

Санкт-Петербургский государственный университет

**СЕРГА Виктория Александровна**

**Выпускная квалификационная работа**

**Компьютерное моделирование процессов управления  
двухроторной нелинейной ММО системой**

Уровень образования: бакалавриат

Направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Основная образовательная программа СВ.5005.2015 «Прикладная математика, фундаментальная информатика и программирование»

Профиль: «Исследование и проектирование систем управления и обработки сигналов»

Научный руководитель:  
заведующий кафедрой компьютерных технологий и систем,  
доктор физ.-мат. наук,  
профессор Веремей Е.И.

Рецензент:  
заведующий кафедрой информационных систем,  
доктор физ.-мат. наук,  
профессор Олемской И.В.

Санкт-Петербург

2019

# Содержание

Введение.....	3
Обзор литературы .....	4
1. Содержательная постановка задачи управления .....	5
2. Постановка математической задачи синтеза .....	7
2.1. Математическая модель системы TRMS.....	7
2.2. Динамика разомкнутой системы.....	10
2.3. Задача синтеза в многоцелевой структуре .....	12
3. Методы решения задачи синтеза.....	15
3.1. Построение базового регулятора .....	15
3.2. Построение асимптотического наблюдателя.....	15
3.3. Построение динамического корректора.....	16
4. Моделирование системы управления TRMS в среде MATLAB-Simulink..	19
4.1. Моделирование линейной системы .....	19
4.2. Компьютерная модель нелинейной системы.....	21
5. Результаты практических расчетов.....	23
Выводы .....	28
Заключение .....	29
Список литературы .....	30
Приложение 1 .....	31

## Введение

В современных системах автоматического управления широко используются асимптотические наблюдатели, которые восстанавливают информацию о векторе состояния динамического объекта, используя результаты измерений, поступающих с датчиков.

В частности, асимптотические наблюдателя входят в состав законов управления с многоцелевой структурой, которые применяются для динамических объектов, функционирующих в различных режимах движения.

Особую роль многоцелевые структуры играют в различных задачах управления нелинейными подвижными объектами, в частности – летательными аппаратами.

В данной работе рассматривается комплекс вопросов, относящихся к управлению динамической системой TRMS, которая имитирует динамику летательного аппарата подобного вертолету. Основное содержание составляет постановка и решение задачи многоцелевого управления с учетом двух возможных режимов движения: собственного движения при отработке командного сигнала и вынужденного движения, порождаемого ступенчатым аддитивным внешним возмущением.

Для обоих режимов формируется комплекс требований, предъявляемых к динамическим свойствам обратной связи, и осуществляется поиск настраиваемых элементов, которые обеспечивают их выполнение.

Особое внимание уделяется разработке компьютерного моделирующего комплекса в интегрированной среде MATLAB-Simulink для выполнения имитационного моделирования динамики замкнутой нелинейной системы в указанных режимах движения.

Выполняются расчеты в рамках предложенного подхода для конкретных значений параметров системы TRMS.

## Обзор литературы

Центральные принципы формирования обратных связей с многоцелевой структурой освещены в работах [1] – [4].

В статье [4] особое внимание уделено вопросу обеспечения астатизма замкнутых систем с многоцелевыми регуляторами по выходным контролируемым координатам.

Недостатком указанных работ служит ориентация только на линейные объекты, хотя в статье [3] указаны некоторые особенности применения многоцелевого подхода для нелинейных вариантов.

В работах [5] и [6] представлены математические модели и указаны некоторые способы управления системой TRMS. Недостатком здесь служит использование традиционных законов управления типа ПИД, которые не обеспечивают желаемого качества стабилизации при работе в различных режимах. Особо важно отсутствие гарантий по качеству процессов управления при реализации свойства астатизма, что преодолевается с помощью обратных связей, имеющих многоцелевую структуру.

# 1. Содержательная постановка задачи управления

В качестве объекта управления в данной работе принята нелинейная механическая система, имитирующая функционирование летательного аппарата, который управляется двумя воздушными винтами (роторами). Эта система, далее кратко именуемая TRMS (Twin Rotors MIMO System), используется многими авторами ([5], [6]) для практической проверки работоспособности различных законов управления.

Фактически, TRMS – это лабораторная установка, представляющая возможности и инструменты формирования обратной связи для тестирования новых регуляторов. Данная система характеризуется нестабильной, многосвязной нелинейной динамикой.

Установка состоит из горизонтальной балки, закрепленной на вертикальной стойке с помощью двухмерного шарнира. Основной ротор прикреплен к передней части горизонтальной балки параллельно Земле. Хвостовой ротор прикреплен к задней части балки перпендикулярно к Земле. Противовес с грузом прикреплен к горизонтальной балке на оси вращения: он служит для перемещения центра масс системы. Основной и хвостовой роторы управляются двумя двигателями постоянного тока. Общий вид установки TRMS показан на рис. 1.

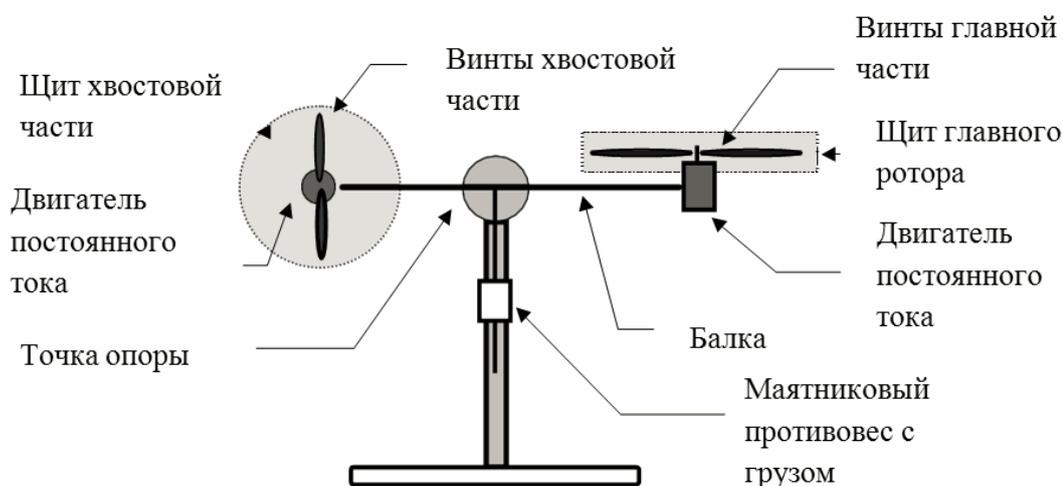


Рис. 1. Общая схема конструкции двухроторной системы TRMS.

В данной работе описывается процедура построения управления с помощью многоцелевого подхода.

Основная задача – построить управление для данного объекта в следующих режимах функционирования:

1. Собственное движение под воздействием командного сигнала при доступности полного вектора состояния для введения в регулятор.
2. Собственное движение под воздействием командного сигнала при неполной информации о векторе состояния, за счет управления по выходу измерителей.
3. Движение, определяемое воздействием ступенчатых внешних возмущений.

Необходимо стабилизировать объект в нулевом положении равновесия при ненулевых начальных условиях и обеспечить желаемое качество переходного процесса. Особое внимание должно быть уделено обеспечению астатизма в третьем режиме по углам тангажа и рыскания.

## 2. Постановка математической задачи синтеза

Общая задача работы состоит в аналитическом синтезе обратной связи, обеспечивающей управление системой TRMS во всех режимах движения. В рамках многоцелевого подхода эта задача декомпозируется на последовательность локальных задач, относящихся к конкретным режимам движения. Их решения позволяют настроить варьируемые элементы многоцелевой структуры, повышающие качество процессов управления.

### 2.1. Математическая модель системы TRMS

В соответствии с работами [5, 6], математическая модель объекта управления представляется уравнениями

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\theta}_V = M_1 - M_{FG} - M_{B\theta_V} - M_G, \\ I_2 \ddot{\theta}_H = M_2 - H_{B\theta_H} - M_R, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\theta_V$  – угол тангажа и  $\theta_H$  – угол рыскания.

