Санкт-Петербургский государственный университет
Кафедра теории управления

Габбасова Наиля Фаритовна

Выпускная квалификационная работа бакалавра

ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЦ ЛЯПУНОВА И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Направление 01.03.02
Прикладная математика и информатика

Научный руководитель:
кандидат физ.-мат. наук, доцент
Егоров Алексей Валерьевич

Санкт-Петербург
2019

Содержание

Введение

В данной работе предложен метод приближённого вычисления матрицы Ляпунова для дифференциально-разностных систем с запаздывающим аргументом. С помощью систем уравнений данного вида описываются многие химические, физические и биологические процессы, происходящие в мире. Благодаря исследованию уравнений с запаздыванием, мы имеем возможность получать более точную информацию о процессах и предсказывать поведение объектов и систем в будущем. Необходимость использования запаздываний продиктована тем, что скорость изменения в системах зависит не только от состояния в настоящий момент времени, но и от происходившего в уже прошедший промежуток времени. При решении некоторых задач запаздыванием пренебрегают, и в ход идёт теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако нужно понимать, при неучитывании запаздываний можно получить результат, никоим образом не соответствующий реальности. Поэтому, при детальном изучении процессов, целесообразно использовать функции с запаздывающим аргументом.

Понятие матрицы Ляпунова играет важную роль в теории дифференциально-разностных уравнений, так как поиск решений уравнений данного типа - трудоёмкая задача, хотя бы потому, что собственных чисел в системе бесконечно много. Все их не найти, а значит, проверить, что они лежат в левой комплексной полуплоскости непросто. Поэтому для изучения свойств систем используется метод функционалов Ляпунова-Красовского полного типа и матрица Ляпунова, являющаяся их основным элементом. В настоящее время матрица Ляпунова применима к таким задачам, как исследование систем на устойчивость, вычисление $\mathcal{H}_2$ нормы придаточной матрицы. А сами функционалы полного типа Ляпунова-Красовского используются для исследования робастной устойчивости, построения экспоненциальных оценок и стабилизирующих управлений, вычисления значений функционалов качества в задачах оптимального управления и для других задач.

Тем не менее, в настоящее время не существует общего метода построения матриц Ляпунова. В случае одного запаздывания и нескольких кратных запаздываний задача построения сводится к решению линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с линейными граничными условиями. Для некратных запаздываний применимы эвристические численные методы без оценки точности приближения. Также существуют методы с оценкой точности приближения для экспоненциально устойчивых систем.

Постановка задачи

Основная цель данной работы состоит в построении метода приближённого вычисления матрицы Ляпунова для дифференциально-разностных уравнений с некратными запаздываниями, а также в получении оценки точности приближения. Для этого задача построения матрицы Ляпунова сводится к решению уравнения Фредгольма II рода. Для решения поставленной задачи построения оценки приближения квадратурных формул применяется метод Анселоне.

Вторая задача касается применения матриц Ляпунова для исследования устойчивости линейных систем с запаздыванием. Для её решения применяется недавно полученная теорема, дающая необходимое и достаточное условие устойчивости систем с запаздыванием, выраженное в терминах матрицы Ляпунова. Основная задача состоит в написании программы с акцентом на уменьшении времени вычисления.

Обзор литературы

В последнее время появляется всё больше работ, посвящённых теории и приложениям дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, среди них работа [1] занимает особое место. В этой книге можно найти хороший обзор по теории систем с запаздываниями. Более новые результаты, касающиеся исследования устойчивости и связанных с нею характеристик для систем с запаздыванием можно найти в [10],[2],[11]. В книге Харитонова В.Л. [10] вводится понятие матрицы Ляпунова для систем с запаздываниями и описываются различные задачи, решаемые с помощью этой матрицы. В частности, матрица Ляпунова позволяет построить функционал Ляпунова-Красовского полного типа, а с помощью функционала исследовать робастную устойчивость, строить экспоненциальные оценки решений, вычислять значения интегральных критериев качества. В статье [2] приводится необходимое и достаточное условие устойчивости линейных систем с запаздываниями, выраженное в терминах матрицы Ляпунова.

На сегодняшний день существует несколько методов построения матрицы Ляпунова. В случае кратных запаздываний задача построения матрицы Ляпунова может быть сведена к решению линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с линейными граничными условиями [5], [10]. Этот метод называется полуаналитическим.

Для общего случая существует ряд эвристических методов [6], [8], [9], [4] то есть численных методов без оценки точности приближения. Такие методы основаны на поиске решения в виде полиномиальной или кусочно-полиномиальной функции, коэффициенты которой находятся из условия минимизации невязки, которая характеризует точность выполнения свойств из определения матрицы Ляпунова.

Кроме того, недавно был представлен метод [3], позволяющий построить приближение матрицы Ляпунова с оценкой точности приближения. Но стоит отметить, что этот метод работает только при условии, что система экспоненциально устойчива. Следовательно, он не применим в случае, когда с помощью матрицы Ляпунова мы пытаемся исследовать устойчивость.

В выпускной квалификационной работе [16] было показано как задача построения матрицы Ляпунова может быть сведена к интегральному уравнению Фредгольма II рода. Полученное уравнение решалось численно методом квадратур. Стоит отметить, что попыток оценить точность приближения не предпринималось.

Глава 1. Матрица Ляпунова. Приближённое вычисление и оценка точности приближения

В данной главе сведём задачу построения матрицы Ляпунова системы дифференциально-разностных уравнений с некратными запаздываниями к решению системы интегральных уравнений Фредгольма II рода. Покажем, как устранить некоторые разрывы ядра интегрального уравнения и вычислим приближённо решения данного уравнения. Также выясним, возможно ли на практике построить оценку точности приближения, используя оценку погрешности квадратурной формулы методом Анселоне [15].

1.1. Система дифференциально-разностных уравнений

Рассмотрим систему дифференциально-разностных уравнений вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{j=0}^{m} A_j x(t-h_j), \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где $A_j,\ j = 0, 1, \ldots, m,$ - вещественные постоянные матрицы размерности $n \times n$, $0 = h_0 < h_1 < \ldots < h_m = H$ - некратные запаздывания, не зависящие от времени.

