

Санкт-Петербургский государственный университет

*АДАМОВИЧ Ирина Аркадьевна*

Выпускная квалификационная работа

*Оптимизация параметров подкрепленной шпангоутами  
цилиндрической оболочке*

Уровень образования:

Направление 01.06.01 "Математика и механика"

Основная образовательная программа МК.3004.2015 "Механика"

Профиль подготовки: Механика деформации твердого тела

Научный руководитель:

профессор СПбГУ, доктор  
физ.-мат. наук, Филиппов С. Б.

Рецензент:

научный сотрудник универси-  
тета Ньюкасла, канд. физ.-мат.  
наук, Макаренко И. Н.

Санкт-Петербург

2019

Saint Petersburg State University

*ADAMOVICH Irina*

Graduation Qualification Paper

*Optimal design of stiffened cylindrical shell*

Scientific supervisor:

Prof., D.Sc. Sergey B. Filippov

Reviewer:

Res.Assoc., Dr. Irina N. Makarenko

Saint Petersburg

2019

# ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
<b>ВСТУПЛЕНИЕ</b> .....	<b>2</b>
<b>ГЛАВА 1 СЛУЧАЙ ШАРНИРНОГО ОПИРАНИЯ</b>	<b>4</b>
1.1 Постановка задачи .....	4
1.2 Нулевое приближение .....	5
1.3 Метод осреднения .....	6
1.4 Эффективная жесткость .....	8
1.5 Оптимизация параметров подкрепленной оболочки .....	10
1.6 Числовые результаты оптимальных параметров .....	13
1.7 Собственные значения в случае $e \neq 0$ .....	14
<b>ГЛАВА 2 СЛУЧАЙ ЖЕСТКОЙ ЗАДЕЛКИ</b>	<b>17</b>
2.1 Нулевое приближение .....	17
2.2 Оптимальное расположение шпангоутов .....	18
2.3 Вычисление собственных значений .....	19
2.4 Эффективная жесткость .....	20
2.5 Оптимизация параметров подкрепленной оболочки .....	22
2.6 Численные расчеты .....	24
<b>ГЛАВА 3 ОБОЛОЧКА С КОСЫМ КРАЕМ</b>	<b>26</b>
3.1 Постановка задачи .....	26
3.2 Оптимизация параметров подкрепленной оболочки .....	27
3.3 Численные расчеты .....	29
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> .....	<b>30</b>
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ</b> .....	<b>31</b>

## ВСТУПЛЕНИЕ

Подкрепленные цилиндрические оболочки широко применяются в кораблестроении, машиностроении, при конструировании самолетов, ракет и в других областях техники. Теория оболочек начала развиваться еще в XIX веке, но практические требования к созданию этой теории появились намного раньше, вследствие роста машиностроения. У оболочек срединная поверхность при деформации подвергается сжатию, растяжению, а также изгибу и кручению, поэтому потребовалось ввести в теорию оболочек некоторые допущения, которые делали бы ее менее сложной.

Можно сказать, что изучение теории оболочек началось с работы Х. Арона 1874 года [1], основанной на гипотезах Кирхгофа, однако, работа содержала некоторые неточности. В 1888 году Ляв исправил эти неточности и доработал теорию [2]. Он сформулировал основные уравнения, описывающие теорию тонких оболочек по аналогии с теорией пластин Кирхгофа.

В зависимости от формы срединной поверхности, оболочки разделяют на цилиндрические, конические, сферические и другие. Оболочка считается тонкой, если отношение толщины оболочки к радиусу кривизны мало. Важными характеристиками оболочек являются первая частота колебаний и критическое внешнее давление. Их определение сводится к решению краевых задач на собственные значения. При решении уравнений можно использовать асимптотические методы, так как уравнения тонких оболочек, содержат безразмерную толщину оболочки, как малый параметр.

В монографии [3] описаны простые асимптотические формулы для низших частот колебаний и критического внешнего давления, которые получены с помощью приближенного представления решения краевой задачи в виде суммы полубезмоментного состояния и краевых эффектов. Разработаны алгоритмы для определения оптимальных параметров подкрепленных цилиндрических оболочек с прямым и косым краями, масса оболочек фиксирована. Оптимальными считаются параметры, обеспечивающие максимальное значение первой частоты или критического давления.

В статье [4] используется более естественная для приложений постановка задачи оптимизации параметров подкрепленной оболочки. Ищутся параметры оболочки, имеющей наименьшую массу и заданную первую частоту колебаний. С использованием приближенной формулы для первой частоты колебаний получены явные приближенные формулы для оптимальных параметров и массы оболочки.

В данной работе найдены приближенные значения оптимальных параметров подкрепленной цилиндрической оболочки с прямым и косым краями, имеющей наименьшую массу и заданное критическое внешнее давление. Для оболочки с прямым краем рассмотрены случаи шарнирного опирания и жесткой заделки.

СЛУЧАЙ ШАРНИРНОГО ОПИРАНИЯ

Постановка задачи

Рассмотрим задачу о потере устойчивости тонкой цилиндрической оболочки средней длины под действием равномерного внешнего давления. Оболочка подкреплена  $n_r$  круговыми стержнями (шпангоутами) с ненулевым эксцентриситетом по параллелям  $s = s_j, j = 1, 2, \dots, n_r$ , шпангоуты изготовлены из одного материала и имеют одинаковые размеры. На Рисунке 1.1 представлена подкрепленная цилиндрическая оболочка.

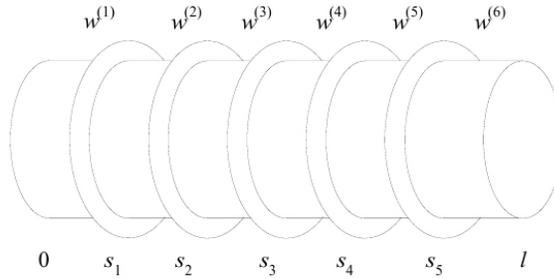


Рисунок 1.1. Подкрепленная цилиндрическая оболочка

За единицу длины выбран радиус  $R$  цилиндрической оболочки. Тогда безразмерные уравнения устойчивости оболочки имеют вид:

$$\varepsilon^8 \Delta \Delta w^{(j)} - \frac{d^2 \Phi^{(j)}}{ds^2} - \lambda w^{(j)} = 0, \quad \Delta \Delta \Phi^{(j)} + \frac{d^2 w^{(j)}}{ds^2} = 0, \quad (1.1)$$

$$j = 1, 2, \dots, n, \quad n = n_r + 1,$$

где

$$\Delta w = \frac{d^2 w}{ds^2} - m^2 w, \quad \varepsilon^8 = \frac{h^2}{12\sigma}, \quad \sigma = 1 - \nu^2, \quad \lambda = \frac{p}{Eh}, \quad (1.2)$$

$m$  — число волн по параллели,  $w^{(j)}$  — прогиб,  $\Phi^{(j)}$  — функция усилий,  $\varepsilon > 0$  — малый параметр,  $h$  — толщина оболочки,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $p$  — давление и  $E$  — модуль Юнга.