Здесь моменты  $M_1$  и  $M_2$ , создаваемые управляющими двигателями, определяются по формулам

$$\begin{aligned} M_1 &= a_1 \tau_1^2 + b_1 \tau_1, \\ M_2 &= a_2 \tau_2^2 + b_2 \tau_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Моменты  $M_{B\theta_V}$  и  $M_{B\theta_H}$  порождаются силами трения в шарнирах трения и задаются формулами

$$\begin{aligned} M_{B\theta_V} &= B_{1\theta_V} \dot{\theta}_V - \frac{0.0326}{2} \sin(2\theta_V) \dot{\theta}_V^2, \\ M_{B\theta_H} &= B_{1\theta_H} \dot{\theta}_H - \frac{0.0326}{2} \sin(2\theta_H) \dot{\theta}_H^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Кроме указанных воздействий, на систему действуют момент  $M_{FG}$  от силы тяжести, гироскопический момент  $M_G$ , а также момент перекрестной

реакции  $M_R$ , связанный с управляющим моментом  $M_1$ :

$$M_{FG} = M_g \sin(\theta_V), \quad (4)$$

$$M_G = K_{gy} M_1 \dot{\theta}_H \cos(\theta_V), \quad (5)$$

$$M_R = \frac{K_c (T_0 s + 1)}{T_p s + 1} M_1. \quad (6)$$

Заметим, что уравнение (6) может быть переписано в форме пространства состояний (в ss-форме), что приводит к системе

$$\dot{M}_R = -\frac{1}{T_p} M_R + M_1, \quad (7)$$

$$\zeta = \left( \frac{K_c}{T_p} - \frac{K_c T_p}{T_p^2} \right) M_R + \frac{K_c T_0}{T_p} M_1, \quad (8)$$

с выходной переменной  $\zeta$ , которая используется далее для описания перекрестной динамики системы.

Двигатели постоянного тока могут быть смоделированы с помощью линейных систем первого порядка. Соответствующие уравнения для вертикального и горизонтального ротора имеют вид

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{K_1}{T_{11}s + T_{10}} U_V, \\ \tau_2 &= \frac{K_2}{T_{21}s + T_{20}} U_H. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $U_V$  и  $U_H$  управляющие сигналы (управления), подаваемые соответственно на вертикальный и горизонтальный роторы.

Рассматривая уравнения (1) – (9) совместно, получим систему нелинейных дифференциальных уравнений, полностью описывающих динамику для установки TRMS:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\dot{\theta}_V = \Omega_V, \\
\dot{\Omega}_V = \frac{1}{I_1} \left( a_1 \tau_1^2 + b_1 \tau_1 - M_g \sin(\theta_V) - B_{1\theta_V} \Omega_V + \frac{0.0326}{2} \sin(2\theta_V) \Omega_V^2 - K_{gy} a_1 \cos(\theta_V) \Omega_H \tau_1^2 - K_{gy} b_1 \cos(\theta_V) \Omega_H \tau_1 \right), \\
\dot{\theta}_H = \Omega_H, \\
\dot{\Omega}_H = \frac{1}{I_2} \left( a_2 \tau_2^2 + b_2 \tau_2 - B_{1\theta_H} \Omega_H + \frac{0.0326}{2} \sin(2\theta_H) \Omega_H^2 - \left( \frac{K_c}{T_P} - \frac{K_c T_0}{T_P^2} \right) M_R - \frac{K_c T_0}{T_P} (a_1 \tau_1^2 + b_1 \tau_1) \right), \\
\dot{M}_R = -\frac{1}{T_P} M_R + a_1 \tau_1^2 + b_1 \tau_1, \\
\dot{\tau}_1 = -\frac{T_{10}}{T_{11}} \tau_1 + \frac{K_1}{T_{11}} U_V, \\
\dot{\tau}_2 = -\frac{T_{20}}{T_{21}} \tau_2 + \frac{K_2}{T_{21}} U_H.
\end{array} \right. \quad (10)$$

Значения всех постоянных параметров, используемых в системе (10), сведены в табл. 1.

Таблица 1.

Параметр	Описание	Значение	Единицы измерения
$a_1$	Коэффициент главного ротора	0.0135	N/A
$a_2$	Коэффициент главного ротора	0.0924	М
$b_1$	Коэффициент хвостового ротора	0.01	М
$b_2$	Коэффициент хвостового ротора	0.09	М
$B_{1\theta_V}$	Момент силы трения	0.003	Nm s/rad
$B_{1\theta_H}$	Момент силы трения	0.1	Nm s/rad
$M_G$	Момент силы тяжести	0.29	Nm
$I_1$	Момент инерции угла тангажа	0.0535	Kg m <sup>2</sup>
$I_2$	Момент инерции угла рыскания	0.02	Kg m <sup>2</sup>
$K_{gy}$	Гироскопический момент	0.05	s/rad

$T_p$	Параметр момента перекрестной реакции	2	N/A
$T_0$	Параметр момента перекрестной реакции	3.5	N/A
$K_C$	Коэффициент усиления перекрестной реакции	-0.2	N/A
$T_{10}$	Знаменатель главного ротора	1	N/A
$T_{11}$	Знаменатель главного ротора	1.1	N/A
$T_{20}$	Знаменатель хвостового ротора	1	N/A
$T_{21}$	Знаменатель хвостового ротора	1	N/A

## 2.2. Динамика разомкнутой системы

В соответствии с приведенными уравнениями (10), рассмотрим особенности динамики разомкнутой системы при отсутствии обратных связей по управлениям. Устойчивость этой системы можно проиллюстрировать, независимо рассматривая подсистемы, представляющие движение по вертикали и движение по горизонтали. На рис. 2 и рис. 3 показаны фазовые портреты для этих подсистем соответственно. Движение осуществляется при нулевых управляющих сигналах  $U_V = 0$  и  $U_H = 0$ , и при заданных начальных условиях  $(\pi/4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$  по вектору состояния вертикальной подсистемы. Для горизонтальной части рассматриваются три варианта начальных условий:  $(0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ ,  $(0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$  и  $(0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ .

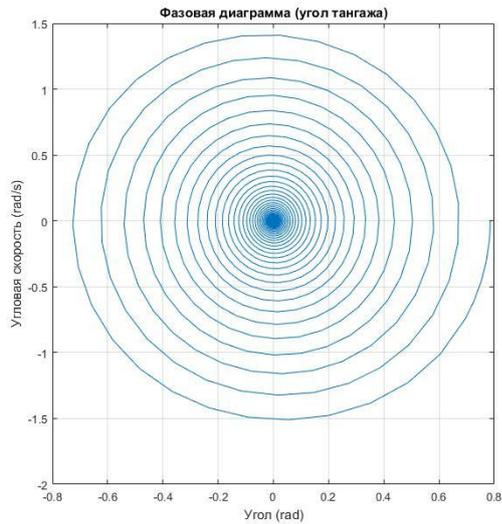


Рис. 2. Фазовый портрет для движения в вертикальной плоскости.

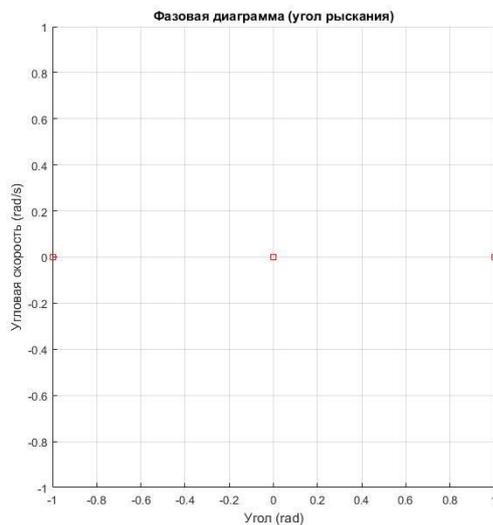


Рис. 3. Фазовый портрет для движения в горизонтальной плоскости.

Из рис. 2 видно, что вертикальная система асимптотически стремится к нулевому положению равновесия системы, однако это делается слишком медленно и с большим количеством колебаний. На рис. 3 показано, что горизонтальная система не стремится к нулевому положению в силу отсутствия возвращающей силы: система TRMS поворачивается на определенный угол и остается в этом положении до появления внешнего воздействия.