Пусть начальная функция $\varphi : [-H, 0] \to R^n$ принадлежит пространству кусочно-непрерывных вектор-функций $PC([-H, 0], R^n)$. Тогда $x(t, \varphi)$ решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию $x(\theta, \varphi) = \varphi(\theta)$, $\theta \in [-H, 0]$.

Определение 1 [1]. Матрица $K(t)$ размерности $n \times n$ называется фундаментальной матрицей системы (1), если она удовлетворяет матричному уравнению:

$$\frac{d}{dt}K(t) = \sum_{j=0}^{m} K(t-h_j) A_j, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

где $K(t) = 0_{n\times n}$ для $t < 0,\ K(0) = I$.

Теорема 1 [1]. Равенство вида

$$x(t,\varphi) = K(t)\varphi(0) + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{-h_j}^{0} K(t-\theta-h_j)A_j\varphi(\theta)d\theta, \quad t \geqslant 0, \tag{3}$$

удовлетворяющее начальной функции $\varphi \in PC([-H,0],R^n)$, называется формулой Коши для системы (1).

1.2. Матрица Ляпунова как решение интегрального уравнения

Определение 2 [10]. Матрица $U(\tau)$ называется матрицей Ляпунова системы (1), ассоциированной с симметрической матрицей W, если она непрерывна и удовлетворяет следующим трём свойствам:

1. динамическое свойство:

$$\frac{dU(\tau)}{d\tau} = \sum_{j=0}^{m} U(\tau-h_j)A_j, \quad \tau \geqslant 0, \tag{4}$$

2. свойство симметрии:

$$U(-\tau) = U^T(\tau), \quad \tau \geqslant 0, \tag{5}$$

3. алгебраическое свойство:

$$\sum_{j=0}^{m} \left[U(-h_j)A_j + A_j^T U(h_j)\right] = -W, \quad \tau \geqslant 0. \tag{6}$$

Определение 3 [10]. Будем говорить, что система (1) удовлетворяет условию Ляпунова, если спектр системы:

$$\Lambda = \left\{ s \mid \det\left(sI - \sum_{j=0}^{m} e^{-sh_j}A_j \right) = 0 \right\}, \tag{7}$$

не содержит в себе точки s_0 такие, что $-s_0$ также принадлежат спектру.

Теорема 2 (О существовании и единственности матрицы Ляпунова)[10]. Система (1) допускает единственную матрицу Ляпунова, ассоциированную с симметрической матрицей W тогда и только тогда, когда система (1) удовлетворяет условию Ляпунова.

С помощью трёх свойств (4)-(6) в выпускной квалификационной работе [16] была выведена формула, согласно которой задача построения матрицы Ляпунова сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма II рода.

Определение 4 [13]. Линейное интегральное уравнение с постоянным пределом интегрирования вида:

$$u(\tau) = g(\tau) + \lambda \int_0^H f(\tau, \eta) u(\eta) d(\eta), \quad \tau \in [0, H] \tag{8}$$

называется интегральным уравнением Фредгольма II рода. Здесь $u(\tau)-$ неизвестная функция, $f(\tau, \eta)-$ ядро интегрального уравнения, $g(\tau)-$ некоторая известная функция, которая называется свободным членом, $\lambda-$ параметр интегрального уравнения.

Далее будем полагать $\lambda = 1$.

Приведём общую схему вывода формулы.
Для $\xi \in (0, t)$, используя динамическое свойство (4), вычислим

$$\frac{\partial \left[U(\xi)K(t-\xi)\right]}{\partial \xi} = \sum_{j=0}^{m} U(\xi - h_j) A_j K(t-\xi) - U(\xi) \sum_{j=0}^{m} K(t - \xi - h_j) A_j =$$

$$= U(\xi) A_0 K(t-\xi) + \sum_{j=1}^{m} U(\xi - h_j) A_j K(t-\xi) - U(\xi) A_0 K(t-\xi) -$$

Проинтегрируем полученное равенство по ξ на $[0, t]$. После интегрирования, замены переменных и упрощения, получим:

$$U(t) = U(0)K(t) + \sum_{j=1}^{m} \int_{-h_j}^{0} U(\theta) A_j K(t - \theta - h_j) d\theta, \quad \text{где } \theta = \xi - h_j.$$

Применим к этому равенству свойство симметрии (5), получим:

$$U(t) = U(0)K(t) + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{0}^{h_j} U^T(\eta)A_jK(t+\eta-h_j)d\eta, \quad t \geqslant 0,\ \eta = -\theta. \quad (9)$$

Определение 5 [7]. Кронекеровское произведение двух матриц $A_{m\times n},\ B_{r\times s}$ может быть определено как блочные матрицы вида:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} b_{11}A & b_{21}A & \dots & b_{r1}A \\ b_{12}A & b_{22}A & \dots & b_{r2}A \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1s}A & b_{2s} & \dots & b_{rs}A \end{pmatrix},$$

$$A \overset{T}{\otimes} B = \begin{pmatrix} a_{11}b_1^T & a_{12}b_1^T & \dots & a_{1n}b_1^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_1^T & a_{m2}b_1^T & \dots & a_m^n b_1^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_r^T & a_{12}b_r^T & \vdots & a_{1n}b_r^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}br^T & a_{m2}b_r^T & \dots & a_{mn}b_r^T \end{pmatrix}.$$

Определение 6 [10]. $vec(Q) = q$ называется операцией векторизации матрицы Q, если $q \in R^{n^2}$ получается из $Q \in R^{n\times n}$ путём размещения последовательно столбцов матрицы Q один под другим. Данная операция удовлетворяет равенствам:

$$vec(AQB) = (A \otimes B)q,$$

$$vec(AQ^TB) = A \overset{T}{\otimes} B.$$

Для применения алгебраического свойства (6), векторизуем его и равенство (9). Тогда равенство (9) примет вид:

$$\widetilde{u}(t) = (I \otimes K(t))\widetilde{u}(0) + \sum_{j=1}^{m} \int_{0}^{h_j} (I \overset{T}{\otimes} A_j K(t+\eta-h_j))\widetilde{u}(\eta) d\eta, \quad t \geqslant 0 \tag{10}$$