Решения уравнения (1.1) должны удовлетворять четырем граничным усло-

виям на каждом крае оболочки  $s = 0$  и  $s = l$ , где  $l$  — длина оболочки, и  $\delta n_r$  условиям сопряжения по параллелям  $s = s_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_r$ .

## Нулевое приближение

Если  $\varepsilon$  достаточно малы, то наименьшее собственное значение  $\lambda \sim \varepsilon^4$  соответствует большому числу волн по параллели  $m \sim \varepsilon^{-1}$ . В нулевом приближении устойчивость под действием внешнего бокового давления каждой из  $n$  частей оболочки описывается уравнением

$$\frac{d^4 w^{(j)}}{ds^4} - \alpha^4 w^{(j)} = 0, \quad \alpha^4 = m^6 \lambda - \varepsilon^8 m^8, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.3)$$

В случае шарнирного опирания краев оболочки граничные условия нулевого приближения имеют вид:

$$w = \frac{d^2 w}{ds^2} = 0 \quad \text{для} \quad s = 0, \quad s = l. \quad (1.4)$$

Если ширина поперечного сечения шпангоута  $a \sim \varepsilon^3$ , то, как показано в работе [3], условия сопряжения (1.3) на параллелях  $s = s_j$  могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} w^{(j)} &= w^{(j+1)}, \quad \frac{dw^{(j)}}{ds} = \frac{dw^{(j+1)}}{ds}, \\ \frac{d^2 w^{(j)}}{ds^2} &= \frac{d^2 w^{(j+1)}}{ds^2}, \quad \frac{d^3 w^{(j)}}{ds^3} - \frac{d^3 w^{(j+1)}}{ds^3} = -c w^{(j+1)}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

где

$$c = m^8 \left( I + \frac{eF}{1 + \delta} \right),$$

$F$  — площадь поперечного сечения шпангоута,  $I$  — безразмерный момент инерции поперечного сечения относительно образующей цилиндра,  $e$  — расстояние от центра тяжести поперечного сечения до срединной поверхности оболочки, которое называют эксцентриситетом подкрепления. Положительная величина  $\delta$ , формула для которой приведена в работе [3], зависит от числа волн по параллели  $m$ , а также параметров оболочки и шпангоута. Считаем,

что центры тяжести шпангоутов лежат на срединной поверхности оболочки, то есть эксцентриситет равен нулю, тогда  $c = m^8 I/h$ , где  $h$  — толщина оболочки. В конце главы будет также рассмотрен случай ненулевого эксцентриситета.

Из второй формулы (1.3) получаем приближенное значение безразмерного давления

$$\lambda_k(m) = \alpha_k^4/m^6 + \varepsilon^8 m^2, \quad (1.6)$$

где  $\alpha_k$  — наименьшее положительное собственное значение задачи (1.3–1.5).

При исследовании потери устойчивости гладкой оболочки под действием внешнего давления использование полубезмоментной теории возможно лишь для оболочек средней длины [5], то есть если  $l \sim 1$ . В данной задаче вычисление критического давления по формуле (1.6) возможно только если выполняются условия  $s_i - s_{i-1} \sim 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $n \sim 1$ .

### Метод осреднения

Будем рассматривать равномерное распределение ( $s_j = jl/n$ ) шпангоутов вдоль образующей оболочки. В работе [6] показано, что в случае шарнирного опирания равномерное распределение близко к оптимальному. Если число шпангоутов велико ( $n \gg 1$ ), а жесткость каждого из них мала ( $c \sim 1/n$ ), то для приближенного определения собственных значений  $\alpha_k$  краевой задачи (1.3–1.5) можно использовать метод осреднения. Перепишем уравнение (1.3), добавив в него слагаемые, соответствующие сосредоточенным нагрузкам, действующим со стороны шпангоутов на оболочку

$$\frac{d^4 w}{ds^4} + cw \sum_{j=1}^{n-1} \delta(s - s_j) = \alpha^4 w, \quad (1.7)$$

где  $\delta(z)$  — дельта-функция Дирака. Введем замену переменных  $s = xl$  и  $w = \hat{w}l$ . Тогда уравнение (1.7) принимает вид:

$$\frac{d^4 \hat{w}}{ds^4} + \hat{c}n \hat{w} \sum_{j=1}^{n-1} \delta(\xi - j) = \kappa \hat{w}, \quad (1.8)$$

где  $\hat{c} = cl^3$ ,  $\kappa = (\alpha l)^4$ , и  $\xi = nx$ . Граничные условия (1.4) теперь имеют вид:

$$\hat{w} = \frac{d^2 \hat{w}}{dx^2} = 0 \quad \text{для} \quad x = 0, \quad x = 1. \quad (1.9)$$

Было сделано предположение, что выполняются условия  $n \gg 1$  и  $\hat{c}n \sim 1$ , тогда решение уравнения (1.8) можно искать в виде:

$$\hat{w}(x, \xi) = w_0(x, \xi) + n^{-4} w_4(x, \xi) + \dots, \quad \kappa = \kappa_0 + n^{-4} \kappa_4 + \dots, \quad (1.10)$$

где  $w_i(x, \xi) = w_i(x, \xi + 1)$  и, следовательно,

$$\left\langle \frac{\partial^k w_i}{\partial \xi^k} \right\rangle = \int_{\xi}^{\xi+1} \frac{\partial^k w_i}{\partial \xi^k} d\xi = 0, \quad i = 0, 4, \dots, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.11)$$

Оператор  $\langle \cdot \rangle$  называется оператором осреднения по периоду. Применяя этот оператор к обоим частям уравнения, получаем усредненное уравнение.

Если подставить (1.10) в (1.8) и (1.9), то, в результате приравнивания коэффициентов  $n^4$  и  $n^0$ , получим уравнения

$$\frac{\partial^4 w_0}{\partial \xi^4} = 0, \quad \frac{\partial^4 w_4}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \hat{c}n \sum_{i=1}^n \delta(\xi - i) w_0 = \kappa_0 w_0 \quad (1.12)$$

с граничными условиями

$$w_0 = \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0, \quad w_4 = \frac{\partial^2 w_4}{\partial x^2} = 0 \quad \text{для} \quad x = 0, \quad x = 1. \quad (1.13)$$

Из первого уравнения (1.12) следует, что

$$\frac{\partial^3 w_0}{\partial \xi^3} = v_3(x), \quad v_3(x) = \langle v_3(x) \rangle = \langle \frac{\partial^3 w_0}{\partial \xi^3} \rangle = 0.$$

Проинтегрировав, получим

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2} = v_2(x) = 0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial \xi} = v_1(x) = 0, \quad w_0(x, \xi) = v_0(x).$$

После усреднения второго уравнения (1.12) получаем уравнение

$$\frac{d^4 v_0}{dx^4} + \hat{c}n v_0 = \kappa_0 v_0, \quad (1.14)$$

которое описывает колебания балки на упругом основании. С физической точки зрения переход от уравнения (1.8) к уравнению (1.14) соответствует "размазыванию" сосредоточенных жесткостей, то есть замене их эквивалентным упругим основанием. Первое из граничных условий (1.13) принимает вид:

$$v_0 = \frac{d^2 v_0}{dx^2} = 0 \quad \text{для} \quad x = 0, \quad x = 1. \quad (1.15)$$

