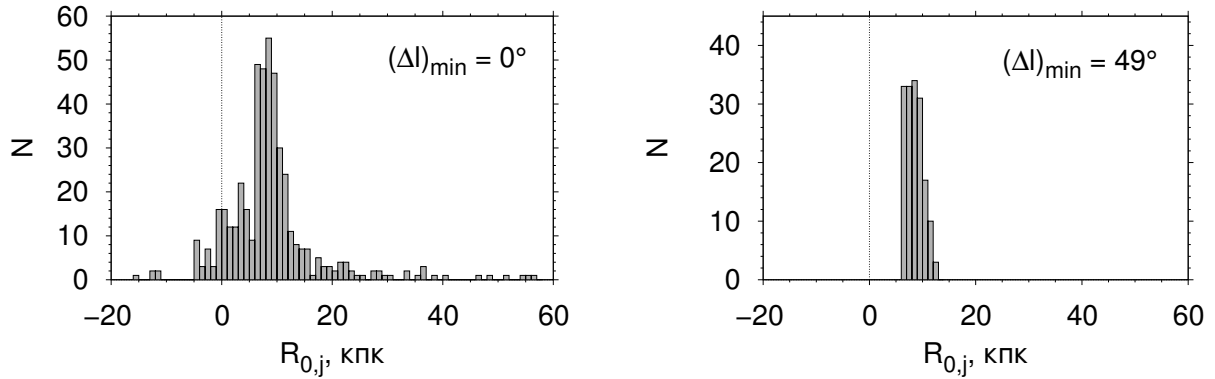


Рис. 12. Функция распределения значений  $R_{0,j}$  для рукава Персея при  $(\Delta l)_{\min} = 0^\circ$  (полный набор всех возможных троек мазеров) и при оптимальном  $(\Delta l)_{\min} = 49^\circ$ .

Найдем значение  $\tilde{\Lambda}$ , которое доставляет минимум функции

$$F(\tilde{\Lambda}) \equiv |M\tilde{O}|^2 = [\tilde{X}(\tilde{\Lambda}) - X_0]^2 + [\tilde{Y}(\tilde{\Lambda}) - Y_0]^2. \quad (33)$$

После взятия производной  $F'(\tilde{\Lambda})$  получаем уравнение для определения  $\Lambda$ :

$$(X_0 - R_0)(\sin \Lambda - k \cos \Lambda) + Y_0(k \sin \Lambda + \cos \Lambda) - k|R_0|e^{k(\Lambda - \lambda_0)} = 0. \quad (34)$$

Определив численно корни  $\Lambda$  уравнения (34) на витке  $-\pi \leq \tilde{\Lambda} < \pi$  спирали, вычисляем соответствующие значения  $F(\tilde{\Lambda})$ . Поскольку на витке существуют два экстремума  $F(\tilde{\Lambda})$ , искомым расстоянием является меньшая из двух величин  $\sqrt{F(\tilde{\Lambda})}$ .

### 3.2. Результаты для отдельных спиральных сегментов

Наиболее надежные оценки модельных параметров были получены для выборки из 24 мазеров, приписанных к рукаву Персея. Для данного сегмента тройки мазеров, через которые проходит более одной спирали, исключались из рассмотрения. Значение  $(\Delta l)_{\min}$  варьировалось от  $0^\circ$  (используется полный набор троек) до  $70^\circ$ .

Сравнение распределений  $R_{0,j}$  при различных значениях  $(\Delta l)_{\min}$  показывает, что с ростом  $(\Delta l)_{\min}$  число отрицательных значений  $R_{0,j}$  уменьшается, как и дисперсия распределения. Для троек с  $(\Delta l)_{\min} \geq 49^\circ$  значения  $R_{0,j}$  лежат в положительной области и группируются на отрезке  $[6, 13]$  кпк (рис. 12).

Результаты анализа положений мазеров рукава Персея для различных значений  $(\Delta l)_{\min}$  суммированы в табл. 2. Эти результаты показывают, что с увеличением  $(\Delta l)_{\min}$  ошибка среднего значения  $\sigma_{\langle R_0 \rangle}$  и доверительный интервал для медианы  $R_{0,j}$  сначала уменьшаются из-за усечения крыльев распределения  $R_{0,j}$  (см. рис. 12), а после достижения стабилизации дисперсии этого распределения (см. строку стандартов  $\sigma_{R_0}$  в табл. 2) растут вследствие уменьшения объема выборки (числа решений  $N_{\text{sol}}$ ). Это и создает возможность выбора оптимального долготного ограничения  $(\Delta l)_{\min}^0$  по минимуму формальной ошибки среднего  $\sigma_{\langle R_0 \rangle}$  (более устойчивой дисперсной характеристики по сравнению с длиной доверительного интервала медианы). Для рукава Персея найдено  $(\Delta l)_{\min}^0 = 49^\circ$ . Соответствующая этому ограничению модельная спираль в сравнении с положением мазеров представлена на рис. 13.

Таблица 2. Результаты применения трехточечного метода к мазерам рукава Персея

$(\Delta l)_{\min}$	0°	5°	15°	30°	40°	49°	50°	60°	70°
$N_{\text{sol}}$	462	445	335	237	213	161	159	104	34
$\langle R_0 \rangle$	8.79	9.26	9.48	8.47	7.75	8.55	8.55	8.54	9.07
$\sigma_{R_0}$	8.74	8.55	7.04	5.28	3.52	1.51	1.52	1.51	1.48
$\sigma_{\langle R_0 \rangle}$	0.41	0.41	0.38	0.34	0.24	0.119	0.121	0.15	0.25
$\text{Me } R_0$	<b>8.11</b>	<b>8.25</b>	<b>8.46</b>	<b>8.23</b>	<b>8.20</b>	<b>8.43</b>	<b>8.41</b>	<b>8.42</b>	<b>8.92</b>
$\sigma^+(\text{Me } R_0)$	+0.22	+0.21	+0.29	+0.20	+0.17	+0.19	+0.21	+0.35	+0.69
$\sigma^-(\text{Me } R_0)$	-0.22	-0.24	-0.23	-0.26	-0.30	-0.20	-0.18	-0.20	-0.55
$\text{Me } i$	<b>-9°69</b>	<b>-9°85</b>	<b>-9°83</b>	<b>-9°76</b>	<b>-9°75</b>	<b>-10°61</b>	<b>-10°43</b>	<b>-10°61</b>	<b>-12°1</b>
$\sigma^+(\text{Me } i)$	+0°35	+0°27	+0°47	+0°91	+1°05	+0°75	+0°57	+0°64	+1°3
$\sigma^-(\text{Me } i)$	-0°23	-0°19	-0°22	-0°64	-0°65	-0°64	-0°95	-1°54	-3°7
$\text{Me } \lambda_0$	<b>78°2</b>	<b>78°7</b>	<b>73°0</b>	<b>73°0</b>	<b>78°4</b>	<b>60°7</b>	<b>61°4</b>	<b>61°1</b>	<b>52°1</b>
$\sigma^+(\text{Me } \lambda_0)$	+7°6	+8°5	+6°1	+6°8	+10°5	+10°0	+9°5	+9°8	+10°6
$\sigma^-(\text{Me } \lambda_0)$	-7°3	-5°7	-8°6	-9°8	-13°3	-2°8	-3°3	-2°9	-10°4
$(\sigma_w)_\varpi$	0.23	0.23	0.23	0.24	0.23	0.25	0.25	0.25	0.24
$(\sigma_w)_{\text{obs}}$	0.44	0.48	0.44	0.43	0.45	0.46	0.46	0.45	0.44
$(\sigma_w)_0$	0.37	0.42	0.37	0.35	0.39	0.38	0.39	0.38	0.37

**Примечание.**  $\langle R_0 \rangle$ ,  $\sigma_{\langle R_0 \rangle}$  — среднее арифметическое  $N_{\text{sol}}$  значений  $R_{0,j}$  и его ошибка;  $\sigma_{R_0}$  — стандарт распределения значений  $R_{0,j}$ ;  $\sigma^+$ ,  $\sigma^-$  — статистическая неопределенность медианы для доверительного уровня  $1\sigma$  в сторону больших и меньших значений соответственно;  $(\sigma_w)_\varpi$  — вклад в разброс мазеров поперек сегмента, вносимый неопределенностью параллаксов;  $(\sigma_w)_{\text{obs}}$  и  $(\sigma_w)_0$  — наблюдаемый и природный среднеквадратический разброс поперек сегмента соответственно. Значения  $R_0$ ,  $(\sigma_w)_\varpi$ ,  $(\sigma_w)_{\text{obs}}$ ,  $(\sigma_w)_0$  даны в килопарсеках.

Аналогичным образом были определены параметры других спиральных сегментов. Все мазеры рукава Щита и почти все мазеры рукава Стрельца находятся по одну сторону от оси  $X$  (рис. 146, 156), следовательно, все тройки мазеров в первом случае и почти все во втором дают по два решения для  $R_0$  (см. подраздел 2.2). Тогда для этих сегментов исключение троек с неединственным решением неприменимо, поэтому использовалась альтернативная обработка: для каждой такой тройки выбирался тот из корней, для которого меньше сумма квадратов расстояний от соответствующей ему спирали до остальных мазеров данного сегмента. Так же обрабатывался и Внешний рукав, поскольку он представлен малым количеством объектов ( $N = 6$ ). Полученные для этих трех сегментов при  $(\Delta l)_{\min}^0 = 0^\circ$  распределения  $R_{0,j}$  и модельные спирали в сравнении с положением мазеров показаны на рис. 14–16.

Для Местного рукава были рассмотрены оба способа обработки троек с неединственным решением для  $R_0$ . Визуализация полученных результатов представлена на рис. 17, 18. В качестве итоговых для этого сегмента были приняты результаты, полученные при исключении троек с неединственным решением, поскольку в этом случае модельная спираль лучше описывает положение мазеров сегмента (ср. рис. 176 и 186).

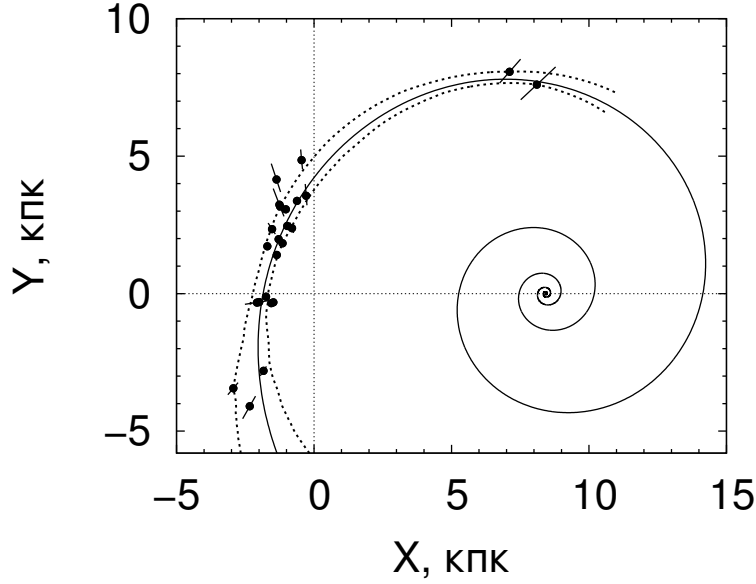


Рис. 13. Распределение мазеров рукава Персея в проекции на плоскость Галактики и модельная спираль, полученная для них трехточечным методом при  $(\Delta l)_{\min}^0 = 49^\circ$ . Бары отражают неопределенность параллаксов. Пунктирные линии обозначают границы доверительной области модельной спирали на уровне значимости  $1\sigma$ .

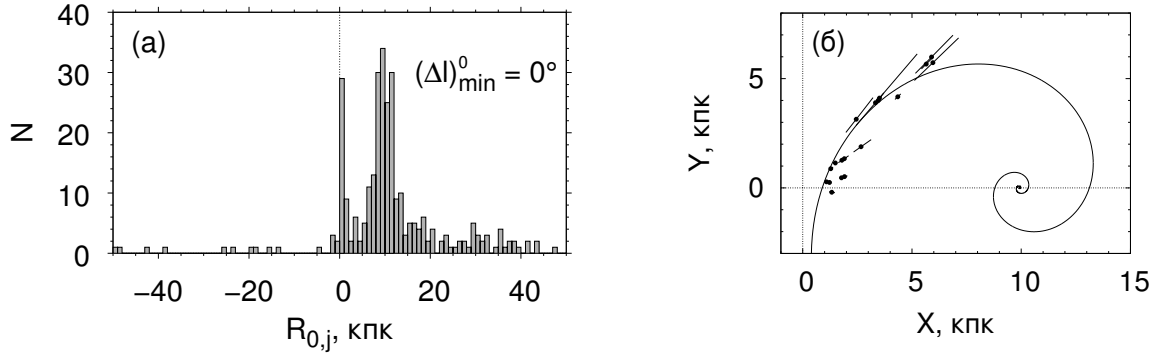


Рис. 14. Визуализация результатов применения трехточечного метода к рукаву Стрельца при  $(\Delta l)_{\min}^0 = 0^\circ$ . (а) — Распределение значений  $R_{0,j}$ . (б) — Модельная спираль в сравнении с положением отнесенных к этому рукаву мазеров в проекции на плоскость Галактики (бары отражают неопределенность параллаксов).

Сводка основных результатов для отдельных сегментов спиральных рукавов Галактики приведена в табл. 3. Отсутствие значения  $(\sigma_w)_0$  для Внешнего рукава и рукава Щита в последней колонке таблицы соответствует получению отрицательной оценки природной дисперсии поперек рукава  $(\sigma_w)_0^2$ . Это означает, что наблюдаемая дисперсия мазеров относительно этих сегментов полностью (и даже с избытком) объясняется неопределенностями тригонометрических параллаксов, приведенными в каталоге объектов Ридом и др. (2014).

Поскольку результаты для отдельных сегментов были получены по малым выборкам объектов, важно оценить смещения значений  $R_0$  и других параметров, найденных трехточечным методом, из-за конечности выборки. Это было сделано при помощи метода складного ножа



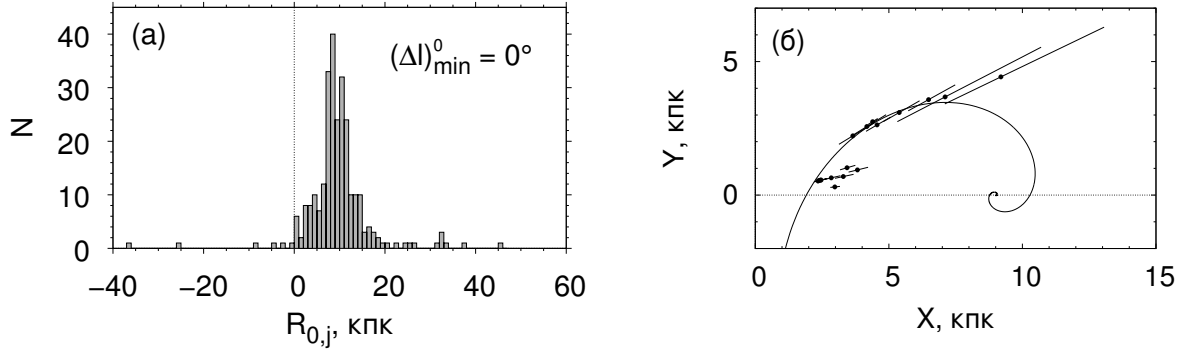


Рис. 15. То же, что на рис. 14, но для рукава Щита.  $(\Delta l)_{\min}^0 = 0^\circ$ .

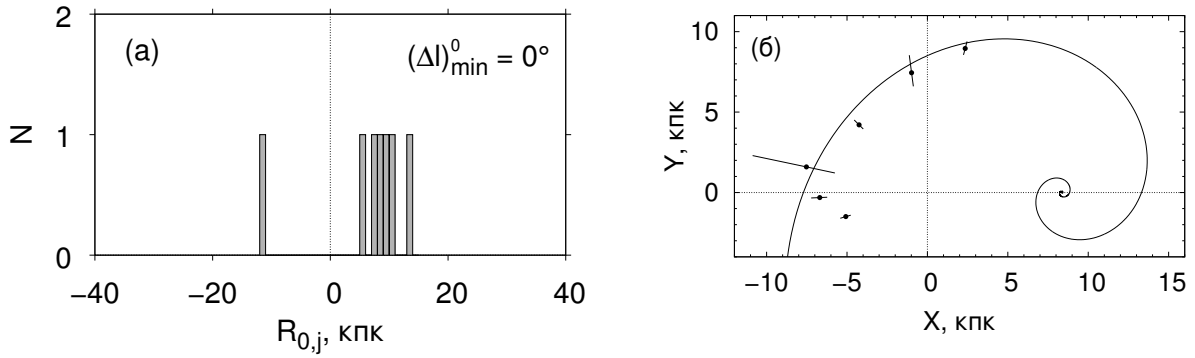


Рис. 16. То же, что на рис. 14, но для Внешнего рукава.  $(\Delta l)_{\min}^0 = 0^\circ$ .

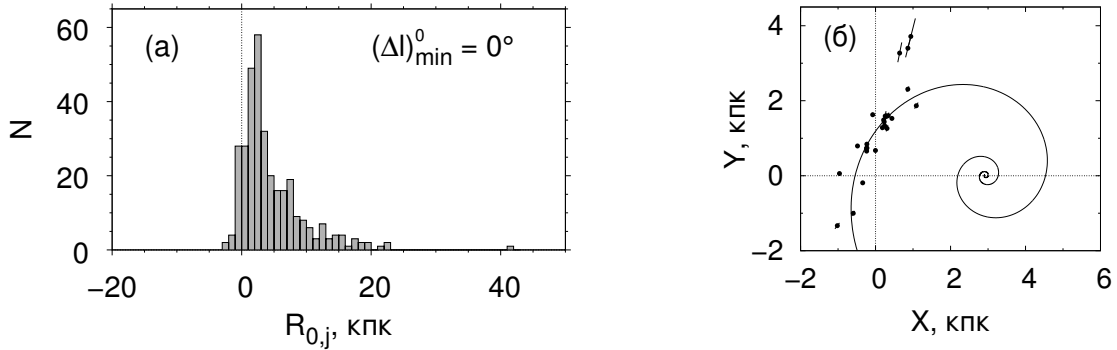


Рис. 17. То же, что на рис. 14, но для Местного рукава. Тройки с кратными корнями уравнения для  $R_0$  исключены из рассмотрения.  $(\Delta l)_{\min}^0 = 0^\circ$ .

(МСН, jackknife), который также позволяет оценить дисперсии параметров.

Метод складного ножа (jackknife technique) используется для оценки дисперсии и смещения эстиматора (статистической оценки) параметра (Кёнуи, 1949, 1956; Эфрон, Штейн, 1981). Имеется в виду смещение, обусловленное конечностью выборки. Приведем формулы метода применительно к медианной оценке  $Me R_0$  трехточечным методом как к эстиматору.

Пусть медиана  $Me R_0$  найдена по совокупности троек, сформированной на основе выборки из  $N$  объектов. Рассмотрим  $N$  подвыборок объемом  $N - 1$  каждая, таких что в подвыборке номер  $p$  отсутствует  $p$ -ый объект исходной выборки. Для каждой из подвыборок по всем ото-

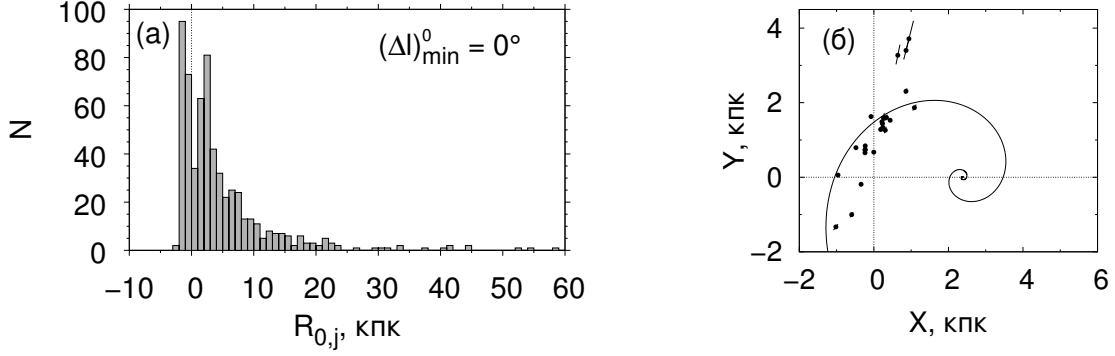


Рис. 18. То же, что на рис. 17 для Местного рукава, но при выборе из кратных корней решения с наименьшей дисперсией мазеров относительно модельной спирали.  $(\Delta l)_{\min}^0 = 0^\circ$ .