Здесь и далее $\widetilde{u} = vec(U)$. Свойство (6) будет представлено в виде:

$$\sum_{j=0}^{m} \left[(I \overset{T}{\otimes} A_j)\widetilde{u}(h_j) + (A_j^T \otimes I)\widetilde{u}(h_j) \right] = -\widetilde{\omega}. \tag{11}$$

В уравнений (11) $\widetilde{u}(h_j), \widetilde{u}(0)-$ неизвестные. По формуле (10) можно вычислить $\widetilde{u}(h_j)$. Далее из свойства (11) можно выразить $\widetilde{u}(0)$ и подставить в (10). Таким образом, получим систему интегральных уравнений Фредгольма II рода:

$$\widetilde{u}(\tau) = G(\tau) + \int_{0}^{H} F(\tau, \eta)\widetilde{u}(\eta) d\eta, \quad \tau \in [0, H].$$

Далее будем рассматривать скалярный случай. На примере скалярного уравнения мы сможем отработать все сложности, которые могут возникнуть при приближённом вычислении матрицы Ляпунова и проверить практическую применимость метода Анселоне для оценки точности вычисления.

$$u(\tau) = g(\tau) + \int_{0}^{H} f(\tau, \eta) u(\eta) d\eta, \quad \tau \in [0, H], \tag{12}$$

где

$$g(\tau) = -\frac{k(\tau)\omega/2}{a_0 + \sum\limits_{i=1}^{m} a_i k(h_i)}, \tag{13}$$

$$f(\tau, \eta) = \sum_{j=1}^{m} a_j \left[k(\tau+\eta-h_j) - \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} a_i k(\tau) k(h_i+\eta-h_j)}{a_0 + \sum\limits_{i=1}^{m} a_i k(h_i)} \right] \times \tag{14}$$
$$\times\, \chi(h_j - \eta).$$

Здесь и далее $\chi(t)-$ функция Хевисайда:

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad .$$

1.3. Устранение диагональных разрывов ядра уравнения

Ядро (14) имеет разрывы, которые образуются благодаря членам $k(\tau + \eta - h_j)$, $k(h_i + \eta - h_j)$ и функции Хевисайда $\chi(h_j - \eta)$, а в частности, аргументам данных функций, принимающих при определённых τ, η нулевые значения. Здесь возможны разрывы двух видов:

1. горизонтальные разрывы:
   - от функции $\chi(h_j - \eta):\ h_j - \eta = 0 \Rightarrow \eta = h_j$
   - от функции $k(h_i + \eta - h_j):\ h_i + \eta - h_j = 0 \Rightarrow \eta = h_j - h_i$
2. диагональные разрывы:
   - от функции $k(\tau + \eta - h_j):\ \tau + \eta - h_j = 0 \Rightarrow \eta = h_j - \tau$.

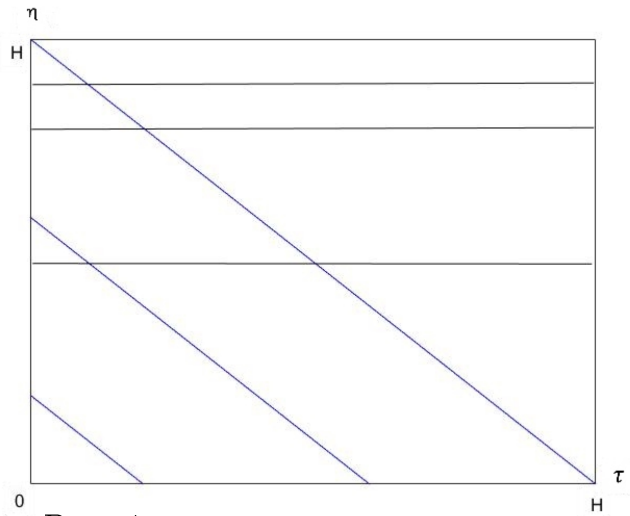

Рис. 1: разрывы на плоскости $O\tau\eta$

На рисунке 1 показаны частные случаи горизонтальных и диагональных разрывов на плоскости $O\tau\eta$. Такие разрывы усложняют процесс построения приближённого решения интегрального уравнения, поэтому попробуем их устранить. Для этого каждое слагаемое уравнения (12) умножим на функцию $f(t, \tau)$:

$$u(\tau)f(t,\tau) = g(\tau)f(t,\tau) + f(t,\tau)\int\limits_0^H f(\tau,\eta)u(\eta)d\eta.$$

Проинтегрируем полученное равенство в пределах от 0 до H :

$$\int\limits_0^H u(\tau)f(t,\tau)d\tau = \int\limits_0^H g(\tau)f(t,\tau)d\tau + \int\limits_0^H \left(\int\limits_0^H f(t,\tau)f(\tau,\eta)d\tau\right)u(\eta)d\eta.$$

Обозначим:

$$\overline{g}(t) = g(t) + \int\limits_0^H g(\tau)f(t,\tau)d\tau, \qquad \overline{f}(t,\eta) = \int\limits_0^H f(t,\tau)f(\tau,\eta)d\tau.$$

Таким образом, получаем новое интегральное уравнение:

$$u(t) = \overline{g}(t) + \int\limits_0^H \overline{f}(t,\eta)u(\eta)d\eta. \tag{15}$$

Используя теорему Лебега о мажорируемой сходимости, можно показать, что полученное новое ядро $\overline{f}(t,\eta)$ не имеет диагональных разрывов, а горизонтальные разрывы остаются прежними. Это существенно упрощает применение метода Анселоне оценки погрешности. Нам всё равно придётся немного модифицировать данный метод, но модификация будет небольшой.

1.4. Метод квадратур для построения приближённого решения интегрального уравнения.