Уравнения (1.14) и (1.15) описывают колебания балки на упругом основании. Его решение имеет вид  $v_{0k} = \sin(k\pi x)$ ,

$$\kappa_{0k} = (k\pi)^4 + \hat{c}n, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.16)$$

### Эффективная жесткость

Из (1.16) следует, что

$$\alpha_k^4 = \beta_k^4 + \eta(\varepsilon m)^8, \quad (1.17)$$

где

$$\beta_k = \frac{k\pi}{l}, \quad \eta = \frac{cn}{m^8 \varepsilon^8 l} = \frac{nI}{\varepsilon^8 h l}. \quad (1.18)$$

Безразмерная жесткость шпангоута  $\eta$  пропорциональна отношению  $D_r/D$ ,

где  $D_r = EIR^4$  — изгибная жесткость шпангоута, а  $D = Eh\varepsilon^8 R^3$  — изгибная жесткость оболочки. Подставляя (1.17) в (1.6) получим следующую приближенную формулу

$$\lambda_k(m) = \frac{\beta_k^4}{m^6} + (1 + \eta)\varepsilon^8 m^2. \quad (1.19)$$

Чтобы найти значения параметров частоты

$$\lambda_k^* = \min_m \lambda_k(m)$$

вычислим частную производную от функции  $\lambda_k(m)$  по  $m$  и приравняем её к нулю. Решение уравнения  $\partial\lambda_k/\partial m = 0$  имеет вид:

$$m = m_* = \frac{\sqrt{\beta_k} \mathfrak{Z}^{1/8}}{\varepsilon(1 + \eta)^{1/8}}. \quad (1.20)$$

Функция  $\lambda_k(m)$  достигает минимума

$$\lambda_k^* = \frac{4\varepsilon^6 \beta_k (1 + \eta)^{3/4}}{\mathfrak{Z}^{3/4}} \quad (1.21)$$

при  $m = m_*$ . Если  $m_*$  целое число, тогда формула (1.21) дает точный результат. Замена  $m_*$  на ближайшее к  $m_*$  натуральное число приводит к ошибке, абсолютная величина которой меньше 1. Относительная погрешность формулы (1.21) мала, так как  $m_* \gg 1$ .

Из (1.21) следует, что

$$\lambda_k^*(\eta) = \lambda_k^*(0)(1 + \eta)^{3/4}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.22)$$

где  $\lambda_k^*$  и  $\lambda_k^*(0) = (4\varepsilon^6 \beta_k)/(\mathfrak{Z}^{3/4})$  значения безразмерного давления для подкрепленной и неподкрепленной цилиндрических оболочек.

Для неподкрепленной шарнирно опертой цилиндрической оболочки приближенное значение безразмерного критического давления  $\lambda_c$  находится по формуле

$$\lambda_c(0) = \lambda_1^*(0) = \frac{4\varepsilon^6 \beta_1}{\mathfrak{Z}^{3/4}}. \quad (1.23)$$

Наименьшее значение  $\lambda_k^*(\eta)$  имеет при  $k = 1$ :

$$\lambda_1^*(\eta) = \lambda_1^*(0)(1 + \eta)^{3/4}. \quad (1.24)$$

Однако  $\lambda_1^*(\eta)$  является безразмерным критическим давлением  $\lambda_c$  только в том случае, когда значение жесткости,  $\eta$ , не очень велико. Краевая задача (1.3–1.5) имеет собственное значение  $\alpha_n = \pi n/l$ , которому соответствует  $\lambda_n^*(0) = n^2 \lambda_1^*(0)$ . При увеличении  $\eta$  функция  $\lambda_1^*(\eta)$  возрастает. Если значение достаточно велико, то  $\lambda_1^*(\eta) > \lambda_n^*(0)$  и критическое давление  $\lambda_c = n^2 \lambda_1^*(0)$ . Наименьшее значение  $\eta = \eta_*$ , при котором имеет место равенство

$$\lambda_1^*(\eta_*) = n \lambda_1^*(0), \quad (1.25)$$

будем называть эффективной жесткостью шпангоута. Увеличение жесткости шпангоута  $\eta$  после достижения ею значения  $\eta_*$  не приводит к увеличению наименьшего параметра частоты.

После подстановки (1.24) в (1.25) найдем приближенное значение эффективной жесткости

$$\eta_* = n^{4/3} - 1. \quad (1.26)$$

Следовательно,

$$\lambda_c(\eta) \simeq \begin{cases} \lambda_1^*(0)(1 + \eta)^{3/4}, & 0 \leq \eta \leq \eta_*, \\ n \lambda_1^*(0), & \eta \geq \eta_*. \end{cases} \quad (1.27)$$

### Оптимизация параметров подкрепленной оболочки

Рассмотрим шарнирно опертую цилиндрическую оболочку толщиной  $h$ , длиной  $l$  и радиусом  $R$ , подкрепленную  $n_r$  равномерно распределенными шпангоутами. Найдем параметры оболочки, которая имеет наименьшую массу и при этом не потеряет устойчивость под действием давления  $p_1$ . Приближенное

значение  $p_1$  найдем с помощью формулы (1.25):

$$p_1 = \frac{4h^{3/2}\beta_1 Eh}{6^{3/2}\sigma^{3/4}} \begin{cases} (1 + \eta)^{3/4}, & 0 \leq \eta \leq \eta^*, \\ n, & \eta \geq \eta^*. \end{cases} \quad (1.28)$$

В качестве шпангоутов будем рассматривать кольца прямоугольного поперечного сечения шириной  $a$  и высотой  $b = ka$ . Тогда масса подкрепленной оболочки находится по формуле

$$M_s = 2\pi R^3 \rho (lh + n_r a^2 k), \quad (1.29)$$

где  $\rho$  — плотность материала. Как и в работе [3], удобно сравнивать массу и критическое давление подкрепленной оболочки с массой и критическим давлением гладкой оболочки, имеющей толщину  $h_0 > h$ . Длина и радиус оболочек совпадают и они изготовлены из одного материала.

Масса гладкой оболочки  $M_0 = 2\pi R^3 \rho l h_0$ , а ее критическое давление  $p_0$  находится с использованием приближенной формулы (1.24):

$$p_0 = \frac{4h^{3/2}\beta_1 E h_0}{6^{3/2}\sigma^{3/4}}. \quad (1.30)$$

Будем искать минимальное значение  $F_*$  функции

$$F(a, d) = \frac{M_s}{M_0} = \frac{2\pi R^3 \rho (lh + n_r a^2 k)}{2\pi R^3 \rho l h_0} = d + Aa^2, \quad A = \frac{n_r k}{l h_0}, \quad (1.31)$$

где  $d = h/h_0 < 1$ ,  $A = n_r k / l h_0$ , при условии  $p_1 = p_0$ . Параметры  $a = a_*$  и  $d = d_*$ , для которых  $F_* = F(a_*, d_*)$ , будем называть оптимальными, потому что для них масса подкрепленной оболочки  $M_s = M_0 F$  имеет наименьшее значение. Величина  $F_*$  характеризует отношение масс оптимальной подкрепленной оболочки и гладкой оболочки, имеющих одинаковое критическое давление.