Наличие слабо затухающих колебаний для вертикальной подсистемы и неспособность горизонтальной подсистемы вернуться в нулевое положение равновесия не желательны для установки, и должны быть устранены с ис-

пользованием обратной связи.

Для формирования обратной связи с многоцелевой структурой, необходимо выполнить линеаризацию уравнений динамики (10) в окрестности нулевого положения равновесия. Результат этой операции представляется в виде следующей LTI модели, записанной в ss-форме:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (11)$$

$$A = \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=0, u=0}, \quad B = \left. \frac{dF}{du} \right|_{x=0, u=0}, \quad (12)$$

$$F = (\dot{\theta}_V, \dot{\Omega}_V, \dot{\theta}_H, \dot{\Omega}_H, \dot{M}_R, \dot{\tau}_1, \dot{\tau}_2)', \quad x = (\theta_V, \Omega_V, \theta_H, \Omega_H, M_R, \tau_1, \tau_2)', \quad u = (U_V, U_H).$$

Матрицы системы (11) задаются формулами

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_1/T_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_2/T_{21} \end{bmatrix}',$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{M_g}{I_1} & -\frac{B_{1\theta_V}}{I_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{B_{1\theta_H}}{I_2} \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b_1}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{K_c(T_0 - T_p)}{I_2 T_p^2} & -\frac{K_c T_0 b_1}{I_2 T_p} & \frac{b_2}{I_2} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_p} & b_1 & 0 \\ 0 & -\frac{T_{10}}{T_{11}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{T_{20}}{T_{21}} \end{bmatrix}$$

### 2.3. Задача синтеза в многоцелевой структуре

Для синтеза управления будем использовать обратную связь с многоцелевой структурой, описанной в работах [1 – 4]. Она может быть представ-

лена в следующем виде:

$$\dot{z} = Az + Bu + L(y - Cz), \quad (15)$$

$$u = Kz + \xi, \quad (16)$$

$$\xi = K_{\Delta}(y - Cz). \quad (17)$$

Уравнение (15) служит моделью асимптотического наблюдателя, позволяющего оценивать компоненты вектора состояния системы TRMS. Уравнение (16) формирует управляющие сигналы, подаваемые на электромоторы роторов, гарантирующие устойчивость замкнутой системы. Третий элемент (17) данной структуры обеспечивает астатизм замкнутой системы при движении под воздействием постоянных внешних возмущений. Здесь  $z \in E^7$  – вектор состояния наблюдателя,  $\xi \in E^2$  – выход корректора.

Задача синтеза многоцелевого управления TRMS состоит в нахождении постоянных матриц  $K$  формирователя (16),  $L$  наблюдателя (15) и  $K_{\Delta}$  корректора (17). Поиск матриц производится исходя из требований к динамическим свойствам замкнутой системы.

Свойства и особенности многоцелевой структуры позволяют декомпозировать общую задачу синтеза, сводя ее к совокупности трех следующих последовательно решаемых локальных задач.

1. Задача о выборе матрицы  $K$  для базового регулятора по состоянию

$$u = Kx. \quad (18)$$

Матрица  $K$  должна быть определена так, чтобы положение равновесия базовой замкнутой нелинейной системы (10), (18) было асимптотически устойчивым, и при этом выполнялись желаемые требования к качеству переходного процесса в этой системе. Процесс определяется аддитивной подачей ступенчатого единичного командного сигнала на роторы.

2. Задача поиска матрицы  $L$  наблюдателя рассматривается для движений замкнутой системы с измерениями  $y = Cx$  при выключенном корректоре

и для найденной матрицы  $K$ . Процесс определяется таким же командным сигналом, как и ранее. Матрица  $L$  должна быть определена так, чтобы положение равновесия указанной замкнутой системы было асимптотически устойчивым. Дополнительно должны выполняться требования по качеству динамики переходного процесса.

3. Задача о выборе матрицы  $K_{\Delta}$  корректора рассматривается на движениях полной замкнутой системы с наблюдателем и корректором. Матрицы  $K$  и  $L$  представляются решениями первых двух задач. Дополнительно вводится внешнее аддитивное возмущающее ступенчатое воздействие, влияющее на движение системы. Матрица  $K_{\Delta}$  должна быть выбрана так, чтобы обеспечивался астатизм по переменным  $\theta_V$  и  $\theta_H$  с учетом требований по динамическому качеству.

### 3. Методы решения задачи синтеза

Последовательно рассмотрим методы решения сформулированных выше задач поиска настраиваемых элементов обратной связи для системы TRMS с применением многоцелевой структуры (15) – (17).

#### 3.1. Построение базового регулятора

В качестве базового регулятора используется линейно-квадратичный регулятор (LQR).

Управление в форме линейного стабилизирующего регулятора  $u = Kx$  по состоянию, где  $K$  – постоянная матрица с размером  $m \times n$ , строится таким образом, чтобы обеспечить минимум функционала

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt, \quad (19)$$

где  $Q \geq 0$  и  $R > 0$  – заданные симметрические весовые матрицы.

Матрица  $K$  находится следующим образом:

$$K = R^{-1} B^T S, \quad (20)$$

где  $S$  является решением матричного алгебраического уравнения Риккати

$$A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q = 0. \quad (21)$$

Весовые матрицы  $Q$  и  $R$  выбираются исходя из требований к качеству переходного процесса в системе.

#### 3.2. Построение асимптотического наблюдателя

Асимптотическим наблюдателем для объекта управления

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (22)$$

называется линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = Az + Bu + L(y - Cz) \equiv Az + Bu + LC(x - z), \quad (23)$$

где  $z \in E^n$  – вектор состояния наблюдателя, при условии, что система имеет гурвицев характеристический полином

$$\Delta_g(s) = \det(Es - A + LC). \quad (24)$$

Чтобы найти матрицу  $L$ , выберем корни характеристического полинома  $\Delta_g(s)$  так, чтобы они лежали в открытой левой полуплоскости: это определит желаемый полином  $\Delta^*(s)$ . Выбор корней должен быть подчинен требованиям по качеству динамики переходных процессов. Далее, с учетом (24), находим матрицу  $L$ , обеспечивая выполнение тождества

$$\det(Es - A + LC) \equiv \Delta^*(s).$$

### 3.3. Построение динамического корректора

Чтобы найти матрицу корректора

$$K_{\Delta} = \begin{bmatrix} k_{\Delta 1} & 0 \\ 0 & k_{\Delta 2} \end{bmatrix}, \quad (25)$$

рассмотрим уравнения замкнутой линейной системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + \varepsilon d(t), \\ \dot{z} &= Az + Bu + L(y - Cz), \\ y &= Cx, \\ u &= Kz + K_{\Delta}(y - Cz). \end{aligned} \quad (26)$$

Будем считать, что матрица  $K$  базового регулятора  $K$  определена в виде (20), как решение первой задачи, а матрица  $L$  получена в результате решения задачи 2. Здесь  $d = d(t)$  – внешнее аддитивное возмущающее ступенчатое воздействие,  $\varepsilon$  – вектор коэффициентов при возмущении.

Поиск матрицы  $K_{\Delta}$  должен быть осуществлен так, чтобы в положении равновесия системы (26) при любом постоянном возмущении  $d \equiv const$  уг-

ловые координаты  $\theta_V$  и  $\theta_H$  были нулевыми. Заметим, что положение равновесия для этой системы определяется условиями

$$\begin{aligned} 0 &= Ax + Bu + \varepsilon d, \\ 0 &= Az + Bu + L(y - Cx), \\ y &= Cx, \\ u &= Kz + K_{\Delta}(y - Cx). \end{aligned} \quad (27)$$

После очевидного преобразования равенств (27) получим:

$$\begin{aligned} -(A + BK_{\Delta}C)x + (-BK + BK_{\Delta}C)z &= \varepsilon d, \\ (BK_{\Delta}C + LC)x + (A + BK - BK_{\Delta}C - LC)z &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= -A - BK_{\Delta}C, \\ \gamma_{12} &= -BK + BK_{\Delta}C, \\ \gamma_{21} &= BK_{\Delta}C + LC, \\ \gamma_{22} &= A + BK - BK_{\Delta}C - LC. \end{aligned} \quad (29)$$