Таблица 3. Результаты применения трехточечного метода к пяти сегментам спиральных рукавов при оптимальных долготных ограничениях  $(\Delta l)_{\min}^0$

Рукав	$N_{\text{sol}}$	$(\Delta l)_{\min}^0$	$\text{Me } R_0$ , кпк	$\text{Me } i$	$\text{Me } \lambda_0$	$(\sigma_w)_0$ , кпк
Sct	267	$0^\circ$	$9.01^{+0.30}_{-0.15}$	$-28^\circ 64^{+1.40}_{-1.59}$	$-25^\circ 0^{+3.5}_{-4.5}$	0.34
Sgr	306	$0^\circ$	$9.92^{+0.36}_{-0.34}$	$-18^\circ 29^{+0.99}_{-1.13}$	$-16^\circ 4^{+2.4}_{-3.9}$	
Loc	328	$0^\circ$	$2.93^{+0.35}_{-0.19}$	$-13^\circ 85^{+0.39}_{-0.37}$	$+39^\circ 7^{+6.7}_{-4.9}$	
Per	161	$49^\circ$	$8.43^{+0.19}_{-0.20}$	$-10^\circ 61^{+0.75}_{-0.64}$	$+60^\circ 7^{+10.0}_{-2.8}$	
Out	7	$0^\circ$	$8.4^{+5.3}_{-19.6}$	$-20^\circ 6^{+16.9}_{-58^\circ}$	$+100^\circ +521^\circ_{-56^\circ}$	

бранным тройкам ее объектов определим медиану  $(\text{Me } R_0)_p$ ,  $p = 1, 2, \dots, N$ . Далее вычислим среднее арифметическое значений  $(\text{Me } R_0)_p$

$$\langle \text{Me } R_0 \rangle_J = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N (\text{Me } R_0)_p. \quad (35)$$

Тогда дисперсия трехточечной оценки  $\text{Me } R_0$  как эstimатора определяется выражением

$$\sigma_{R_0,J}^2 = \frac{N-1}{N} \sum_{p=1}^N [(\text{Me } R_0)_p - \langle \text{Me } R_0 \rangle_J]^2, \quad (36)$$

а скорректированное значение этой оценки

$$R_{0,\text{corr}} = N \text{Me } R_0 - (N-1) \langle \text{Me } R_0 \rangle_J. \quad (37)$$

Смещение оценки дается разностью  $\text{Me } R_0 - R_{0,\text{corr}}$ , поправка к оценке есть смещение с обратным знаком:

$$\Delta R_0 = R_{0,\text{corr}} - \text{Me } R_0. \quad (38)$$

Скорректированные результаты представлены в табл. 4. Сравнение с табл. 3 показывает, что джекнайф-неопределенности параметров в подавляющем числе случаев оказались заметно больше формальных неопределенностей медианных оценок. Очевидно, это объясняется

Таблица 4. Результаты коррекции методом складного ножа (jackknife) оценок параметров спиральных сегментов

Рукав	$R_{0,\text{corr}} \pm \sigma_{R_{0,J}}$ , кпк	$\Delta R_0$ , кпк	$i_{\text{corr}} \pm \sigma_{i,J}$	$\Delta i$	$\lambda_{0,\text{corr}} \pm \sigma_{\lambda_{0,J}}$	$\Delta \lambda_0$
Scт	$8.62 \pm 0.81$	-0.39	$-27^{\circ}2 \pm 5^{\circ}4$	+1°4	$-21^{\circ}1 \pm 12^{\circ}0$	+3°9
Sgr	$10.62 \pm 0.69$	+0.70	$-15^{\circ}5 \pm 3^{\circ}6$	+2°8	$-12^{\circ}8 \pm 8^{\circ}7$	+3°6
Loc	$2.17 \pm 1.00$	-0.76	$-12^{\circ}3 \pm 4^{\circ}6$	+1°6	$+39^{\circ}1 \pm 18^{\circ}8$	-0°6
Per	$8.36 \pm 0.53$	-0.07	$-11^{\circ}5 \pm 2^{\circ}2$	-0°9	$+36^{\circ}9 \pm 15^{\circ}0$	-23°8
Out	$16.0 \pm 7.5$	+7.6	$+3^{\circ}5 \pm 2^{\circ}5$	+24°	$+84^{\circ} \pm 40^{\circ}$	-16°

**Примечание.**  $R_{0,\text{corr}}$ ,  $i_{\text{corr}}$ ,  $\lambda_{0,\text{corr}}$  — скорректированные оценки параметров;  $\sigma_{R_{0,J}}$ ,  $\sigma_{i,J}$ ,  $\sigma_{\lambda_{0,J}}$  — джекнайф-оценки неопределенности параметров;  $\Delta R_0$ ,  $\Delta i$ ,  $\Delta \lambda_0$  — джекнайф-поправки к оценкам параметров (разности между скорректированными оценками и медианными значениями в табл. 3)

тем, что каждый объект выборки, как правило, входит в различные тройки, а это делает результаты по отдельным тройкам не вполне независимыми. Последнее естественным образом учитывается при использовании МСН. Численные эксперименты (см. подраздел 3.4) подтверждают, что джекнайф-оценки дисперсий более адекватны. Для полноты картины приводятся обе оценки ошибок. Из них для практических целей будем выбирать ту, которая получилась больше.

### 3.3. Средняя оценка расстояния до центра Галактики по результатам применения трехточечного метода к мазерам

Таблица 4 показывает, что результаты для разных сегментов резко различаются по надежности решения. Наихудшие показатели (наибольшие смещения и дисперсии параметров) имеет Внешний рукав, что является следствием очень малого объема выборки мазеров ( $N = 6$ ). Фактически этот сегмент не создает существенных ограничений на величину  $R_0$ , поэтому результат для него не использовался при выведении средней оценки  $R_0$ . Аналогичное решение было принято в отношении рукава Стрельца и Местного рукава. Для рукава Стрельца функция распределения значений  $R_{0,j}$  определенно является бимодальной (рис. 14а), что свидетельствует о неоднозначности решения, тогда даже медианная оценка ненадежна (это видно на рис. 14б). Модельные спирали для Местного рукава в обоих вариантах трехточечного метода плохо согласуются с положением мазеров с наибольшей галактоцентрической долготой (рис. 17б, 18б), по идее наиболее ценных для локализации положения полюса спирального сегмента, что и привело к несостоятельному решению.

Значительно надежнее результаты для рукавов Персея и Щита: оценки  $R_0$  по ним обладают наименьшими смещениями и приемлемыми дисперсиями. Это, очевидно, объясняется преимущественно тем, что сегмент рукава Персея имеет наибольшую протяженность (и по  $l$ , и по  $\Lambda$ ) и содержит относительно много мазеров, а рукав Щита (с умеренным числом мазеров) — самый внутренний, значит лучше обуславливающий положение полюса спирали при прочих равных (табл. 1, рис. 19).

Таблица 5. Результаты определения параметров  $i$ ,  $\lambda_0$  и дисперсионных характеристик сегментов спиральных рукавов при фиксированной величине  $R_0 = 8.44$  кпк

Рукав	Me $i$	$\sigma_{i,J}$	Me $\lambda_0$	$\sigma_{\lambda_0,J}$	$(\sigma_w)_{\text{obs}}$ , кпк	$(\sigma_w)_0$ , кпк
Sct	$-21^\circ 4^{+0.6}_{-1.0}$	1:8	$-43^\circ 9^{+2.8}_{-5.7}$	10:5	$0.51 \pm 0.26$	
Sgr	$-9^\circ 9^{+1.8}_{-0.8}$	3:6	$-50^\circ 8^{+6.5}_{-16.7}$	26:°	$0.37 \pm 0.08$	$0.20 \pm 0.04$
Loc	$-16^\circ 5^{+1.4}_{-2.2}$	5:1	$+9^\circ 0^{+0.3}_{-0.2}$	0:6	$0.30 \pm 0.06$	$0.29 \pm 0.04$
Per	$-10^\circ 6^{+0.6}_{-0.4}$	1:1	$+63^\circ 3^{+4.3}_{-2.1}$	9:4	$0.42 \pm 0.08$	$0.34 \pm 0.05$
Out	$-18^\circ 6^{+4.3}_{-3.6}$	0:8	$+98^\circ 0^{+26}_{-11}$	2:0	$1.19 \pm 0.49$	

**Примечание.**  $\sigma_{i,J}$ ,  $\sigma_{\lambda_0,J}$  — джекнайф-оценки неопределенности медианных значений

По указанным причинам средняя оценка  $\langle R_0 \rangle$  данным методом определялась на основе скорректированных значений  $R_0$  для рукавов Персея и Щита, приведенных в табл. 4, как средневзвешенная величина с весами, обратно пропорциональными определенным МСН дисперсиям  $\sigma_{R_0,J}^2$ :

$$\langle R_0 \rangle = \frac{8.36/0.53^2 + 8.62/0.81^2}{1/0.53^2 + 1/0.81^2} = 8.44 \text{ кпк}, \quad (39)$$

$$\sigma_{\langle R_0 \rangle} = (1/0.53^2 + 1/0.81^2)^{-1/2} = 0.45 \text{ кпк}.$$

При фиксированном значении  $R_0$  трехточечный метод становится двухточечным методом определения угла закрутки  $i$  и позиционного параметра  $\lambda_0$  сегмента. Таким способом при  $R_0 = 8.44$  кпк для всех пяти сегментов были оценены величины  $i$  и  $\lambda_0$ : для каждого сегмента эти параметры определялись как медианы значений, полученных по всевозможным парам мазеров сегмента с минимальным расстоянием между объектами пары  $(\Delta l)_{\text{min}}^0$ , определенным при применении трехточечного метода к этому сегменту. Результаты представлены в табл. 5.

### 3.4. Исследование трехточечного алгоритма методом Монте-Карло и итоговое решение по мазерам

В качестве моделей спиральных рукавов рассматривались логарифмические спирали с параметрами  $i$ ,  $\lambda_0$  и  $(\sigma_w)_{\text{obs}}$ , представляющими рукава Персея и Щита в предположении  $R_0 = 8.44$  кпк (табл. 5).

Псевдослучайные каталоги объектов генерировались следующим образом. Положение каждого объекта  $O_j$  смещалось относительно модельной точки  $M_j$ , являющейся ортогональной проекцией номинального положения (согласно исходному каталогу)  $j$ -ого объекта на модельную спираль; смещение выполнялось вдоль прямой, перпендикулярной к модельной спирали в точке  $M_j$ . При этом расстояние  $\rho_j \equiv |O_j M_j|$  варьировалось по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и стандартом  $(\sigma_w)_{\text{obs}}$ . Для каждого из двух сегментов было создано  $n_{\text{MC}} = 1000$  каталогов.

Для каждого псевдослучайного каталога параметры спирального сегмента определялись

трехточечным методом, причем значение минимального расстояния по галактической долготе  $(\Delta l)_{\min}$  между соседними точками («объектами») в наборе из трех точек оптимизировалось так же, как и для реальных данных. Т.е. за наилучшую принималась та величина  $(\Delta l)_{\min}$ , при которой статистическая ошибка среднего значения  $R_0$ , вычисленного по всем подходящим тройкам, являлась минимальной. Решением для каждого каталога считались медианные значения параметров с вычисленной для них оценкой дисперсии  $(\sigma_w)_{\text{obs}}$  при оптимальной величине  $(\Delta l)_{\min}$ . Обработка  $n_{\text{MC}}$  каталогов показала, что для рукава Персея смещение  $\text{Me } R_0 - R_0 = -0.66 \pm 0.04$  кпк, а для рукава Щита  $\text{Me } R_0 - R_0 = -0.08 \pm 0.03$  кпк.

Полученные в подразделе 3.3 оценки  $R_{0,\text{corr}}$  для рукавов Персея и Щита (табл. 4) были исправлены за систематическую ошибку, найденную методом Монте-Карло, что привело к точечным оценкам  $R_0 = 9.02$  кпк для рукава Персея и  $R_0 = 8.70$  кпк для рукава Щита. За итоговую оценку применения трехточечного метода к мазерам было принято средневзвешенное этих двух величин:

$$\langle R_0 \rangle = \frac{w_1 \cdot 9.02 + w_2 \cdot 8.70}{w_1 + w_2} = 8.8 \text{ кпк.} \quad (40)$$

Здесь веса  $w_1 = 1/(1.50^2 + 0.08^2)$ ,  $w_2 = 1/(1.32^2 + 0.06^2)$  учитывают длины доверительных интервалов для двух исходных оценок (границы интервалов были определены как порядковые статистики массива значений, полученных методом Монте-Карло для  $N_{\text{MC}} = 1000$  каталогов) и для величин их смещений. Неопределенность итоговой оценки найдена как средняя ошибка средневзвешенного до уравнивания (Агемян, 1972):

$$\sigma_{\langle R_0 \rangle} = (2\sqrt{w_1 + w_2})^{-1} = 0.5 \text{ кпк.} \quad (41)$$

Параметры сегментов спиральных рукавов были оценены двухточечным методом при фиксированном значении  $R_0 = 8.8$  кпк (табл. 6). В целях получения модельной спирали, аппроксимирующей номинальное распределение мазеров, джекнайф-коррекции здесь не вводились. Различие значений  $i$ ,  $\lambda_0$  и  $(\sigma_w)_{\text{obs}}$  при  $R_0 = 8.8$  кпк и  $R_0 = 8.44$  кпк (табл. 5) обусловлено корреляцией этих параметров с величиной  $R_0$  (см. табл. 7). Приведенные в табл. 7 для рукавов Персея и Щита коэффициенты линейной корреляции  $\kappa(p_1, p_2)$  и вероятности  $P_\kappa \equiv P(|\kappa| > |\kappa(p_1, p_2)|)$  получить коэффициент корреляции по модулю больше измеренного  $|\kappa(p_1, p_2)|$  при отсутствии корреляции между случайными величинами  $p_1$  и  $p_2$  (см. Пресс и др., 1997) были определены в результате моделирования методом Монте-Карло для указанных выше модельных спиралей при  $R_0 = 8.44$  кпк. Все вероятности  $P_\kappa$  получились меньше 0.05, т.е. все коэффициенты  $\kappa$  в табл. 7 значимы. В большинстве случаев корреляция между параметрами умеренная, за исключением некоторых пар параметров, в которые входит  $\lambda_0$ .

На рис. 19 для всех пяти сегментов представлены модельные спирали с параметрами, указанными в табл. 6, и распределение приписанных к этим сегментам мазеров в проекции на плоскость Галактики. Контуры галактического бара на рис. 19 даны для эллипсоидальной его модели с полуосями 3.14 : 1.178 : 0.81 кпк и позиционным углом  $\varphi = 20^\circ$  (Касетти-Динеску и др., 2013; Жилкова и др., 2012).

### 3.5. Обсуждение результатов применения трехточечного метода

Трехточечный метод по принципу обобщения *частных* решений для  $R_0$ , в данном случае полученных по тройкам объектов, близок к методу Фиста и Шаттлорта (1965) в рамках дру-

Таблица 6. Результаты определения параметров  $i$ ,  $\lambda_0$  и дисперсионных характеристик сегментов спиральных рукавов при итоговой величине  $R_0 = 8.8$  кпк

Рукав	Me $i$	$\sigma_{i,J}$	Me $\lambda_0$	$\sigma_{\lambda_0,J}$	$(\sigma_w)_{\text{obs}}$ , КПК	$(\sigma_w)_0$ , КПК
Sct	$-23.7^{+1.1}_{-1.2}$	1:1	$-36.9^{+3.1}_{-6.5}$	5:7	$0.48 \pm 0.23$	
Sgr	$-9.9^{+0.5}_{-2.0}$	3:1	$-44.4^{+3.2}_{-9.7}$	22°	$0.39 \pm 0.09$	$0.29 \pm 0.08$
Loc	$-16.8^{+1.2}_{-1.3}$	5:4	$+8.5^{+0.2}_{-0.8}$	0:5	$0.30 \pm 0.06$	$0.30 \pm 0.05$
Per	$-11.8^{+0.7}_{-0.4}$	1:5	$+57.2^{+5.3}_{-1.2}$	3:8	$0.42 \pm 0.10$	$0.35 \pm 0.05$
Out	$-19.2^{+2.5}_{-2.9}$	0:9	$+91.6^{+18.1}_{-5.3}$	2:3	$1.19 \pm 0.48$	

**Примечание.**  $\sigma_{i,J}$ ,  $\sigma_{\lambda_0,J}$  — джекнайф-оценки неопределенности медианных значений

Таблица 7. Коэффициенты линейной корреляции  $\kappa(p_1, p_2)$  параметров спиральных сегментов, полученные методом Монте-Карло для рукавов Персея и Щита

$(p_1, p_2)$	$(R_0, i)$	$(R_0, \lambda_0)$	$(R_0, (\sigma_w)_{\text{obs}})$	$(i, \lambda_0)$	$(i, (\sigma_w)_{\text{obs}})$	$(\lambda_0, (\sigma_w)_{\text{obs}})$
Рукав Персея						
$\kappa(p_1, p_2)$	-0.421	-0.738	-0.545	0.735	-0.063	0.514
$P_\kappa$	$6.41 \cdot 10^{-4}$	$1.17 \cdot 10^{-3}$	$7.97 \cdot 10^{-4}$	$1.16 \cdot 10^{-3}$	0.0466	$7.54 \cdot 10^{-4}$
Рукав Щита						
$\kappa(p_1, p_2)$	-0.469	+0.437	-0.300	-0.843	-0.344	0.311
$P_\kappa$	$6.97 \cdot 10^{-4}$	$6.59 \cdot 10^{-4}$	$5.15 \cdot 10^{-4}$	$1.57 \cdot 10^{-3}$	$5.59 \cdot 10^{-4}$	$5.26 \cdot 10^{-4}$

**Примечание.**  $P_\kappa \equiv P(|\kappa| > |\kappa(p_1, p_2)|)$  — вероятность в случае нуль-гипотезы получить коэффициент корреляции  $\kappa$  по модулю больше измеренного  $|\kappa(p_1, p_2)|$  для пары параметров  $(p_1, p_2)$

гого — кинематического — подхода к определению  $R_0$ . Метод Фиста–Шаттлуорта, предполагающий построение и анализ функции распределения индивидуальных оценок  $R_0$  по *отдельным* объектам, ранее был довольно популярен (Балона и Фист, 1974; Крэмpton и др., 1976; Локтин, 1979). Такие упрощенные методы менее эффективны в теоретико-вероятностном смысле, чем совместное по всем объектам выборки решение задачи оптимизации параметров, но позволяют просто и наглядно показать работоспособность подхода, судить о наличии решения и его качестве. Поэтому применение подобных методов вполне оправдано на определенном этапе использования того или иного подхода, особенно если он новый. Так, в разделе 4 при помощи трехточечного метода проводится исследование некоторых свойств оценок расстояния до полюса спиральных рукавов. Однако в дальнейшем для предлагаемого подхода следует разработать метод, основанный на поиске экстремума целевой функции.

Заметим, что таким методом не может быть метод наименьших квадратов (МНК), так как он недостаточно корректен для этой задачи. Так, в случае применения МНК для оптимизации на плоскости  $(\Lambda, \ln R/R_0)$  ни одна из координат последней не является непосредственно измеряемой величиной или аргументом, поскольку измеряемой (с ошибкой) величиной является характеристика гелиоцентрического расстояния, в случае мазеров это — тригонометрический

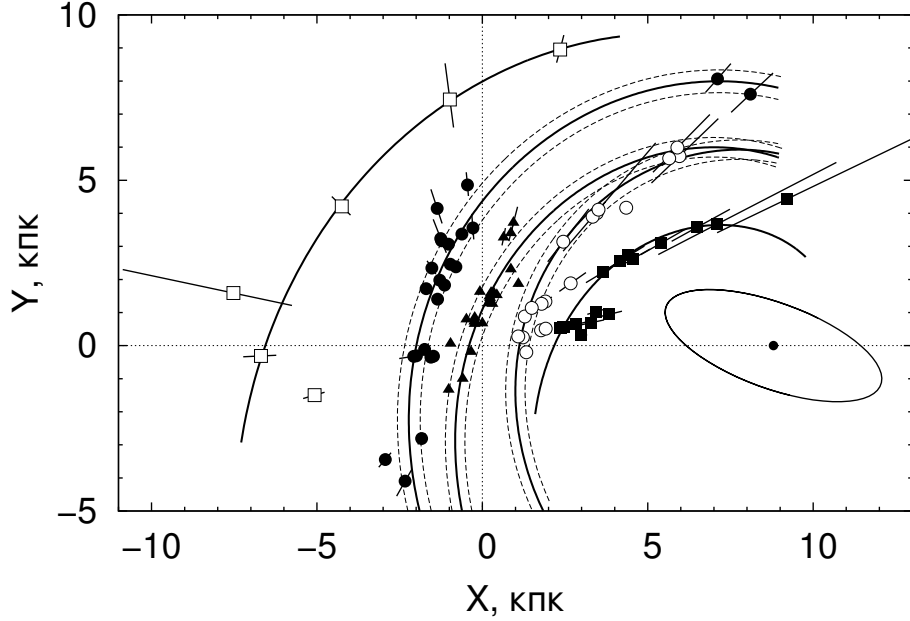


Рис. 19. Модельные спирали (сплошные линии) и положение мазеров в проекции на плоскость Галактики для Внешнего рукава (светлые квадраты), рукава Персея (темные кружки), Местного рукава (темные треугольники), рукава Стрельца (светлые кружки), рукава Щита (темные квадраты) при  $R_0 = 8.8$  кпк. Бары ошибок отражают неопределенность параллаксов. Природный разброс поперек рукавов  $[\pm(\sigma_w)_0]$  относительно моделей] показан пунктирными линиями для сегментов с  $(\sigma_w)_0^2 > 0$ . Эллипс изображает галактический бар, кружок в его центре — центр Галактики.

параллакс  $\varpi$  (величины  $l$  и  $b$  в этой задаче можно считать безошибочными). Значение  $\varpi$  определяет сразу и  $\ln R/R_0$ , и  $\Lambda$ . Это делает последние две величины коррелированными, причем по-разному, в зависимости от положения объекта. К сходной (также сложной) корреляции между  $\ln R/R_0$  и  $\Lambda$  ведет и дисперсия объектов поперек рукава. Учесть эти корреляции трудно, если вообще возможно. Нормально распределенными разумно принять параллаксы  $\varpi$  (они измеряются) и отклонение объекта от спиральной модели в конфигурационном пространстве (в плоскости  $XY$ ). Нет оснований считать величины  $\ln R/R_0$  и  $\Lambda$  нормально распределенными, что предполагается в МНК, как нет оснований считать какую-то из этих переменных безошибочной. В принципе, можно использовать МНК для оптимизации отклонений от спиральной модели в плоскости  $XY$ . Но это, с одной стороны, приводит к резкому усложнению вычислений, с другой — этого все равно будет недостаточно, поскольку МНК не учитывает ошибок в расстояниях (в величинах  $\varpi$ ). Последние нельзя игнорировать: они бывают значительными и по-разному влияют на результат в зависимости от положения объекта (рис. 19). Корректно учесть эти два вида дисперсии можно только в рамках метода наибольшего правдоподобия, хотя этот вариант более сложный и трудоемкий. Работы в этом направлении нами ведутся.