Принимая во внимание формулы (1.28) и (1.30), условие  $p_1 = p_0$  можно

представить в виде:

$$d = d_* = \frac{1}{n^{2/5}}, \text{ при } \eta \geq \eta^*, \quad d^{5/2}(1 + \eta)^{2/4} = 1, \text{ при } 0 \leq \eta \leq \eta^*, \quad (1.32)$$

где

$$\eta = \frac{Ba^4}{d^3}, \quad B = \frac{\sigma nk^3}{h_0^3 l}. \quad (1.33)$$

В случае  $\eta = \eta_*$  из (1.32) следует, что

$$d = d_*, \quad a = a_* = (\eta_* d_*^3 / B)^{1/4}, \quad F = F_* = d_* + Aa_*^2.$$

Если  $\eta \geq \eta^*$ , то

$$d = d_*, \quad \eta = \frac{Ba^4}{d^3}, \quad \eta_* = \frac{Ba_*^4}{d_*^3}.$$

Так как  $a > a_*$  получаем, что

$$F(a, d) = d_* + Aa^2 > F_*$$

и  $F_*$  — минимум функции  $F$  для  $\eta \geq \eta^*$ .

Подставляя в (1.28) значение  $n = 1/d^{5/2}$  получим

$$\eta = \frac{1 - d^{1/3}}{d^{1/3}} = \frac{Ba^4}{d^3}.$$

Следовательно,

$$a = \left( \frac{1}{d^{1/3} B} - \frac{d^3}{B} \right)^{1/4}.$$

Предположим, что  $\eta \leq \eta^*$ . Тогда

$$d \leq 1, \quad a = \left( \frac{1}{d^{1/3} B} - \frac{d^3}{B} \right)^{1/4}, \quad F(a, d) = f(d) = d + \gamma \sqrt{\frac{1 - d^{10/3}}{d^{1/3}}}, \quad (1.34)$$

где  $\gamma = A/\sqrt{B}$ . Учитывая, что  $\eta_* = \frac{1}{d_*^{10/3}} - 1$  и  $\eta \leq \eta_*$ , получаем неравенство  $d_* \leq d$ .

В работе [9] показано, что функция  $f(d)$ , заданная на интервале  $[d_*, 1]$ ,

имеет минимум в точке  $d = d_*$  при достаточно малых значениях  $\gamma$ , то есть при  $\eta \leq \eta_*$

$$\min_{a,d} F(a, d) = F(a_*, d_*) = d_* + Aa_*^2,$$

где

$$a_* = \left( \frac{1}{d_*^{1/3} B} - \frac{d_*}{B} \right)^{1/4}, \quad d_* = \frac{1}{n^{2/5}}.$$

Поскольку  $F(a, d) > F_*$  при  $\eta > \eta_*$ , минимум функции  $F(a, d)$  достигается при  $d = d_*$ ,  $a = a_*$ . Этим значениям соответствует эффективная жесткость шпангоута  $\eta_*$ , которая является оптимальной, так как обеспечивает минимальное значение массы подкрепленной оболочки, имеющей заданное критическое давление.

### Числовые результаты оптимальных параметров

Рассмотрим неподкрепленную шарнирно опертую цилиндрическую оболочку толщиной  $h_0 = 0,01$  и шарнирно опертую цилиндрическую оболочку толщиной  $h$ , подкрепленную  $n_r = n - 1$  шпангоутами с квадратным сечением, то есть  $k = 1$ . Массы подкрепленной и неподкрепленной оболочек равны  $M_s$  и  $M_0$ , соответственно. Обе оболочки имеют одинаковую длину  $l = 4$  и коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ . Значения оптимальных параметров  $d_*$ ,  $a_*$  и отношение  $M_s/M_0$  для различных  $n_r$  приведены в Таблице 1.1.

Для рассмотренных оболочек отношение  $M_s/M_0$  уменьшается с увеличением числа шпангоутов,  $n_r$ . Отношение  $M_s/M_0$ , как функции от  $n_r$  и  $k$ , показано в Таблице 1.2.

Отношение  $M_s/M_0$  уменьшается при увеличении  $k$ . Однако, если значение  $k$  велико, то оптимальная толщина кольца,  $a_*$ , очень мала, и этот случай не представляет интереса. Поэтому мы рассматриваем случай, когда  $ka \ll 1$  и используем теорию тонких стержней.

$n_r$	$d_*$	$a_*$	$M_s/M_0$
1	0.758	0.0347	0.788
2	0.644	0.0338	0.702
4	0.525	0.0313	0.623
6	0.459	0.0295	0.589
8	0.415	0.0281	0.573
10	0.383	0.0270	0.565
12	0.358	0.0260	0.562
14	0.339	0.0253	0.562
16	0.322	0.0246	0.565
18	0.308	0.0241	0.569

Таблица 1.1. Оптимальные значения параметров относительно  $n_r$ .

### Собственные значения в случае $e \neq 0$

В реальных конструкциях эксцентриситет  $e$  отличен от нуля, так как шпангоуты располагаются либо внутри, либо снаружи оболочки. Из формулы (1.17) следует, что в случае ненулевого эксцентриситета жесткость шпангоута больше, чем в случае, когда  $e = 0$ . При увеличении жесткости увеличивается и критическое внешнее давление. Если  $e = 0$ , то формула (1.29) дает оценку снизу для критического внешнего давления. Более точное значение  $\lambda_1$  при  $e \neq 0$  можно найти, если для вычисления  $s$  использовать формулу (1.17). Однако в этом случае величина  $\eta$  будет зависеть от  $m$ , и получить решение в явном виде не удастся [7].

Рассмотрим цилиндрическую оболочку, подкрепленную шпангоутами, для которой  $e \neq 0$ . В монографии [3] было показано, что безразмерный момент инерции поперечного сечения  $I_x$  может быть представлен в виде

$$I_x = I_0 + \frac{e \cdot ab}{1 + \delta},$$

где  $I_0 = ab^3/12$  — момент инерции при  $e = 0$ ,  $\delta$  — некоторая функция. Причем, если

$$\delta \gg 1 \quad I_x = I_0,$$

$n_r$	Значение $M_s/M_0$ .		
	$k = 1$	$k = 3$	$k = 5$
1	0.788	0.775	0.771
2	0.702	0.677	0.669
4	0.623	0.582	0.569
6	0.589	0.534	0.517
8	0.573	0.506	0.486
10	0.565	0.488	0.464
12	0.562	0.476	0.450
14	0.562	0.468	0.439
16	0.565	0.462	0.431
18	0.569	0.459	0.425

Таблица 1.2. Зависимость от параметров  $n_r$  и  $k$ .