Тогда уравнения (28), определяющие положение равновесия замкнутой системы с регулятором многоцелевой структуры примет вид:

$$\begin{cases} \gamma_{11}x + \gamma_{12}z = \varepsilon d, \\ \gamma_{21}x + \gamma_{22}z = 0, \end{cases} \quad (30)$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{bmatrix} d. \quad (31)$$

Введем в рассмотрение не особую матрицу

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} = [\tilde{\gamma}_1 \quad \tilde{\gamma}_2 \quad \tilde{\gamma}_3 \quad \cdots \quad \tilde{\gamma}_n], \quad (32)$$

со столбцами  $\tilde{\gamma}_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Здесь нас интересует решения системы (31) только по переменным  $\theta_V$  и  $\theta_H$  (первая и третья координаты), которые по формулам Крамера можно представить в виде

$$\begin{aligned}x_{10} &= \frac{\Delta_1}{\Delta} d, \\x_{20} &= \frac{\Delta_2}{\Delta} d.\end{aligned}\tag{33}$$

Здесь  $\Delta = \det(\Gamma)$  – определитель системы,

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \det \begin{bmatrix} \varepsilon & \tilde{\gamma}_2 & \tilde{\gamma}_3 & \cdots & \tilde{\gamma}_n \\ 0 & & & & \end{bmatrix}, \\ \Delta_2 &= \det \begin{bmatrix} \tilde{\gamma}_1 & \tilde{\gamma}_2 & \varepsilon & \cdots & \tilde{\gamma}_n \\ & & 0 & & \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{34}$$

Как было отмечено выше, для того чтобы обеспечивался астатизм, необходимо и достаточно иметь  $x_{10} = 0, x_{20} = 0$ , при любом значении  $d$ , что приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} \Delta_1 = \Delta_1(k_{\Delta 1}, k_{\Delta 2}) = 0, \\ \Delta_2 = \Delta_2(k_{\Delta 1}, k_{\Delta 2}) = 0. \end{cases}\tag{35}$$

Нетрудно показать, что эта система является линейной по отношению к искомым параметрам  $k_{\Delta 1}$  и  $k_{\Delta 2}$ , и ее решение полностью определяет динамический корректор.

## 4. Моделирование системы управления TRMS в среде MATLAB-Simulink

Здесь рассматриваются вопросы, связанные с построением компьютерного моделирующего комплекса, предназначенного для исследования и проектирования системы управления TRMS в рамках принятого в работе подхода. Моделирование осуществляется в интегрированной среде MATLAB с использованием прикладного пакета Simulink.

### 4.1. Моделирование линейной системы

Для построения линейной модели TRMS использовался стандартный блок LineSystem, который на программном уровне представляет LTI-систему с моделью в ss-форме. Матрицы  $A, B, C, D$  являются результатом линеаризации нелинейной модели (10) и имеют вид (13), (14). На вход блока подаются управляющие сигналы  $U_V$  и  $U_H$ . Выходом является вектор наблюдения  $y = Cx$ . В данном случае наблюдаемыми переменными являются угол тангажа  $\theta_V$  и угол рыскания  $\theta_H$ . Схема линейной модели изображена на рис. 4.

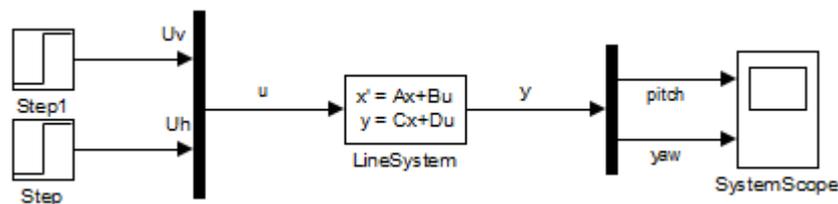


Рис. 4. Линейная модель системы TRMS

Simulink-модель замкнутого варианта линейного приближения TRMS представлена своей блок-схемой на рис. 5. Обратная связь формируется в виде LQR-оптимального регулятора  $u = Kx$ .

Как и для разомкнутого объекта, здесь на вход поступают ступенчатые единичные командные сигналы, подаваемые на роторы.

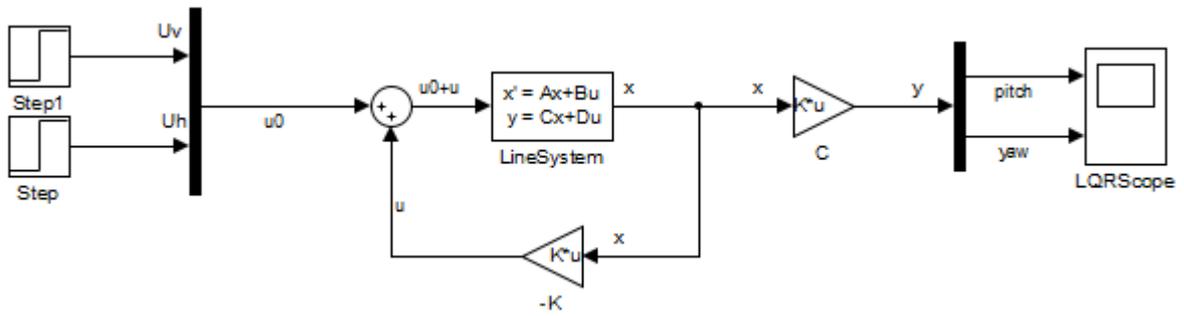


Рис. 5. Линейная система замкнутая LQR-регулятором

На рис. 6 изображена блок-схема Simulink-модели линейной системы, замкнутой обратной связью, включающей асимптотический наблюдатель (23). Управление в данном случае будет иметь вид  $u = u_0 - Kz$ , где  $u_0$  – тот же входной сигнал, что и в предыдущем случае.

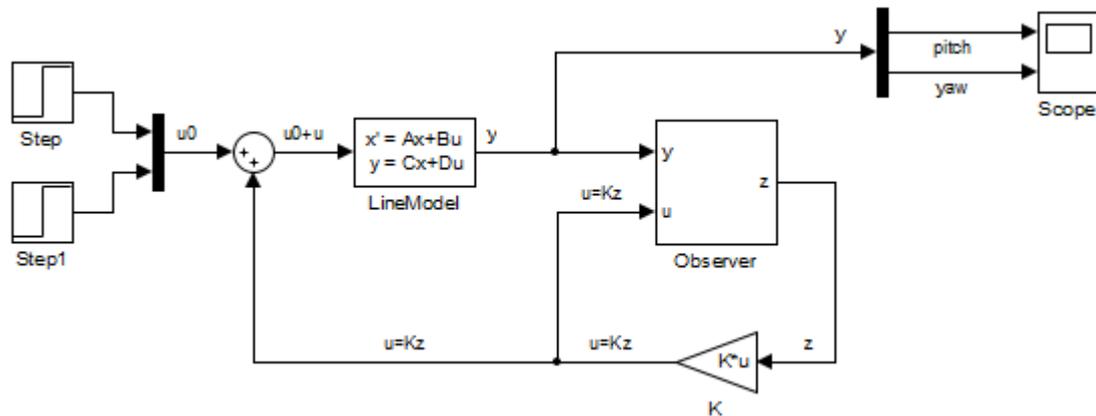


Рис. 6. Линейная замкнутая система с асимптотическим наблюдателем

Специальный блок Observer, моделирующий работу асимптотического наблюдателя Observer представлен на рис. 7.

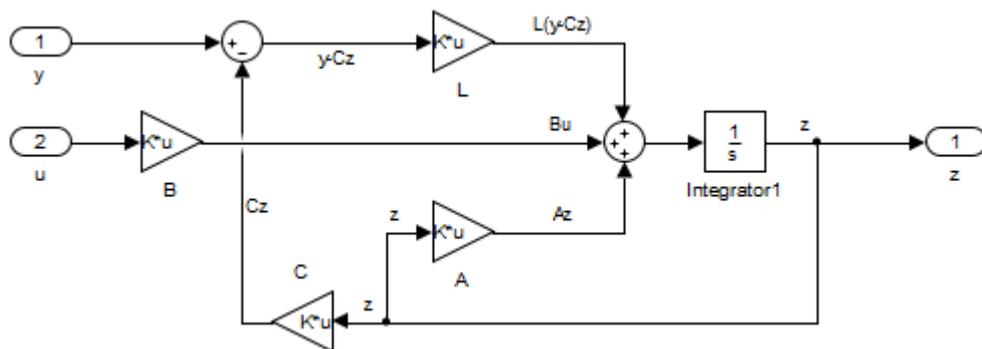


Рис. 7. Схема асимптотического наблюдателя

Включение в компьютерную модель динамического корректора отражено блок-схемой, показанной на рис. 8. В данном случае на объект подаются не командные сигналы по управлениям, а внешнее аддитивное возмущающее ступенчатое воздействие  $d$ . При этом управляющий сигнал формируется в виде  $u = Kz + K_{\Delta}(y - Cz)$ .