Построим численное решение интегрального уравнения Фредгольма II рода (15) методом квадратур [14]. На отрезке $[0, H]$ возьмём сетку с узлами $t_1, t_2, \ldots t_n$. Тогда уравнение (15) в узлах сетки будет выглядеть следующим образом:

$$u(t_k)=\overline{g}(t_k)+\int\limits_0^H \overline{f}(t_k,\eta)u(\eta)d\eta, \quad k=1,2,\ldots,n.$$

Аппроксимируем полученные интегралы конечными суммами с помощью квадратурной формулы:

$$u_n(t_k)=g_k+\sum_{l=1}^{n} A_l f_{kl} u_n(t_l), \quad k=1,2,\ldots,n.$$

Здесь $g_k = \overline{g}(t_k)$, $f_{kl} = \overline{f}(t_k,t_l), u_n$ - приближение к искомой функции u, A_l- веса квадратурной формулы.

Решая полученную систему алгебраических уравнений, найдём приближённые значения в узлах сетки. Так построим приближённое решение на всём отрезке $[0,H]$.

Будем аппроксимировать интегралы с помощью формулы трапеций. Система уравнений запишется в виде:

$$u_n(t_k)=g_k+\sum_{l=1}^{n} \omega_l f_{kl} u_n(t_l), \quad k=1,2,\ldots,n,$$

где $\omega_l=d/2,\ l=1,n,\ \omega_l=d,\ l=\overline{2,(n-1)},\ d-$ шаг равномерной сетки.

1.5. Оценка точности приближения методом Анселоне.

Найдём оценку погрешности квадратурного метода. Воспользуемся методом Анселоне [15]. Однако метод в [15] описан для ядер интегральных уравнений Фредгольма II рода, которые являются непрерывными функциями. Поэтому произведём ряд изменений для случая функций с разрывами.

Введём два оператора:

$$Ku(t)=\int\limits_0^H \overline{f}(t,\eta)u(\eta)d\eta, \tag{16}$$

$$K_n u(t) = \sum_{l=1}^{n} \omega_l f(t, t_l) u_n(t_l). \tag{17}$$

Тогда интегральное уравнение (15) будет иметь вид:

$$u(t) = \overline{g}(t) + Ku(t).$$

А приближённое решение в операторном виде запишется как:

$$u_n(t) = g + K_n u(t).$$

Теорема 3 (Анселоне)[15]. Пусть $(I - K_n)^{-1}$ - ограниченные операторы, $\Gamma_n = \|I - K_n\|^{-1} \| (K_n - K) K\| < 1$ при некотором n, тогда интегральное уравнение $\overline{u} = Ku + \overline{g}$ имеет единственное решение при любом $\overline{g}$ и выполняется неравенство:

$$\|u_n - \overline{u}\| \leqslant (1 - \Gamma_n)^{-1} \left[\|(I - K_n)^{-1}\| \|K_n g - Kg\| + \Gamma_n \|(I - K_n)^{-1} g\| \right]. \tag{18}$$

Здесь будем использовать равномерную норму:

$$\|F\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} \|F(x)\|.$$

Построим оценку точности приближения на основании теоремы Анселоне. Для этого детально рассмотрим неравенство (18). Выражение в правой части неравенства - это есть искомая оценка. Поэтому необходимо вычислить значения четырёх норм: $\|(I - K_n)^{-1}\|$, $\|(K_n - K)K\|$, $\|(K_n - K)g\|$, $\|(I - K_n)^{-1} g\|$, стоящих в правой части этого неравенства.

1. $\|(I - K_n)^{-1}\| = \sigma_n$,

где $(I - K_n)-$ матрица, образованная из коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений. Последняя, в свою очередь, получена в результате применения метода квадратур. Значение $\|(I - K_n)^{-1}\|$ вычислим как наибольшее сингулярное число σ_n.

2. $\|(I - K_n)^{-1} g\| = \|u_n\| = \sup_{t \in [0,H]} \|u_n(t)\|$,

где u_n- приближённое решение интегрального уравнения.

До того, как покажем способ вычисления оставшихся двух норм, приведём лемму и ещё одну теорему из [15].

Лемма 1 [15]. Пусть Q_n соответствует правилу трапеций. Если F удовлетворяет условию Липшица

$$|F(x) - F(x')| \leqslant \widetilde{M}|x - x'|, \quad x, x' \in [a, b], \tag{19a}$$

то

$$|Q_n(F) - Q(F)| \leqslant \widetilde{M}(b - a)^2/4n, \tag{19b}$$

где $Q(F) = \int\limits_a^b F(x)dx$, $Q_n(F) = \sum\limits_{l=1}^{n} \omega_l F(x_l)$.

Данная лемма сформулирована для непрерывных функций. Если функция $F(x)$ имеет $p-$ разрывов, тогда неравенства (19a), (19b) будут иметь вид:

$$|F(x) - F(x')| \leqslant \widetilde{M}_i|x - x'|, \quad x, x' \in [\widetilde{a}_{i-1}, \widetilde{a}_i], \quad i = \overline{1, p}, \tag{20a}$$

$$|Q_n(F) - Q(F)| \leqslant \sum_{i=1}^{p} \frac{\widetilde{M}_i(\widetilde{a}_i - \widetilde{a}_{i-1})^2}{4n_i}. \tag{20b}$$

Теорема 4 [15]. Предположим, что функции g, f удовлетворяют условию Липшица:

$$|g(t) - g(t')| \leqslant M|t - t'|, \quad t, t' \in [0, H],$$

$$|f(t, \eta) - f(t', \eta')| \leqslant N(|t - t'| + |\eta - \eta'|), \quad t, t', \eta, \eta' \in [0, H].$$

Если используется правило трапеций, то отклонение численного решения u_n от решения u уравнения (15) удовлетворяет неравенству (18), где

$$\|(K_n - K)g\| \leqslant (M\|f\| + N\|g\|)/4n, \tag{21a}$$

$$\|(K_n - K)K_n\| \leqslant N\|f\|/2n, \tag{21b}$$

где M, $N-$ константы Липшица.