Найденное в настоящей работе значение  $R_0 = 8.8 \pm 0.5$  кпк превышает недавние средние («наилучшие») оценки этого параметра  $\langle R_0 \rangle_{\text{best}} = (7.9 \div 8.3) \pm (0.1 \div 0.4)$  кпк (Генцель и др., 2010; Фостер, Купер, 2010; Никифоров, Смирнова, 2013; Блэнд-Хоторн, Герхард, 2016; де Грийс, Боно, 2016), однако не выходит за пределы промежутка, который покрывают точечные оценки  $R_0$  в современных публикациях. Так, До и др. (2013) в результате трехмерного

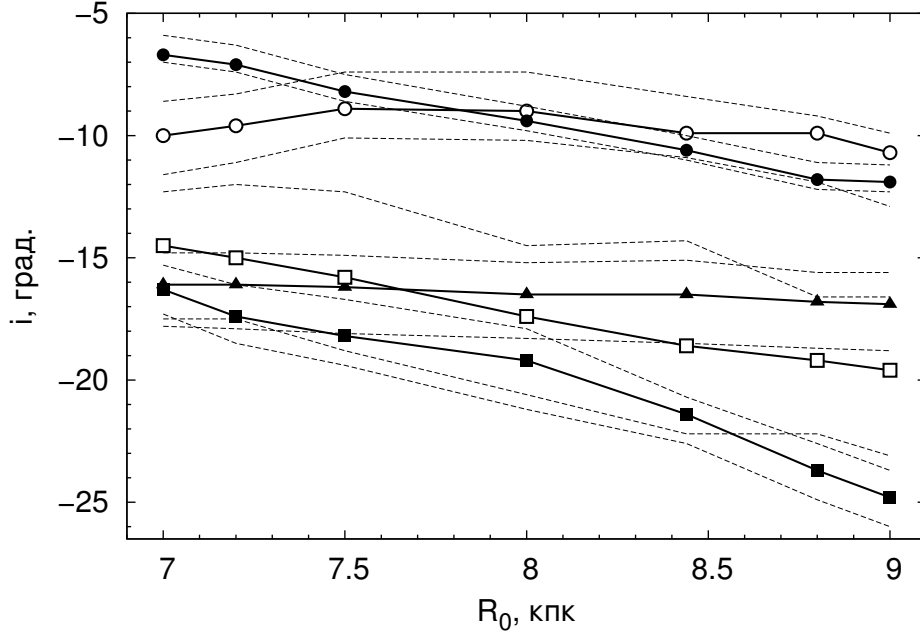


Рис. 20. Зависимость оценки угла закрутки сегментов от предполагаемого значения  $R_0$ . Точки для Внешнего рукава изображены светлыми квадратами, рукава Персея — темными кружками, Местного рукава — темными треугольниками, рукава Стрельца — светлыми кружками, рукава Щита — темными квадратами. Пунктирные линии обозначают границы доверительных интервалов для уровня  $1\sigma$ .

джинсовского моделирования (в рамках метода статистических параллаксов) кинематики звезд центрального скопления Галактики получили  $R_0 = 8.92^{+0.58}_{-0.55}$  кпк, Кэчпоул и др. (2016) вывели похожую оценку  $R_0 = 8.9 \pm \sim 0.4$  кпк по миридам в балдже. Наш результат по геометрии спиральных сегментов не противоречит с учетом ошибок оценке  $R_0 = 8.34 \pm 0.16$  кпк по кинематике мазеров на основе той же базы данных (Рид и др., 2014).

Оценки  $i$  в табл. 6 подтверждают различие между разными спиральными рукавами по углу закрутки, найденное Ридом и др. (2014). По нашим результатам это различие значимо при сравнении рукавов Щита и Внешнего, с одной стороны, и рукавов Стрельца и Персея — с другой (см. рис. 20). Экстраполяция модельной спирали Местного рукава показывает, что он может быть отстающей ветвью рукава Стрельца (рис. 19), по крайней мере, по данным о мазерах. Этот вариант не рассматривался в статье Сюя и др. (2013), посвященной природе Местного рукава.

В случае сегментов с наиболее надежными решениями (рукава Персея и Стрельца) значение  $R_0$  заметно влияет на оценку  $i$  (ср. табл. 5 и 6, а также рис. 20) в соответствии с коэффициентами корреляции (табл. 7). Это следует иметь в виду при обсуждении результатов различных измерений углов закрутки спиральных рукавов Галактики.

Значения природного разброса  $(\sigma_w)_0$  мазеров поперек рукавов Стрельца, Местного и Персея получились близкими к найденным Ридом и др. (2014). Однако для рукавов Щита и Внешнего — самых далеких от Солнца из выявленных по этим данным — дисперсия  $(\sigma_w)_0^2$  оказалась отрицательной во всех вариантах вычислений. Это может означать завышенность величин неопределенностей параллаксов, указанных Ридом и др. (2014) для мазеров этих двух рукавов. Альтернативной причиной могут быть эффекты селекции при отборе мазеров



в выборки этих рукавов. Так, выборка Щита состоит из двух неоднородных по  $(\sigma_w)_{\text{obs}}$  (и по ошибкам параллаксов) групп, одна из которых (на малых  $l$ ) расположена под большим углом к спиральному сегменту и имеет значительную дисперсию относительно него, а другая находится в направлении, почти касательном к сегменту ( $l \sim 30^\circ$ ), в узком промежутке  $l$ , что приводит к разбросу поперек сегмента, много меньшему, чем у первой группы.

Следует заметить, что предположение (номер 5 в списке во Введении) о совпадении полюса спиральных рукавов (в более общем случае — геометрического центра спирального узора) и центра Галактики сейчас является стандартным при параметрическом моделировании спиральной структуры Галактики (см. обзор Ефремова, 2011, и статьи по спиральной структуре, упомянутые во Введении). В настоящее время оно представляется разумным, так как согласуется с наблюдениями внешних спиральных галактик (см., например, Савченко, Решетников, 2013), численными экспериментами (например, Корчагин и др., 2016) и современными представлениями по всей совокупности данных, что внутренняя часть Галактики является динамически «устоявшейся» системой, чьи по-разному определяемые «центры» (наибольшая звездная плотность или иная центральная особенность пространственного распределения, центральный объект, барицентр и другие) практически совпадают (Блэнд-Хоторн, Герхард, 2016). Точности современных данных пока не хватает, чтобы напрямую установить, насколько совпадают эти «центры» друг с другом и с введенным нами геометрическим центром спиральной структуры, но такие задачи надо иметь в виду в будущем. Заметим, что в настоящей работе не используется предположение о том, что спиральная ветвь продолжается до самого центра Галактики, последний рассматривается лишь как полюс аппроксимирующей спирали наблюдаемого сегмента. Существование реального рукава только вне области бара Галактики или даже на ограниченном промежутке радиусов  $R$  не является помехой в использовании настоящего подхода.

## 4. Моделирование методом Монте-Карло измерения расстояния до центра Галактики по геометрии спирального сегмента

Далее используем разработанный ранее трехточечный метод для численного исследования статистических свойств оценки  $R_0$  по геометрии сегмента спирального рукава в зависимости от параметров задачи. Метод состоит в получении решения для трех параметров сегмента, включая  $R_0$ , по положениям трех его репрезентативных точек. Будучи относительно нетрудоемким, данный упрощенный метод позволяет за разумное время выполнить большое количество численных экспериментов. Последнее существенно для достижения основной цели этого этапа работы — оценки условий применимости и принципиальных возможностей нового способа нахождения  $R_0$  как для современных данных, так и на перспективу.

### 4.1. Параметры модельного сегмента

В соответствии с введенной ранее параметризацией будем описывать сегмент спирального рукава следующим набором параметров: расстояние от начала координат, т.е. от Солнца, до полюса модельной логарифмической спирали ( $R_0$ ); угол ее закрутки ( $i$ ); позиционный угол спирали на солнечном круге  $R = R_0$  ( $\lambda_0$ ), где  $R$  — расстояние от точки в плоскости Галактики до полюса спирали; границы сегмента спирали по галактоцентрической долготе

( $\lambda_1^s$  и  $\lambda_2^s$ ), которые определяют угловую протяженность сегмента ( $\Delta\lambda = \lambda_2^s - \lambda_1^s$ ); количество представляющих сегмент объектов ( $N$ ); природный среднеквадратический разброс объектов поперек сегмента ( $\sigma_w$ ); абсолютная ( $\sigma_\varpi$ ) или относительная ( $\sigma_\varpi/\varpi$ ) среднеквадратическая ошибка измерения параллакса  $\varpi$ . Здесь долготы  $\lambda$  отсчитываются в плоскости Галактики от направления на Солнце по часовой стрелке, если смотреть с северного полюса Галактики, т.е. в направлении вращения Галактики.

Введение ошибок в параллаксы как учет неопределенности гелиоцентрических расстояний  $r$  отвечает здесь использованию данных о мазерах с тригонометрическими параллаксами. Вариант с заданием  $\sigma_\varpi$  соответствует предположению, что среднюю неопределенность параллакса в пределах сегмента можно считать примерно постоянной. Однако проведенный анализ данных о мазерах каталога Рида и др. (2014) (см. раздел 4.2) показал, что абсолютная неопределенность  $\sigma_\varpi$  современных измерений параллаксов мазеров систематически зависит от расстояния до них (уменьшается с ростом  $r$ ), т.е. в общем случае не является в среднем постоянной для сегмента. С другой стороны, было обнаружено, что относительная неопределенность параллакса слабее меняется в пределах выявленных по мазерам спиральных сегментов, поэтому вариант с заданием  $\sigma_\varpi/\varpi$  лучше описывает современные данные для этих объектов. Так как в будущем указанная тенденция для ошибки параллакса может не сохраниться, рассмотрены оба этих варианта параметризации неопределенности расстояний.

Непосредственная цель численного моделирования состоит в нахождении среднего смещения и дисперсии оценки  $R_0$  по геометрии спирального сегмента в зависимости от существенных параметров задачи ( $\Delta\lambda$ ,  $\sigma_w$ ,  $\sigma_\varpi$ ,  $\sigma_\varpi/\varpi$ ,  $N$ ,  $i$ ).

## 4.2. Неопределенность тригонометрических параллаксов по данным о мазерах

Для выбора вариантов представления ошибок измерений параллаксов в численных экспериментах мы проанализировали данные двух каталогов, содержащих оценки параллаксов  $\varpi$  и их неопределенностей  $\sigma_\varpi$  для объектов, включающих мазеры: более однородный каталог Рида и др. (2014), в который вошли 103 области образования звезд высокой массы (HMSFRs), и каталог Расторгуева и др. (2017, далее каталог Rc17), который включает каталог Рида и др. (2014) с заменой старых данных на новые для 2 объектов (далее каталог Rd14), а также данные о 38 дополнительных мазерных источниках, из которых (как показало изучение литературы) только 9 относятся к классу HMSFRs, а остальные — к 14 другим типам (всего 141 объект). Каталог Rd14 мы используем потому, что Рид и др. (2014) указали принадлежность мазеров к тому или иному спиральному рукаву, а также чтобы сравнить характеристики объектов Rd14 и источников, добавленных в Rc17.

В табл. 8 приведены медианные значения абсолютной ( $\text{Me } \sigma_\varpi$ ) и относительной ( $\text{Me}(\sigma_\varpi/\varpi)$ ) неопределенностей параллаксов, найденные нами по отдельности для сегментов рукавов, которые были выделены Ридом и др. (2014), для всей выборки Rd14 в целом, а также для мазеров HMSFRs и не-HMSFRs каталога Rc17. Поскольку понадобится выбирать и значения  $\sigma_w$ , в той же таблице указаны полученные ранее оценки природного разброса мазеров поперек сегментов для тех рукавов, для которых этот параметр удалось разрешить.

Модель  $\sigma_\varpi = \text{const}$  для сегмента соответствует опыту измерения параллаксов звезд. Так, медиана стандартных ошибок параллаксов в каталоге Hipparcos практически не зависит от блеска звезды и начинает расти лишь с приближением к предельной звездной величине ка-

Таблица 8. Дисперсионные характеристики пространственного положения мазеров по данным каталогов Рида и др. (2014) и Расторгуева и др. (2017)

Рукав/выборка, каталог	$N$	$\text{Me } \sigma_{\varpi}$ , мсд	$\text{Me}(\sigma_{\varpi}/\varpi)$	$\sigma_w$ , кпк
Щита (Sct), Рд14	17	0.028	0.100	
Стрельца (Sgr), Рд14	18	0.033	0.085	$0.29 \pm 0.08$
Местный (Loc), Рд14	25	0.035	0.054	$0.30 \pm 0.05$
Персея (Per), Рд14	24	0.018	0.061	$0.35 \pm 0.05$
Внешний (Out), Рд14	6	0.012	0.070	
Все объекты (All), Рд14	103	0.025	0.069	—
Мазеры HMSFRs, Pc17	112	0.025	0.073	—
Мазеры не-HMSFRs, Pc17	29	0.037	0.063	—

**Примечание.**  $N$  — число объектов;  $\text{Me } \sigma_{\varpi}$  и  $\text{Me}(\sigma_{\varpi}/\varpi)$  — медианные значения абсолютной и относительной ошибок параллакса;  $\sigma_w$  — среднеквадратический природный разброс объектов поперек сегмента, полученный ранее для итоговой оценки  $R_0 = 8.8$  кпк.

талога (рис. 1 в статье Миньяра, 2000), что означает примерное постоянство средней неопределенности параллакса при удалении от Солнца и ее увеличение только на расстояниях, близких к предельным для каталога. Однако для мазеров поведение средней величины  $\sigma_{\varpi}$  с расстоянием оказалось много лучше ожидаемого по аналогии со звездами. Величина  $\text{Me } \sigma_{\varpi}$  в табл. 8 уменьшается по мере удаления сегмента от Солнца, принимая наибольшее значение для Местного рукава и наименьшие — для рукава Щита (во внутренней части Галактики) и для Внешнего рукава (за пределами солнечного круга). Непосредственное сопоставление каталожных величин  $\sigma_{\varpi}$  и  $r = 1/\varpi$  (рис. 21а и 22а) показывает, что неопределенность параллаксов в среднем падает с расстоянием (приблизительно по гиперболическому закону). Причем на границах интервала  $r$ , представленного данными, средние уровни  $\sigma_{\varpi}$  различаются кратно по обоим каталогам.

Заметим, что добавленные в Pc17 мазеры HMSFRs практически не меняют медианные неопределенности параллаксов для объектов этого класса (табл. 8) и расположены на плоскости  $(r, \sigma_{\varpi})$  в хорошем согласии с мазерами Рд14 (рис. 22а). Значение  $\text{Me } \sigma_{\varpi} = 0.037^{+0.033}_{-0.007}$  для мазеров не-HMSFRs в 1.5 раза выше, чем  $\text{Me } \sigma_{\varpi} = 0.025^{+0.004}_{-0.003}$  для мазеров HMSFRs каталога Pc17. Хотя эти медианы формально отличаются незначимо, подавляющее большинство источников не-HMSFRs (25 из 29) имеют величины  $\sigma_{\varpi}$ , равные или большие медианной для мазеров HMSFRs (рис. 22а). Несколько меньшее значение  $\text{Me}(\sigma_{\varpi}/\varpi)$  для источников не-HMSFRs по сравнению с HMSFRs (табл. 8) непоказательно, поскольку первые находятся преимущественно вблизи Солнца (рис. 22б). В дальнейшем мы будем опираться на результаты для мазеров HMSFRs, образующих более однородные выборки с более точными измерениями параллаксов.

С целью проверки значимости указанных трендов для каждого сегмента по отдельности и для всех мазеров HMSFRs каталогов Рд14 и Pc17 были оценены коэффициенты  $\kappa$  линейной корреляции между неопределенностями параллаксов, с одной стороны, и величинами расстояний или параллаксов — с другой (табл. 9). Для каждой оценки коэффициента  $\kappa(p_1, p_2)$  по выборочным значениям  $N$  пар случайных величин  $p_1$  и  $p_2$  вычислена вероятность  $P_{\kappa}$  получить

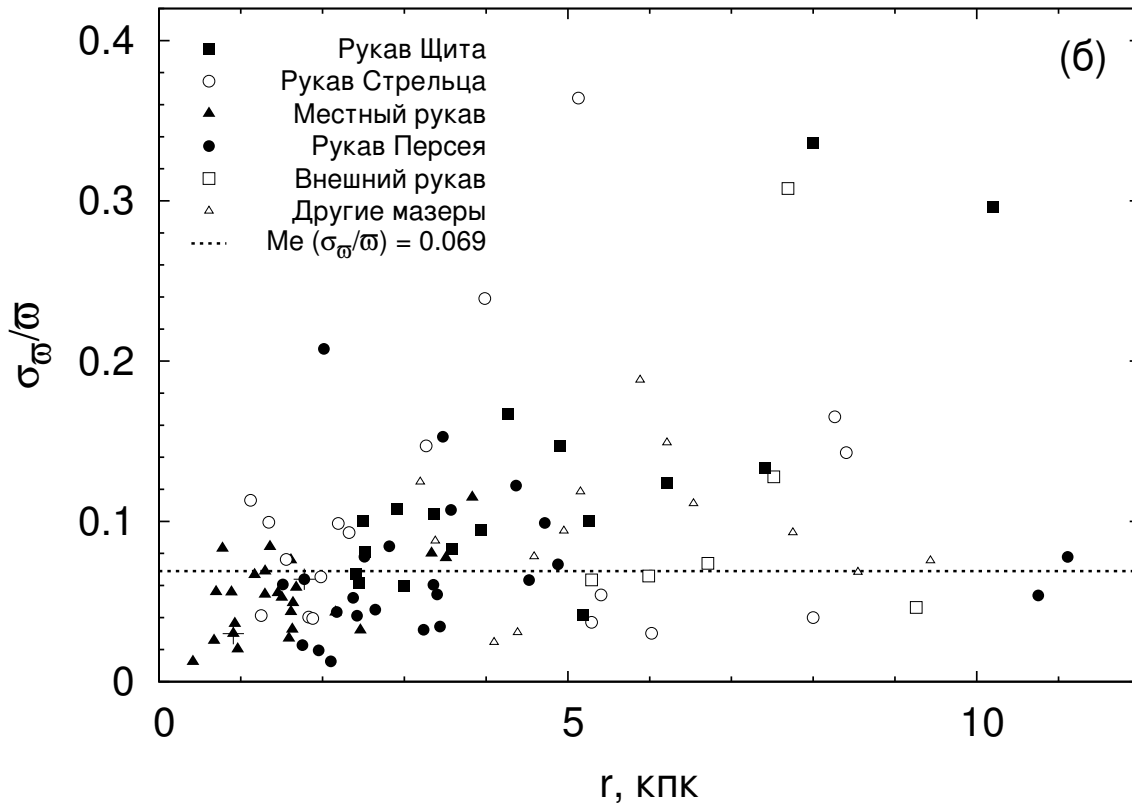
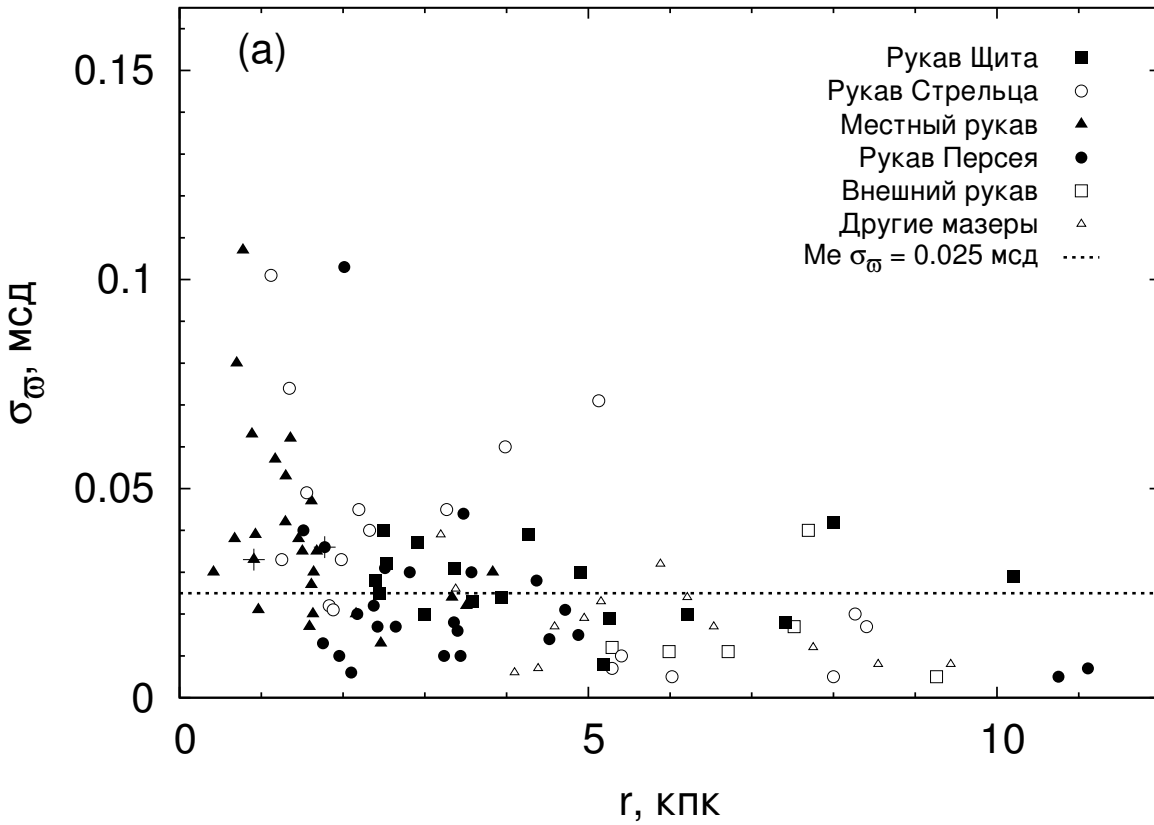


Рис. 21. Абсолютная (а) и относительная (б) неопределенности измерения параллаксов в зависимости от гелиоцентрического расстояния для мазеров каталога Рд14. Крестиками обозначены два объекта, данные о которых были заменены на более новые из каталога Рс17. Пунктирными линиями обозначены медианные значения  $\sigma_{\pi}$  и  $\sigma_{\pi}/\pi$  для полной выборки мазеров каталога.