а при

$$\delta \ll 1 \quad I_x = I_0 + eab.$$

Рассмотрим случай, когда  $e = b/2$ , момент инерции имеет вид  $I_1 = ab^3/3$ , и пересчитаем значения оптимальных параметров  $d_*$ ,  $a_*$  и отношение  $M_s/M_0$ . Из числовых примеров видно, что отношение  $M_s/M_0$  уменьшается при увеличении эксцентриситета. Результаты вычислений приведены в Таблицах 1.3 и 1.4.

$n_r$	$d_*$	$a_*$	$M_s/M_0$
1	0,758	0.0246	0.773
2	0,644	0.0239	0.673
4	0,525	0.0221	0.574
6	0,459	0.0208	0.524
8	0,415	0.0198	0.494

Таблица 1.3. Оптимальные значения параметров относительно  $n_r$ .

Значение $M_s/M_0$ .			
$n_r$	$k = 1$	$k = 3$	$k = 5$
1	0.773	0.767	0.765
2	0.673	0.661	0.657
4	0.574	0.554	0.547
6	0.524	0.497	0.488
8	0.494	0.461	0.450

Таблица 1.4. Зависимость от параметров  $n_r$  и  $k$ .

## ГЛАВА 2

### СЛУЧАЙ ЖЕСТКОЙ ЗАДЕЛКИ

#### Нулевое приближение

Так же, как и в случае шарнирного опирания краев оболочки, можем использовать приближенное уравнение устойчивости под действием внешнего бокового давления каждой из  $n$  частей оболочки

$$\frac{d^4 w^{(j)}}{ds^4} - \alpha^4 w^{(j)} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.1)$$

где

$$\alpha^4 = m^6 \lambda - \varepsilon^8 m^8. \quad (2.2)$$

Решения уравнения (2.1) в случае жесткой заделки должны удовлетворять граничным условиям

$$w = \frac{dw}{ds} = 0 \quad \text{для} \quad s = 0, \quad s = l. \quad (2.3)$$

Рассмотрим шпангоут как круговой стержень. Предположим, что характерный размер поперечного сечения шпангоута  $a \sim \varepsilon^3$ , тогда на подкрепленных шпангоутами параллелях  $s = s_j$  выполняются условия сопряжения:

$$\begin{aligned} w^{(j)} &= w^{(j+1)}, & \frac{dw^{(j)}}{ds} &= \frac{dw^{(j+1)}}{ds}, \\ \frac{d^2 w^{(j)}}{ds^2} &= \frac{d^2 w^{(j+1)}}{ds^2}, & \frac{d^3 w^{(j)}}{ds^3} - \frac{d^3 w^{(j+1)}}{ds^3} &= -c w^{(j+1)}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$c = m^8 I/h,$$

$I$  — момент инерции поперечного сечения относительно образующей цилиндра,  $h$  — толщина оболочки. То есть рассматривается случай нулевого эксцентриситета.

Из формулы (2.2) получаем приближенное значение безразмерного кри-

тического давления

$$\lambda_1(c) = \min_m \lambda(c, m) = \min_m (\alpha_1^4(c)/m^6 + \varepsilon^8 m^2), \quad (2.5)$$

где  $\alpha_1$  — собственное значение краевой задачи (2.1–2.4).

Вычисление критического давления по приближенной формуле (2.5) возможно лишь при выполнении условий

$$s_i - s_{i-1} \sim 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad n \sim 1.$$

### Оптимальное расположение шпангоутов

Краевая задача (2.1 – 2.3) эквивалентна задаче об устойчивости жестко закрепленной балки, подкрепленной в точках  $s = s_i$  пружинами жесткости  $c$ . В работе [6] показано, что координаты точек оптимального расположения пружин  $s_i(c)$  стремятся к предельным значениям  $s_i^*$  при  $c \rightarrow \infty$ . Значения  $s_i^*$  будем называть предельным оптимальным расположением. В случае жесткой заделки нули формы колебаний неподкрепленной балки совпадают с точками предельного оптимального расположения пружин. Решение уравнения (2.1) с граничными условиями (2.3) имеет вид:

$$w_n(s) = [U(\alpha_n s) - \kappa_n V(\alpha_n s)], \quad (2.6)$$

где

$$U(x) = \cosh x - \cos x, \quad V(x) = \sinh x - \sin x, \\ \alpha_n = z_n/l, \quad \kappa_n = (\cosh z_n - \cos z_n)/(\sinh z_n - \sin z_n).$$

Значения

$$z_n \simeq \pi(2n + 1)/2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

находятся при решении уравнения  $\cosh z \cos z = 1$ .

В Таблице 2.1 приведены значения численного определения корней уравнения  $w_n(s) = 0$  при  $l = n$ .

$n$	$s_1^*$	$s_2^*$	$s_3^*$	$s_4^*$	$s_5^*$	$s_6^*$	$s_7^*$	$s_8^*$
2	0.99990	-	-	-	-	-	-	-
3	1.07535	1.92466	-	-	-	-	-	-
4	1.11499	2.	2.88501	-	-	-	-	-
5	1.14034	2.04527	2.95473	3.85966	-	-	-	-
6	1.15788	2.07675	3.	3.92325	4.84212	-	-	-
7	1.17075	2.09982	3.03334	3.96666	4.90018	5.82925	-	-
8	1.18059	2.11747	3.05883	4.	4.94117	5.88253	6.81941	-
9	1.18835	2.13140	3.07896	4.02632	4.97368	5.92104	6.86860	7.81164

Таблица 2.1. Предельное оптимальное расположение пружин.

### Вычисление собственных значений

В случае жесткой заделки оптимальное распределение пружин — неравномерное, значит, нельзя применять метод осреднения, который используется только в случае равномерного распределения. В работе [6] предложено использование метода Релея. С его помощью получена приближенная формула для собственного значения

$$\alpha_1^4 = (z_1/l)^4 + \gamma cn/l, \quad (2.8)$$

где  $z_1$  определяется по формуле (2.7), а функция

$$\gamma(s_1, \dots, s_{n-1}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} w_1^2(s_i)$$

зависит от координат пружин  $s_i$ .

В Таблице 2.2 приведены значения  $\gamma = \gamma_p$  для предельного оптимального расположения пружин и  $\gamma = \gamma_r$  для равномерного расположения пружин в случае жесткой заделки, если рассматривать  $z_1 = 3\pi/2$ . В Таблице 2.3 рассмотрено точное значение  $z_1 = 4.73$ .

$n$	$\gamma_p$	$\gamma_r$
2	1.26099	1.2609898
3	1.18033	1.0216912
4	1.13396	1.0068859
5	1.10639	1.0045483
6	1.08852	1.0039843
7	1.07603	1.0038073
8	1.06679	1.0037406

Таблица 2.2. Значения  $\gamma$  для  $z_1 = 3\pi/2$ .

$n$	$\gamma_p$	$\gamma_r$
2	1.26110	1.26110
3	1.17717	1.01774
4	1.13022	1.00306
5	1.10251	1.00080
6	1.08462	1.00027
7	1.07213	1.00011
8	1.06291	1.00006

Таблица 2.3. Значения  $\gamma$  для  $z_1 = 4.73$ .