Аналогично лемме 1 теорема 4 сформулирована для случая непрерывных функций g и f. Поэтому необходимо модифицировать оценки в правых частях неравенств (21a), (21b), учитывя разрывы функции f.

$$3.\ \|(K_n-K)g\| = \sup_{t\in[0,H]}\left|\int\limits_0^H \overline{f}(t,\eta)\overline{g}(\eta)d\eta - \sum_{l=1}^{n}\omega_l f(t,t_l)g(t_l)\right| =$$

$$= \sup_{t\in[0,H]}\left|\sum_{i=1}^{p}\left(\int\limits_{\widetilde{t}_{i-1}}^{\widetilde{t}_i}\overline{f}(t,\eta)\overline{g}(\eta)d\eta\right) - \sum_{i=1}^{p-1}\left(\sum_{l=1}^{n_i}\omega_l f(t,t_l)g(t_l)\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\in[0,H]}\left|\int\limits_{\widetilde{t}_0}^{\widetilde{t}_1}\overline{f}(t,\eta)\overline{g}(\eta)d\eta - \sum_{l=1}^{n_1}\omega_l f(t,t_l)g(t_l)\right| +$$

$$+ \sup_{t\in[0,H]}\left|\int\limits_{\widetilde{t}_1}^{\widetilde{t}_2}\overline{f}(t,\eta)\overline{g}(\eta)d\eta - \sum_{l=1}^{n_2}\omega_l f(t,t_l)g(t_l)\right| + \ldots +$$

$$+ \sup_{t\in[0,H]}\left|\int\limits_{\widetilde{t}_{p-1}}^{\widetilde{t}_p}\overline{f}(t,\eta)\overline{g}(\eta)d\eta - \sum_{l=1}^{n_p}\omega_l f(t,t_l)g(t_l)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{p}\left(\frac{M\|f\|+N_i\|g\|}{4n_i}(\widetilde{t}_i-\widetilde{t}_{i-1})^2\right).$$

Здесь $p-$ количество горизонтальных разрывов функции $\overline{f}(t,\eta)$, $0=\widetilde{t}_0<$ $<\widetilde{t}_1<\ldots<\widetilde{t}_p=H, \widetilde{t}_i-$ точки, в которых функция $\overline{f}(t,\eta)$ терпит разрывы, n_i- количество узлов в сетке на $[\widetilde{t}_{i-1},\widetilde{t}_i],\ i=\overline{1,p}$.

4. Пусть $f_2(t,s)=\int\limits_0^H\overline{f}(t,\eta)\overline{f}(\eta,s)d\eta = Q(f_t,f^s)$,

$$f_{2n}(t,s)=\sum_{l=1}^{n}\omega_l f(t,t_l)f(t_l,s)=Q_n(f_t,f^s).$$

$$\|(K_n-K)K_n\| \leqslant \sup_{t\in[0,H]} \int\limits_0^H |f_2(t,s)-f_{2n}(t,s)|\,ds =$$

$$= \sup_{t\in[0,H]} \left(\sum_{i=1}^{p} \left(\int\limits_{\widetilde{t}_{i-1}}^{\widetilde{t}_i} |f_2(t,s)-f_{2n}(t,s)|\,ds \right) \right) =$$

$$= \sup_{t\in[0,H]} \left(\sum_{i=1}^{p} \left(\int\limits_{\widetilde{t}_{i-1}}^{\widetilde{t}_i} |Q(f_t,f^s)-Q_n(f_t,f^s)|\,ds \right) \right) \leqslant \langle\text{по лемме 1}\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\in[0,H]} \left(\sum_{i=1}^{p} \left(\int\limits_{\widetilde{t}_{i-1}}^{\widetilde{t}_i} \frac{L_i}{4n_i}(\widetilde{t}_i-\widetilde{t}_{i-1})^2 ds \right) \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \frac{L_i}{4n_i}(\widetilde{t}_i-\widetilde{t}_{i-1})^3.$$

Теперь покажем вычисление константы Липшица L_1.

Пусть $\eta,\ \eta' \in [0,\widetilde{t}_1]$, тогда:

$$|f(t,\eta)f(\eta,s)-f(t,\eta')f(\eta',s)| \leqslant |f(t,\eta)||f(\eta,s)-f(\eta',s)|+$$

$$+|f(\eta',s)||f(t,\eta)-f(t,\eta')| \leqslant \sup_{t\in[0,H],\eta\in[0,\widetilde{t}_1]} |f(t,\eta)| \sup_{s\in[0,H],\eta\in[0,\widetilde{t}_1]} \left|\frac{\partial f(\eta,s)}{\partial\eta}\right| \times$$

$$\times|\eta-\eta'| + \sup_{s\in[0,H],\eta\in[0,\widetilde{t}_1]} |f(\eta,s)| \sup_{t\in[0,H],\eta\in[0,\widetilde{t}_1]} \left|\frac{\partial f(t,\eta)}{\partial\eta}\right| |\eta-\eta'|.$$

Константы $L_i,\ i=\overline{2,p}$ вычисляется аналогично.

1.6. Реализация в системе Matlab.

Пример 1

Рассмотрим уравнение вида:

$$\dot{x}(t) = -x(t) - 2x(t-1) - 3x(t-\sqrt{2}).$$

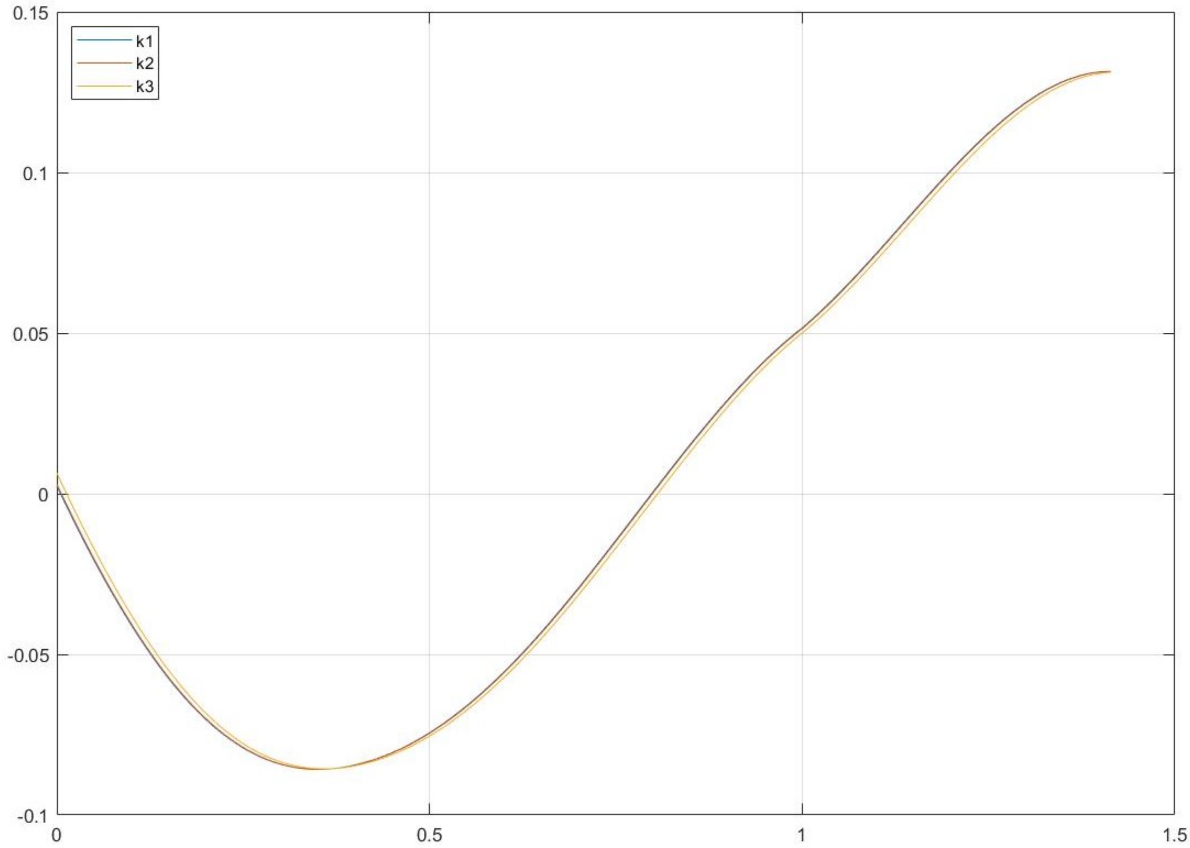

Рис. 2: Метод квадратур

С помощью квадратурной формулы трапеций, описанной в параграфе 1.4, построим приближённые решения интегрального уравнения (12) в Matlab. На рисунке 2 показаны графики трёх приближённых решений, вычисленных в зависимости от количества узлов t_i в сетке на отрезке $[0, H]$ и длины шага d. График k1 имеет 142 узла, график k2 - 203 узла и k3 имеет 708 узлов в сетке на $[0, H]$. Графики приближённых решений указывают на достаточно хорошее приближение к точному решению интегрального уравнения.

При вычислении оценки точности приближения возникли трудности, связанные с временем выполнения алгоритма в Matlab. Из-за больших значений констант Липшица количество узлов, в которых нужно посчитать значения функций, сильно увеличивается. Ниже приведена таблица, где показана зависимость гарантированной точности приближения ϵ и количества узлов n сетки на отрезке $[0, H]$.

ϵ	n
0.1	13 267 100
0.01	110 349 526
0.001	1 097 500 000

Таблица 1:

Как видно из таблицы, метод Анселоне не достаточно эффективен на практике. Достижение заданной точности трудновыполнимо, так как размерность линейных алгебраических систем, возникающих при использовании квадратурных формул слишком велика.

Мы проверили применимость метода Анселоне для оценки точности приближения в одном конкретном примере, однако для уравнений с меньшими коэффициентами или с меньшей величиной запаздываний значения n, необходимые для достижения заданной точности, могут быть существенно меньше. Оценка получилась столь консервативной из-за большой величины константы Липшица для ядра интегрального оператора, что мы связываем с произведённой операцией по устранению разрывов в ядре. В будущем есть смысл попытаться модифицировать метод Анселоне так, чтобы он не требовал устранения диагональных разрывов.

Глава 2. Применение матриц Ляпунова для исследования устойчивости систем с запаздыванием

В текущей главе приведём пример использования матрицы Ляпунова для исследования дифференциальной системы с запаздыванием. А точнее, исследуем систему на устойчивость с помощью конечного критерия устойчивости из [2].

2.1. Критерий устойчивости

Рассмотрим частный вид системы (1), случай с одним запаздыванием:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_0 x(t) + A_1 x(t-h), \quad t \geqslant 0, \tag{22}$$

Определение 7 [2]. Система (22) называется экспоненциально устойчивой, если $\exists\ \gamma \geqslant 1, \sigma > 0 : \forall\ x(t,\varphi) :$

$$\| x(t,\varphi) \| \leqslant \gamma e^{-\sigma t} \| \varphi \|_h, \quad t \geqslant 0, \tag{23}$$

где $\| \varphi \|_h = \underset{\theta \in [-h,0]}{sup} \| \varphi(\theta) \|$.

Сформулируем критерий устойчивости для системы (22):

Теорема 5 [2]. Возьмём $\alpha_1 \in (0, \alpha_1^*)$, $\alpha = \alpha_2/\alpha_1$.
Для того, чтобы система (22) была экспоненциально устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы :
1. выполнялось условие Ляпунова (7),
2. матрица $K_r - \alpha_1 A_r$ была положительно определена,
где $r = 1 + \left\lceil h e^{L_1 h}(M_1 + L_1)\left(\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha+1)}\right) - hL_1 \right\rceil$.

Здесь $K_r = \left[U\left(\frac{j-i}{r-1}h\right)\right]_{i,j=1}^{r} > 0$, $A_r = \left[K^T(\tau_i)K(\tau_j)\right]_{i,j=1}^{r}$, где $U-$ матрица Ляпунова, $K-$ фундаментальная матрица для системы (22).

Вычисление r
1. $L_1\ : \| K'(t) \| \leqslant L_1,\ t \in (0,h)$.

Построим матрицу $K^{'}(t)$ на $(0,h)$ методом шагов, опираясь при этом на определение фундаментальной матрицы (2). При $t \in [0,h)$ матрица $K(t-h) = 0$ по определению. Подставив $K(t-h)$ в равенство (2), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений: $K^{'}(t) = A_0 K(t)$. Как известно, решение полученной системы выглядит следующим образом: $K(t) = e^{A_0 t} C$. Произвольная постоянная $C = 1$, что следует из условия $K(0) = I$. Значит, $K^{'}(t) = A_0 e^{A_0 t}$. Норму матрицы вычислим как наибольшее сингулярное число матрицы.