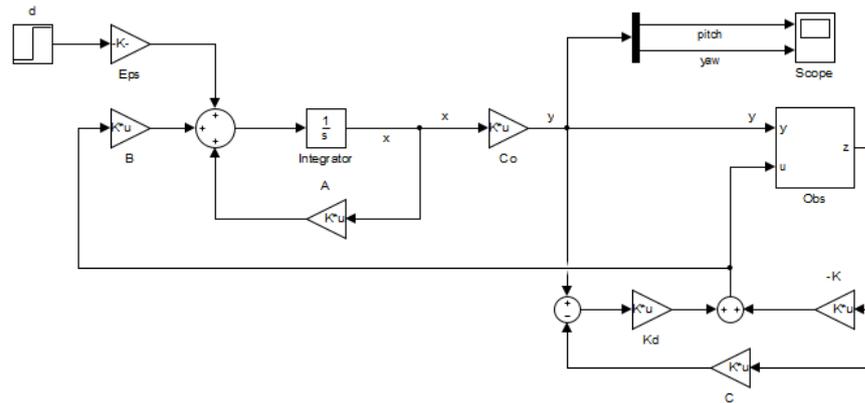


Рис. 8. Линейная замкнутая система с включенным динамическим корректором

## 4.2. Компьютерная модель нелинейной системы

На рис. 9 показана блок-схема полной Simulink-модели нелинейной системы управления TRMS. На ее вход подается ступенчатое внешнее возмущение  $d$ , а также стабилизирующее управление  $u$ , формируемое синтезированной в работе линейной обратной связью. Заметим, что в данной модели можно включать или выключать динамический корректор (слагаемое  $K_{\Delta}(y - Cz)$ ) по мере необходимости. При выключенном корректоре система замыкается обратной с вязью  $u = Kz$ .

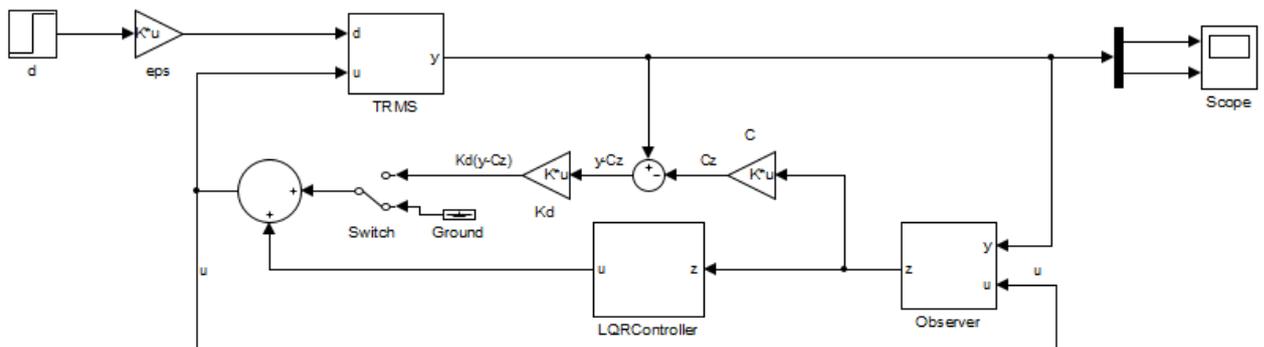


Рис. 9. Полная Simulink-модель замкнутой нелинейной системы

Блок модели, представляющий нелинейный объект управления TRMS, показан на рис. 10. Нелинейная функция  $F$  реализуется стандартным блоком MATLAB Function: исходный код на языке MATLAB для вычисления правых частей системы (10) приведен в Приложении 1.

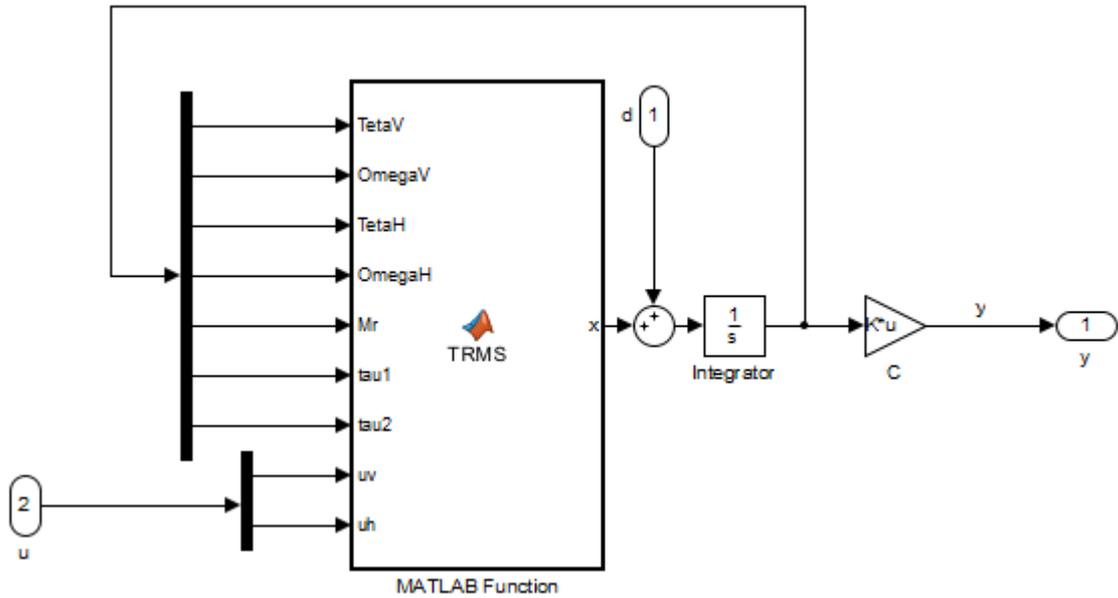


Рис. 10. Схема блока, моделирующего нелинейный объект TRMS.

Отметим, что в полной модели нелинейной системы используется тот же линейный асимптотический наблюдатель, что и в предшествующем варианте: его схема показана выше на рис. 7.

И, наконец, блок LQRController, моделирующий формирование управляющих сигналов представлен на рис. 11.

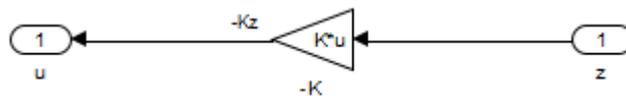


Рис. 11. Схема блока, формирующего управляющие сигналы.

## 5. Результаты практических расчетов

В данном разделе представлены результаты вычислений для конкретной системы TRMS с числовыми параметрами, заданными в табл. 1. Для проведения имитационного моделирования процессов управления используется компьютерный моделирующий комплекс, описанный в предшествующем разделе.

Сначала рассмотрим движение линейной системы. На каждом из приводимых ниже рисунков верхний график представляет угол тангажа  $\theta_V$ , а нижний – угол рыскания  $\theta_H$ .

Рассмотрим движение разомкнутой системы при подаче на входы  $U_V$  и  $U_H$  ступенчатых единичных сигналов, представленное на рис. 12. Видно, что вертикальная подсистема стремится к положению равновесия, но очень медленно и с большим количеством колебаний. Горизонтальная подсистема неустойчива: угол рыскания непрерывно возрастает. Таким образом, далее необходимо стабилизировать горизонтальную подсистему и уменьшить время переходного процесса и колебательность по вертикали.