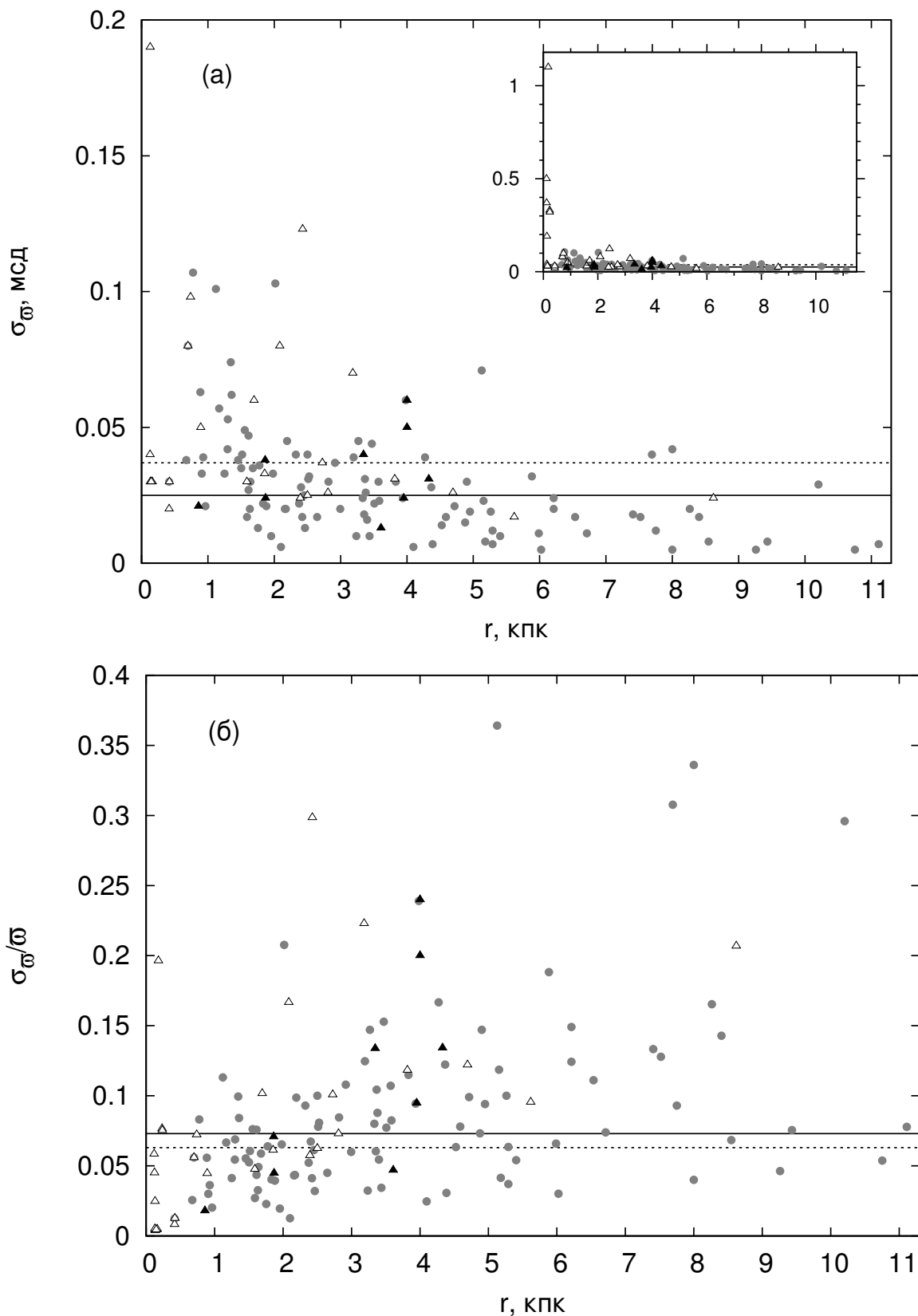


Рис. 22. Абсолютная (а) и относительная (б) неопределенности измерения параллаксов в зависимости от гелиоцентрического расстояния для мазеров каталога Рд14 (серые кружки) и дополнительных мазеров каталога Рс17 (черные треугольники — HMSFRs, белые треугольники — остальные источники). Сплошными линиями обозначены медианные значения  $\sigma_{\varpi}$  и  $\sigma_{\varpi}/\varpi$  для полной выборки мазеров HMSFRs каталога Рс17, пунктирными линиями — для остальных объектов того же каталога.

Таблица 9. Коэффициенты линейной корреляции абсолютной и относительной неопределенностей параллаксов с оценками расстояний и параллаксов для мазеров HMSFRs.

Рукав/выборка каталог	$\kappa(\sigma_{\varpi}, r)$	$P_{\kappa}$	$\kappa(\sigma_{\varpi}/\varpi, r)$	$P_{\kappa}$	$\kappa(\sigma_{\varpi}, \varpi)$	$P_{\kappa}$	$\kappa(\sigma_{\varpi}/\varpi, \varpi)$	$P_{\kappa}$
Sct, Рд14	-0.10	0.69	<b>+0.79</b>	0.0003	+0.23	0.38	<b>-0.65</b>	0.0055
Sct <sup>a</sup> , Рд14	<b>-0.55</b>	0.035	+0.46	0.076	<b>+0.52</b>	0.048	-0.48	0.064
Sgr, Рд14	<b>-0.55</b>	0.018	+0.20	0.43	<b>+0.60</b>	0.0094	-0.26	0.29
Loc, Рд14	<b>-0.47</b>	0.020	<b>+0.55</b>	0.0047	<b>+0.38</b>	0.059	<b>-0.48</b>	0.016
Per, Рд14	-0.33	0.11	+0.08	0.72	+0.35	0.10	-0.18	0.41
Out, Рд14	+0.06	0.90	+0.19	0.72	-0.15	0.78	-0.28	0.60
All, Рд14	<b>-0.47</b>	$8 \cdot 10^{-5}$	<b>+0.41</b>	$3 \cdot 10^{-5}$	<b>+0.48</b>	$2 \cdot 10^{-7}$	<b>-0.36</b>	0.0002
HMSFRs, Pс17	<b>-0.44</b>	0.0001	<b>+0.40</b>	0.0001	<b>+0.49</b>	0.0002	<b>-0.35</b>	0.0003

<sup>a</sup> Без двух мазеров рукава Щита на  $r \geq 8$  кпк.

**Примечание.**  $P_{\kappa} \equiv P(|\varkappa| > |\kappa(p_1, p_2)|)$  — вероятность получить коэффициент корреляции  $\varkappa$  по модулю больше измеренного  $|\kappa(p_1, p_2)|$  при отсутствии корреляции между случайными величинами  $p_1$  и  $p_2$ . Жирным шрифтом выделены значимые коэффициенты корреляции ( $P_{\kappa} < 0.05$ ).

коэффициент корреляции по модулю больше  $|\kappa(p_1, p_2)|$  в предположении некоррелированности  $p_1$  и  $p_2$ , используя формулу для малых  $N$

$$P_{\kappa} = 1 - S_{N-2}(t), \quad t = \kappa(p_1, p_2) \sqrt{\frac{N-2}{1-\kappa^2(p_1, p_2)}}, \quad (42)$$

где  $S_{N-2}(t)$  — распределение Стьюдента с  $N-2$  степенями свободы (Пресс и др., 1997). Величины  $P_{\kappa}$  также приведены в табл. 9. Нуль-гипотеза об отсутствии корреляции может быть отвергнута при значениях  $P_{\kappa} < 0.05$ . Значимые в соответствии с этим правилом величины  $\kappa$  выделены в табл. 9 жирным шрифтом.

Представленные в табл. 9 результаты показывают, что корреляции между  $\sigma_{\varpi}$  и  $r$  (отрицательная) и между  $\sigma_{\varpi}$  и  $\varpi$  (положительная) являются значимыми не только для полных выборок HMSFRs, но и в пределах сегментов Местного рукава и рукава Стрельца по отдельности. Поскольку тенденция падения  $\sigma_{\varpi}$  с  $r$  сильнее всего выражена на расстояниях  $r \lesssim 2.5$  кпк (рис. 21a, 22a), она меньше проявляется в случае других сегментов, которые мало захватывают эту область (рукава Персея и Щита) или совсем не проходят через нее (Внешний рукав) (рис. 21a). Однако при исключении двух самых далеких мазеров сегмента рукава Щита величины  $\kappa(\sigma_{\varpi}, r)$  и  $\kappa(\sigma_{\varpi}, \varpi)$  становятся значимыми и для этой детали. Близость друг к другу значимых коэффициентов корреляции ( $\kappa(\sigma_{\varpi}, r) = -0.55 \div -0.44$ ,  $\kappa(\sigma_{\varpi}, \varpi) = +0.38 \div +0.60$ ) говорит в пользу того, что во всех этих случаях мы имеем дело с одними и теми же эффектами. К их числу, по мнению Рида (2014), могут относиться 1) уменьшение с расстоянием видимого размера мазерных пятен, вследствие чего повышается точность астрометрических измерений при прочих равных условиях, и 2) использование большего числа наблюдений для некоторых далеких объектов (например, W 49). В любом случае полученные результаты сви-

детельствуют в пользу того, что в настоящую эпоху точность измерения параллаксов мазеров в среднем растёт с расстоянием, а, следовательно, модель  $\sigma_{\varpi} = \text{const}$  для сегмента неадекватна современным данным. Заметим, что та же тенденция независимо прослеживается и по данным о мазерах не-HMSFRs, лишь со сдвигом в сторону бóльших  $\sigma_{\varpi}$  (рис. 22а).

При наличии тренда  $\langle \sigma_{\varpi} \rangle \propto r^{-1}$  можно ожидать, что относительная неопределенность  $\sigma_{\varpi}/\varpi$  в среднем не меняется с  $r$ . Непосредственное сравнение  $\sigma_{\varpi}/\varpi$  с  $r$  (рис. 21б, 22б) показывает, что разброс значений  $\sigma_{\varpi}/\varpi$  для HMSFRs действительно остается примерно постоянным на  $r \lesssim 3.2$  кпк. За пределами этой области с ростом  $r$  величины  $\sigma_{\varpi}/\varpi$  смещаются в целом к большим значениям и появляется несколько измерений с низкой относительной точностью. Однако эта тенденция выражена много слабее, чем снижение  $\langle \sigma_{\varpi} \rangle$  с  $r$ . Хотя для полных выборок HMSFRs корреляции между  $\sigma_{\varpi}/\varpi$  и  $r$  (положительная) и между  $\sigma_{\varpi}/\varpi$  и  $\varpi$  (отрицательная) получаются значимыми, для отдельных сегментов они незначимы либо — для рукавов Местного и Щита — лишь формально значимы (табл. 9). Так, для рукава Щита значимость корреляций основывается лишь на двух самых далеких ( $r \geq 8$  кпк) объектах, которые резко отличаются от других мазеров того же сегмента большими величинами  $\sigma_{\varpi}/\varpi$ , кратно превышающими значения  $\text{Me}(\sigma_{\varpi}/\varpi)$  как для объектов рукава Щита, так и для всего каталога Рд14 (рис. 21б, табл. 8). При исключении этих двух (из 17) объектов нуль-гипотеза не отвергается и для рукава Щита (табл.9). Для Местного рукава формальная значимость появилась только после замены в Рс17 данных для одного (!) объекта (L 1206). (Подобная ситуация в случае корреляций для  $\sigma_{\varpi}$  не возникает.) Относительный разброс значений  $\text{Me}(\sigma_{\varpi}/\varpi)$  для разных сегментов заметно меньше, чем значений  $\text{Me}(\sigma_{\varpi})$  (табл. 8). Таким образом, хотя корреляция между  $\sigma_{\varpi}/\varpi$  и  $r$ , по-видимому, существует, она слабо проявляется в пределах сегментов рукавов, рассматриваемых по отдельности. Поэтому для отдельного сегмента модель  $\sigma_{\varpi}/\varpi = \text{const}$  можно принять как согласующуюся в первом приближении с современными данными о мазерах.

Поскольку одна из вероятных причин снижения  $\langle \sigma_{\varpi} \rangle$  с  $r$  (использование большего числа наблюдений для далеких мазеров) не обязательно сохранится в будущем, при численном моделировании мы рассматриваем оба варианта учета неопределенности параллаксов. Из них, как будет показано ниже, модель  $\sigma_{\varpi}/\varpi = \text{const}$  описывает более благоприятную ситуацию для оценивания  $R_0$  по геометрии спирального сегмента, а модель  $\sigma_{\varpi} = \text{const}$  — менее благоприятную. Исходя из приведенных результатов и соображений, можно ожидать, что при любом ходе дальнейших измерений параллаксов поведение  $\langle \sigma_{\varpi} \rangle$  с  $r$ , скорее всего, останется промежуточным между этими двумя случаями.

### 4.3. Процедура моделирования

Рассмотрим три *репрезентативные* точки  $M_1, M_2, M_3$ , принадлежащие сегменту модельной спирали с параметрами  $R_0, i, \lambda_0, \lambda_1^s, \Delta\lambda$  (см. раздел 4.1). Выберем положение точек так, чтобы соседние точки были равноудалены друг от друга по галактоцентрической долготе  $\lambda$ . Тогда долготы точек  $M_j$  определяются выражением  $\lambda_j = \lambda_1^s + \Delta\lambda(2j - 1)/6$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Таким образом, расстояние между соседними точками равно  $\Delta\lambda/3$ , расстояние от крайней точки ( $M_1$  или  $M_3$ ) до ближайшей по долготе границы сегмента равно  $\Delta\lambda/6$ . Каждая из точек  $M_j$  представляет положение трети сегмента по долготе. Равноудаленная конфигурация репрезентативных точек соответствует равномерному распределению объектов по  $\lambda$ , т.е. примерно равномерному вдоль сегмента. Эта модель довольно хорошо описывает реальность во многих

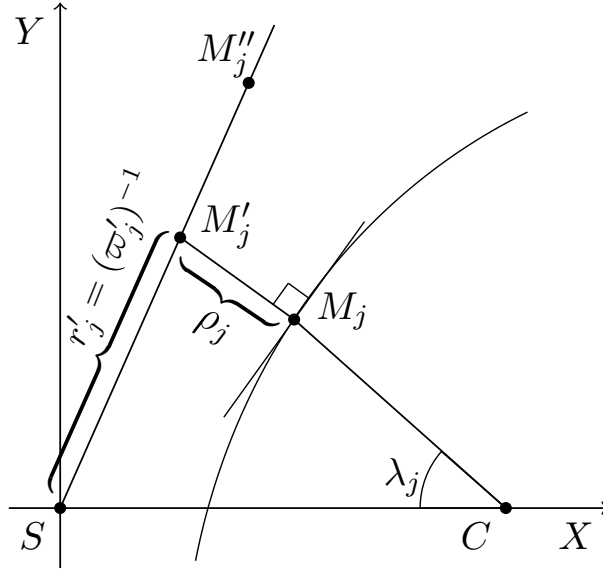


Рис. 23. Варьирование положения репрезентативной точки  $M_j$  вдоль перпендикуляра к модельной спирали (точка  $M'_j$ ) и вдоль луча зрения (точка  $M''_j$ ).  $S$  — положение Солнца,  $C$  — полюс модельной спирали (центр Галактики),  $(X, Y)$  — плоскость Галактики.

случаях (см., например, рисунки в работах Поповой, Локтина, 2005; Дамбиса и др., 2015). Поэтому, а также чтобы не увеличивать число параметров задачи, ограничимся здесь лишь таким типом конфигураций.

Для учета разброса объектов поперек сегмента рукава и неопределенности параллакса в численных экспериментах положения репрезентативных точек  $M_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , модельной спирали варьировались следующим образом. Каждая точка  $M_j$  смещалась случайным образом на расстояние  $\rho_j$  в одну или другую сторону вдоль прямой, перпендикулярной модельной спирали в точке  $M_j$ ; таким образом находилась точка  $M'_j$  с параллаксом  $\varpi'_j$  (см. рис. 23). Затем точка  $M'_j$  смещалась, также случайным образом, по лучу зрения  $SM'_j$ , что определяло псевдослучайную точку ( $M''_j$  на рис. 23) с параллаксом  $\varpi''_j$ .

После получения набора точек  $M''_1, M''_2, M''_3$  осуществлялся поиск параметров спиралей, проходящих через них за один виток. В этом случае (т.е. в рамках трехточечного метода) величины  $R_0$  для таких спиралей находятся из уравнения:

$$(\Lambda_3 - \Lambda_2) \ln R_1 + (\Lambda_1 - \Lambda_3) \ln R_2 + (\Lambda_2 - \Lambda_1) \ln R_3 = 0, \quad (43)$$

где галактоцентрические расстояния  $R_j$  точек  $M''_j$  выражаются через декартовы гелиоцентрические координаты  $X_j, Y_j$  этих точек по формуле

$$R_j = \sqrt{R_0^2 + X_j^2 + Y_j^2 - 2R_0X_j}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (44)$$

а значения номинальных галактоцентрических долгот  $\Lambda_j$  точек  $M''_j$  ( $-\pi \leq \Lambda_j < \pi$ ) определяются формулами

$$\sin \Lambda_j = \frac{Y_j}{R_j}, \quad \cos \Lambda_j = \frac{R_0 - X_j}{R_j}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (45)$$

Как показано ранее, для тройки точек, снятых со спирали, т.е. для  $M_1, M_2, M_3$ , уравнение (43) может иметь один или два дополнительных корня. Поэтому и для тройки псевдослучайных



точек  $M_1'', M_2'', M_3''$  можно получить больше одного (до трех) корня уравнения (43). В таких случаях среди значений  $R_0$ , найденных для данной тройки, выбиралось наиболее близкое к исходной величине  $R_0$  для модельной спирали, и оно считалось решением для тройки. Кроме того, как показали наши численные эксперименты, для точек  $M_1'', M_2'', M_3''$  уравнение (43) может и не иметь корней. Это означает, что через три произвольные точки не обязательно можно провести виток хотя бы одной спирали, если задана прямая, на которой полюс спирали может находиться. Такие тройки исключались из дальнейшей обработки.

Найденное для тройки  $M_1'', M_2'', M_3''$  значение  $R_0$  однозначно определяет и два других параметра ( $i, \lambda_0$ ) спирали (формулы (12), (13)). Однако свойства оценок  $i, \lambda_0$  как производных характеристик, сильно коррелирующих с  $R_0$  (см. табл. 7), на данном этапе не рассматриваются.

Для заданных положений репрезентативных точек  $M_j$  и выбранных значений других параметров создавалось множество из  $N_{\text{МС}}$  троек псевдослучайных точек  $\{M_{1,m}'', M_{2,m}'', M_{3,m}''\}_{m=1}^{N_{\text{МС}}}$ , где  $N_{\text{МС}}$  бралось таким, чтобы количество  $N_{\text{sol}}$  решений задачи определения  $R_0$ , т.е. число троек с непустым множеством корней (11), получилось равным 10000. Считалось, что в спиральном сегменте со стандартом разброса объектов поперек рукава  $\sigma_w$  наблюдается  $N$  объектов с оценками параллаксов, имеющими среднеквадратическую неопределенность  $\sigma_\varpi$  или относительную неопределенность  $\sigma_\varpi/\varpi$ . Каждая точка  $M_j$  моделирует среднее положение трети сегмента. Поэтому стандартную ошибку положения  $M_j$  вдоль направления поперек рукава можно приближенно принять равной  $\sigma_w/\sqrt{N/3}$ , а стандартную ошибку параллакса смещенной точки  $M_j'$  (см. рис. 23) — равной  $\sigma_\varpi(M_j')/\sqrt{N/3}$ , где  $\sigma_\varpi(M_j')$  — неопределенность параллакса в точке  $M_j'$ . Исходя из этого, для генерации точек  $M_{j,m}'', j = 1, 2, 3, m = 1, 2, \dots, N_{\text{МС}}$ , варьировались значение  $\rho_{j,m}$  (смещение  $M_{j,m}'$  относительно  $M_{j,m}$ ) по нормальному закону с нулевым средним значением и стандартом  $\sigma_w/\sqrt{N/3}$ , а величины  $\varpi_{j,m}''$  — по нормальному закону со средним значением, равным  $\varpi_{j,m}'$ , и стандартом  $\sigma_\varpi/\sqrt{N/3}$  в случае постоянной для сегмента абсолютной ошибки параллакса или  $\varpi_{j,m}'(\sigma_\varpi/\varpi)/\sqrt{N/3}$ , в случае постоянной относительной ошибки параллакса.

Для множества всех полученных решений  $\{R_{0,s}\}, s = 1, 2, \dots, N_{\text{sol}}$ , вычислялись медиана  $\text{Me } R_0$ , интервал  $[\text{Me } R_0 - \sigma_{R_0}^-, \text{Me } R_0 + \sigma_{R_0}^+]$ , вероятность попадания в который отдельной оценки  $R_{0,s}$  равна  $\approx 68.3\%$  (уровень  $1\sigma$ ), и доверительный  $1\sigma$ -интервал  $[\text{Me } R_0 - \sigma^-(\text{Me } R_0), \text{Me } R_0 + \sigma^-(\text{Me } R_0)]$  для медианы. Величины  $\sigma_{R_0}^-, \sigma_{R_0}^+$  и  $\sigma^-(\text{Me } R_0), \sigma^+(\text{Me } R_0)$  определялись на основе порядковых статистик для упорядоченного массива оценок  $R_{0,s}$  (см., например, Кобзарь, 2006). Также вычислялось среднее смещение оценок  $R_{0,s}$  при заданных параметрах задачи:  $\Delta R_0 = \text{Me } R_0 - R_0$  с доверительным интервалом  $[\Delta R_0 - \sigma^-(\text{Me } R_0), \Delta R_0 + \sigma^-(\text{Me } R_0)]$ , где  $R_0$  — значение параметра исходной модельной спирали.