2. $M_1 = \parallel A_0 \parallel + \parallel A_1 \parallel$.

3. α_2 найдём с помощью оценки функционала $|v_1(\varphi)| \leqslant \alpha_2 \parallel \varphi \parallel_h^2$ [2]. Воспользуемся формулой упрощённого функционала и свойством модуля :

$$|v_1(\varphi)| \leqslant \left|\varphi^T(0)U(0)\varphi(0)\right| + \left|2\varphi^T(0)\int_{-h}^{0} U(-s-h)A_1\varphi(s)ds\right| +$$
$$+ \left|\int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0} \varphi^T(s_1)A_1^T U(s_1-s_2)A_1\varphi(s_2)ds_2ds_1\right| + \left|\int_{-h}^{0} \varphi^T(s)W\varphi(s)ds\right| \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_2 \parallel \varphi \parallel_h^2 .$$

Под знаками интегралов в неравенстве выше останутся только матрицы Ляпунова. Начальные вектор-функции и постоянные матрицы вынесутся за знак. Чтобы избавиться от интегралов окончательно, обратимся к необходимому условию экспоненциальной устойчивости системы:
$\parallel U(0) \parallel = \max\limits_{t\in[-h,h]} \parallel U(t) \parallel$.

Теперь можем вычислить α_2. В результате, получим неравенство:
$\alpha_2 = \parallel U(0) \parallel (1 + 2 \parallel A_1 \parallel h + \parallel A_1 \parallel^2 h^2) + \parallel W \parallel h$,
где $W-$ассоциированная с матрицей Ляпунова, симметрическая матрица.

4. $\alpha_1^* = \beta/2$,
где $\beta > 0$: матрица $P(\beta)$ положительно полуопределена.

$$P(\beta) = \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} A_0^T + A_0 & A_1 \\ A_1^T & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим все значения β из уравнения :

$$det\,(P(\beta)) = \left| \begin{pmatrix} W & 0 \\ \\ 0 & W \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} A_0^T + A_0 & A_1 \\ \\ A_1^T & 0 \end{pmatrix} \right| = 0.$$

Выберем из полученных значений наименьшее положительное.

5. $r = 1 + \left\lceil he^{L_1 h}(M_1 + L_1)\left(\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha+1)}\right) - hL_1 \right\rceil.$

2.2. Реализация в системе Matlab

Приведём пример системы из работы [12] и исследуем её на устойчивость с помощью критерия, описанного в параграфе 2.1.

Пример 2

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \\ -b & -a \end{pmatrix} x(t-h),$$

где a и b принимали значения от -0.5 до 2 с шагом 0.1, также запаздывание h=1, а связанная с матрицей Ляпунова симметрическая матрица

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

На рисунке 3 изображена область устойчивости исследуемой системы.

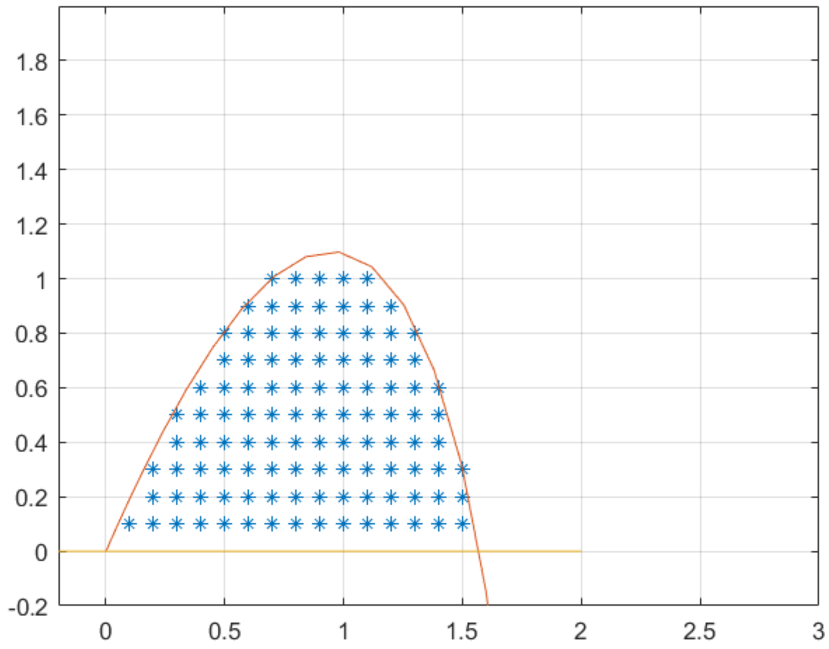

Рис. 3: Область устойчивости

Однако, реализовав данный алгоритм проверки на устойчивость системы (22),мы столкнулись с такой проблемой, что время выполнения программы из-за достаточно больших r, в некоторых системах больше 1000. В результате оптимизации некоторых блоков программы получилось уменьшить время выполнения более чем в 4 раза. Опишем детально:

1. Как известно, для построения матрицы K_r требуется вычислить матрицу Ляпунова в различных точках. Изначально для этого использовался цикл for, в котором вычислялась каждая точка и, соответственно, матрица Ляпунова в каждой точке вычислялась многократно, что не совсем оптимально. Тогда мы стали заполнять матрицу K_r по диагоналям, на которых стоят одни и те же значения матрицы Ляпунова. В матрице K_r с помощью цикла заполнили всё, что выше главной диагонали и, так как матрица K_r симметрична относильно главной диагонали, нижнюю часть была заполнена как $K_r = K_r + K_r^T$. В конце была отдельным циклом заполнена главная диагональ. Данные манипуляции значительно уменьшили время выполнения блока программы.

2. Матрица A_r состоит из блоков произведений фундаментальной матрицы в различных точках от 0 до h. В первые попытки реализации на ПК данной подзадачи был построен цикл, как и в случае матрицы K_r.