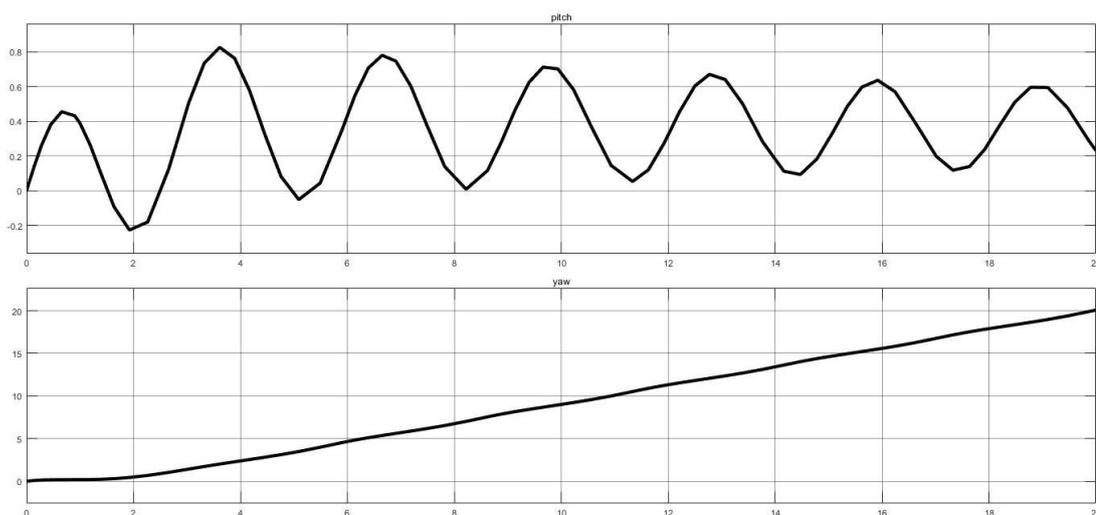


Рис.12. Процесс в разомкнутой линейной системе

На рис. 13 и рис. 14 показано движение системы, замкнутой LQR-регулятором по состоянию и системы с асимптотическим наблюдателем соответственно.

Для LQR-синтеза приняты матрицы

$$Q = \text{diag}(20.0 \ 2.00 \ 10.0 \ 88.0 \ 0.01 \ 0.01 \ 0.01), \ R = 0.5E_2.$$

В качестве корней характеристического полинома  $\Delta_g(s)$  выбраны значения  $-5*[1.9 \ 1.1 \ 1.2 \ 1.3 \ 1.4 \ 1.5 \ 1.6]$ .

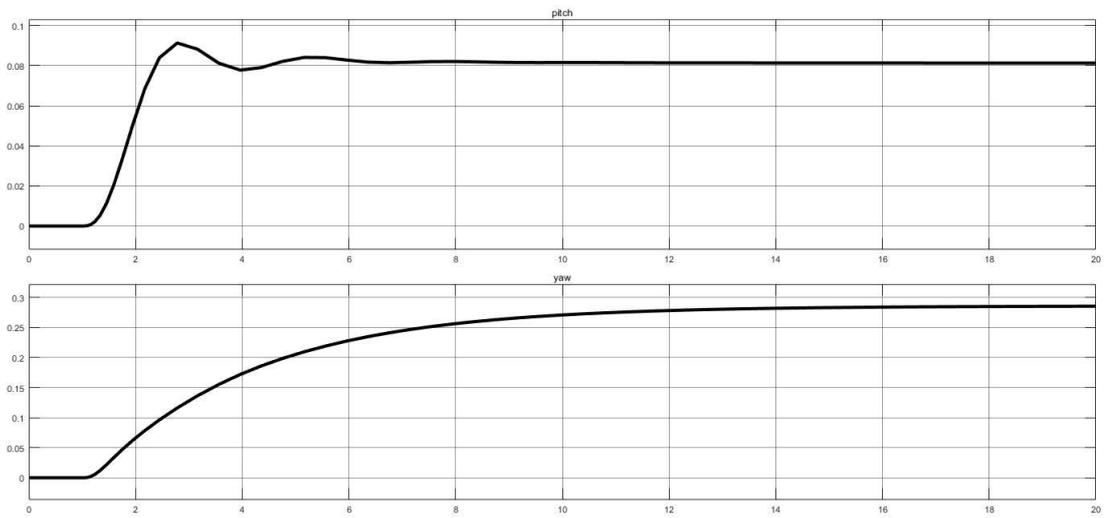


Рис. 13. Процесс в системе, замкнутой LQR-регулятором по состоянию

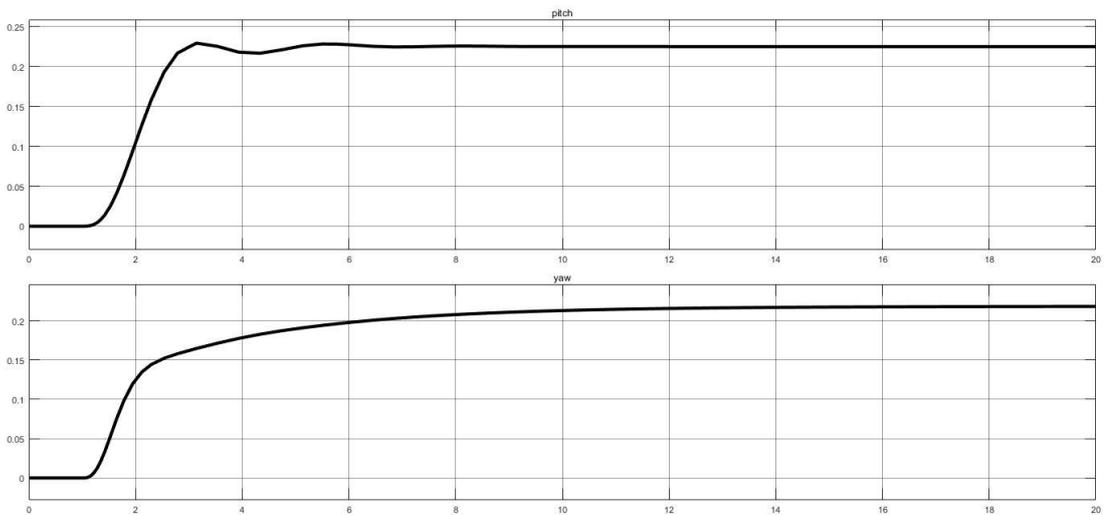


Рис. 14. Процесс в системе, замкнутой LQR-регулятором по оценкам

Из приведенных графиков следует, что замкнутая система стабилизируется в ненулевом (по углам) положении равновесия, причем время переходного процесса значительно меньше, чем в разомкнутой системе по вертикальной составляющей процесса.

На рис. 15 показано движение линейной замкнутой системы с включенным динамическим корректором. Значение ступенчатого внешнего возмущения  $d$  равно  $10^{-4}$ . Вектор коэффициентов при возмущении  $\varepsilon = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ .

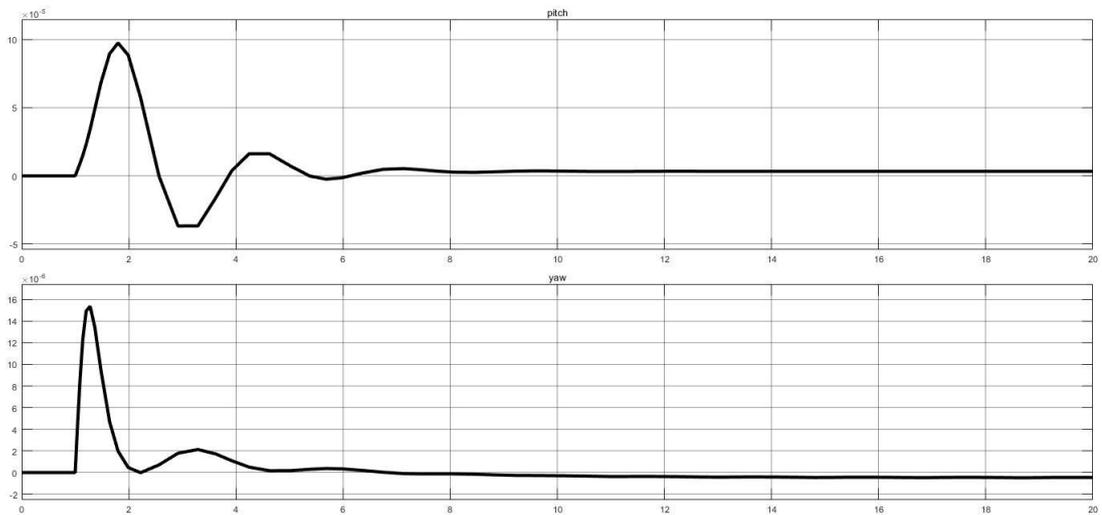


Рис.15. Процесс в системе с включенным динамическим корректором

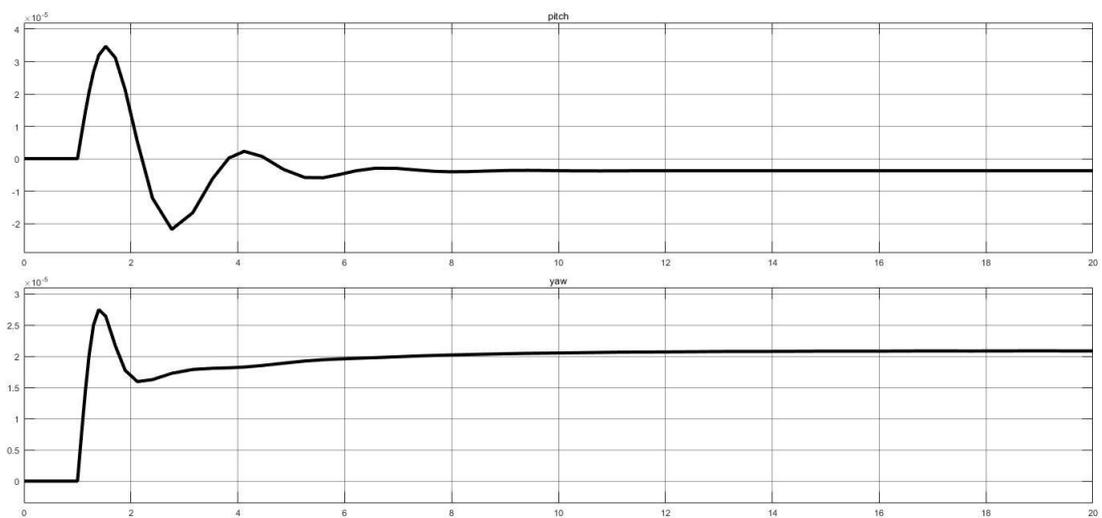


Рис.16. Процесс в системе с выключенным динамическим корректором

Из рис. 15 видно, что при включённом динамическом корректоре система стабилизируется в окрестности нулевого положения равновесия, выполняется условие астатизма. На рис. 16 показано, как ведет себя система в тех же условиях, но с выключенным корректором.

Рассмотрим теперь движение *нелинейной системы* с теми же параметрами регулятора, наблюдателя, корректора.

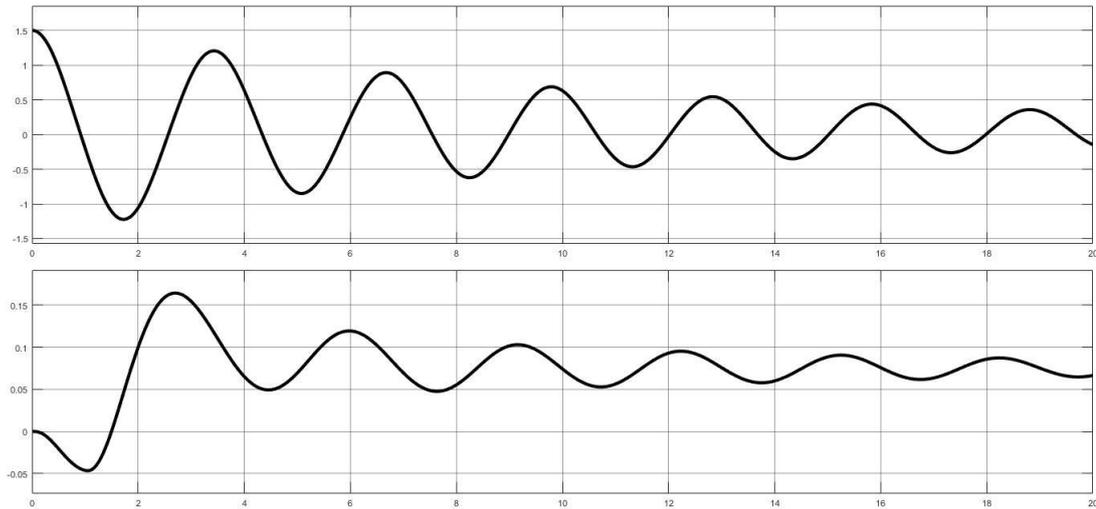


Рис. 27. Процесс в нелинейной системе с LQR-регулятором по состоянию

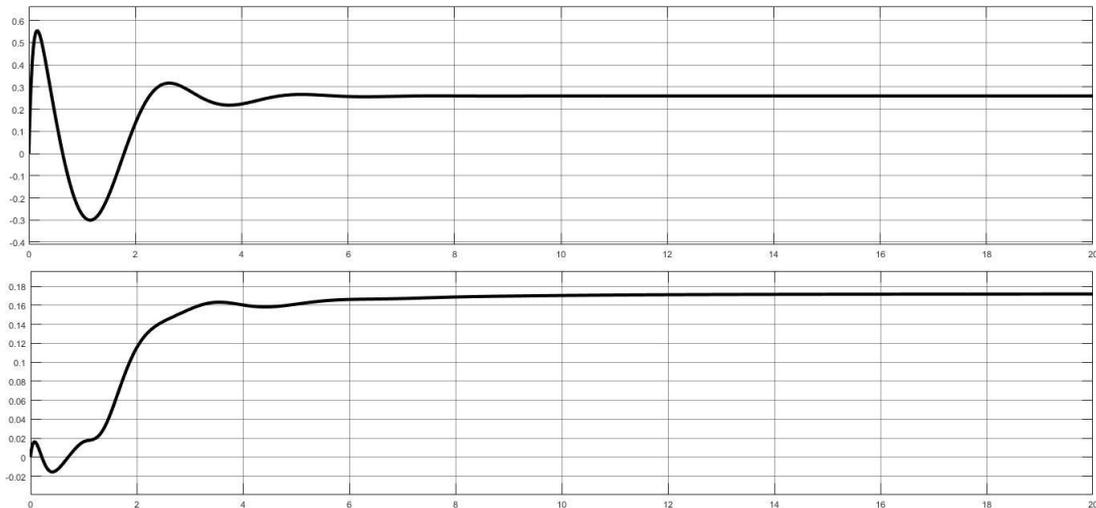


Рис. 18. Процесс в нелинейной системе с LQR-регулятором по оценкам

Сравним рис. 13, 14 и рис. 17, 18. Видно, что для нелинейной системы качество процессов несколько хуже. Это связано с тем, что параметры регулятора и наблюдателя были построены для системы, линеаризованной в

окрестности нулевого положения. Однако качество процессов все равно остается удовлетворительным. То же самое справедливо и для динамического корректора для линейной (рис. 15, 16) и нелинейной (рис. 19, 20) систем.