#### 4.4. Выбор базовых наборов параметров модельных сегментов

Численное моделирование выполнялось для двух семейств модельных сегментов, одно из которых представляет рукав Персея, а другое — рукав Щита. Эти случаи примерно охватывают разброс вероятных конфигураций сегментов, выявляемых в современную эпоху по объектам с точными гелиоцентрическими расстояниями: в локальном галактоцентрическом секторе (содержащем Солнце) рукав Персея проходит вне солнечного круга, т.е. далеко от центра Галактики, а рукав Щита — внутри круга  $R = R_0$ , относительно близко к центру

Таблица 10. Базовые наборы параметров модельных спиралей, представляющих рукава Персея и Щита в численных экспериментах

Параметр	Per	Sct	Параметр	Per	Sct
$R_0$ , кпк	8.0	8.0	$\sigma_{\varpi}$ , мсд	0.018	0.028
$i$	$-10^\circ$	$-20^\circ$	$\sigma_{\varpi}/\varpi$	0.06	0.10
$\lambda_0$	$+61^\circ$	$-55^\circ$	$\sigma_w$ , кпк	0.35	0.17
$\lambda_1^s$	$-21^\circ$	$+3^\circ$	$N$	24	18
$\lambda_2^s$	$+88^\circ$	$+100^\circ$			
$\Delta\lambda$	$109^\circ$	$97^\circ$			

(см. рис. 19, рис. 24). Кроме того, определение  $R_0$  трехточечным методом получилось надежным именно по мазерам рукавов Персея и Щита, поэтому исследовать, в том числе и на перспективу, свойства оценки  $R_0$  по геометрии сегментов этих рукавов представляется сейчас наиболее интересным.

Параметр  $R_0$  для модельных сегментов принят равным 8 кпк в согласии с недавними средними („наилучшими“) величинами  $\langle R_0 \rangle_{\text{best}} = (7.9 \div 8.3) \pm (0.1 \div 0.4)$  кпк (Никифоров, Смирнова, 2013; Блэнд-Хоторн, Герхард, 2016; де Грийс, Боно, 2016; Камарийо и др., 2018) и с недавними отдельными оценками  $R_0$  (например, Расторгуев и др. 2017; Чэнь и др., 2018; Маджаесс и др., 2018). Величина исходного  $R_0$  в данной задаче не является существенным параметром и в численных экспериментах не менялась. Для других параметров модельных сегментов каждого из двух семейств выбирался набор таких значений, которые точно или приблизительно соответствуют характеристикам, найденным по данным каталога Рида и др. (2014) для мазеров рукавов Персея и Щита. Будем называть такие наборы и сами значения параметров в них *базовыми*. Эти значения приведены в табл. 10; базовые сегменты, которые им соответствуют, показаны на рис. 24. Другие наборы параметров каждого семейства моделей формировались посредством варьирования одного из параметров при сохранении базовых значений остальными параметрами.

Базовые долготы границ сегмента  $\lambda_1^s$ ,  $\lambda_2^s$  соответствуют границам области, занимаемой мазерными источниками данного рукава. Базовые значения  $i_0$  и  $\lambda_0$  были выбраны такими, чтобы модельный сегмент проходил через область, представленную мазерами рукава.

В случае рукава Персея базовый разброс поперек сегмента  $\sigma_w$  принят равным 0.35 кпк в соответствии с оценкой, полученной нами в результате применения трехточечного метода определения параметров модельной спирали к мазерам данного сегмента (см. табл. 6). В случае рукава Щита для того же параметра взято значение  $\sigma_w = 0.17$  кпк, найденное Ридом и др. (2014).

Базовые значения  $\sigma_{\varpi}$  и  $\sigma_{\varpi}/\varpi$  были выбраны равными медианам  $\text{Me } \sigma_{\varpi}$  и  $\text{Me}(\sigma_{\varpi}/\varpi)$ , вычисленным для мазеров соответствующего рукава (табл. 8).

Базовое число  $N$  представляющих сегмент объектов для рукава Персея взято равным количеству мазеров каталога Рида и др. (2014), отнесенных к этому рукаву. В случае рукава Щита это число для удобства (поскольку каждая репрезентативная точка  $M_j$  представляет  $N/3$  объектов сегмента) принято равным 18 — числу, ближайшему к числу мазеров ( $N = 17$ ) данного рукава в том же каталоге и при этом кратному трем (табл. 8).

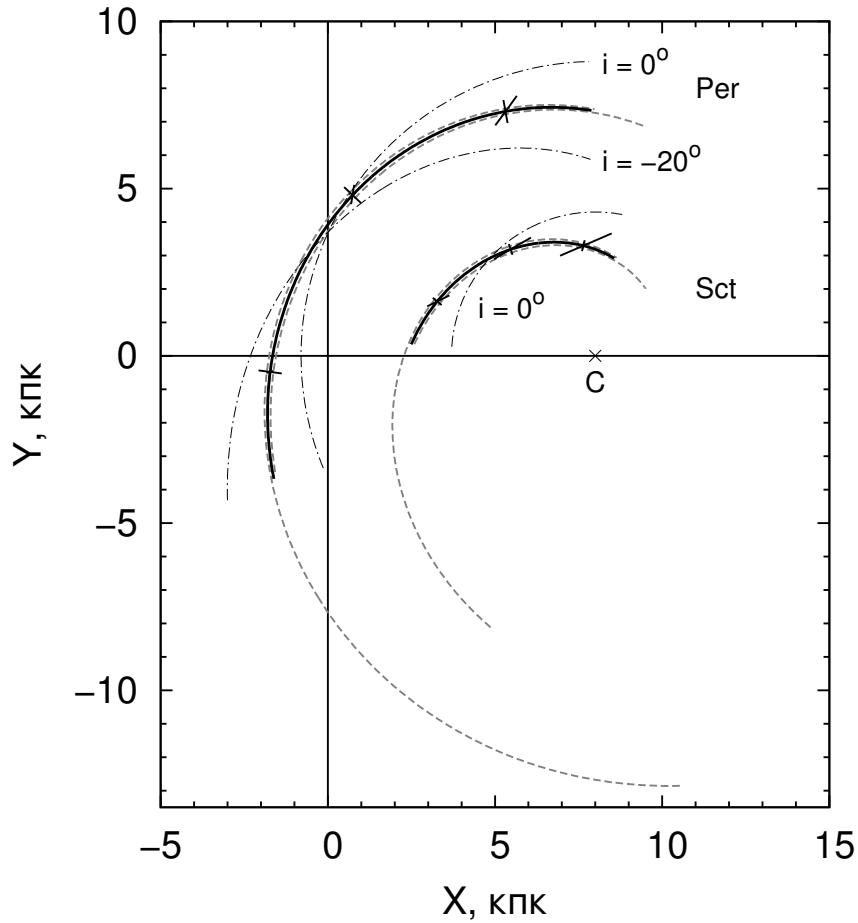


Рис. 24. Схема модельных сегментов спиралей, рассмотренных в численных экспериментах: базовые сегменты (черные кривые), сегменты наибольшей угловой протяженности  $\Delta\lambda$  при фиксировании границы  $\lambda_1^s$  или  $\lambda_2^s$  (серые пунктирные кривые, даны с небольшим смещением по радиусу), сегменты с наибольшим и наименьшим углами закрутки  $i$  (черные штрихпунктирные кривые). Бары показывают для уровня  $1\sigma$  неопределенность расстояния (при  $\sigma_\varpi/\varpi = \text{const}$ ) и разброс поперек рукава в трех репрезентативных точках  $M_j$  базовых сегментов. Для точки  $M_1$  рукава Персея первый из этих баров лишь немного превышает толщину линии модельного сегмента. Точка  $C$  — полюс всех сегментов (центр Галактики), Солнце — в начале координат.

Заметим, что базовый набор параметров для рукава Персея определяет сегмент, пересекающий линию центр–антицентр Галактики (табл. 10, рис. 24). В этом случае в большинстве сгенерированных троек репрезентативных точек  $M''_{1,m}$ ,  $M''_{2,m}$ ,  $M''_{3,m}$  отдельные точки располагаются по разные стороны от этой линии. При такой конфигурации в подавляющем числе случаев через тройку точек проходит единственная спираль, поэтому выбирать решение для  $R_0$  из множества корней уравнения (11) не требуется. Базовый набор для рукава Щита задает сегмент, полностью находящийся по одну сторону от линии центр–антицентр, в I квадранте (табл. 10, рис. 24). Там же в большинстве случаев оказываются и сгенерированные тройки. Через так расположенные тройки при непустом множестве корней (11) и в невырожденных случаях всегда проходят две спирали, поэтому выбор из корней (11) ближайшего к исходному значению  $R_0$  модельной спирали является необходимым. Случаи, когда для некоторых сгенерированных троек корней нет (решение для  $R_0$  отсутствует), имеют место только для

Таблица 11. Статистическая неопределенность ( $\sigma_{R_0}^+$ ,  $\sigma_{R_0}^-$ ) и среднее смещение ( $\Delta R_0$ ) оценки  $R_0$  по геометрии спирального сегмента для базовых значений параметров моделей рукавов Персея и Щита с вариантами обнуления одной из дисперсий.

Рукав Персея				Рукав Щита			
$\sigma_{\varpi}/\varpi$ или $\sigma_{\varpi}$ , мсд	$\sigma_w$ , кпк	$\sigma_{R_0}^{\pm}$ , кпк	$\Delta R_0$ , кпк	$\sigma_{\varpi}/\varpi$ или $\sigma_{\varpi}$ , мсд	$\sigma_w$ , кпк	$\sigma_{R_0}^{\pm}$ , кпк	$\Delta R_0$ , кпк
$\sigma_{\varpi}/\varpi = 0.06$	0.35	+1.06 -0.95	-0.006 <sup>+0.015</sup> <sub>-0.014</sub>	$\sigma_{\varpi}/\varpi = 0.1$	0.17	+0.99 -1.03	+0.116 <sup>+0.012</sup> <sub>-0.014</sub>
	0	+0.54 -0.52	0.000 <sup>+0.007</sup> <sub>-0.006</sub>		0	+0.84 -0.90	+0.044 <sup>+0.011</sup> <sub>-0.012</sub>
$\sigma_{\varpi} = 0.018$	0.35	+1.55 -1.39	+0.005 <sup>+0.019</sup> <sub>-0.019</sub>	$\sigma_{\varpi} = 0.028$	0.17	+1.71 -1.49	+0.562 <sup>+0.021</sup> <sub>-0.019</sub>
	0	+1.23 -1.16	+0.014 <sup>+0.018</sup> <sub>-0.015</sub>		0	+1.65 -1.45	+0.505 <sup>+0.023</sup> <sub>-0.017</sub>
$\sigma_{\varpi} = 0$	0.35	+0.89 -0.80	-0.012 <sup>+0.012</sup> <sub>-0.010</sub>	$\sigma_{\varpi} = 0$	0.17	+0.60 -0.58	-0.005 <sup>+0.008</sup> <sub>-0.007</sub>

таких наборов параметров, при которых дисперсия точек  $M''_{1,m}$ ,  $M''_{2,m}$ ,  $M''_{3,m}$  относительно модельного сегмента значительна по сравнению с линейным размером и радиусом кривизны сегмента. Так, для семейства моделей рукава Персея это происходит, причем очень редко, лишь при  $\Delta\lambda = 50^\circ$ , значения более чем вдвое меньшем базового. Для семейства рукава Щита такие случаи, наоборот, обычны, так как модельные сегменты семейства имеют существенно меньшие линейную протяженность и радиус кривизны по сравнению с сегментами рукава Персея (рис. 24).

#### 4.5. Результаты моделирования

Результаты численного моделирования — статистическая неопределенность на уровне  $1\sigma$  ( $\sigma_{R_0}^+$ ,  $\sigma_{R_0}^-$ ) и среднее смещение ( $\Delta R_0$ ) оценки  $R_0$  по геометрии спирального сегмента — для базовых наборов параметров (табл. 10), а также при замене в таких наборах базового значения одной из дисперсий на нулевое, приведены в табл. 11. Для рукава Персея во всех таких вариантах экспериментов значимых смещений  $\Delta R_0$  не обнаружено. При базовых наборах для рукава Щита величины  $\Delta R_0$  значимо отличаются от нуля, причем в случае модели  $\sigma_{\varpi} = \text{const}$  — существенно. Сравнение с результатами для того же рукава при обнулении одной из дисперсий (табл. 11) показывает, что наличие смещения обусловлено неопределенностью параллаксов (при  $\sigma_{\varpi} = 0$  мсд  $\Delta R_0 = 0$  кпк в пределах ошибок), но, с другой стороны, разброс поперек рукава в дополнение к ненулевой  $\sigma_{\varpi}$  увеличивает значение  $\Delta R_0$ . Неопределенность  $R_0$  и вклад в нее неопределенности параллаксов сильно зависят от модели для последней в пределах рукава: при  $\sigma_{\varpi} = \text{const}$  величины  $\sigma_{R_0}^{\pm}$  на 40–70% больше, чем при  $\sigma_{\varpi}/\varpi = \text{const}$ ; в первом случае вклад  $\sigma_{\varpi}$  в общую неопределенность  $R_0$  явно преобладает (ср. строки для  $\sigma_{\varpi} = \text{const} \neq 0$  и для  $\sigma_{\varpi} = 0$  в табл. 11), во втором — вклады обеих дисперсий в целом сопоставимы, а для рукава Персея фактор разброса поперек рукава даже оказывается важнее (ср. строки для  $\sigma_{\varpi}/\varpi = \text{const} \neq 0$  и для  $\sigma_{\varpi} = 0$  в табл. 11). У двух рассмотренных рукавов неопределенности  $R_0$  при базовых наборах параметров оказались близкими в случае  $\sigma_{\varpi}/\varpi = \text{const}$ , в случае  $\sigma_{\varpi} = \text{const}$  для рукава Щита неопределенность  $R_0$  немного выше.

Для исследования зависимости результатов от существенных параметров задачи были выполнены серии численных экспериментов, в каждой из которых один из параметров (кроме

Таблица 12. Статистическая неопределенность ( $\sigma_{R_0}^+$ ,  $\sigma_{R_0}^-$ ) и среднее смещение ( $\Delta R_0$ ) оценки  $R_0$  по геометрии спирального сегмента при экстремальных отклонениях одного из параметров задачи от базового значения для моделей рукава Персея.

$p$	$p_{\min}$	$\sigma_{R_0}^\pm$ , кпк	$\Delta R_0$ , кпк	$p_{\max}$	$\sigma_{R_0}^\pm$ , кпк	$\Delta R_0$ , кпк
$\Delta\lambda$ , $\lambda_1^s = -21^\circ$	$50^\circ$	+5.9 -2.7	-0.071 <sup>+0.045</sup> <sub>-0.048</sub>	$120^\circ$	+0.94 -0.89	-0.004 ± 0.013
$\Delta\lambda$ , $\lambda_2^s = +88^\circ$	$109^\circ$	+1.05 -0.94	-0.006 <sup>+0.015</sup> <sub>-0.014</sub>	$190^\circ$	+0.34 -0.33	0.000 ± 0.004
$\sigma_\varpi/\varpi$	0.00	+0.89 -0.79	-0.012 <sup>+0.012</sup> <sub>-0.010</sub>	0.20	+2.1 -1.8	-0.012 <sup>+0.034</sup> <sub>-0.024</sub>
$\sigma_\varpi$ , мсд	0.00	+0.89 -0.79	-0.012 <sup>+0.012</sup> <sub>-0.010</sub>	0.05	+4.1 -3.1	-0.020 <sup>+0.045</sup> <sub>-0.036</sub>
$\sigma_w$ , кпк	0.00	+0.54 -0.52	0.000 <sup>+0.007</sup> <sub>-0.006</sub>	0.60	+1.7 -1.4	-0.026 <sup>+0.022</sup> <sub>-0.021</sub>
$N$	3	+3.4 -2.6	-0.022 <sup>+0.030</sup> <sub>-0.040</sub>	60	+0.66 -0.61	-0.004 <sup>+0.010</sup> <sub>-0.009</sub>
$i$	$-20^\circ$	+0.94 -0.85	+0.001 <sup>+0.008</sup> <sub>-0.013</sub>	$0^\circ$	+1.14 -1.01	-0.014 <sup>+0.017</sup> <sub>-0.014</sub>
$i$ , $\sigma_\varpi = 0$	$-20^\circ$	+0.77 -0.69	-0.008 <sup>+0.009</sup> <sub>-0.010</sub>	$0^\circ$	+1.01 -0.89	-0.021 <sup>+0.015</sup> <sub>-0.013</sub>
$i$ , $\sigma_w = 0$	$-20^\circ$	+0.52 -0.49	-0.001 <sup>+0.006</sup> <sub>-0.007</sub>	$0^\circ$	+0.49 -0.48	+0.002 <sup>+0.007</sup> <sub>-0.006</sub>

**Примечание.**  $p$  — изменяемый параметр;  $p_{\min}$ ,  $p_{\max}$  — наименьшее и наибольшее из рассмотренных значений параметра  $p$ . При наличии дополнительных условий проведения численных экспериментов они указаны в первой колонке.

$R_0$  и  $\lambda_0$ ) изменялся в широкой окрестности своего базового значения, а другие параметры базовые значения сохраняли. Будем называть такие серии *основными*. При изменении угловой протяженности  $\Delta\lambda$  сегмента фиксировался либо левый ( $\lambda_1^s$ ), либо правый его край ( $\lambda_2^s$ ). Во всех случаях, кроме серии для разных  $\sigma_\varpi$ , принималась модель неопределенности расстояний  $\sigma_\varpi/\varpi = \text{const}$ , так как этот вариант лучше согласуется с современными данными о мазерах (см. раздел 4.2). При варьировании угла закрутки  $i$  величина  $\lambda_0$  подбиралась для каждого значения  $i$  такой, чтобы модельная спираль проходила через область, занимаемую мазерами этого рукава по данным Рида и др. (2014). Модельные сегменты для предельных  $i$  и наибольших  $\Delta\lambda$  приведены на рис. 24. С целью выяснения роли каждой из двух дисперсий задачи для некоторых основных серий проводились *дополнительные* серии экспериментов в предположении  $\sigma_\varpi = 0$  или  $\sigma_w = 0$ . Как правило, это делалось, когда в основной серии имелись случаи смещений  $\Delta R_0$ , значимо отличных от нуля. Полученные результаты суммированы в табл. 12, 13 и графически представлены на рис. 25–31.

В табл. 12 и 13 характеристики распределения оценок  $R_{0,s}$ , те же что и в табл. 11, даны для экстремальных значений варьируемых параметров моделей рукавов Персея и Щита соответственно. Рисунки 25–31 показывают зависимости от разных параметров медианы  $\text{Me } R_0$  и интервала  $[\text{Me } R_0 - \sigma_{R_0}^-, \text{Me } R_0 + \sigma_{R_0}^+]$  (серые бары) для оценок  $R_{0,s}$ , полученных в основных и дополнительных сериях экспериментов для каждого из двух рукавов. На этих рисунках утолщенная линия бара отмечает результат при базовом значении изменяемого параметра в данной серии, а горизонтальная пунктирная линия изображает исходное значение  $R_0 = 8$  кпк.

Наиболее важным параметром задачи оказалась протяженность сегмента  $\Delta\lambda$  (табл. 12, 13, рис. 25, 26). С уменьшением  $\Delta\lambda$  неопределенность  $R_0$  увеличивается, причем для рукава Персея при  $\Delta\lambda \lesssim 70^\circ$  — весьма резко (рис. 25). Такие короткие сегменты внешнего рукава практически не создают ограничений на величину  $R_0$ . При сокращении сегмента рукава Щита

Таблица 13. То же, что в таблице 12, но для моделей рукава Щита.