## Эффективная жесткость

Определим приближенное значение критического давления, действующего на подкрепленную цилиндрическую оболочку. Края оболочки жестко закреплены, а шпангоуты расположены на параллелях  $s_i^*$ , которые являются корнями формы колебаний (2.6) неподкрепленной оболочки.

Собственному значению  $\alpha(\eta, m)$  краевой задачи (2.1 – 2.3) соответствует наименьшее значение критического давления

$$\lambda_1(\eta, m) = \min_m \left[ \frac{\alpha^4(\eta, m) + \varepsilon^8 m^8}{m^6} \right] = \min_m \left[ \frac{\alpha^4}{m^6} + \varepsilon^8 m^2 \right]. \quad (2.9)$$

В случае неподкрепленной оболочки  $\eta = 0$ ,  $\alpha = z_1/l$ . Вычислим частную

производную  $\partial\lambda(m)/\partial m$  и приравняем ее к нулю:

$$\frac{-6z_1^4}{l^4m^7} + 2\varepsilon^8m = 0.$$

Корень этого уравнения имеет вид:

$$m_*^8 = \frac{3z_1^4}{l^4\varepsilon^8}.$$

После подстановки этого корня в уравнение (2.9) получаем

$$\lambda_1(0) = \frac{4z_1\varepsilon^6}{3^{3/4}l}. \quad (2.10)$$

В случае подкрепленной оболочки для определения  $\alpha$  можно использовать приближенную формулу (2.8):

$$\alpha^4 = \left(\frac{z_1}{l}\right)^4 + \gamma\frac{cn}{l} = \left(\frac{z_1}{l}\right)^4 + m^8\varepsilon^8\eta\gamma. \quad (2.11)$$

Подставив (2.11) в (2.9) и приравняв производную к нулю, получим

$$\frac{-6z_1^4}{l^4m} + 2m\varepsilon^8(1 + \gamma\eta) = 0.$$

Корень уравнения имеет вид:

$$m_*^8 = \frac{3z_1^4}{l^4\varepsilon^8(1 + \gamma\eta)}.$$

После его подстановки в (2.9) получаем

$$\lambda_1(\eta) = \lambda_1(0)(1 + \gamma\eta)^{3/4}. \quad (2.12)$$

При увеличении  $\eta$  увеличивается и  $\lambda_1$ , однако, при больших значениях  $\eta$  формулой (2.12) пользоваться нельзя, так как краевая задача (2.1 – 2.3) имеет собственное значение  $\alpha_n$ , такое, что соответствующее ему значение критиче-

ского давления  $\lambda_n$  не зависит от  $\eta$ :

$$\lambda_n = \min_m \left[ \frac{\alpha^4(\eta, m) + \varepsilon^8 m^8}{m^6} \right] = \frac{4z_n \varepsilon^6}{3^{3/4} l} = \left( \frac{2n+1}{3} \right) \lambda_1(0).$$

Параметр  $\eta_*$ , являющийся решением уравнения

$$\lambda_1(0)(1 + \gamma\eta)^{3/4} = \lambda_n, \quad \text{т.е.} \quad (1 + \gamma\eta)^{3/4} = \left( \frac{2n+1}{3} \right),$$

будем называть эффективной жесткостью шпангоута:

$$\eta_* = \frac{1}{\gamma} \left[ \left( \frac{2n+1}{3} \right)^{4/3} - 1 \right]. \quad (2.13)$$

Увеличение жесткости шпангоута  $\eta$  после достижения ее значения  $\eta_*$  не приведет к увеличению наименьшего значения критического давления. Следовательно,

$$\lambda_1(\eta) \simeq \begin{cases} (1 + \gamma\eta)^{3/4} \lambda_1(0), & 0 \leq \eta \leq \eta_*, \\ \left( \frac{2n+1}{3} \right) \lambda_1(0), & \eta \geq \eta_*. \end{cases} \quad (2.14)$$

## Оптимизация параметров подкрепленной оболочки

Рассмотрим жестко закрепленную на краях подкрепленную круговыми шпангоутами цилиндрическую оболочку толщиной  $h$ , длиной  $l$  и радиусом  $R$ . Решим задачу о нахождении наименьшей массы оболочки, которая не теряет устойчивости под действием заданного внешнего давления  $p_1$ . Приближенное значение критического внешнего давления  $p_1$  определим с помощью формулы (2.14):

$$p_1 = \frac{4\pi E h^{5/2}}{6^{3/2} \sigma^{3/4} l} \begin{cases} (1 + \gamma\eta)^{3/4}, & 0 \leq \eta \leq \eta_*, \\ \frac{2n+1}{3}, & \eta \geq \eta_*, \end{cases} \quad (2.15)$$

где  $\eta_*$  находится по формуле (2.13).

Критическое давление  $p_0$  для гладкой оболочки длиной  $l$  и толщиной  $h_0$

можно найти с использованием приближенной формулы

$$p_0 = \frac{4\pi E h_0^{5/2}}{6^{3/2} \sigma^{3/4} l}. \quad (2.16)$$

Как и в предыдущей задаче, в качестве шпангоутов используются кольца прямоугольного поперечного сечения шириной  $a$  и высотой  $b = ka$ . Масса подкрепленной оболочки находится по формуле (1.31):

$$M_s = 2\pi R^3 \rho (lh + n_r a^2 k),$$

масса гладкой оболочки:

$$M_0 = 2\pi R^3 \rho l h_0.$$

Будем искать минимальное значение  $F_*$  функции

$$F(a, d) = \frac{M_s}{M_0} = d + Aa^2,$$

где

$$d = \frac{h}{h_0}, \quad A = \frac{n_r k}{lh_0},$$

при условии  $p_1 = p_0$ . Параметры  $a = a_*$  и  $d = d_*$ , при которых  $F_* = F(a_*, d_*)$ , назовем оптимальными, так как для них масса подкрепленной оболочки  $M_s$  имеет наименьшее значение.

Принимая во внимание формулы (2.15) и (2.16), условие  $p_1 = p_0$  можно представить в виде:

$$d = d_* = \left( \frac{3}{2n+1} \right)^{2/3}, \quad \text{при } \eta \geq \eta^*,$$

$$d^{5/2} (1 + \gamma\eta)^{3/4} = 1, \quad \text{при } \eta \leq \eta^*.$$

В случае  $\eta \geq \eta^*$  величина  $d$  является постоянной, функция  $F$  зависит только от значения переменной  $a = (\eta^* d^3)^{1/4} / B$ , где  $B = (\sigma n k^3) / (h_0^3 l)$ . Из неравенства  $\eta \geq \eta^*$  также следует, что  $a \geq a^*$ ,  $F = d + Aa^2 \geq d_* + Aa_*^2$ , поэтому параметры  $d_* = \left( \frac{3}{2n+1} \right)^{2/3}$  и  $a_* = (\eta^* d_*^3 / B)^{1/4}$  будут оптимальными.