Но, посмотрев внимательнее на матрицу, вспомнили, что A_r это есть не что иное, как произведение следующих матриц:

$$A_r = \begin{pmatrix} K^T(0) \\ \\ K^T(\frac{1}{r-1}h) \\ \\ K^T(\frac{2}{r-1}h) \\ \\ \vdots \\ \\ K^T(h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K(0) & K(\frac{1}{r-1}h) & K(\frac{2}{r-1}h) & \ldots & K(h) \end{pmatrix}.$$

В итоге в цикле была посчитана фундаментальная матрица в каждой точке, а матрица A_r заполнена как произведение матриц.

3. Ещё одна трудность возникла при проверке положительной определённости итоговой матрицы $K_r - \alpha_1 A_r$. На начальном этапе реализации алгоритма рассматривалось два пути проверки. Это критерий Сильвестра и вычисление собственных чисел, что очень сильно увеличивало время выполнения программы. В конечном итоге был использован метод Холецкого, который в системе Matlab есть как встроенная функция, что позволило говорить о секундном выполнении этой подпрограммы.

4. Выяснив, что число r достаточно велико, с целью ускорения работы программы мы воспользовались необходимым условием экспоненциальной устойчивости системы, а именно, организовали проверку на положительную определённость матрицы K_2 , до вычисления r, что позволило отсечь некоторые неустойчивые системы. Кроме того, проверка данного условия гарантирует выполнение условия $\parallel U(0) \parallel = \max\limits_{t \in [-h,h]} \parallel U(t) \parallel$, которое используется нами при вычислении α_2. Ниже представлен вид матрицы K_2 :

$$K_2 = \begin{pmatrix} U(0) & U(\tau) \\ \\ U^T(\tau) & U(0) \end{pmatrix}, \quad \tau \in (0, h].$$

Выводы

В данной работе достигнуты следующие результаты:

1. Был построен метод приближённого вычисления матрицы Ляпунова для дифференциально-разностных уравнений с некратными запаздываниями. Также получили оценку точности приближения, которая была построена методом Анселоне. Отметим, что в данном методе были произведены небольшие изменения для случая непрерывных функций. Кроме того, были выявлены недостатки этого метода при применении на практике.

2. Мы рассмотрели пример использования матриц Ляпунова для исследования устойчивости линейных систем с запаздыванием. В частности, была применена недавно полученная теорема, дающая необходимое и достаточное условие устойчивости систем с запаздыванием. На основании данной теоремы был реализован на практике алгоритм, с помощью которого можно определить область устойчивости линейных систем с запаздыванием. Также были вычислены возможные значения r для различных систем, которые оказались достаточно велики, что не лучшим образом влияет на время выполнение программы. После оптимизации некоторых блоков программы с целью уменьшения времени вычислений появилась возможность проверять критерий даже при больших r.

Заключение

В настоящей работе построен метод приближённого вычисления матрицы Ляпунова для дифференциально-разностных систем с запаздывающим аргументом, что позволяет исследовать системы дифференциальных уравнений с запаздываниями, и была построена оценка точности приближения данного эвристического метода. При этом, не накладывалось условие экспоненциальной устойчивости линейных дифференциально-разностных систем с запаздывающим аргументом.

Исследована недавно полученная теорема о построении области устойчивости линейных систем с запаздывающим аргументом. На практике был реализован алгоритм, основанный на данной теореме, и получены конкретные значения. В результате чего, можно понять, что можно улучшить в дальнейшем в данной задаче. Например, уменьшить значения размерности матрицы, построения которой требует данный алгоритм проверки на устойчивость системы с запаздываниями. Что позволит затрачивать значительно меньше времени на выполнение программы.

Список литературы

1. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.

2. Egorov A.V., A Finite Necessary and Sufficient Stability Condition for Linear Retarded Type Systems // Труды конференции "IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)", Лас Вегас, США. 2016. с. 3155-3160.

3. Egorov A.V., Kharitonov V.L. Approximation of delay Lyapunov matrices // International Journal of Control, 2018. Vol. с. 2588-2596.

4. Егоров А.В., Вычисление матриц Ляпунова для систем с запаздыванием // XII Всероссийское совещание по проблемам управления, Москва. 16-19 июня 2014. с. 1292-1303.

5. Garcia-Lozano H., Kharitonov V.L. Lyapunov matrices for time delay system with commensurate delays // 2nd Symposium on System, Structure and Control, Oaxaca, 2004. с. 102-106.

6. Garcia-Lozano H., Kharitonov V.L. Numerical computation of time delay Lyapunov matrices // Department of Automatic Control, Mexico. 2006.

7. Graham A. Kronecker Products and Matrix Calculus with Applications. Ellis Horwood, Chichester, UK, 1981. 21-30 p.

8. Huesca E. , Mondie S. , Santos O. (2009). Polynomial approximations of the Lyapunov matrix of a class of time delay systems // In E. Petre (Ed.), Proceedings of the 8th IFAC workshop on time delay systems, Sinaia, Romania, 1–3 September 2009. с. 261–266. IFAC.

9. Jarlebring E., Vanbiervliet J., Michiels W. (2011). Characterizing and computing the $\mathcal{H}_2$ norm of time-delay systems by solving the delay Lyapunov equation // IEEE Transactions on Automatic Control, 56 (4).

10. Kharitonov V.L. Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices. Birkhauser, Basel, 2013.

11. Kharitonov V.L., Zhabko A.P. Lyapunov-Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems // Automatica 39, 2003. c. 15-20.

12. Mondie S., Egorov A.V. Some necessary conditions for the exponential stability of one delay systems// Труды конференции "8th International Conference on Electrical Engineering", 2011. c. 106.

13. Манжиров А.В., Полянин А.Д. Справочник по интегральным уравнениям. М.: Факториал Пресс, 2000.

14. Олемской И.В., Численные методы. Часть II. Учебное пособие. СПб, 2012.

15. Хатсон В., Пим Дж. Приложения функционального анализа и теории операторов. М.: Мир, 1983. 215-224 с.

16. Чернышева Л. Выпускная квалификационная работа. Матрица Ляпунова как решение уравнения Фредгольма. СПб, 2016. 10-16 с.