$p$	$p_{\min}$	$\sigma_{R_0}^{\pm}$ , КПК	$\Delta R_0$ , КПК	$p_{\max}$	$\sigma_{R_0}^{\pm}$ , КПК	$\Delta R_0$ , КПК
$\Delta\lambda, \lambda_1^s = +3^\circ$	$50^\circ$	$+2.3$ $-1.8$	$-0.47^{+0.03}$ $-0.03$	$120^\circ$	$+0.92$ $-0.93$	$+0.294^{+0.014}$ $-0.012$
$\Delta\lambda, \lambda_1^s = +3^\circ, \sigma_\varpi = 0$	$50^\circ$	$+2.1$ $-1.5$	$-0.31^{+0.02}$ $-0.02$	$120^\circ$	$+0.44$ $-0.49$	$+0.001^{+0.006}$ $-0.005$
$\Delta\lambda, \lambda_1^s = +3^\circ, \sigma_w = 0$	$50^\circ$	$+1.1$ $-1.2$	$+0.051^{+0.017}$ $-0.019$	$120^\circ$	$+0.87$ $-0.90$	$+0.249^{+0.010}$ $-0.013$
$\Delta\lambda, \lambda_2^s = +100^\circ$	$97^\circ$	$+0.99$ $-1.02$	$+0.11 \pm 0.01$	$170^\circ$	$+0.31$ $-0.29$	$+0.008 \pm 0.004$
$\Delta\lambda, \lambda_2^s = +100^\circ, \sigma_\varpi = 0$	$97^\circ$	$+0.60$ $-0.58$	$-0.005^{+0.008}$ $-0.007$	$170^\circ$	$+0.18$ $-0.17$	$-0.002^{+0.003}$ $-0.002$
$\Delta\lambda, \lambda_2^s = +100^\circ, \sigma_w = 0$	$97^\circ$	$+0.84$ $-0.90$	$+0.044 \pm 0.012$	$170^\circ$	$+0.26$ $-0.23$	$+0.003^{+0.004}$ $-0.003$
$\sigma_\varpi/\varpi$	0.00	$+0.60$ $-0.58$	$-0.005^{+0.008}$ $-0.007$	0.20	$+1.5$ $-1.4$	$+0.48 \pm 0.02$
$\sigma_\varpi/\varpi, \sigma_w = 0$	0.01	$+0.092$ $-0.095$	$0.000 \pm 0.001$	0.20	$+1.5$ $-1.3$	$+0.43^{+0.02}$ $-0.02$
$\sigma_\varpi$ , МсД	0.00	$+0.60$ $-0.58$	$-0.005^{+0.008}$ $-0.007$	0.05	$+2.5$ $-2.5$	$+0.69 \pm 0.03$
$\sigma_\varpi$ , МсД, $\sigma_w = 0$	0.005	$+0.36$ $-0.39$	$-0.002^{+0.005}$ $-0.004$	0.05	$+2.3$ $-2.4$	$+0.67 \pm 0.03$
$\sigma_w$ , КПК	0.00	$+0.84$ $-0.90$	$+0.044^{+0.011}$ $-0.012$	0.60	$+2.1$ $-1.6$	$+0.37 \pm 0.02$
$\sigma_w$ , КПК, $\sigma_\varpi = 0$	0.05	$+0.17$ $-0.17$	$-0.002 \pm 0.002$	0.60	$+2.0$ $-1.5$	$+0.28 \pm 0.02$
$N$	3	$+2.1$ $-1.8$	$+0.71^{+0.02}$ $-0.02$	60	$+0.58$ $-0.64$	$-0.002^{+0.007}$ $-0.008$
$N, \sigma_\varpi = 0$	3	$+1.5$ $-1.2$	$+0.17 \pm 0.02$	60	$+0.33$ $-0.32$	$-0.004 \pm 0.004$
$N, \sigma_w = 0$	3	$+1.7$ $-1.5$	$+0.58 \pm 0.03$	60	$-0.54$ $+0.49$	$-0.007 \pm 0.006$
$i$	$-20^\circ$	$+0.99$ $-1.03$	$+0.11 \pm 0.01$	$0^\circ$	$+1.5$ $-1.5$	$+0.33 \pm 0.02$
$i, \sigma_\varpi = 0$	$-20^\circ$	$+0.60$ $-0.58$	$-0.005 \pm 0.01$	$0^\circ$	$+0.86$ $-0.88$	$+0.064^{+0.013}$ $-0.015$
$i, \sigma_w = 0$	$-20^\circ$	$+0.84$ $-0.90$	$+0.044^{+0.012}$ $-0.012$	$0^\circ$	$+1.4$ $-1.3$	$+0.22 \pm 0.02$

$\sigma_{R_0}^{\pm}$  растут не так драматически, но при  $\Delta\lambda \lesssim 50^\circ$  появляется существенное смещение  $\Delta R_0$ , которое обусловлено в основном ненулевой толщиной спирального рукава, т.е. которое не может быть устранено снижением ошибок параллаксов (ср. соответствующие строки в табл. 13, и панели рис. 25 при базовых значениях двух дисперсий и при обнулении либо одной, либо другой из них). Для короткого сегмента, близкого к центру Галактики, разброс объектов относительно средней линии даже при точных расстояниях не мал по отношению к линейной протяженности сегмента, поэтому его кривизна устанавливается ненадежно. Однако при  $\Delta\lambda \gtrsim 60^\circ$  близкие к центру сегменты можно использовать для оценивания  $R_0$ , но лишь при обязательном учете в методе неопределенности параллаксов, чтобы избежать возможных смещений (правые панели рис. 25). При значениях  $\Delta\lambda$ , больших базового, для обоих рукавов неопределенность  $R_0$  быстро падает с ростом  $\Delta\lambda$ , уменьшаясь втрое по сравнению с базовыми результатами (полученными при базовых значениях параметров), когда протяженность сегмента достигает примерно половины витка спирали (табл. 12, 13, рис. 24, 26).

Вторым по важности фактором является вид закона изменения статистической ошибки измерения расстояния с удалением от Солнца. Конечно, с увеличением неопределенности параллаксов в любом случае растет и дисперсия оценок  $R_{0,s}$ , но темп этого роста сильно зависит от модели, принятой для  $\sigma_\varpi$  (рис. 27, панели для основных серий рис. 28, табл. 12, 13).

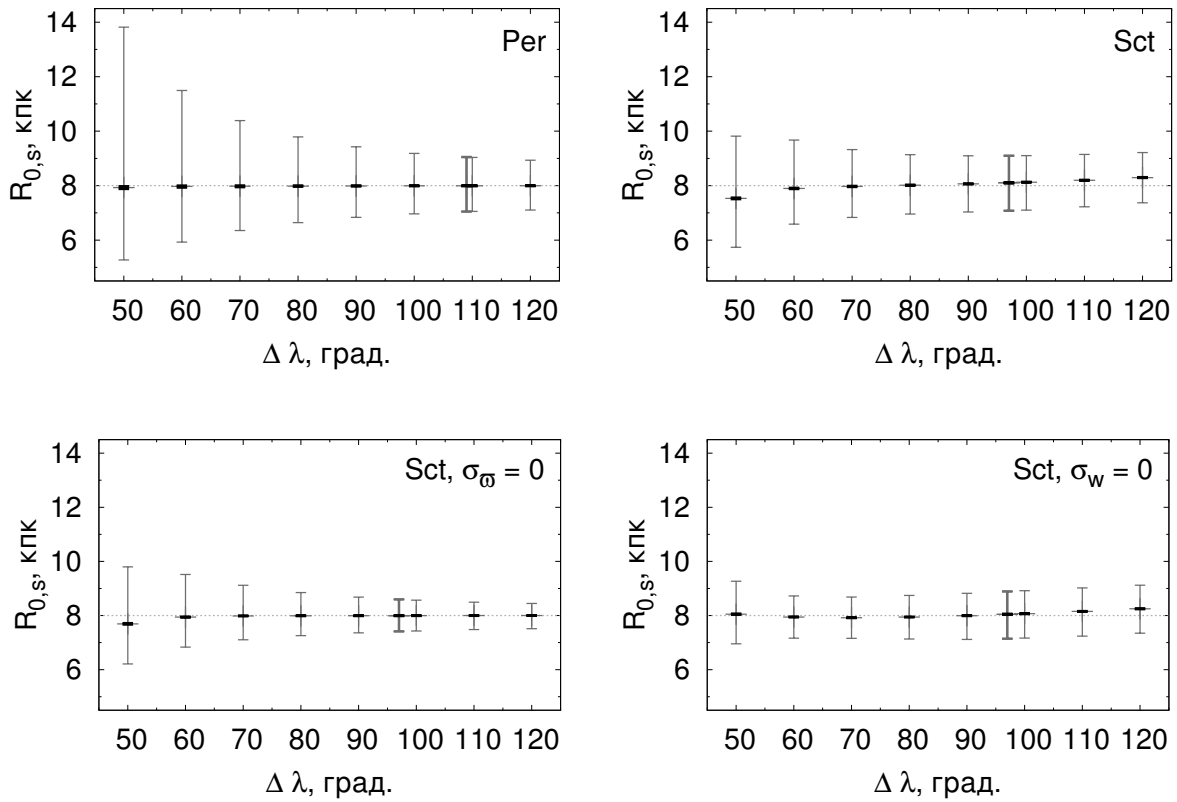


Рис. 25. Зависимость медианы и статистической неопределенности (интервала  $[Me R_0 - \sigma_{R_0}^-, Me R_0 + \sigma_{R_0}^+]$  для уровня  $1\sigma$ , серые бары) оценок  $R_0$  по геометрии спирального сегмента от угловой протяженности сегмента в случае постоянства долготы его левого края ( $\lambda_1^s$ ) для моделей рукавов Персея и Щита. На каждой панели утолщенный серый бар отмечает результат при базовом значении изменяемого параметра. Маленькие черные бары указывают  $1\sigma$ -неопределенность медианы  $Me R_0$ .

Анализ полученных результатов показал, что величины  $\sigma_{R_0}^\pm$  во всех рассмотренных случаях примерно следуют степенному закону

$$\sigma_{R_0}(\varsigma/\varsigma_b) = k(\varsigma/\varsigma_b)^\alpha + \sigma_{R_0}(\varsigma = 0), \quad (46)$$

где  $\varsigma$  — дисперсионная характеристика параллакс (  $\sigma_\varpi$  или  $\sigma_\varpi/\varpi$  ),  $\varsigma_b$  — базовое значение  $\varsigma$ ; индекс „ $\pm$ “ в формуле (46) для простоты опущен. Показатель  $\alpha$  оказался практически не зависящим от модели для  $\sigma_\varpi$ ; по-видимому, он задается конфигурацией сегмента: для рукава Персея  $\alpha \approx 1.5$ , для рукава Щита  $\alpha \approx 1$ . Однако коэффициент  $k$ , определяющий масштаб роста  $\sigma_{R_0}$ , для обоих рукавов при модели  $\sigma_\varpi = \text{const}$  кратно больше ( $k \approx 0.6$  для рукава Персея и 1 для рукава Щита), чем в случае  $\sigma_\varpi/\varpi = \text{const}$  ( $k \approx 0.2$  и  $0.4$  соответственно). Это приводит к тому, что, например, отношение  $\sigma_{R_0}(2)/\sigma_{R_0}(0)$  составляет при  $\sigma_\varpi/\varpi = \text{const}$   $\sim 1.5$  для рукава Персея и  $\sim 2.5$  для рукава Щита, а при  $\sigma_\varpi = \text{const}$  —  $\sim 3$  и  $\sim 4.5$  соответственно. С другой стороны, полное отсутствие ошибок в параллаксах повышает статистическую точность оценки  $R_{0,s}$  по сравнению с базовым результатом при  $\sigma_\varpi = \text{const}$  гораздо сильнее (для сегмента рукава Щита почти втрое), чем при  $\sigma_\varpi/\varpi = \text{const}$  (см. табл. 11).

Дисперсия оценок  $R_{0,s}$  с ростом числа  $N$  объектов, представляющих сегмент, ожидаемо снижается; при этом в случае рукава Персея, а для  $N/3 \geq 8$  — и в случае рукава Щита,

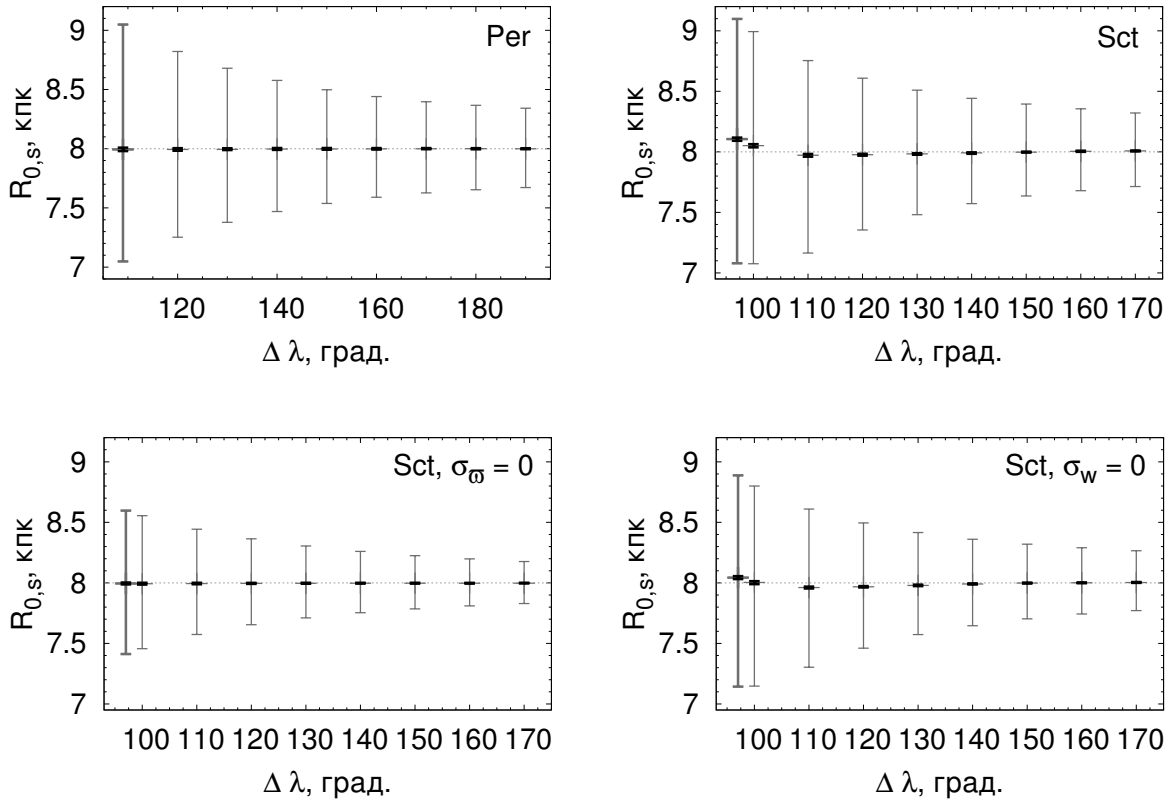


Рис. 26. То же, что на рис. 25, но в случае постоянства долготы правого края сегмента ( $\lambda_2^s$ ).

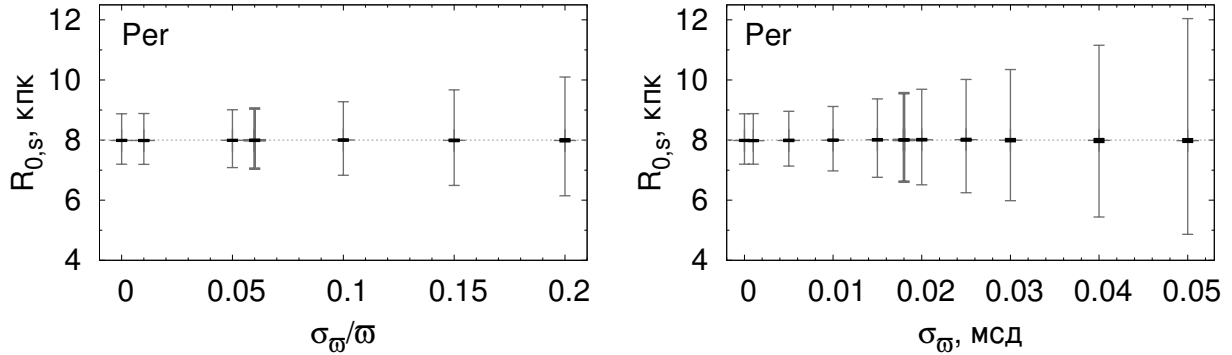


Рис. 27. То же, что на рис. 25, но в зависимости от относительной и абсолютной среднеквадратических ошибок параллакса для моделей рукава Персея.

согласие с законом

$$\sigma_{R_0}^{\pm}(N) \propto N^{-1/2} \quad (47)$$

почти идеальное (рис. 29, верхние панели). Худшее согласие для меньших  $N$  в случае второго рукава получается при наличии значимого смещения  $\Delta R_0$ . Последнее вызывается в основном ошибками в параллаксах (ср. две нижние и верхнюю правую панели рис. 29). При  $\sigma_w = 0$  мсд близкое согласие с законом (47) получается уже при  $N/3 \geq 3$  (нижняя левая панель рис. 29). Падение  $\sigma_{R_0}^{\pm}(N)$  по закону (47) и отсутствие значимых смещений  $\Delta R_0$  по крайней мере при  $N \geq 24$  (а для рукава Персея и при малых  $N$ ) свидетельствует в пользу состоятельности оценки  $R_0$  по геометрии спирального сегмента даже в случае применения



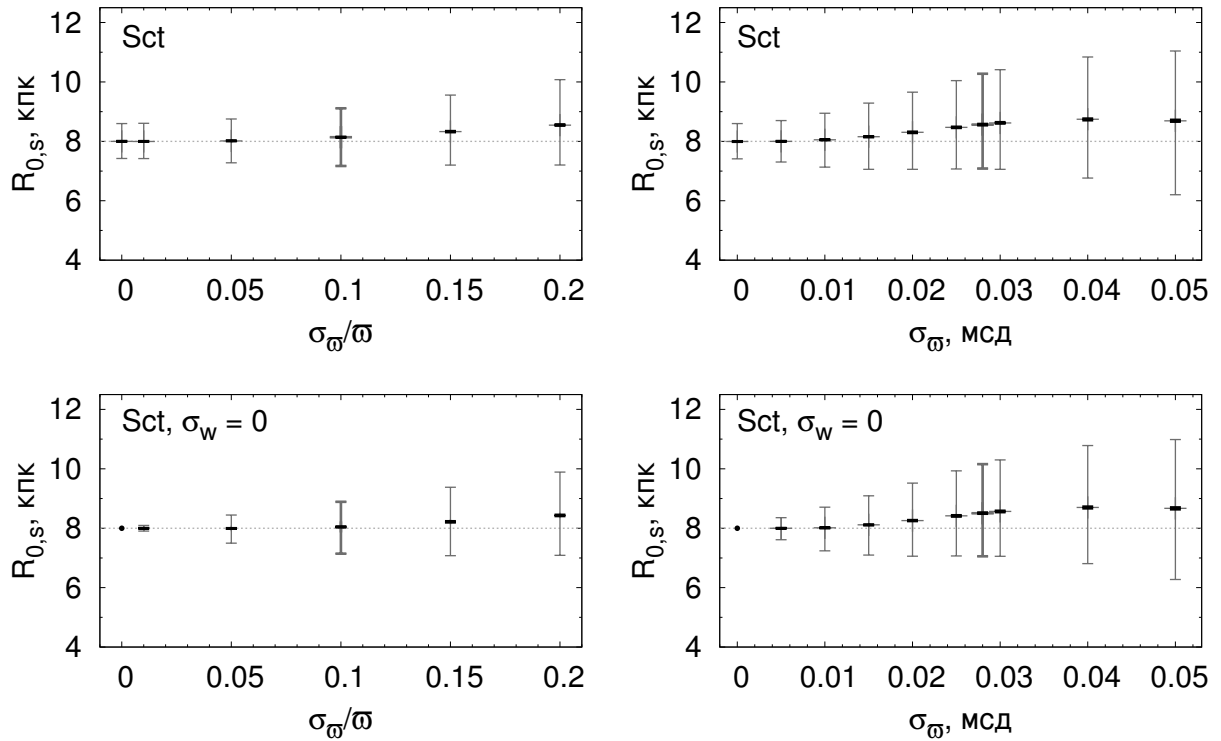


Рис. 28. То же, что на рис. 27, но для моделей рукава Щита.

упрощенного (трехточечного) метода (при  $N \rightarrow \infty$  математическое ожидание  $M R_{0,s} \rightarrow R_0$ , дисперсия  $D R_{0,s} \rightarrow 0$ ).

С увеличением  $\sigma_w$  величины  $\sigma_{R_0}^\pm$  растут, так же как и с увеличением  $\sigma_\omega$  и  $\sigma_\omega/\omega$ , примерно по степенному закону (рис. 30). Роль вклада  $\sigma_w$  в общую неопределенность оценки  $R_{0,s}$  зависит от уровня точности параллаксов и вида зависимости  $\sigma_\omega(r)$ . Так, для рукава Персея при обнулении разброса  $\sigma_w$  в случае  $\sigma_\omega/\omega = \text{const}$  значения  $\sigma_{R_0}^\pm$  снижаются вдвое, а в случае  $\sigma_\omega = \text{const}$  — лишь на  $\approx 1/4$  (табл. 11, панель „Per“ рис. 30). Для рукава Щита вклад ошибок параллаксов преобладает при обеих моделях для  $\sigma_\omega$ , поэтому сведение  $\sigma_w$  к нулю в обоих случаях сокращает  $\sigma_{R_0}^\pm$  незначительно при базовых значениях  $\sigma_\omega$  и  $\sigma_\omega/\omega$  (табл. 11, панели „Sct“ рис. 30).