Предположим, что  $\eta \leq \eta^*$ . Тогда

$$\eta = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{(d^{10/3} - 1)}.$$

Учитывая, что  $\eta = Ba^4/d^3$ , получаем

$$a = \left( \frac{1}{B\gamma d^{1/3}} - \frac{d^3}{B\gamma} \right)^{1/4}.$$

Если функция  $F(a, d) = d + Aa^2$  имеет минимум при  $d = d_*$ , то

$$F_* = F(a_*, d_*) = d_* + \frac{A}{(B\gamma)^{1/4}} \left( \frac{1 - d_*^{10/3}}{d_*^{1/3}} \right)^{1/4}.$$

### Численные расчеты

В качестве примера рассмотрим подкрепленную оболочку при следующих значениях параметров:  $l = 4$ ,  $h_0 = 0.01$ ,  $\nu = 0.3$ . Значения оптимальных параметров  $d_*$ ,  $a_*$  для шпангоутов с квадратными поперечными сечениями и отношения  $M_s/M_0$  для различных  $n_r$  приведены в Таблице 2.4. При рассматриваемых значениях параметров функция  $F$  имеет минимум при  $d = d_*$ .

$n_r$	$d_*$	$a_*$	$M_s/M_0$
1	0.815	0.0315	0.840
2	0.713	0.0311	0.761
3	0.644	0.0302	0.713
4	0.595	0.0292	0.680
5	0.556	0.0284	0.659
6	0.525	0.0276	0.640
7	0.500	0.0270	0.627
8	0.478	0.0264	0.617
9	0.459	0.0259	0.610
10	0.443	0.0254	0.604

Таблица 2.4. Оптимальные значения параметров относительно  $n_r$ .

Значения отношения  $M_s/M_0$  для различных  $k$  в зависимости от числа шпангоутов  $n_r$  приведены в Таблице 2.5.

$n_r$	Значение $M_s/M_0$ .		
	$k = 1$	$k = 3$	$k = 5$
1	0.840	0.830	0.826
2	0.761	0.741	0.734
3	0.713	0.684	0.675
4	0.680	0.644	0.633
5	0.659	0.614	0.601
6	0.640	0.591	0.576
7	0.627	0.573	0.557
8	0.617	0.558	0.540
9	0.610	0.546	0.526
10	0.604	0.536	0.515

Таблица 2.5. Зависимость от параметров  $n_r$  и  $k$ .

ОБОЛОЧКА С КОСЫМ КРАЕМ

Постановка задачи

Рассмотрим задачу о потере устойчивости тонкой цилиндрической оболочки с косым краем под действием внешнего давления. Косой край ограничен поверхностью оболочки и плоскостью, наклоненной к продольной оси цилиндра под углом  $\pi/2 - \beta$ . Оболочка подкреплена  $n_r$  шпангоутами с прямоугольным сечением по параллелям  $s = s_i, i = 1, 2, \dots, n_r$ , где  $s$  — координаты вдоль направляющей цилиндра. Шпангоуты распределены равномерно вдоль образующей цилиндра длины  $l_0$ . На Рисунке 3.1 представлена цилиндрическая оболочка с косым краем, подкрепленная круговыми шпангоутами, имеющая наибольшую образующую длины  $l_0$ .

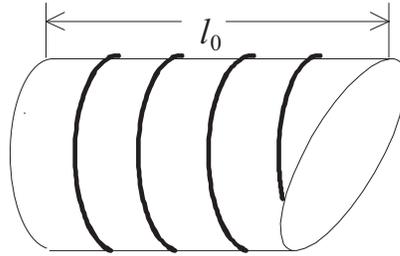


Рисунок 3.1. Подкрепленная цилиндрическая оболочка с косым краем.

В работе [3] описана потеря устойчивости цилиндрической оболочки с косым краем с помощью  $n$  уравнений

$$\frac{d^4 W_0^{(j)}}{ds^4} - \alpha^4 W_0^{(j)} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.1)$$

где  $W_0^{(j)}(s) = w_0^{(j)}(s, 0)$ ;  $w^{(j)}$  — проекция перемещения на направление нормали к срединной поверхности  $s \in [s_{i-1}, s_i]$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $n = n_s + 1$ ;  $s_0 = 0$ ;  $s_n = l_0$ .

В первом приближении граничные условия на параллелях  $s = s_j = jl_0/n, j = 1, 2, \dots, n_s$  описываются с помощью следующих формул

$$\begin{aligned}
W_0^{(j+1)} &= W_0^{(j)}, & \frac{dW_0^{(j+1)}}{ds} &= \frac{dW_0^{(j)}}{ds}, \\
\frac{d^2W_0^{(j+1)}}{ds^2} &= \frac{d^2W_0^{(j)}}{ds^2}, & \frac{d^3W_0^{(j+1)}}{ds^3} &= \frac{d^3W_0^{(j)}}{ds^3} + \frac{\eta q_0^8 l_0}{n} W_0^{(j)},
\end{aligned} \tag{3.2}$$

где  $j = 1, 2, \dots, n_s$ ;  $\eta$  — жесткость шпангоута.

Так как рассматривается оболочка с шарнирно опертыми краями, то граничные условия для  $s = 0, s = l_0$  описываются с помощью уравнений

$$\begin{aligned}
W_0^{(1)} &= \frac{d^2W_0^{(1)}}{ds^2} = 0 \text{ для } s = 0, \\
W_0^{(n)} &= \frac{d^2W_0^{(n)}}{ds^2} = 0 \text{ для } s = l_0.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Краевая задача (3.1) – (3.3) также описывает колебания балки, свободно опертой на концах и подкрепленной  $n_r$  одинаковыми кольцами. Решение краевой задачи балки описано в работе [3] и используется для нахождения критического давления.

## Оптимизация параметров подкрепленной оболочки

Рассмотрим неподкрепленную цилиндрическую оболочку с косым краем толщиной  $h_0$  и длиной  $l_0 \geq 2 \tan \beta$ . Тогда масса оболочки находится по формуле

$$M_0 = M(h_0) = 2\pi R^3 h_0 \rho (l_0 - \tan \beta). \tag{3.4}$$

Критическое внешнее давление  $p_0$  находится по формуле (1.30):

$$p_0 = \frac{4\pi E h_0^{5/2}}{6^{3/2} \sigma^{3/4} l}.$$

Рассмотрим подкрепленную цилиндрическую оболочку с косым краем, ко-

торая не теряет устойчивость под действием внешнего давления  $p_1$ . Приближенное значение  $p_1$  находится с помощью формулы (1.28):

$$p_1 = \frac{4h^{3/2}\beta_1 Eh}{6^{3/2}\sigma^{3/4}} \begin{cases} (1 + \eta)^{3/4}, & 0 \leq \eta \leq \eta^*, \\ n, & \eta \geq \eta^*. \end{cases}$$

Полагаем, что оболочка подкреплена  $n_r$  шпангоутами с прямоугольным сечением шириной  $a$  и высотой  $b = ka$ . В этом случае масса оболочки представляется в виде суммы  $M_s = M(h) + M_r$ , где  $M(h)$  — масса оболочки без шпангоутов,  $M_r$  — масса шпангоутов. Масса шпангоутов может быть найдена по формуле

$$M_r = 2R^3ka^2\rho\sigma, \quad \sigma = \sum_{i=1}^{n_r} \arccos(1 - H_i), \quad (3.5)$$

где

$$H_i = \begin{cases} (l_0 - ir_s) \cot \beta, & ir_s > l_1, \\ 2, & ir_s \leq l_1, \end{cases} \quad (3.6)$$

здесь  $r_s = l_0/n$  — расстояние между шпангоутами,  $l_1 = l_0 - 2 \tan \beta$  — безразмерная длина наименьшей образующей цилиндра.