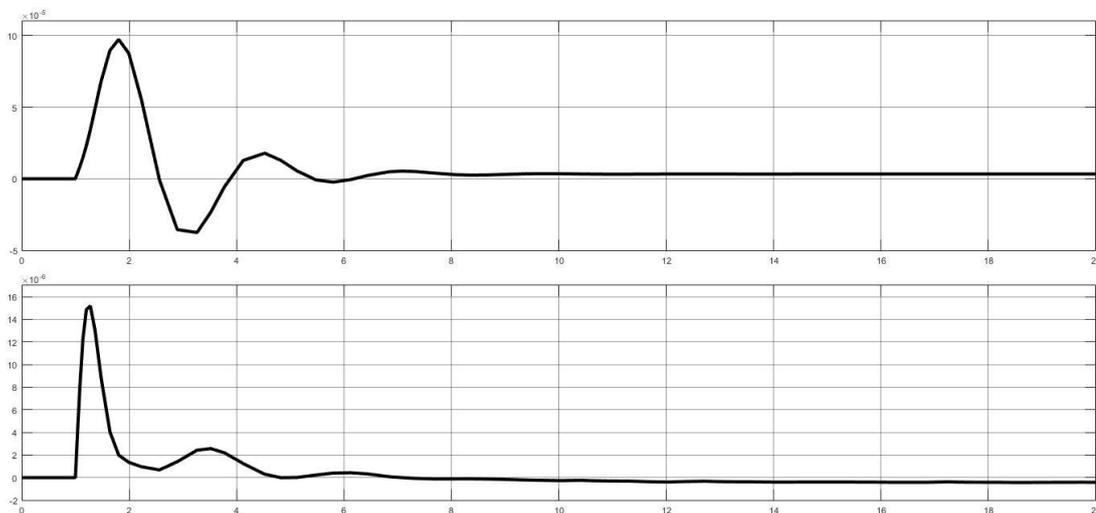


Рис.19. Процесс в нелинейной системе с включенным корректором

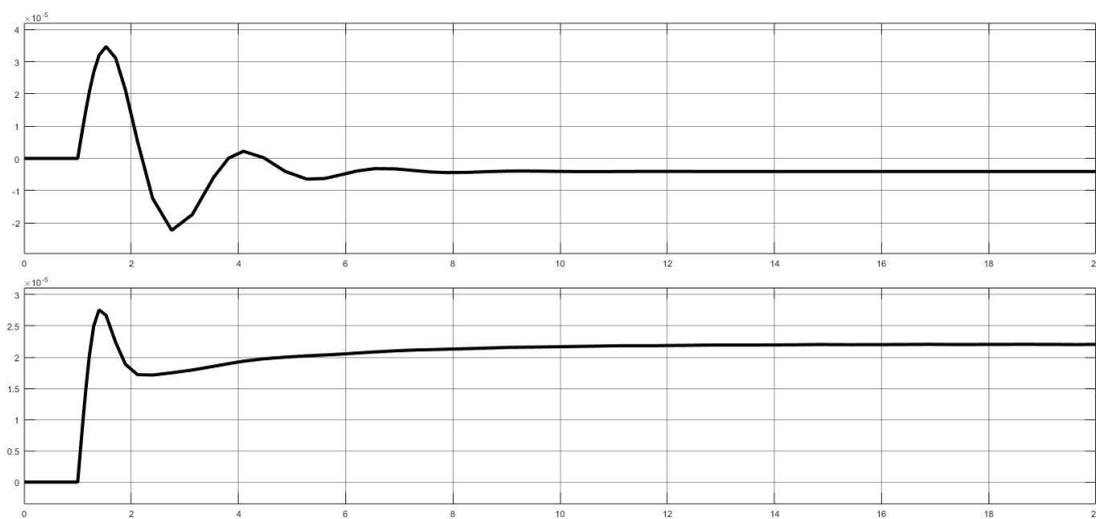


Рис.20. Процесс в нелинейной системе с выключенным корректором

## Выводы

Данная выпускная работа посвящена рассмотрению вопросов, связанных с управлением динамической системой TRMS, которая имитирует динамику летательного аппарата подобного вертолету.

В отличие от известных подходов к построению стабилизирующего управления данной системой, здесь предложено использование обратной связи с многоцелевой структурой, которая ранее не применялась для управления динамическими объектами подобного типа.

В ходе исследования проведен анализ математической модели TRMS, выполнена ее линеаризация. Сформулирована задача многоцелевого управления с учетом двух возможных режимов движения: собственного движения при отработке командного сигнала и вынужденного движения, порождаемого аддитивным ступенчатым внешним возмущением.

Для первого режима синтезирован базовый закон управления по состоянию и закон управления по оценкам, формируемым с помощью асимптотического наблюдателя. Для второго режима выполнен расчет динамического корректора, который обеспечивает астатизм замкнутой системы по углам тангажа и рыскания.

Разработан компьютерный моделирующий комплекс в интегрированной среде MATLAB-Simulink, с помощью которого выполнено имитационное моделирование динамики замкнутой нелинейной системы в указанных режимах движения. Результаты моделирования подтвердили работоспособность и эффективность принятого подхода.

## Заключение

В ходе проведенного исследования получены следующие результаты, выносимые на защиту:

1. Сформирована и проанализирована математическая модель двухроторной нелинейной системы TRMS.
2. Поставлена задача многоцелевого управления системой, предложены методы расчета элементов обратной связи.
3. Разработан программный комплекс в среде MATLAB-Simulink для анализа и исследования динамических процессов.
4. Проведено численное решение задачи для конкретных исходных данных с применением разработанной компьютерной модели.

## Список литературы

1. Веремей Е. И. Линейные системы с обратной связью. СПб.: Лань, 2013. — 448 с.
2. Веремей Е.И. Среднеквадратичная многоцелевая оптимизация. СПб: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2016. — 408 с.
3. Веремей Е.И., Сотникова М.В. Многоцелевая структура законов управления морскими подвижными объектами. XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014, Москва, 16 – 19 июня 2014 г.: Труды. [Электронный ресурс] М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014, с. 3289 – 3300.
4. T.A. Lepikhin, E.I. Veremey. Digital Control Laws for Marine Autopilots with Integral Action // Vestnik of Saint Petersburg University. — 2014. Ser. 10. Issue 4. P. 108–118.
5. M. Meon, T. Mohamed, M. Ramli, M. Mohamed and N. Manan. Review and current study on new approach using PID Active Force Control (PIDAFC) of twin rotor multi input multi output system (TRMS). In *2012 IEEE Symposium on Humanities, Science and Engineering Research*, Kuala Lumpur , 2012.
6. B. Pratap, A. Agrawal and S. Purwar. Optimal control of twin rotor MIMO system using output feedback. In *2012 2nd International Conference on Power, Control and Embedded Systems (ICPCES)*, Allahabad , 2012.

# Приложение 1

Ниже представлен код, используемый для моделирования нелинейной

TRMS системы.

```
function x = TRMS(TetaV, OmegaV, TetaH, OmegaH, Mr, tau1, tau2, uv, uh)
a1 = 0.0135;      % Main Rotor Coefficient
b1 = 0.0924;      % Main Rotor Coefficient
a2 = 0.02;        % Tail Rotor Coefficient
b2 = 0.09;        % Tail Rotor Coefficient
B1tv = 0.006;     % Friction Momentum
B1th = 0.1;       % Friction Momentum
B2t = 0.0326/2;  % Friction Momentum
Mg = 0.32;        % Moment of Gravity
I1 = 0.068;       % Pitch Moment of Inertia
I2 = 0.02;        % Yaw Moment of Inertia
Kgy = 0.05;       % Gyroscopic Momentum
Tp = 2;           % Cross Reaction Momentum Parameter
T0 = 3.5;         % Cross Reaction Momentum Parameter
Kc = -0.2;        % Cross Reaction Momentum Gain
T10 = 1;          % Main Rotor Denomnatiior
T11 = 1.1;        % Main Rotor Denomnatiior
T20 = 1;          % Tail Rotor Denominator
T21 = 1;          % Tail Rotor Denominator
K1 = 1.1;         % Main rotor gain
K2 = 0.8;         % Tail rotor gain
M1 = a1*tau1*tau1+b1*tau1;
M2 = a2*tau2*tau2+b2*tau2;
Mfg = Mg*sin(TetaV);
MbtetaV = B1tv*OmegaV - B2t*sin(2*TetaV)*OmegaV*OmegaV;
MbtetaH = B1th*OmegaH - B2t*sin(2*TetaH)*OmegaH*OmegaH;
MG = Kgy*M1*OmegaH*cos(TetaV);
dX1 = OmegaV;
dX2 = (M1 - Mfg - MbtetaV - MG)/I1;
dX3 = OmegaH;
dX4 = (M2-MbtetaH-(Kc/Tp-Kc*T0/(Tp*Tp))*Mr - M1*Kc*T0/Tp)/I2;
dX5 = -Mr/Tp + M1;
dX6 = -T10*tau1/T11 + K1*uv/T11;
dX7 = -T20*tau2/T21 + K2*uh/T21;
x = [dX1; dX2; dX3; dX4; dX5; dX6; dX7];
```