Менее всего на дисперсию оценки  $R_{0,s}$  влияет угол закрутки  $i$  модельной спирали (рис. 31, табл. 12, 13). При базовых значениях обеих дисперсий задачи общий тренд с изменением  $i$  не вполне очевиден (верхние панели рис. 31). Однако обнуление  $\sigma_\omega$  дает ясную картину: величины  $\sigma_{R_0}^\pm$  почти линейно растут с увеличением  $|i|$  (средние панели рис. 31). Это означает, что в отсутствие ошибок измерений расстояние от Солнца до центра кольцевой структуры по ее сектору определяется с меньшей (!) точностью, чем расстояние до полюса спирального рукава по его сегменту при одинаковой угловой протяженности сектора и сегмента. И чем больше по модулю угол закрутки рукава, тем точнее результат. Рост  $\sigma_{R_0}^\pm$  с  $|i|$  умеренный, но не пренебрежимо малый: при  $\sigma_\omega = 0$  мсд на интервале  $i \in [-20^\circ, 0^\circ]$  он составляет  $\approx 1.3$  раза для рукава Персея и  $\approx 1.5$  раза для рукава Щита (табл. 12, 13). Для идеально тонких структур ( $\sigma_w = 0$  кпк), искаженных ошибками в параллаксах, поведение  $\sigma_{R_0}^\pm(i)$  определяется разбросом и характерными величинами расстояний до точек сегмента от Солнца и от центра Галактики, положением сегмента относительно оси центр–антицентр и другими параметра-

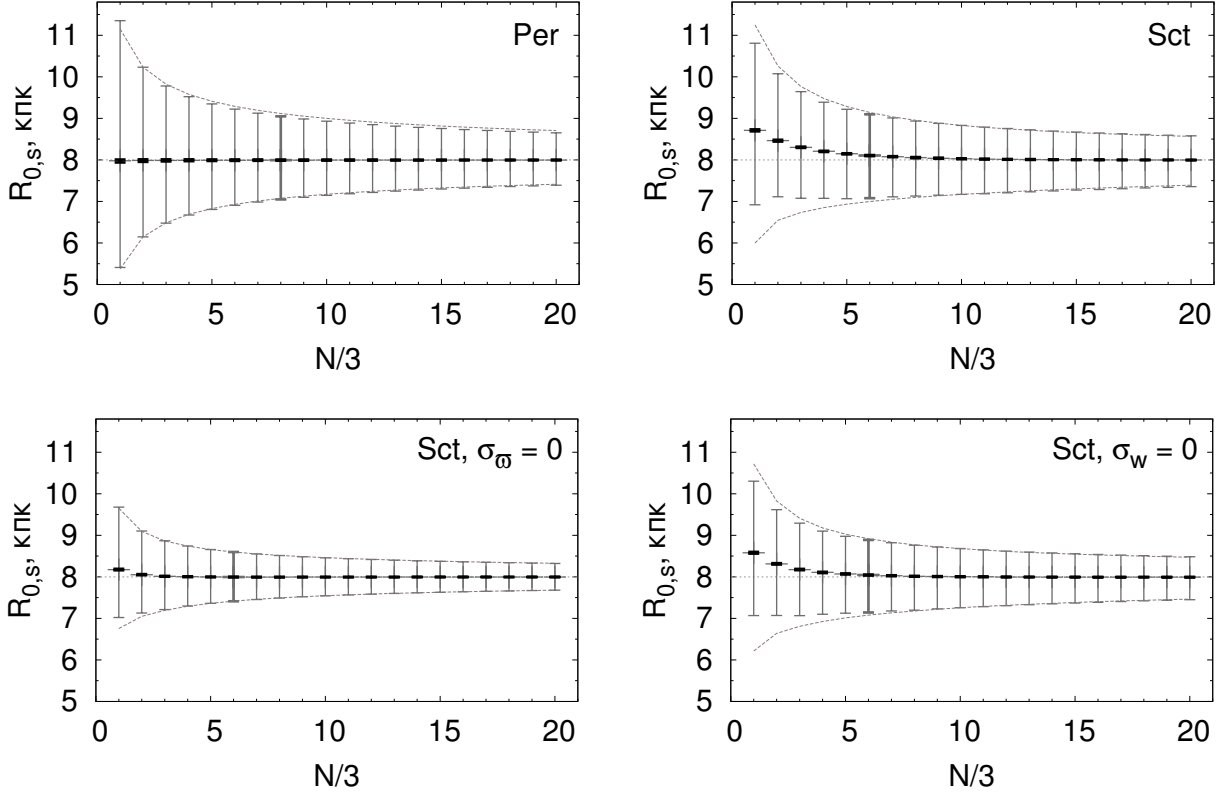


Рис. 29. То же, что на рис. 25, но в зависимости от количества населяющих сегмент объектов. Кривые линии представляют законы  $\sigma_{R_0^+}(N) \propto 1/\sqrt{N}$  и  $\sigma_{R_0^-}(N) \propto 1/\sqrt{N}$ .

ми. Поэтому для разных конфигураций тренды могут быть довольно различными (нижние панели рис. 31). Отсюда и сложные зависимости  $\sigma_{R_0^\pm}(i)$  при комбинированном действии обеих дисперсий (верхние панели того же рисунка).

#### 4.6. Обсуждение

Значимые величины смещений  $\Delta R_0$  обнаружены только для рукава Щита (табл. 13, рис. 25, 26, 28–31). Это вызвано тем, что его сегменты имеют заметно меньшую линейную протяженность и находятся гораздо ближе к центру Галактики по сравнению с сегментами рукава Персея (рис. 24). В результате решения для рукава Щита оказываются более чувствительными к дисперсии относительно средней линии. При этом главную роль в появлении значимых смещений играют ошибки в параллаксах: при их обнулении в большинстве случаев такие смещения исчезают (ср. результаты основных серий и дополнительных серий при  $\sigma_{\varpi} = 0$  в таблице и на рисунках, указанных выше). Смещения  $\Delta R_0$ , вызванные неопределенностью параллаксов, всегда положительные (см. там же результаты при  $\sigma_w = 0$ ). При нормальном распределении случайных ошибок параллаксов распределение ошибок расстояний имеет положительную асимметрию, что приводит к некоторому завышению расстояний в среднем, тем большому, чем больше  $\sigma_{\varpi}$ . В комбинации с расположением рукава Щита в общем направлении на центр Галактики это приводит к завышению оценок  $R_{0,s}$  по сегментам данного рукава в среднем. Однако не всегда смещения объясняются только ошибками в параллаксах: при малой протяженности ( $\Delta\lambda \lesssim 60^\circ$ ), низкой населенности ( $N/3 \lesssim 2$ ) и большом природном

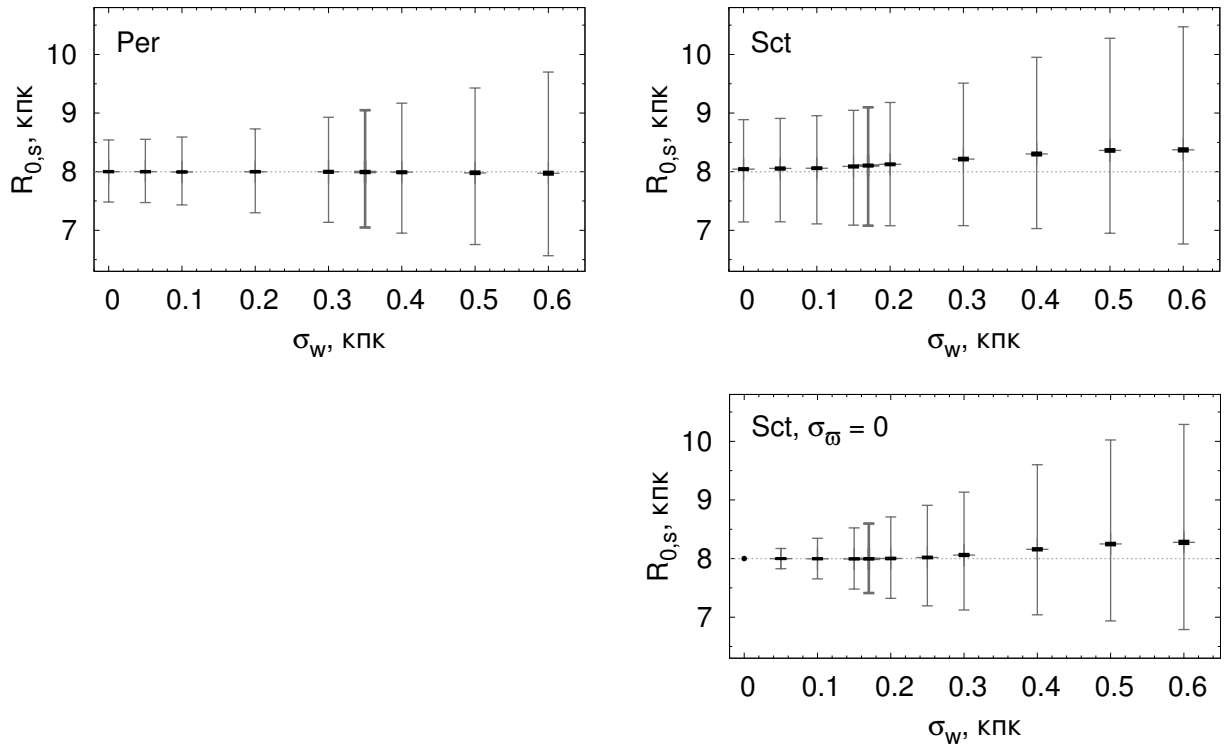


Рис. 30. То же, что на рис. 25, но в зависимости от разброса объектов поперек сегмента модельной спирали.

разбросе ( $\sigma_w \gtrsim 0.3$  кпк) даже для  $\sigma_w = 0$  мсд могут получиться небольшие, но значимые смещения  $\Delta R_0 = -0.3 \div +0.3$  кпк (табл. 13; панели „Sct,  $\sigma_w = 0$ “ рис. 25, 29, 30). Их природа иная: если дисперсия по сравнению с длиной сегмента не мала, то для немалой части наборов троек  $M_j''$  (например, лежащих на одной прямой) информация о кривизне исходного сегмента полностью теряется; формальные решения (11) для таких троек и приводят к смещениям. Чтобы избежать заметных смещений  $\Delta R_0$ , нужно 1) непосредственно в методе учитывать ошибки в параллаксах и 2) не использовать для пространственного моделирования короткие, малонаселенные, дисперсные сегменты, близкие к центру Галактики.

Во всех сериях экспериментов для рукава Персея и в большинстве для рукава Щита оказалось, что  $\sigma_{R_0}^+ > \sigma_{R_0}^-$  (см. таблицы и рисунки подраздела 4.5). Отчасти это следствие асимметрии распределения ошибок в расстояниях, о котором говорилось выше, отчасти — общее геометрическое свойство некоторых классов методов определения  $R_0$ , состоящее в том, что данные лучше согласуются с моделью при пробном  $R'_0 = \check{R}_0 + \delta R_0$ , чем при  $R'_0 = \check{R}_0 - \delta R_0$ , где  $\check{R}_0$  — оптимальное или истинное значение, особенно если  $\delta R_0 > 0$  кпк не мало по сравнению с  $\check{R}_0$  (см. Никифоров, 1999, 2000; Никифоров, Казакевич, 2009, в качестве примеров в кинематическом классе методов).

Результаты, полученные в предыдущем разделе, показывают, что дисперсия измерений  $R_0$  по геометрии спиральных сегментов в существенной степени зависит от закона  $\sigma_w(r)$ . Для примера мы создали псевдослучайные „наблюдаемые“ распределения объектов (по 100 на каждый градус долготы  $\lambda$ ), принадлежащих одному витку спирального рукава с параметрами, равными базовым значениям для рукава Персея, при постоянной абсолютной неопределенности параллаксов (рис. 32а) и при постоянной относительной неопределенности па-

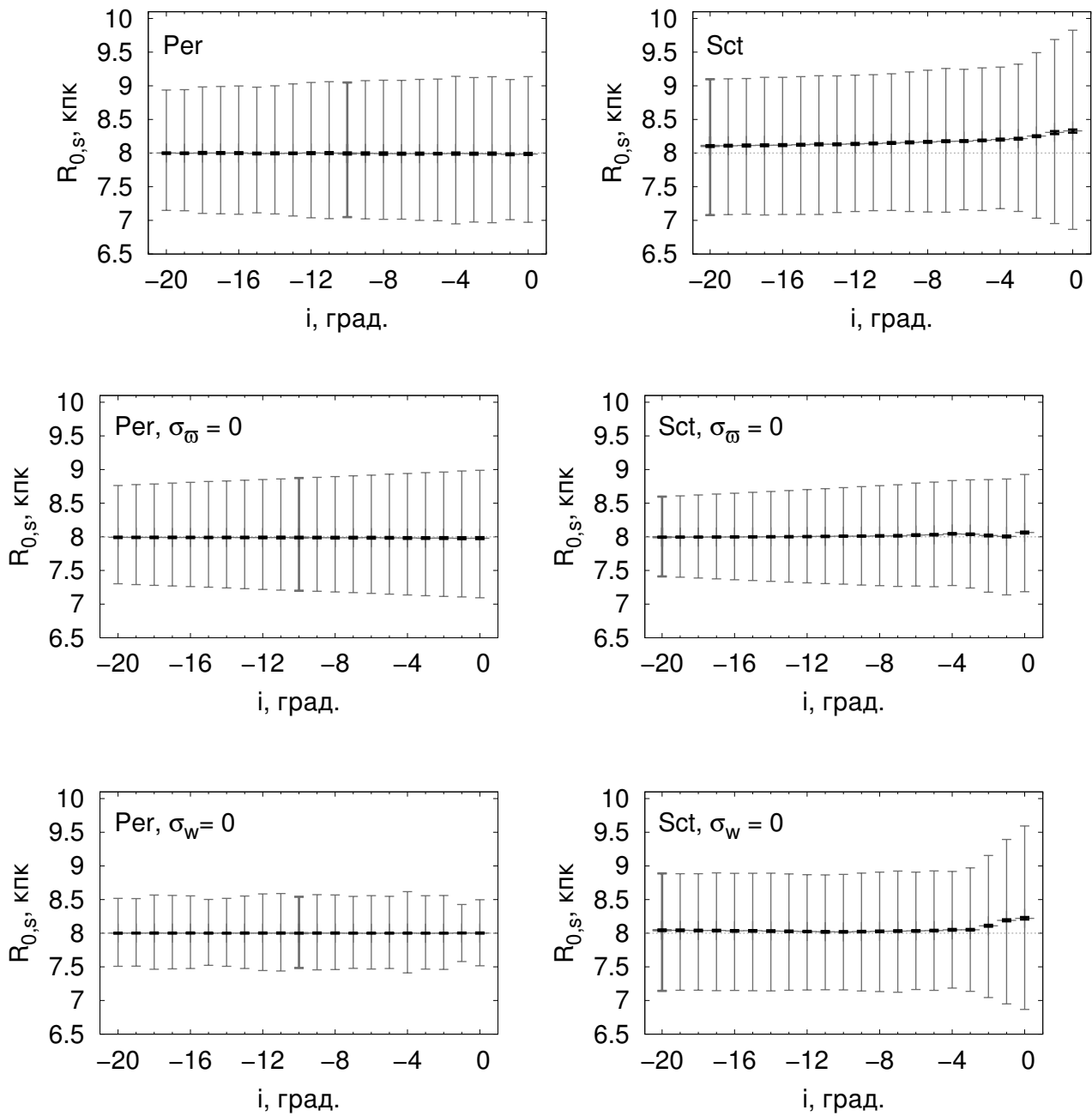


Рис. 31. То же, что на рис. 25, но в зависимости от угла закрутки модельной спирали.

раллаксов (рис. 32б). Эти рисунки иллюстрируют, насколько сильнее размывается истинное распределение трейсеров спирального рукава при модели  $\sigma_w = \text{const}$  по сравнению с моделью  $\sigma_w/w = \text{const}$ . То, что современные данные о мазерах ближе ко второй из этих моделей (раздел 4.2), является весьма удачным обстоятельством для перспектив применения настоящего подхода. В любом случае ошибки в параллаксах заметно деформируют наблюдаемое пространственное распределение, поэтому корректное его моделирование возможно только при учете обеих дисперсий. При этом на некоторых участках спирального рукава доминирует та или иная дисперсия, на других участках роль дисперсий сравнима (рис. 32б, 32в). Результаты экспериментов в подразделе 4.5 также указывают, что, хотя в целом ошибки измерений расстояний — более важный фактор, вклады двух дисперсий в общую неопреде-

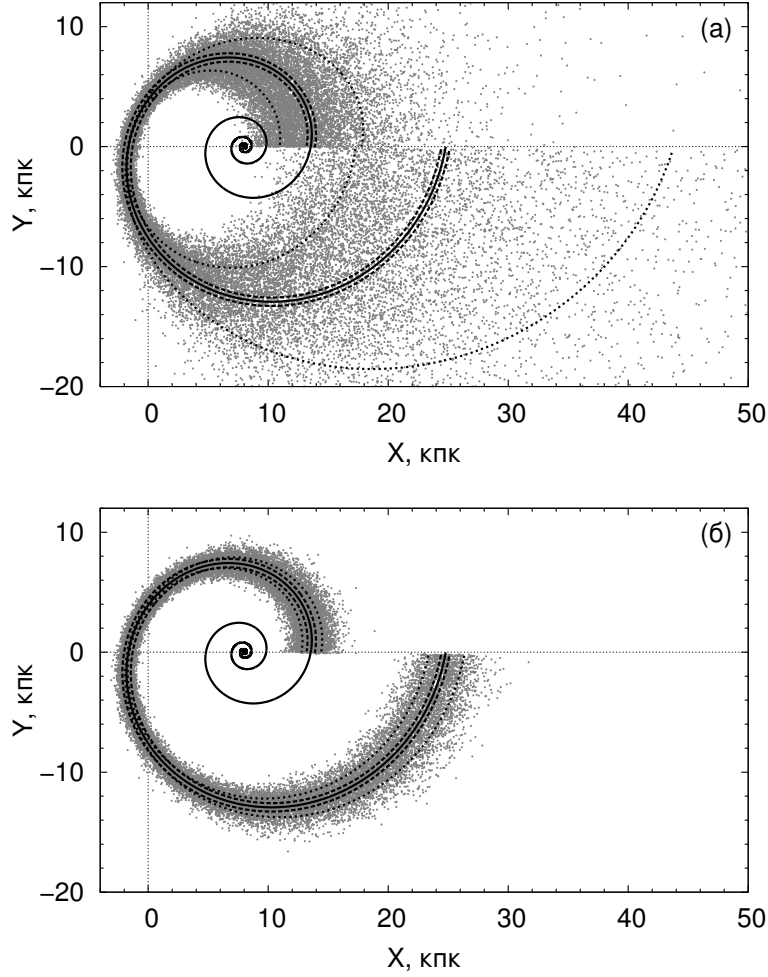


Рис. 32. Численно сгенерированное распределение 3600 объектов, принадлежащих одному витку спирального рукава с параметрами средней линии  $R_0 = 8.0$  кпк,  $i = -10^\circ$ ,  $\lambda_0 = 61^\circ$  и поперечным разбросом  $\sigma_w = 0.35$  кпк, при  $\sigma_\omega = 0.0175$  мсд (а) и  $\sigma_\omega/\varpi = 0.06$  (б). Сплошная линия изображает модельную спираль, штриховые линии ограничивают область отклонения от модельной спирали на  $\pm 1\sigma_w$ , пунктирные линии — на  $\pm 1\sigma_\omega$  (а) или  $\pm 1\sigma_\omega/\varpi$  (б).

ленность оценки  $R_{0,s}$  сопоставимы (ср. результаты при  $\sigma_\omega = 0$  мсд и при  $\sigma_w = 0$  кпк). Это означает, что при моделировании ни одну из дисперсий нельзя игнорировать.

Для обоих рукавов статистическая неопределенность  $\sigma_{R_0} \approx 1$  кпк при базовых параметрах сегментов (табл. 11). Как было показано в предыдущем разделе, сильнее всего на дисперсию оценок  $R_{0,s}$  влияет протяженность  $\Delta\lambda$  сегмента. Поэтому можно предположить, что наличие краевых объектов, которые в реальности и задают границы сегмента, должно несколько увеличивать обусловленность задачи определения  $R_0$  по сравнению с результатами моделирования сегмента тремя репрезентативными точками. Т.е. можно ожидать, что полученные в экспериментах величины  $\sigma_{R_0}$  суть оценки сверху. Для оценки коэффициента завышения были повторены численные эксперименты (см. подраздел 3.4) для распределенных по сегменту мазеров (при отказе от ограничения на  $i$ ) и получены значения  $\sigma_{R_0}^- = 0.84$  кпк,  $\sigma_{R_0}^+ = 0.85$  кпк для рукава Персея и  $\sigma_{R_0}^- = 0.73$  кпк,  $\sigma_{R_0}^+ = 0.65$  кпк для рукава Щита. Беря наибольшую из этих величин и сравнивая с базовыми результатами в данной работе, получаем, что завы-

шение  $\sigma_{R_0}^{\pm}$  в трехточечных экспериментах составляет по меньшей мере 15% при параметрах, близких к базовым. Т.е. для неопределенности по *единственному* сегменту можно принять осторожную оценку  $\sigma_{R_0} \simeq 0.85$  кпк. Если использовать данные о *нескольких* ( $N_{\text{arm}}$ ) сегментах, то при прочих равных условиях можно ожидать итоговой неопределенности

$$\sigma_{R_0} \simeq \frac{0.85 \text{ кпк}}{\sqrt{N_{\text{arm}}}}. \quad (48)$$

Например, при трех сегментах (рассеянные скопления)  $\sigma_{R_0} \simeq 0.5$  кпк, при четырех (мазеры) —  $\sigma_{R_0} \simeq 0.4$  кпк, при восьми (классические цефеиды) —  $\sigma_{R_0} \simeq 0.3$  кпк. Это близко к уровню статистической точности современных оценок  $R_0$  (см., например, Блэнд-Хоторн, Герхард, 2016; де Грийс, Боно, 2016).

Снизить прогнозируемую точность решения может использование коротких и малонаселенных сегментов, а также внутренне менее точных данных о гелиоцентрических расстояниях. Если в будущем при измерении параллаксов установится закон  $\sigma_{\varpi} = \text{const}$ , вопрос о величине  $\sigma_{\varpi}$  станет остро. Если же сохранится закон  $\sigma_{\varpi}/\varpi = \text{const}$ , то величина относительной точности параллаксов будет не так существенна.

Повысить точность  $R_0$  сильнее всего можно за счет увеличения протяженности выделенных сегментов. Следующими по важности факторами уточнения решения являются увеличение числа отнесенных к сегментам объектов с независимо измеренными расстояниями, а также выявление новых сегментов рукавов и внутренней структуры уже известных деталей спирального узора. Потенциал снижения  $\sigma_{R_0}$  за счет более точного измерения параллаксов (при  $\sigma_{\varpi}/\varpi = \text{const}$ ) лишь умеренный.

В целом полученные результаты показывают, что геометрическое оценивание  $R_0$  по спиральным сегментам является работоспособным для широкого набора возможных значений параметров даже в случае упрощенного (трехточечного) метода. Однако возможности этого, по сути пробного, метода ограничены: он не учитывает наличия природной и измерительной дисперсий; он слишком чувствителен к некоторым особенностям пространственного распределения объектов сегмента, особенно при малом объеме выборки; непосредственно решение с его помощью можно получить только для одного сегмента и для одного типа модели (логарифмической спирали). Учесть обе дисперсии можно при реализации настоящего подхода в рамках метода наибольшего правдоподобия (МНП). Хотя этот метод будет гораздо более трудоемким, он позволит оценивать  $R_0$  по геометрии спиральных сегментов для произвольных моделей рукавов и, одновременно, корректно решать классические и новые задачи моделирования спиральной структуры Галактики.