Полагая, что параметры  $h_0, l_0, n_s, k, \beta$  и  $\nu$  заданы, найдем минимальное значение  $F_*$  функции

$$F(a, d) = \frac{M_s}{M_0} = \frac{2\pi R^3 h \rho (l_0 - \tan \beta) + 2R^3 k a^2 \rho \sigma}{2\pi R^3 h_0 \rho (l_0 - \tan \beta)} = d + Aa^2, \quad (3.7)$$

где

$$d = \frac{h}{h_0} \leq 1, \quad A = \frac{\sigma k}{h_0 \pi (l_0 - \tan \beta)}. \quad (3.8)$$

Отношение масс подкреплённой и неподкреплённой оболочек  $M_s/M_0$ , как и в Главе 1, зависит только от параметров  $a$  и  $d$ . Параметры  $a = a_*$  и  $d = d_*$ , при которых выполняется равенство  $F_* = F(a_*, d_*)$ , будем называть оптимальными, потому что масса  $M_s = M_0 F$  подкреплённой оболочки принимает наименьшее значение при этих параметрах. Анализ этой функции ничем не отличается от случая с прямым краем и описан в Главе 1. В работе [9] доказано, что функция  $f(d)$ , заданная на интервале  $[d_*, 1]$ , достигает минимального

значения при  $d = d_*$ .

## Численные расчеты

Рассмотрим неподкрепленную шарнирно опертую цилиндрическую оболочку с косым краем толщиной  $h_0 = 0.01$  и шарнирно опертую цилиндрическую оболочку с косым краем толщиной  $h$  подкрепленную  $n_r$  одинаковыми шпангоутами с прямоугольным сечением,  $k = 1$ , угол  $\beta = \pi/4$ . Обе оболочки изготовлены из одного материала, имеют одинаковую длину  $l = 4$  и коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ .

В Таблице 3.1 представлены значения оптимальных параметров  $d_*$  и  $a_*$ , а также отношение массы подкрепленной оболочки к неподкрепленной  $M_s/M_0$  для различных  $n_r$ .

$n_r$	$d_*$	$a_*$	$M_s/M_0$
1	0.758	0.0347	0.7981
2	0.644	0.0338	0.7056
3	0.574	0.0325	0.6623
4	0.525	0.0313	0.6280
5	0.488	0.0303	0.6109
6	0.459	0.0295	0.5939
7	0.435	0.0287	0.5864
8	0.415	0.0281	0.5771
9	0.398	0.0275	0.5742
10	0.383	0.0270	0.5691
11	0.370	0.0265	0.5688
12	0.358	0.0260	0.5661
13	0.348	0.0257	0.5674

Таблица 3.1. Оптимальные значения параметров оболочки с косым краем относительно  $n_r$ .

Для рассмотренной оболочки оптимальное количество шпангоутов — 12, так как минимум функции  $F(a, d) = M_s/M_0$  достигается при  $n_r = 12$  и имеет значение  $F = 0.5661$ . Результаты этой главы опубликованы в работе [10].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В случае шарнирного опирания при  $k = 1$  оптимальное число шпангоутов равно 13, так как отношение  $F = M_s/M_0$  имеет минимум  $F = 0.5619$  при  $n_r = 13$ . В окрестности этого минимума функция  $F$  меняется очень медленно. Увеличение ее по сравнению с минимальным значением для  $n_r$  из интервала от 10 до 16 составляет не более 0,5%. При  $k = 3$  и  $k = 5$  функция  $F$  имеет минимум при  $n_r = 24$  и  $n_r = 32$  соответственно, однако эти результаты не вполне достоверны, так как с увеличением числа шпангоутов нарушаются условия применимости приближенного решения (1.23).

Отношение  $M_s/M_0$  уменьшается с увеличением  $k$ . Однако в рамках предложенной модели мы не можем рассматривать большие значения  $k$ , так как при существенном увеличении ширины шпангоута происходит качественное изменение способа потери устойчивости подкрепленной оболочки, описанное в работе [8]. Форма потери устойчивости, соответствующая критическому давлению (1.30) (или, в случае жесткой заделки, (2.15)), сменяется формой, локализованной на поверхности шпангоутов, для которой критическое давление уже не может быть найдено по формуле (1.30)((2.15)). Чтобы описать потерю устойчивости широкого шпангоута, его следует рассматривать как кольцевую пластину. Приближенное решение задачи о потере устойчивости цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевой пластиной, получено в работе [8].

Для шарнирно опертой оболочки с косым краем оптимальным является подкрепление 12 шпангоутами, так как минимум функции отношения масс подкрепленной и неподкрепленной оболочек  $F = 0.5661$  достигается при  $n_r = 12$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aron H., *Das Gleich gewich und die Bewegung einer unendlich duennen beliebig gekruemmtten elastischen Schale* // Crelle Journal fur die reine und angewandte Mathematik, 1874, Bd. 78, pp. 136-174.
2. Love A., *On the deformation of thin elastic shells* // Philosophical Transactions of the Royal Society, Ser. A, 1888.
3. Филиппов С.Б. *Теория сопряженных и подкрепленных оболочек* // СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 1999. 196 с.
4. Filippov S.B., Naumova N.V. *Optimal design of vibrating ring-stiffened cylindrical shell*// COMPDYN 2013, 4 Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics, Kos Island, Greece 2013, CD-RS14, 1–10.
5. Товстик П.Е. *Устойчивость тонких оболочек. Асимптотические методы* // М.: Наука, 1995. 320 с.
6. Лопатухин А. Л., Филиппов С. Б. *Низкочастотные колебания и устойчивость тонкой цилиндрической оболочки, подкрепленной конечным числом шпангоутов*// Вестн. С.-Петербур. ун-та. Сер. 1. 2001. Вып. 2. С.84-90.
7. Малышева О. М., Филиппов С. Б. *Влияние эксцентриситета на устойчивость подкрепленных шпангоутами цилиндрических оболочек под действием внешнего давления*// Вестн. С.-Петербур. ун-та. Сер. 1. 2009. Вып. 2. С. 89–98.
8. Filippov S. B. *Buckling of circular ring joint with cylindrical shell*// Shell Structures Theory and Applications, Proc. of the 9th SSTA Conference. Jurata, Poland, 2009, 109–112.
9. Адамович И.А., Филиппов С. Б. *Оптимизация параметров подкрепленной цилиндрической оболочки*// Вестн. С.-Петербур. ун-та. Сер. 1. 2015. Вып. 2. С.228-236.
10. Adamovich I.A., *Optimal design of stiffened cylindrical shell with curvilinear edge* // AIP Conference Proceedings 1959, 070001 (2018); <https://doi.org/10.1063/1.5034676>.