Заметим, что возможность введения более общей модели рукавов существенна для устранения внешней ошибки в рамках данного подхода. В случае трехточечного метода к такой ошибке могут привести систематические отклонения от логарифмической спирали. Так, если репрезентативные точки снимать с архимедовой спирали, то для базовых сегментов рукавов Персея и Щита трехточечный метод дает смещения  $\Delta R_0 = -0.02$  и  $+0.06$  кпк соответственно. Однако согласно нашим предварительным оценкам для рукавов нашей Галактики пока не удастся найти значимых отклонений от формы логарифмической спирали по трейсерам с надежными фотометрическими или абсолютными расстояниями. Среди различных вариантов наибольшая по модулю производная угла закрутки  $i_1 \equiv \frac{di}{d\lambda}$  составляет  $+0.029 \pm 0.076$  для рукава Персея и  $-0.04 \pm 0.25$  для рукава Щита<sup>1</sup> (обе оценки незначимо отличны от нуля). Если

<sup>1</sup>Здесь величины  $i$  и  $\lambda$  выражены в одинаковой угловой мере.

репрезентативные точки снять со спиралей с переменным углом закрутки  $i(\lambda) = i_0 + i_1(\lambda - \lambda_0)$ , взяв указанные значения  $i_1$ , это дает верхние по модулю оценки смещений при трехточечном методе:  $\Delta R_0 < +0.6$  кпк для рукава Персея и  $\Delta R_0 > -0.4$  кпк для рукава Щита. Во всех этих случаях нелогарифмические спирали на участке между репрезентативными точками при базовой протяженности сегментов мало отличаются от логарифмических моделей по сравнению с неопределенностью последних, а смещения для отдельных сегментов меньше или даже заметно меньше статистических ошибок  $R_0$  и имеют противоположные знаки для разных сегментов. Поэтому можно ожидать, что смещение итоговой оценки  $R_0$  по нескольким сегментам будет незначительным. В любом случае смещение этого типа не является принципиальной проблемой рассматриваемого способа определения  $R_0$  при условии перехода к МНП, допускающему использование моделей более общего вида, что позволит выявлять систематические отклонения от логарифмической спирали, если они существуют, и одновременно учитывать их при оценивании параметров. С другой стороны, масштаб потенциальных смещений для отдельных сегментов показывает, что поиску таких отклонений надо уделять внимание.

## 5. Заключение

Предложен новый подход к пространственному моделированию сегментов спиральных рукавов Галактики, включающий определение расстояния до полюса спиральной структуры, т.е. расстояния до центра Галактики  $R_0$ . В целях изучения возможностей этого подхода рассмотрена задача о восстановлении параметров логарифмической спирали как геометрической фигуры по принадлежащим ей точкам в предположении, что направление на полюс спирали известно, а точки представляют сегмент, составляющий менее одного витка спирали. Проведенное численно-аналитическое исследование на примерах репрезентативных спиралей для рукавов Персея и Стрельца позволяет сделать следующие выводы.

1. Задачу восстановления параметров спиральной ветви однозначно решает знание положений четырех точек сегмента. Однако это решение не может быть использовано на практике: при любом малом изменении положений точек решение перестает существовать, так как в общем случае не существует спирали, которая проходит за один виток через четыре произвольные точки.
2. Если известно положение трех точек сегмента, то решение существует всегда, но оно в общем случае неоднозначное: кроме исходного значения  $R_0$  может быть один или два дополнительных корня. При этом
  - а) если сегмент полностью лежит по одну сторону от оси  $X$  (линии центр–антицентр Галактики) или касается крайней точкой этой оси, то корней всегда два;
  - б) если сегмент пересекает ось  $X$ , то обычно корень единственный, за исключением сегментов, *почти* полностью находящихся по одну сторону от оси  $X$  (три корня, в точках бифуркации — два), и коротких сегментов, большая часть протяженности которых приходится на отрицательные долготы  $l$ ,  $\Lambda$  (два корня);
  - в) дополнительные корни обычно сильно отличаются от исходного  $R_0$  (для рукава Персея они зачастую отрицательны) и отличимы от него по углу закрутки, за

исключением случаев, когда средняя точка сегмента находится вблизи траверсных направлений ( $\Lambda_2 \approx -80^\circ \div -70^\circ$  и  $\Lambda_2 \approx +100^\circ \div +115^\circ$ );

- г) область конфигураций троек точек, для которой существует единственное решение, не мала и соответствует сегментам в околосолнечном секторе Галактики, которые обычно и выявляются по трейсерам с надежными расстояниями.

Этот, трехточечный, метод может быть применен к реальным данным и в численных экспериментах при условии введения критерия выбора между корнями.

3. При поиске геометрически точного решения и, вероятно, аппроксимационного решения предпочтительны сегменты, пересекающие ось  $X$ , но не центрированные вблизи траверсных направлений.

На основе трехточечного метода построен упрощенный алгоритм определения параметров спирального сегмента по реальным объектам. Применение алгоритма к данным Рида и др. (2014) о мазерах с тригонометрическими параллаксами подтвердило в целом работоспособность нового подхода. Надежные решения удалось получить для рукавов Персея и Щита. Усреднение этих результатов с коррекциями за конечность выборки и смещение эстиматора привело к итоговой оценке  $R_0 = 8.8 \pm 0.5$  кпк по геометрии спиральных сегментов, трассируемых мазерами.

Аналогичным, двухточечным при фиксации  $R_0$ , методом оценены параметры пяти сегментов спиральных рукавов, выявляемых по мазерам. Подтверждено различие в общем случае углов закрутки у разных спиральных рукавов. Полученные результаты позволяют предположить, что Местный рукав может быть ответвлением от рукава Стрельца. Обнаружена существенная отрицательная корреляция между углом закрутки  $i$  и величиной  $R_0$ . Показано, что наблюдаемая дисперсия мазеров относительно Внешнего рукава и рукава Щита в целом может быть объяснена каталожными неопределенностями тригонометрических параллаксов.

С целью выяснения возможностей и границ применимости предложенного нового способа определения расстояния до центра Галактики  $R_0$  — по геометрии сегментов спиральных рукавов — методом численного моделирования исследовано влияние различных факторов на статистические свойства оценки  $R_0$  по отдельному сегменту. Оценки  $R_0$  находились упрощенным методом, восстанавливающим геометрию сегмента по трем репрезентативным точкам, что позволило за ограниченное время выполнить большое число экспериментов. Параметры задачи варьировались в широких окрестностях базовых значений, характеризующих сегменты рукавов Персея и Щита по современным данным о мазерах с тригонометрическими параллаксами.

Показано, что статистическая неопределенность  $\sigma_\varpi$  современных измерений параллаксов мазеров систематически снижается с ростом гелиоцентрического расстояния  $r$ , при этом относительная неопределенность  $\sigma_\varpi/\varpi$  остается в среднем примерно постоянной (по крайней мере на  $r \lesssim 3.2$  кпк).

Результаты численных экспериментов свидетельствуют в пользу состоятельности оценки  $R_0$  по геометрии спирального сегмента. Значимые смещения оценки обнаружены только для внутреннего рукава (Щита); они обусловлены в основном случайными ошибками в параллаксах, приводящими к асимметричному распределению расстояний  $r$ , а также малой угловой протяженностью  $\Delta\lambda$  сегмента и малым числом  $N$  представляющих его объектов.



На дисперсию оценки  $R_0$  наибольшее влияние оказывает протяженность  $\Delta\lambda$  (при росте последней от базового значения до половины витка спирали  $\sigma_{R_0}$  снижается втрое). С ростом неопределенности параллаксов  $\sigma_{R_0}$  увеличивается. Если при дальнейших измерениях параллаксов величина  $\sigma_{\varpi}$  в среднем будет оставаться постоянной с  $r$ , то значение  $\sigma_{\varpi}$  будет почти таким же важным для дисперсии  $R_0$ , как  $\Delta\lambda$ . При сохранении закона  $\sigma_{\varpi}/\varpi = \text{const}$ , который хорошо описывает современные данные, остальные параметры, кроме угла закрутки  $i$ , оказывают одинаково существенное, но меньшее влияние на  $\sigma_{R_0}$ . В отсутствие ошибок параллаксов уменьшение  $|i|$  слабо увеличивает дисперсию  $R_0$ ; в частности, это означает, что при вырождении спирального сегмента в кольцевой сектор (при  $i = 0^\circ$ ) расстояние до центра последнего определяется менее точно, чем расстояние до полюса спирального сегмента.

Границы применимости определения  $R_0$  по геометрии спирального сегмента лимитируются для внешнего рукава (Персея) дисперсией оценки  $R_0$  ( $\Delta\lambda > 70^\circ$ ,  $\sigma_{\varpi} < 0.04$  мсд,  $N/3 > 1$ ), для внутреннего рукава (Щита) — наличием существенного смещения оценки  $R_0$ , вызванного не ошибками параллаксов, а конечной толщиной сегмента ( $\Delta\lambda > 50^\circ$ ,  $\sigma_w < 0.3$  кпк,  $N/3 > 2$ ).

То, что современные данные о мазерах лучше согласуются с моделью  $\sigma_{\varpi}/\varpi = \text{const}$ , является очень удачным обстоятельством для применения настоящего подхода к этим трейсерам спиральной структуры. Повысить точность итоговой оценки  $R_0$  можно за счет использования в анализе нескольких сегментов рукавов, увеличения протяженности  $\Delta\lambda$  выделенных сегментов и числа отнесенных к ним объектов с независимыми оценками расстояний.

Полученные результаты говорят в пользу работоспособности оценивания  $R_0$  по спиральным сегментам для широкого набора возможных значений параметров даже при использовании робастного, но неэффективного L-эстиматора (медианы) в трехточечном методе. Это делает осмысленным разработку более сложного, но и более корректного метода на основе эффективного M-эстиматора. Как показали численные эксперименты, комбинированное действие измерительной дисперсии расстояний и природного разброса поперек рукава в общем случае приводит к сложному виду наблюдаемого пространственного распределения объектов, при этом влияние на него одной из дисперсий в целом сопоставимо с влиянием другой. Для корректного моделирования такого распределения в качестве M-эстиматора могут быть использованы оценки методом наибольшего правдоподобия (ML-эстиматоры).

В настоящее время в рамках метода наибольшего правдоподобия разрабатывается алгоритм пространственного моделирования сегментов спиральных рукавов с учетом дисперсии поперек рукава и неопределенности гелиоцентрических расстояний, не требующий жесткой привязки объекта к определенному сегменту, применимый к разным типам объектов, трассирующих спиральную структуру. Тестирование алгоритма проводилось в применении к данным о пространственном распределении мазерных источников и классических цефеид.

**Основные результаты работы представлены в следующих публикациях.**

1. Веселова А.В. Задача восстановления параметров спиральных рукавов Галактики по их сегментам. Труды 43-й Международной студенческой научной конференции «Физика космоса» (Екатеринбург, 3—7 февраля 2014 г.), с. 181.
2. Веселова А.В. Исследование работоспособности метода определения расстояния до центра Галактики по сегментам спиральных рукавов. Труды 44-й Международной студенческой научной конференции «Физика космоса» (Екатеринбург, 2—6 февраля 2015 г.), с. 145.
3. Никифоров И.И., Веселова А.В. О возможности определения расстояния до центра Галактики по геометрии сегментов спиральных рукавов. Сборник резюме докладов научной конференции «Астрономия от ближнего космоса до космологических далей» (Москва, ГАИШ МГУ, 25—30 мая 2015 г., ред. Самусь Н.Н., Штаерман В.Л.), с. 98.
4. Nikiforov I.I., Veselova A.V. On the possibility of determining the distance to the Galactic center from the geometry of spiral arm segments. *Baltic Astronomy* **24**, 387 (2015).
5. Никифоров И.И., Веселова А.В. Геометрические аспекты и апробация определения расстояния до центра Галактики по сегментам спиральных рукавов. Письма в Астрон. журн. **44**, 102 (2018) [Nikiforov I.I., Veselova A.V. Geometric Aspects and Testing of the Galactic Center Distance Determination from Spiral Arm Segments. *Astron. Lett.* **44**, 81 (2018)].
6. Веселова А.В., Никифоров И.И. Анализ структуры участков спиральных рукавов Галактики, выделяемых по классическим цефеидам. Сборник тезисов конференции «Астрономия–2018» (Москва, ИЗМИРАН, ГАИШ МГУ, 22–26 октября 2018 г., ред. Малков О.Ю., Расторгуев А.С., Самусь Н.Н., Обридко В.Н.) **1**, с. 99.
7. Никифоров И.И., Веселова А.В. Численное исследование статистических свойств оценки расстояния до центра Галактики по геометрии сегментов спиральных рукавов. Письма в Астрон. журн. **44**, 763 (2018) [Nikiforov I.I., Veselova A.V. Numerical Study of Statistical Properties of the Galactic Center Distance Estimate from the Geometry of Spiral Arm Segments. *Astron. Lett.* **44**, 699].  
Никифоров И.И., Веселова А.В. Исправления к статье «Численное исследование статистических свойств оценки расстояния до центра Галактики по геометрии сегментов спиральных рукавов» (Письма в Астрон. журн. **44**, 763). Письма в Астрон. журн. **45**, 142 (2019).

## Список литературы

1. Аведисова В.С., Письма в Астрон. журн. **11**, 448 (1985) [V.S. Avedisova, Sov. Astron. Lett. **11**, 185 (1985)].
2. Агемян Т.А., *Основы теории ошибок для астрономов и физиков* (М.: Наука, 1972).
3. Балона, Фист (L.A. Balona and M.W. Feast), MNRAS **167**, 621 (1974).
4. Блэнд-Хоторн, Герхард (J. Bland-Hawthorn and O. Gerhard), Ann. Rev. Astron. Astrophys. **54**, 529 (2016).
5. Бобылев В.В., Байкова А.Т., Письма в Астрон. журн. **39**, 843 (2013) [V.V. Bobylev, A.T. Bajkova, Astron. Lett. **39**, 759 (2013)].
6. Бобылев, Байкова (V.V. Bobylev and A.T. Bajkova), MNRAS **437**, 1549 (2014).
7. Валле (J.P. Vallée), Astron. J. **95**, 750 (1988).
8. Генцель и др. (R. Genzel, F. Eisenhauer, and S. Gillessen), Rev. Modern Phys. **82**, 3121 (2010).
9. Грабельский и др. (D.A. Grabelsky, R.S. Cohen, L. Bronfman, and P. Thaddeus), Astrophys. J. **331**, 181 (1988).
10. Грив и др. (E. Griv, I.-G. Jiang, and L.-G. Hou), Astrophys. J. **844**, 118 (2017).
11. Дамбис А.К., Бердников Л.Н., Ефремов Ю.Н., Князев А.Ю., Расторгуев А.С., Глушкова Е.В., Кравцов В.В., Тернер Д.Г. и др., Письма в Астрон. журн. **41**, 533 (2015) [A.K. Dambis, L.N. Berdnikov, Yu.N. Efremov, A.Yu. Kniazev, A.S. Rastorguev, E.V. Glushkova, V.V. Kravtsov, D.G. Turner, et al., Astron. Lett. **41**, 489 (2015)].
12. де Грийс, Боно (R. de Grijs and G. Bono), Astrophys. J. Suppl. Ser. **227**, 5 (2016).
13. До и др. (T. Do, G.D. Martinez, S. Yelda, A. Ghez, J. Bullock, M. Kaplinghat, J.R. Lu, A.H.G. Peter, et al.), Astrophys. J. **779**, L6 (2013).
14. Дэйм и др. (T.M. Dame, B.G. Elmegreen, R.S. Cohen, and P. Thaddeus), Astrophys. J. **305**, 892 (1986).
15. Ефремов Ю.Н., Астрон. журн. **88**, 127 (2011) [Yu.N. Efremov, Astron. Rep. **55**, 108 (2011)].
16. Жилкова и др. (L. Jilková, G. Carraro, B. Jungwiert, and I. Minchev), Astron. Astrophys. **541**, A64 (2012).
17. Касетти-Динеску и др. (D.I. Casetti-Dinescu, T.M. Girard, L. Jilková et al.), Astron. J. **146**, 33 (2013).
18. Кёнуй (M.H. Quenouille), Biometrika **43**, 353 (1956)
19. Кёнуй (M.H. Quenouille), Ann. Mathemat. Statistics **20**, 355 (1949).

20. Кобзарь А.И., *Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников* (М.: Физматлит, 2006).
21. Камарийо и др. (T. Camarillo, V. Mathur, T. Mitchell, and B. Ratra), *Publ. Astron. Soc. Pacific* **130**, 024101 (2018).
22. Корчагин и др. (V.I. Korchagin, S.A. Khoperskov, and A.V. Khoperskov), *Baltic Astron.* **25**, 356 (2016).
23. Кришнан и др. (V. Krishnan, S.P. Ellingsen, M.J. Reid, H.E. Bignall, J. McCallum, C.J. Phillips, C. Reynolds, and J. Stevens), *MNRAS* **465**, 1095 (2017).
24. Крэмpton и др. (D. Crampton, D. Bernard, B.L. Harris, and A.D. Thackeray), *MNRAS* **176**, 683 (1976).
25. Кэчпоул и др. (R.M. Catchpole, P.A. Whitelock, M.W. Feast, S.M.G. Hughes, M. Irwin, and C. Alard), *MNRAS* **455**, 2216 (2016).
26. Локтин А.В., *Астрон. журн.* **56**, 1188 (1979) [A.V. Loktin, *Sov. Astron.* **23**, 671 (1979)].
27. Маджаесс и др. (D. Majaess, I. Dékány, G. Hajdu, D. Minniti, D. Turner, and W. Gieren), *arXiv:1805.04119* (2018).
28. Миньяр (F. Mignard), *Astron. Astrophys.* **354**, 522 (2000).
29. Никифоров И.И., *Астрон. журн.* **76**, 403 (1999) [I.I. Nikiforov, *Astron. Rep.* **43**, 345 (1999)].
30. Никифоров (I.I. Nikiforov), *ASP Conf. Ser.* **209**, 403 (2000).
31. Никифоров (I.I. Nikiforov), *ASP Conf. Ser.* **316**, 199 (2004).
32. Никифоров И.И., Казакевич Е.Э., *Изв. ГАО* **219**, 4, 245 (2009).
33. Никифоров, Смирнова (I.I. Nikiforov and O.V. Smirnova), *Astron. Nachr.* **334**, 749 (2013).
34. Никифоров, Шеховцова (I.I. Nikiforov and T.V. Shekhovtsova), *Proc. Inter. Conf. "Stellar Dynamics: from Classic to Modern"* (Saint Petersburg, Russia, 21–27 August 2000, Ed. L.P. Ossipkov, I.I. Nikiforov, Saint Petersburg: Saint Petersburg Univ. Press, 2001), p. 28.
35. Павловская Е.Д., Сучков А.А., *Астрон. журн.* **61**, 665 (1984) [E.D. Pavlovskaya, A.A. Suchkov, *Sov. Astron.* **28**, 389 (1984)].
36. Поль и др. (M. Pohl, P. Englmaier, and N. Bissantz), *Astrophys. J.* **677**, 283 (2008).
37. Попова М.Э. Письма в *Астрон. журн.* **32**, 274 (2006) [M.É. Popova, *Astron. Lett.* **32**, 244 (2006)].
38. Попова М.Э., Локтин А.В., Письма в *Астрон. журн.* **31**, 190 (2005) [M.E. Popova, A.V. Loktin, *Astron. Lett.* **31**, 171 (2005)].
39. Пресс и др. (W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery), *Numerical Recipes in C* (Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 1997).

40. Расторгуев А.С., Уткин Н.Д., Заболотских М.В., Дамбис А.К., Байкова А.Т., Бобылев В.В., *Астрофиз. бюлл.* **72**, 134 (2017) [A.S. Rastorguev, N.D. Utkin, M.V. Zabolotskikh, A.K. Dambis, A.T. Bajkova, V.V. Bobylev, *Astrophys. Bull.* **72**, 122 (2017)].
41. Рид (M.J. Reid), Гарвард-Смитсоновский центр астрофизики, США, частное сообщение (2014).
42. Рид и др. (M.J. Reid, K.M. Menten, X.W. Zheng, A. Brunthaler, L. Moscadelli, Y. Xu, B. Zhang, M. Sato, et al.), *Astrophys. J.* **700**, 137 (2009).
43. Рид и др. (M.J. Reid, K.M. Menten, A. Brunthaler, X.W. Zheng, T.M. Dame, Y. Xu, Y. Wu, B. Zhang, et al.), *Astrophys. J.* **783**, 130 (2014).
44. Савченко, Решетников (S.S. Savchenko and V.P. Reshetnikov), *MNRAS* **436**, 1074 (2013).
45. Сюй и др. (Y. Xu, J.J. Li, M.J. Reid, K.M. Menten, X.W. Zheng, A. Brunthaler, L. Moscadelli, T.M. Dame, et al.), *Astrophys. J.* **769**, 15 (2013).
46. Фист, Шаттлуорт (M.W. Feast and M. Shuttleworth), *MNRAS* **130**, 245 (1965).
47. Фостер, Купер (T. Foster and B. Cooper), *ASP Conf. Ser.* **438**, 16 (2010).
48. Фрэнсис, Андерсон (C. Francis and E. Anderson), *MNRAS* **422**, 1283 (2012).
49. Чэнь и др. (X. Chen, S. Wang, L. Deng, and R. de Grijs), *arXiv:1804.06807* (2018).
50. Эфрон, Штейн (B. Efron and C. Stein), *Ann. Statistics* **9**, 586 (1981).